Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΙΑ ΚΥΡΤΑ ΣΩΜΑΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΠΑΟΥΡΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1999

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Απρίλιο του 1999. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Παπαδημητράκης και Σ. Παπαδοπούλου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θέμα αυτής της εργασίας είναι η εικασία του υπερεπιπέδου για κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ένας από τους πολλούς ισοδύναμους τρόπους με τους οποίους μπορεί να διατυπωθεί είναι ο εξής:

Εικασία: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει όγκο 1, υπάρχει $(n-1)$-διάστατη τομή του K που περνάει από το κέντρο βάρους του και έχει $(n-1)$-όγκο μεγαλύτερο από c.

Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για το πρόβλημα έχει αποδειχθεί από τον J. Bourgain ([Bou1], 1990): Αν το K έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων o και όγκο 1, τότε υπάρχει $(n-1)$-διάστατη κεντρική τομή του K με όγκο μεγαλύτερο από $(c\sqrt[4]{n}\log n)^{-1}$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη του θεωρήματος του Bourgain απαιτούνται πολλά από τα βασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα:

1. Η ανισότητα Brunn-Minkowski και εφαρμογές της στην μελέτη των τομών ενός κυρτού σώματος (Κεφάλαιο 1).
2. Η ανισότητα του Pisier για τη νόρμα της Rademacher προβολής. Συνέπεια: κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα έχει γραμμική εικόνα όγκου 1 με μέσο πλάτος μικρότερο από $c\sqrt{n}\log n$ (Κεφάλαιο 2).
3. Η ανισότητα του Sudakov για τους αριθμούς κάλυψης ενός σώματος από μπάλες δεδομένης ακτίνας, και η διάσπαση Dudley-Fernique (Κεφάλαιο 3).

Κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το o έχει γραμμική εικόνα TK όγκου 1 με την ιδιότητα

$$\int_{TK} \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα θ, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Η εικόνα TK είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς, και λέγεται ισοτροπική θέση του K. Η σταθερά L_K είναι μονοσήμαντα ορισμένη για την γραμμική κλάση του K, και λέγεται ισοτροπική σταθερά του K. Στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνύουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη απόλυτης σταθεράς $C > 0$ με την ιδιότητα: $L_K \leq C$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το o.

Με μικρές τροποποιήσεις του επιχειρήματος του Bourgain δείχνουμε ότι $L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το o. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύει την εκτίμηση του Bourgain για την εικασία του υπερεπιπέδου σε μη-συμμετρικά κυρτά σώματα. Το προηγούμενο γνωστό αποτέλεσμα ήταν η ανισότητα $L_K \leq c\sqrt{n}$ (βλέπε S. Dar, [D1], [D2]).

Τέλος, αποδεικνύουμε την ισοδυναμία της εικασίας του υπερεπιπέδου με τις ασυμπτωτικές εκδοχές κλασικών προβλημάτων της Κυρτής Γεωμετρίας, όπως το πρόβλημα των Busemann και Petty, και το πρόβλημα του Sylvester.

1. Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BRUNN-MINKOWSKI

1.1 Κυρτά σώματα.

Ενα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό σώμα* αν έχει μη κενό εσωτερικό. Θα λέμε οτι το K είναι *συμμετρικό*, αν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων o.

1. Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K := \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$\|x\| = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ με ισότητα μόνο αν $x = o$.
(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.
(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

είναι δηλαδή *νόρμα* στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε *η μοναδιαία του μπάλα* $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Από τον ορισμό της νόρμας έπεται άμεσα οτι αν K και L είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $K \subseteq L$ αν και μόνο αν $\|x\|_L \leq \|x\|_K$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, $\|x\|_{rK} = \frac{1}{r}\|x\|_K$ γιά κάθε $r > 0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Εστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα όπως παραπάνω. Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός (θα γράφουμε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), ορίζουμε την νόρμα $\|T : X \to Y\|$ του T ως *τελεστή* από τον X στον Y ως εξής:

$$\|T : X \to Y\| = \max\{\|T(x)\|_Y : x \in K_X\}.$$

Ισοδύναμα, η νόρμα του T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός ρ γιά τον οποίο

$$T(K_X) \subseteq \rho K_Y.$$

Ο $T : X \to Y$ λέγεται ισομορφισμός αν είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή, αν $T \in GL_n$).

Η απόσταση Banach-Mazur των X και Y είναι ο αριθμός

$$d(X, Y) = \min\{\|T\| \, \|T^{-1}\| : T \in GL_n\},$$

και μετράει *πόσο καλά ισόμορφοι* είναι οι X και Y. Μια ισοδύναμη γεωμετρική ερμηνεία είναι η εξής: η $d(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $\rho \geq 1$ για τον οποίο υπάρχει $T \in GL_n$ που ικανοποιεί την $K_Y \subseteq T(K_X) \subseteq \rho K_Y$. Εύκολα βλέπουμε οτι $d(X, Y) = d(Y, X)$ για κάθε X και Y (η d είναι συμμετρική), και $d(X, Y) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $T : X \to Y$ ισομετρία.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}_n$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας n-διάστατων χώρων με νόρμα, όπου ο X είναι ισοδύναμος με τον X' αν και μόνο αν οι X και X' είναι ισομετρικοί. Ο $\mathcal{B}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, με μετρική την $\log d$: η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της

$$d(X,Y) \leq d(X,Z)\, d(Z,Y)$$

που επαληθεύεται εύκολα για κάθε τριάδα $X, Y, Z \in \mathcal{B}_n$.

Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n, \log d)$ συνήθως λέγεται Banach-Mazur compactum ή Minkowski compactum. Αντί για την $\log d$, θα χρησιμοποιούμε την d σαν μια πολλαπλασιαστική απόσταση στον $\mathcal{B}_n$.

3. Υποθέτουμε οτι ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle \cdot, \cdot \rangle$, και συμβολίζουμε την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα με $|\cdot|$. Γράφουμε D_n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος της D_n θα συμβολίζεται με ω_n. Είναι $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$. Πιό γενικά, αν με ℓ_p^n συμβολίσουμε τον χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$, όπου $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$, τότε η μοναδιαία μπάλα B_p^n του ℓ_p^n έχει όγκο

$$|B_p^n| = \frac{[2\Gamma(1+\frac{1}{p})]^n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}.$$

(για την απόδειξη, βλέπε [Pi1]). Γράφουμε σ για το μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1} που είναι αναλλοίωτο ως προς τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$. Η επιφάνεια της S^{n-1} είναι ίση με $n\omega_n$.

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $o \in \mathrm{int}(K)$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{o\} \to \mathbb{R}^+$ του K ορίζεται από την

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}.$$

Παρατηρήστε οτι, για κάθε $x \neq o$

$$\rho_K(x) = \|x\|^{-1}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}.$$

Η σχέση ανάμεσα στην ακτινική συνάρτηση ρ_K και την συνάρτηση στήριξης h_K γιά δοσμένη διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι $\rho_K(\theta) \leq h_K(\theta)$.

Το *πλάτος* ενός κυρτού σώματος K στην διεύθυνση ενός $\theta \in S^{n-1}$ ορίζεται από την

$$w_K(\theta) = h_K(\theta) + h_K(-\theta).$$

Το *μέσο πλάτος* του K είναι το

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} w_K(\theta)\sigma(d\theta) = 2\int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\sigma(d\theta).$$

Το *πολικό σώμα* K° του K είναι το

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq 1, \forall x \in K\}.$$

Οι βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση. *Εστω K και L συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύουν τα εξής:*
(1) *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, $\rho_{K^\circ}(\theta) = 1/h_K(\theta)$.*
(2) *Αν $K \subseteq L$, τότε $L^\circ \subseteq K^\circ$.*
(3) *Αν $T \in GL_n$, τότε $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.*
(4) *$(K^\circ)^\circ = K$.*
(5) *$|TK||(TK)^\circ| = |K||K^\circ|$.* $\square$

4. Η *δυϊκή νόρμα* $\|\cdot\|_*$ της $\|\cdot\|$ ορίζεται από την

$$\|y\|_* = \max\{|\langle x, y\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Από τον ορισμό είναι φανερό οτι

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|y\|_* \|x\|$$

γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν X^* είναι ο *δυϊκός χώρος* του X, τότε η μοναδιαία μπάλα K_{X^*} του X^* είναι το πολικό σώμα της μοναδιαίας μπάλας K_X του X. Θα γράφουμε $\|\cdot\|_{K^\circ}$ ή $\|\cdot\|_*$, και $\|\cdot\|_K$ ή $\|\cdot\|$ χωρίς αυτό να δημιουργεί σύγχυση.

5. Θεωρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ενα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\},$$

όπου $\{v_i\}_{i\leq n}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα). Εύκολα ελέγχουμε οτι $E = T(D_n)$, όπου T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Ο F. John ([Jo], 1948) έδειξε οτι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο, και οτι $K \subset \sqrt{n}E$. Συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι η

$$d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$$

για κάθε $X \in \mathcal{B}_n$, που προκύπτει άμεσα από τον εγκλεισμό $E \subset K \subset \sqrt{n}E$ και τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur.

5. Το *άθροισμα Minkowski* των $A, B \subset \mathbb{R}^n$ είναι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των R.J. Gardner [Gar], V.D. Milman και G. Schechtman [MS], και R. Schneider [Sch].

1.2 Η ανισότητα Brunn-Minkowski.

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 1. *Εστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1}$$

Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η (1) εκφράζει με μία έννοια το γεγονός οτι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα οτι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Υπάρχουν πολλές και ενδιαφέρουσες αποδείξεις της (1). Θα δώσουμε εδώ την απόδειξη της *συναρτησιακής μορφής* της ανισότητας, που οφείλεται στους Prékopa και Leindler (βλέπε [Pi1]):

Θεώρημα 2. *Εστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις, και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε οτι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και οτι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{4}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση n.

(α) $n=1$: Χρησιμοποιώντας βασικά αποτελέσματα από την θεωρία του ολοκληρώματος Lebesgue, μπορούμε να υποθέσουμε οτι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t\int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t\int g.$$

Με βάση τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t)f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t)g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t).$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Επεται οτι η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}
\int h &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\
&\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}dt \\
&\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\
&= \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε οτι $n \geq 2$ και οτι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Εστω f, g, h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w,s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την (4) έπεται οτι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}
H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda}. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1: Εστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε οτι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2, οπότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geq \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (3) για κάθε τριάδα K, T, λ. Για να πάρουμε την (1) θεωρούμε K και T όπως στο Θεώρημα 1 (με $|K| > 0$, $|T| > 0$), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n} K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n} T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (3) παίρνουμε

$$(*) \qquad |\lambda K_1 + (1-\lambda) T_1| \geq 1.$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda) T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}},$$

επομένως η $(*)$ παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n} \right)^n . \quad \square$$

Η ανισότητα Brunn - Minkowski είναι το θεμέλιο της θεωρίας των κυρτών σωμάτων. Δίνουμε εδώ μερικές μόνο από τις εφαρμογές της, αυτές που έχουν σχέση με τα θέματα που θα μας απασχολήσουν:

1. Η ανισότητα των Rogers και Shephard.

Το *σώμα διαφορών* του κυρτού σώματος K είναι το

$$K - K = \{x - y \mid x, y \in K\}.$$

Το $K - K$ είναι συμμετρικό (με κέντρο συμμετρίας το o), και $|K - K| \geq |K|$. Οι Rogers και Shephard [RS] έδωσαν ακριβές άνω φράγμα για τον όγκο του σώματος διαφορών:

Θεώρημα 3. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K - K| \leq \binom{2n}{n} |K|.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα Brunn-Minkowski μπαίνει στην απόδειξη με τη μορφή του εξής λήμματος:

Λήμμα. *Αν K και T είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση*

$$x \mapsto |K \cap (x+T)|^{1/n}$$

είναι κοίλη στον φορέα της.

[Το Λήμμα είναι άμεση συνέπεια του εγκλεισμού

$$\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T)) \subseteq K \cap ((\lambda x + (1-\lambda) y) + T).$$

Επεται οτι

$$|K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T)| \geq |\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T))|,$$

και από την (2) συμπεραίνουμε οτι

$$|K \cap (\lambda x + (1-\lambda)y + T)|^{1/n} \geq \lambda |K \cap (x+T)|^{1/n} + (1-\lambda)|K \cap (y+T)|^{1/n}.]$$

Ορίζουμε $f(x) = |K \cap (x+K)|^{1/n}$. Θέτοντας $T = K$ στο Λήμμα, βλέπουμε οτι η f είναι κοίλη συνάρτηση στον φορέα της, δηλαδή στο $K - K$.

Ορίζουμε μια δεύτερη συνάρτηση $g : K - K \to \mathbb{R}^+$ ως εξής: κάθε $x \in K - K$ γράφεται στην μορφή $x = r\theta$, όπου $\theta \in S^{n-1}$ και $0 \leq r \leq \rho_{K-K}(\theta)$. Τότε, θέτουμε $g(x) = f(o)(1 - r/\rho_{K-K}(\theta))$. Από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε, η g είναι γραμμική στο ευθύγραμμο τμήμα $[o, \rho_{K-K}(\theta)\theta]$, μηδενίζεται στο σύνορο του $K-K$, και $g(o) = f(o)$. Αφού η f είναι κοίλη, παίρνουμε $f \geq g$ στο $K - K$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{K-K} |K \cap (x+K)| dx &= \int_{K-K} f^n(x) dx \geq \int_{K-K} g^n(x) dx \\
&= [f(o)]^n n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K-K}(\theta)} r^{n-1}(1 - r/\rho)^n dr \sigma(d\theta) \\
&= |K| n\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho^n_{K-K}(\theta) \sigma(d\theta) \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n dt \\
&= |K||K-K| n \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \binom{2n}{n}^{-1} |K||K-K|.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα του Fubini μας δίνει

$$\begin{aligned}
\int_{K-K} |K \cap (x+K)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x+K)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \chi_{x+K}(y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{y-K}(x) dx \right) dy \\
&= \int_K |y - K| dy = |K|^2.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις ολοκληρώνουμε την απόδειξη. $\square$

Παρατήρηση. Εξετάζοντας πιό προσεκτικά την απόδειξη, και παίρνοντας υπόψη την συνθήκη ισότητας στην ανισότητα Brunn-Minkowski, βλέπουμε οτι ισχύει ισότητα στο Θεώρημα 3 αν και μόνο αν το K έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(rK + x) \cap (sK + y) = tK + w$$

για κάθε $r, s > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή αν η τομή δύο όχι ξένων ομοιοθετικών προς το K σωμάτων είναι κι αυτή ομοιοθετική προς το K. Οι Rogers και Shephard απέδειξαν οτι η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει το simplex.

Η χρησιμότητα της εκτίμησης του Θεωρήματος 3 έγκειται στην παρατήρηση οτι ο όγκος του $K-K$ δεν είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο του K:

$$|K-K|^{1/n} \leq 4|K|^{1/n},$$

δηλαδή, κάθε κυρτό σώμα (που περιέχει το o) περιέχεται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα με «περίπου» τον ίδιο όγκο. Η παρατήρηση αυτή θα χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά στην συνέχεια.

2. Τομές ενός κυρτού σώματος με παράλληλα υπερεπίπεδα.

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε $f = f_{K,\theta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ως εξής:

$$f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Ο όγκος εδώ είναι $(n-1)$-διάστατος. Δηλαδή, $f(t)$ είναι το «εμβαδόν» της τομής του K που είναι κάθετη στο θ και σε (προσημασμένη) απόσταση t από τον $\theta^\perp$.

Θεώρημα 4. *Εστω K κυρτό σώμα, $\theta \in S^{n-1}$, και $f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$. Τότε, η $f^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στον φορέα της.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\theta = e_n$, οπότε ταυτίζουμε φυσιολογικά τον $\theta^\perp$ με τον $\mathbb{R}^{n-1}$. Για κάθε t ορίζουμε

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,t) \in K\}.$$

Εστω $I = \{t \mid K(t) \neq \emptyset\}$. Για κάθε $t \in I$, το $K(t)$ είναι κυρτό, και αν $t, s \in I$, $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s) \subseteq K(\lambda t + (1-\lambda)s).$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski στον $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$|K(\lambda t + (1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} \geq \lambda |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} + (1-\lambda)|K(s)|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Ομως $f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)| = |K(t)|$, κι αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση. Ιστορικά, το Θεώρημα 4 προηγήθηκε της ανισότητας Brunn-Minkowski. Ο Brunn έδειξε το παραπάνω αποτέλεσμα με την μέθοδο της συμμετρικοποίησης, και ο Minkowski έδωσε μια απόδειξη του Θεωρήματος 1 χρησιμοποιώντας το.

Πόρισμα 1. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4, η f είναι λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, παίρνουμε

$$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \geq f(t)^\lambda f(s)^{1-\lambda}$$

για κάθε $t, s \in I$ και $\lambda \in (0,1)$. Αυτό σημαίνει οτι η $\log f$ είναι κοίλη στο I. □

Πόρισμα 2. *Αν το K είναι συμμετρικό με κέντρο το o, τότε $\|f\|_\infty = f(0)$, δηλαδή η μέγιστη τομή του K είναι η κεντρική.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση της συμμετρίας έπεται οτι $K(-t) = -K(t)$ για κάθε $t \in I$. Από το Πόρισμα 1, η f είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στο I. Αρα, για κάθε $t \in I$,

$$f(0) = f\left(\frac{t+(-t)}{2}\right) \geq \sqrt{f(t)}\sqrt{f(-t)} = f(t). \quad \square$$

3. Μια ανισότητα του Anderson.

Θεωρούμε μια άρτια, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Τότε, για κάθε $t \geq 0$ το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq t\}$$

είναι συμμετρικό και κυρτό. Οπως στο Πόρισμα 2, εύκολα ελέγχουμε οτι $\|f\|_\infty = f(0)$.

Η ανισότητα του Anderson [And] αφορά το ολοκλήρωμα μιας τέτοιας συνάρτησης πάνω σε συμμετρικά κυρτά σώματα:

Θεώρημα 5. *Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα το $\{x \mid f(x) \geq t\}$ να είναι κυρτό για κάθε $t \geq 0$. Τότε, για κάθε συμμετρικό ως προς το o κυρτό σώμα W και κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\int_W f(x)dx \geq \int_{W+z} f(x)dx.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση κατανομής της f γράφουμε

$$\int_{W+z} f(x)dx = \int_0^\infty |\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W+z)|dt \quad , \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Αφού τα $\{x \mid f(x) \geq t\}$ και W είναι κυρτά, έπεται οτι

$$\frac{1}{2}\big(\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W+z)\big) + \frac{1}{2}\big(\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W-z)\big) \subseteq \{x \mid f(x) \geq t\} \cap W$$

για κάθε t. Από την ανισότητα Brunn - Minkowski παίρνουμε

$$|\{x \mid f(x) \geq t\} \cap W| \geq |\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W+z)|^{1/2} |\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W-z)|^{1/2}.$$

Ομως η f είναι άρτια και το W συμμετρικό, άρα

$$\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W+z) = -\big(\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W-z)\big),$$

επομένως

$$|\{x \mid f(x) \geq t\} \cap W| \geq |\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W+z)|.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned} \int_W f(x)dx &= \int_0^\infty |\{x \mid f(x) \geq t\} \cap W|dt \\ &\geq \int_0^\infty |\{x \mid f(x) \geq t\} \cap (W+z)|dt \\ &= \int_{W+z} f(x)dx. \quad \square \end{aligned}$$

4. Το Λήμμα του Borell.

Θεώρημα 6 [Bo] *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και A κλειστό κυρτό συμμετρικό σύνολο τέτοιο ώστε $|K \cap A| = \delta > \frac{1}{2}$. Τότε, για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$|K \cap (tA)^c| \leq \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα με απαγωγή σε άτοπο οτι

$$A^c \supseteq \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A.$$

Εστω οτι υπάρχει $a \in A$ που γράφεται στη μορφή

$$a = \frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}a_1,$$

όπου $a_1 \in A$ και $y \notin tA$. Τότε,

$$\frac{1}{t}y = \frac{t+1}{2t}a + \frac{t-1}{2t}(-a_1) \in A,$$

από την κυρτότητα και την συμμετρία του A. Αυτό σημαίνει οτι $y \in tA$, άτοπο.

Το K είναι κυρτό, επομένως

$$A^c \cap K \supseteq \frac{2}{t+1}[(tA)^c \cap K] + \frac{t-1}{t+1}[A \cap K].$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn-Minkowski για συμπαγή σύνολα, παίρνουμε

$$1 - \delta = |A^c \cap K| \geq |(tA)^c \cap K|^{\frac{2}{t+1}} |A \cap K|^{\frac{t-1}{t+1}} = |(tA)^c \cap K|^{\frac{2}{t+1}} \delta^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το Λήμμα του Borell εκφράζει την *συγκέντρωση του όγκου* στον $\mathbb{R}^n$: Αν το $A \cap K$ περιέχει περισσότερο από το μισό του όγκου του K, τότε το ποσοστό του K που μένει έξω από το tA, $t > 1$ φθίνει εκθετικά ως προς t καθώς $t \to \infty$, με ρυθμό ανεξάρτητο από το K και την διάσταση n.

2. ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΣΟ ΠΛΑΤΟΣ

2.1 Συναρτήσεις Rademacher και Walsh.

Ορισμοί. (α) Εστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $E_2^n = \{-1,1\}^n$. Το σύνολο $\{-1,1\}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, επομένως και ο E_2^n είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό κατα συντεταγμένες.

(β) Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε $r_i : E_2^n \to \{-1,1\}$ με

$$r_i(\epsilon) = r_i(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_n) = \epsilon_i.$$

Οι r_i, $i = 1, \ldots, n$, είναι οι *συναρτήσεις Rademacher.*

(γ) Εστω $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Ορίζουμε $w_A : E_2^n \to \{-1,1\}$ με

$$w_A(\epsilon) = \prod_{i \in A} r_i(\epsilon).$$

Αν $A = \emptyset$, θέτουμε $w_A(\epsilon) = 1$. Οι w_A, $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$, είναι οι *συναρτήσεις Walsh.* Παρατηρήστε οτι $r_i = w_{\{i\}}$.

Οι συναρτήσεις Walsh ικανοποιούν τα παρακάτω:

Πρόταση 1. (α) *Κάθε w_A είναι ομοιομορφισμός ομάδων.*
(β) *Για κάθε A και κάθε $\epsilon \in E_2^n$, $w_A^2(\epsilon) = 1$.*
(γ) *Ισχύουν οι συνθήκες ορθογωνιότητας*

$$\sum_A w_A(\epsilon) w_A(\zeta) = 2^n \delta_{\epsilon\zeta}$$

και

$$\sum_\epsilon w_A(\epsilon) w_B(\epsilon) = 2^n \delta_{AB},$$

όπου $\delta_{xy} = 1$ αν $x = y$ και $\delta_{xy} = 0$ αν $x \neq y$. □

Αν στον E_2^n ορίσουμε την ομοιόμορφη διακριτή κατανομή πιθανότητας, τότε γίνεται διακριτός χώρος πιθανότητας $(E_2^n, P(E_2^n), p)$. Θα συμβολίζουμε $d(\epsilon) = dp(\epsilon)$. Αν $f : E_2^n \to \mathbb{R}$, τότε

$$\int_{E_2^n} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon \in E_2^n} f(\epsilon).$$

Πιό γενικά, αν X χώρος Banach και $f : E_2^n \to X$, τότε ορίζουμε

$$\int_{E_2^n} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon \in E_2^n} f(\epsilon) \in X.$$

Ο χώρος των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(X; E_2^n)} = \|f\|_{L_2(X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και την νόρμα

$$\|f\|_{L_1(X;E_2^n)} = \|f\|_{L_1(X)} = \int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\| d\epsilon.$$

Πρόταση 2. *Κάθε $f : E_2^n \to X$ γράφεται κατα μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$.

Απόδειξη: Για κάθε $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε

$$x_A = \int_{E_2^n} w_A(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1(γ) βλέπουμε οτι για κάθε $\epsilon \in E_2^n$

$$\begin{aligned} \sum_A w_A(\epsilon) x_A &= \sum_A w_A(\epsilon) \left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \int_{E_2^n} f(\zeta) \left(\sum_A w_A(\epsilon) w_A(\zeta) \right) d\zeta \\ &= f(\epsilon). \end{aligned}$$

Για την μοναδικότητα, ας υποθέσουμε οτι $f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) y_A$ για κάποια $y_A \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} x_A &= \int_{E_2^n} w_A(\zeta) f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{E_2^n} \left(\sum_B w_B(\zeta) y_B \right) w_A(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_B y_B \left(\sum_{\zeta \in E_2^n} w_B(\zeta) w_A(\zeta) \right) \\ &= y_A, \end{aligned}$$

πάλι από την Πρόταση 1(γ). $\square$

Ορισμός. (α) Αν $f : E_2^n \to X$ και $g : E_2^n \to \mathbb{R}$, ορίζουμε την *συνέλιξη* $f * g : E_2^n \to X$ των f και g ως εξής:

$$(f * g)(\epsilon) = \int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) g(\zeta) d\zeta.$$

(β) Η *Rademacher προβολή* της $f : E_2^n \to X$ είναι η συνάρτηση $Rad_n f : E_2^n \to X$ με
$$Rad_n f(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) x_{\{i\}},$$
όπου $f = \sum w_A x_A$.

Πρόταση 3. *Ορίζουμε $g : E_2^n \to \mathbb{R}$ με $g(\epsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)$. Τότε, για κάθε $f : E_2^n \to X$, ισχύει*
$$Rad_n f = f * g.$$

Απόδειξη: Εχουμε
$$\begin{aligned} (f*g)(\epsilon) &= \int_{E_2^n} \left(\sum_A w_A(\epsilon\zeta) x_A \right) \left(\sum_{i=1}^n r_i(\zeta) \right) d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_A x_A w_A(\epsilon) \left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta) r_i(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) x_{\{i\}} \\ &= Rad_n f(\epsilon). \quad \square \end{aligned}$$

Ορισμός. Εστω $f : E_2^n \to X$ και $\phi : E_2^n \to X^*$. Ορίζουμε
$$\langle f(\epsilon), \phi(\epsilon) \rangle = [\phi(\epsilon)](f(\epsilon)).$$

Πρόταση 4. *Εστω X χώρος Banach, X^* ο δυικός του, και H χώρος Hilbert. Για κάθε $f : E_2^n \to X$, $\phi : E_2^n \to X^*$ και $h : E_2^n \to H$ ισχύουν τα εξής:*

(α) *Υπάρχει $\psi : E_2^n \to X^*$ με $\|\psi\|_{L_2(X^*)} = 1$ τέτοια ώστε*
$$\|f\|_{L_2(X)} = \int_{E_2^n} \langle f(\epsilon), \psi(\epsilon) \rangle d\epsilon.$$

(β) $\int_{E_2^n} \langle f(\epsilon), \phi(\epsilon) \rangle d\epsilon \leq \|f\|_{L_2(X)} \|\phi\|_{L_2(X^*)}$.

(γ) *Αν $h(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) x_A$ είναι η αναπαράσταση της h, τότε*
$$\|h\|_{L_2(H)}^2 = \sum_A \|x_A\|_H^2.$$

Απόδειξη: (α) Εχουμε ότι
$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(X)} &= \left(\frac{\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|_X^2}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|_X a_\epsilon}{\sqrt{2^n}}, \end{aligned}$$

όπου $\{a_\epsilon\}$ κατάλληλη ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_\epsilon a_\epsilon^2 = 1$.

Για κάθε $\epsilon \in E_2^n$ υπάρχει $\tilde{\psi}(\epsilon) \in X^*$ με $\|\tilde{\psi}(\epsilon)\|_{X^*} = 1$ και

$$\|f(\epsilon)\|_X = \langle f(\epsilon), \tilde{\psi}(\epsilon)\rangle.$$

Ορίζουμε $\psi(\epsilon) = \tilde{\psi}(\epsilon)a_\epsilon 2^{\frac{n}{2}}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|\psi\|^2_{L^2(X^*)} &= \frac{\sum_\epsilon \|\psi(\epsilon)\|^2_{X^*}}{2^n} \\
&= \frac{\sum_\epsilon \|\tilde{\psi}(\epsilon)\|^2_{X^*} a_\epsilon^2 2^n}{2^n} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

και

$$\|f\|_{L_2(X)} = \int_{E_2^n} \langle f(\epsilon), \psi(\epsilon)\rangle d\epsilon.$$

(β) Απλώς παρατηρούμε οτι

$$\int_{E_2^n} \langle f(\epsilon), \phi(\epsilon)\rangle d\epsilon \leq \int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|_X \|\phi(\epsilon)\|_{X^*} d\epsilon,$$

και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(γ) Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned}
\int_{E_2^n} \|h(\epsilon)\|^2_H &= \int_{E_2^n} \|\sum_A w_A(\epsilon)x_A\|^2_H \\
&= \int_{E_2^n} \langle \sum_A w_A(\epsilon)x_A, \sum_B w_B(\epsilon)x_B\rangle d\epsilon \\
&= \sum_A \sum_B \langle x_A, x_B\rangle \int_{E_2^n} w_A(\epsilon)w_B(\epsilon)d\epsilon \\
&= \sum_A \langle x_A, x_A\rangle \\
&= \sum_A \|x_A\|^2_H.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|h\|^2_{L^2(H)} = \sum_A \|x_A\|^2_H. \quad \square$$

2.2 Η ανισότητα του Pisier για την Rademacher προβολή.

Η $Rad_n : L^2(X) \to L^2(X)$ με $f \mapsto Rad_n f$ είναι γραμμικός τελεστής. Οπως θα δούμε, ο Rad_n είναι φραγμένος τελεστής. Σκοπός μας είναι να δώσουμε απόδειξη της εκτίμησης του G. Pisier για τη νόρμα $\|Rad_n(X)\|$ της Rademacher προβολής Rad_n:

Θεώρημα [Pi2] *Εστω X n-διάστατος χώρος με νόρμα. Αν $f : E_2^n \to X$, τότε*

$$\|Rad_n f\|_{L^2(X)} \leq c \log n \, \|f\|_{L^2(X)},$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Δηλαδή, $\|Rad_n(X)\| \leq c \log n$.

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια σειρά από βοηθητικά αποτελέσματα:

Πρόταση 1. *Εστω X χώρος Banach, $f : E_2^n \to X$, $g : E_2^n \to \mathbb{R}$, και $g(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) c_A$ η αναπαράσταση της g. Τότε,*

(α) $\|f * g\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^2(X)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

(β) *Αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, τότε*

$$\|f * g\|_{L^2(H)} \leq \|f\|_{L^2(H)} \max_A |c_A|.$$

(γ) *Αν $d(X, H)$ είναι η απόσταση Banach-Mazur του X από έναν χώρο Hilbert H τότε*

$$\|f * g\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^2(X)} \max_A |c_A| d(X, H).$$

Απόδειξη: (α) Εχουμε $f * g : E_2^n \to X$. Τότε υπάρχει $\phi : E_2^n \to X^*$ τέτοια ώστε $\|\phi\|_{L^2(X^*)} = 1$ και

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^2(X)} &= \int_{E_2^n} \langle (f * g)(\epsilon), \phi(\epsilon) \rangle d\epsilon \\
&= \int_{E_2^n} g(\zeta) \int_{E_2^n} \langle f(\epsilon\zeta), \phi(\epsilon) \rangle d\epsilon d\zeta \\
&\leq \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \int_{E_2^n} \|f(\epsilon\zeta)\|_X \|\phi(\epsilon)\|_{X^*} d\epsilon d\zeta \\
&\leq \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon\zeta)\|_X^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*}^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta \\
&= \|f\|_{L^2(X)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_A w_A x_A, g = \sum_A c_A w_A$ οι αναπαραστάσεις των f, g αντίστοιχα, τότε $f * g = \sum_A c_A x_A w_A$ αφού

$$\begin{aligned}
(f * g)(\epsilon) &= \int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) \left(\sum_A w_A(\zeta) c_A \right) d\zeta \\
&= \sum_A \left(\int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) w_A(\zeta) d\zeta \right) c_A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_A \left(\int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) w_A(\epsilon\zeta) d\zeta \right) c_A w_A(\epsilon) \\ &= \sum_A x_A c_A w_A(\epsilon). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4 της προηγούμενης παραγράφου, έχουμε

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^2(H)} &= \left(\sum_A \|c_A x_A\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_A |c_A| \left(\sum_A \|x_A\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\max_A |c_A| \right) \|f\|_{L^2(H)}. \end{aligned}$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $T : X \to H$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| \leq (1+\varepsilon)d(X, H)$.

Αφού $f * g = \sum_A c_A x_A w_A$, ισχύει ότι

$$T[(f * g)(\epsilon)] = \sum_A w_A(\epsilon) c_A T x_A.$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^2(X)} &= \|T^{-1} \circ T \circ (f * g)\|_{L^2(X)} \\ &\leq \|T^{-1}\|\|T \circ (f * g)\|_{L^2(H)} \\ &= \|T^{-1}\|(\sum_A \|c_A T x_A\|_H^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_A |c_A| \|T^{-1}\| \left(\int_{E_2^n} \|T(f(\epsilon)\|_H^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_A |c_A| \|T^{-1}\|\|T\| \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|_X^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2(X)} \max_A |c_A| (1+\varepsilon) d(X, H). \quad \square \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Εχουμε δεί οτι $Rad_n f = f * g$, όπου $g = \sum r_i$. Είναι φανερό οτι $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{n}$, επομένως το μέρος (α) της Πρότασης δίνει

$$\|Rad_n f\| \leq \sqrt{n}\|f\|.$$

Το μέρος (γ) δίνει την ίδια εκτίμηση αν $\dim X = n$: Από το Θεώρημα του John, $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$, και για την $g = \sum r_i$ προφανώς $\max_A |c_A| = 1$. Αρα,

$$\|Rad_n f\| \leq \sqrt{n}\|f\|.$$

Τέλος, αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, το μέρος (β) της Πρότασης μας εξασφαλίζει οτι

$$\|Rad_n f\| \leq \|f\|.$$

Για την πολύ ισχυρότερη γενική εκτίμηση που παρέχει το Θεώρημα, ο Pisier συνδυάζει όλες αυτές τις πληροφορίες καθώς και μεθόδους από την κλασική αρμονική ανάλυση.

Πρώτα θα δείξουμε μια κλασική ανισότητα του Bernstein που εκτιμά την $\|Q'\|_\infty$ από την $\|Q\|_\infty$, όπου Q τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n.

Ορισμός. Ο πυρήνας του Fejér F_n είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$F_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}.$$

Οι βασικές ιδιότητες του F_n δίνονται στο Λήμμα που ακολουθεί:

Λήμμα 1. *Αν $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, τότε*

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

Δηλαδή, $F_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\|F_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)dt = 1$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα οτι

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=-j}^{j} e^{ikt}.$$

Θέτουμε $z = e^{it}$, $z \neq 1$. Απλές πράξεις δείχνουν οτι

$$\begin{aligned}
(n+1)F_n(t) &= \frac{1}{1-z}\left(\frac{1-\overline{z}^{n+1}}{1-\overline{z}} - \frac{z(1-z^{n+1})}{1-z}\right) \\
&= \frac{2-\overline{z}^{n+1}-z^{n+1}}{|1-z|^2} \\
&= \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Αφού $F_n \geq 0$, είναι φανερό οτι

$$\begin{aligned}
\|F_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = 1. \quad \square
\end{aligned}$$

Λήμμα 2. *Ορίζουμε* $\psi_n(t) = 2nF_{n-1}(t)\sin(nt)$. *Αν* Q *είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού* n, *τότε*

$$Q * \psi_n = -Q'.$$

Απόδειξη: Μπορούμε να γράψουμε $Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$. Τότε,

$$\begin{aligned}(Q*\psi_n)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2n\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik(t-s)}\right)\left(\sum_{l=-n+1}^{n-1}(1-\frac{|l|}{n})e^{ils}\right)\sin(ns)ds \\ &= \frac{2n}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}\sum_{l=-n+1}^{n-1}(1-\frac{|l|}{n})\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)s}\sin(ns)ds.\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται, εκτός αν $|l-k| = n$, οπότε

$$\int_0^{2\pi} e^{ins}\sin(ns)ds = -\int_0^{2\pi} e^{-ins}\sin(ns)ds = i\pi.$$

Αφού $|k| \leq n$ και $|l| \leq n-1$, πρέπει να είναι $1 \leq k \leq n$ και $l = k-n$, ή $-n \leq k \leq -1$ και $l = k+n$. Επομένως,

$$\begin{aligned}(Q*\psi_n)(t) &= \frac{n}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}(-i)\pi(1-\frac{n-k}{n}) + \sum_{k=-n}^{-1} a_k e^{ikt} i\pi(1-\frac{k+n}{n})\right) \\ &= -\sum_{k\neq 0, |k|\leq n} a_k k i e^{ikt} \\ &= -Q'(t). \quad \square\end{aligned}$$

Λήμμα 3 (Ανισότητα του Bernstein). *Αν* Q *είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού* n, *τότε*

$$\|Q'\|_\infty \leq 2n\|Q\|_\infty.$$

Απόδειξη: Από το προηγούμενο Λήμμα, $\|Q'\|_\infty = \|Q*\psi_n\|_\infty$. Ομως,

$$|(Q*\psi_n)(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q(t-s)|\,|\psi_n(s)|ds,$$

άρα

$$\|Q*\psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\|Q\|_\infty \int_0^{2\pi} |\psi_n(s)|ds.$$

Ομως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi_n(s)|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2nF_{n-1}(s)ds = 2n.$$

Αρα,

$$\|Q'\|_\infty \leq 2n\|Q\|_\infty. \quad \square$$

Πρόταση 2. *Αν* $P(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k, b_k\in\mathbb{C}$, *τότε* $|P'(0)|\le 4n\max_{|s|\le\frac{1}{2}}|P(s)|$.

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$Q(s)=P(\frac{\sin s}{2})=\sum_{k=0}^{n} b_k\frac{(\sin s)^k}{2^k}.$$

Το Q είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n, και

$$Q'(0)=\frac{1}{2}P'(0).$$

Από την ανισότητα του Bernstein,

$$|Q'(0)|\le 2n\|Q\|_\infty = 2n\max_{|s|\le\frac{1}{2}}|P(s)|.$$

Αρα,

$$|P'(0)|\le 4n\max_{|s|\le\frac{1}{2}}|P(s)|. \quad \square$$

Πρόταση 3. *Εστω* $l\in\mathbb{N}, l\ge 2$. *Υπάρχει προσημασμένο μέτρο* μ *στο* $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ *που έχει κύμανση* $\|\mu\|\le 4l$ *και ικανοποιεί τις*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t d\mu(t)=1 \quad , \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t)=0 \quad , \quad k=0,2,\ldots,l.$$

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_l$ τον χώρο όλων των πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του l, και θεωρούμε το συναρτησοειδές $F:\mathcal{P}_l\to\mathbb{R}$ με

$$F(p)=p'(0).$$

Τότε, η Πρόταση 2 μας δίνει

$$|F(p)|=|p'(0)|\le 4l\max_{t\in[-1/2,1/2]}|p(t)| \quad , \quad p\in\mathcal{P}_l.$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach, το F επεκτείνεται σε $\tilde{F}\in\left(C[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\right)^*$ με $\|\tilde{F}\|\le 4l$.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει προσημασμένο μέτρο μ στο $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ με $\|\mu\|\le 4l$, το οποίο ικανοποιεί τις

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t)=(t^k)'|_{t=0} \quad , \quad k=0,1,\ldots,l.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Απόδειξη της ανισότητας του Pisier: Θεωρούμε το μέτρο μ της Πρότασης 3, και ορίζουμε

$$g(\epsilon)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon))d\mu(t).$$

Παρατηρώντας οτι
$$\prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon)) = \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon),$$
έχουμε
$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) d\mu(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) + \sum_{k=l+1}^{n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon), \end{aligned}$$
από τις ιδιότητες του μ.

Θέτουμε $g_1(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon)$ και $g_2(\epsilon) = \sum_{k=l+1}^{n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon)$, οπότε $g(\epsilon) = g_1(\epsilon) + g_2(\epsilon)$. Τότε,
$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \int_{E_2^n} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon)) d\mu(t) \right| d\epsilon \\ &\leq \int_{E_2^n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon)) d\mu^+(t) d\epsilon + \int_{E_2^n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon)) d\mu^-(t) d\epsilon \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon)) d\epsilon \right) d|\mu|(t). \end{aligned}$$
Ομως,
$$\int_{E_2^n} \prod_{i=1}^{n}(1+tr_i(\epsilon)) d\epsilon = 1,$$
άρα
$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\mu\| \leq 4l.$$
Ακόμα, για την g_2 παρατηρούμε ότι αν $g_2 = \sum_A w_A c_A^{g_2} = \sum_{k=l+1}^{n} \sum_{|A|=k} w_A c_A^{g_2}$ η μοναδική αναπαράσταση της τότε
$$c_A^{g_2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t), \qquad k = |A|.$$
Εχουμε λοιπόν,
$$\begin{aligned} \|Rad_n f\|_{L_2(X)} &= \|f * g_1\|_{L_2(X)} \\ &= \|f * (g - g_2)\|_{L_2(X)} \\ &= \|(f * g) - (f * g_2)\|_{L_2(X)} \\ &\leq \|(f * g)\|_{L_2(X)} + \|(f * g_2)\|_{L_2(X)}. \end{aligned}$$

Ομως,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L_2(X)} &\leq \|f\|_{L_2(X)}\|g\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_2(X)}\|\mu\| \\ &\leq 4l\|f\|_{L_2(X)},\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|f*g_2\|_{L_2(X)} &\leq \|f\|_{L_2(X)} \max_A |c_A^{g_2}| d(X,\ell_2^n) \\ &= \|f\|_{L_2(X)} \max_{l<k\leq n} |\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k d\mu(t)| d(X,\ell_2^n) \\ &\leq \|f\|_{L_2(X)} \frac{1}{2^{l+1}} \|\mu\| d(X,\ell_2^n) \\ &\leq \|f\|_{L_2(X)} \frac{4l}{2^{l+1}} d(X,\ell_2^n).\end{aligned}$$

Αρα, για κάθε $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$,

$$\|Rad_n f\|_{L_2(X)} \leq \|f\|_{L_2(X)} \left(4l + 4l\frac{d(X,\ell_2^n)}{2^{l+1}}\right).$$

Επιλέγοντας το l έτσι ώστε $2^l \simeq d(X,\ell_2^n)$, παίρνουμε

$$\|Rad_n f\|_{L_2(X)} \leq 8l\|f\|_{L_2(X)} \leq c_1 \log d(X,\ell_2^n)\|f\|_{L_2(X)}.$$

Από το θεώρημα του John έχουμε ότι $d(X,\ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. Δηλαδή $\log d(X,\ell_2^n) \leq c_2 \log n$. Αρα,

$$\|Rad_n f\|_{L_2(X)} \leq c \log n \|f\|_{L_2(X)}. \quad \square$$

2.3 Το Λήμμα του Lewis και η ℓ-νόρμα.

Ορισμός. Εστω α τυχούσα νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Μπορούμε πάντα να ορίσουμε μια δυική νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, θέτοντας

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(vu) : \alpha(u) \leq 1\}.$$

Λέμε τότε οτι οι α και α^* είναι δυικές ως προς το ίχνος. Το Λήμμα του Lewis [Le] είναι μια τελείως γενική πρόταση που ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

Πρόταση 1. *Για κάθε νόρμα α στον $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, υπάρχει $u \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι $n \leq \alpha(v)\alpha^*(v^{-1})$ για κάθε $v \in GL_n$, αφού

$$\frac{n}{\alpha(v)} = \frac{1}{\alpha(v)}\mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}\left(v^{-1}\frac{v}{\alpha(v)}\right) \leq \alpha^*(v^{-1}).$$

Παίρνουμε $u \in GL_n$ με $\alpha(u) \leq 1$ έτσι ώστε $|\det u| = \max\{|\det v| : v \in GL_n, \alpha(v) \leq 1\}$. Τέτοιος u υπάρχει, αφού η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την φυσιολογική νόρμα, άρα και ως προς κάθε νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Είναι επίσης φανερό οτι $\alpha(u)=1$. Εστω $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό, και $v\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ τυχών. Τότε, ο $(u+\varepsilon v)/\alpha(u+\varepsilon v)$ έχει α-νόρμα ίση με 1. Επομένως,

$$|\det(u+\varepsilon v)|\leq (\alpha(u+\varepsilon v))^n\,|\det u|.$$

Επεται οτι

$$|\det[u^{-1}(u+\varepsilon v)]|^{\frac{1}{n}}\leq \alpha(u+\varepsilon v),$$

και, αφού η α είναι νόρμα,

$$|\det(I_n+\varepsilon u^{-1}v)|^{\frac{1}{n}}\leq \alpha(u)+\varepsilon\alpha(v)=1+\varepsilon\alpha(v).$$

Δηλαδή,

$$\frac{[\det(I_n+\varepsilon u^{-1}v)]^{\frac{1}{n}}-1}{\varepsilon}\leq \alpha(v),$$

και αφήνοντας το $\varepsilon\to 0^+$ παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{tr}(u^{-1}v)}{n}\leq \alpha(v).$$

Αφού ο v ήταν τυχών, αυτό σημαίνει οτι

$$\alpha^*(u^{-1})\leq n. \quad \square$$

Θα μελετήσουμε την ℓ-νόρμα στον $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, η οποία ορίστηκε από τους T. Figiel και N. Tomczak-Jaegermann [FT]. Εστω $\{e_i\}_{i=1}^n$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αν $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ είναι n-διάστατος χώρος με νόρμα, ορίζουμε

$$\ell(u)=\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)u(e_i)\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}$$

για κάθε $u:\ell_2^n\to X$.

Πρόταση 2. *Η ℓ είναι νόρμα στον $L(\ell_2^n,X)$.*

Απόδειξη: (α) Προφανώς $\ell(u)\geq 0$, και αν $\ell(u)=0$ τότε

$$\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)u(e_i)\|^2=0$$

για κάθε $\epsilon\in E_2^n$, δηλαδή $\sum_{i=1}^n \epsilon_i u(e_i)=0$ για καθε επιλογή προσήμων ϵ_i. Τότε όμως $u(e_i)=0$, $i=1,\ldots,n$, δηλαδή $u=0$.

(β) Εστω $\mu\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\ell(\mu u) &= \left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)\mu u(e_i)\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= |\mu|\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)u(e_i)\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= |\mu|\ell(u).\end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $u,v:\ell_2^n\to X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\ell(u+v) &= \left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)(u+v)(e_i)\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_{E_2^n}\left(\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)u(e_i)\|+\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)v(e_i)\|\right)^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)u(e_i)\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)v(e_i)\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \ell(u)+\ell(v).\quad\square\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Αν $u:\ell_2^n\to X$ ισομορφισμός, τότε $(u^{-1})^*:\ell_2^n\to X^*$. Αν λοιπόν $\|\cdot\|_*$ η νόρμα του X^*, έχει νόημα να γράφουμε

$$\ell((u^{-1})^*)=\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)(u^{-1})^*(e_i)\|_*^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann συνέδεσαν το γενικό λήμμα του Lewis με την Rademacher προβολή, δίνοντας εκτίμηση της $\ell((u^{-1})^*)$ μέσω της $\ell^*(u^{-1})$:

Θεώρημα 1. *Εστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει $u:\ell_2^n\to X$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*)\leq n\|Rad_n(X)\|.$$

Απόδειξη: Από το λήμμα του Lewis υπάρχει $u:\ell_2^n\to X$ ισομορφισμός, τέτοιος ώστε $\ell(u)\ell^*(u^{-1})=n$, όπου

$$\ell^*(u^{-1})=\sup\{\mathrm{tr}(u^{-1}v):\ell(v)\leq 1\}.$$

Εχουμε

$$\ell\left((u^{-1})^*\right)=\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)(u^{-1})^*(e_i)\|_*^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορίζουμε $f:E_2^n\to X^*$ με

$$f(\epsilon)=\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)(u^{-1})^*(e_i).$$

Τότε, από την Πρόταση 2.1.4, υπάρχει $\phi:E_2^n\to X$ με ανάπτυγμα $\phi(\epsilon)=\sum_A w_A(\epsilon)x_A$ και $\|\phi\|_{L_2(X)}=1$, τέτοια ώστε

$$\ell((u^{-1})^*) = \int_{E_2^n}\langle f(\epsilon),\phi(\epsilon)\rangle d\epsilon$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{E_2^n} \langle \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon)(u^{-1})^*(e_i), \sum_A w_A(\epsilon)x_A \rangle d\epsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_A \left(\int_{E_2^n} r_i(\epsilon) w_A(\epsilon) d\epsilon \right) \langle (u^{-1})^*(e_i), x_A \rangle.
\end{aligned}
$$

Ομως,

$$\int_{E_2^n} r_i(\epsilon) w_A(\epsilon) d\epsilon = 0$$

αν $A \neq \{i\}$. Αρα,

$$\ell((u^{-1})^*) = \sum_{i=1}^{n} \langle (u^{-1})^*(e_i), x_{\{i\}} \rangle.$$

Ορίζουμε τώρα $v = \ell_2^n \to X$, θέτοντας $v(e_i) = x_{\{i\}}$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Τότε,

$$
\begin{aligned}
\ell((u^{-1})^*) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (u^{-1})^*(e_i), v(e_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, (u^{-1}v)(e_i) \rangle \\
&= \mathrm{tr}(u^{-1}v) \leq \ell^*(u^{-1})\ell(v).
\end{aligned}
$$

Θα εκτιμήσουμε την $\ell(v)$. Από τον ορισμό έχουμε

$$
\begin{aligned}
\ell(v) &= \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) v(e_i) \|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) x_{\{i\}} \|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|Rad_n(\phi)\|_{L_2(X)} \\
&\leq \|Rad_n(X)\| \|\phi\|_{L_2(X)} \\
&= \|Rad_n(X)\|.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\ell((u^{-1})^*) \leq \ell^*(u^{-1}) \|Rad_n(X)\|.$$

Δηλαδή,

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leq \ell(u)\ell^*(u^{-1})\|Rad_n(X)\| = n\|Rad_n(X)\|. \quad \square$$

Στην γλώσσα των κυρτών σωμάτων το προηγούμενο Θεώρημα μεταφράζεται ως εξής:

Θεώρημα 2. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_{\tilde{K}}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_{\tilde{K}^\circ}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} \leq n\|Rad_X\|.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 1, υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leq n\|Rad_X\|.$$

Θέτουμε $\tilde{K} = u^{-1}(K)$. Παρατηρείστε οτι

$$\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)u(e_i)\|_K^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_{\tilde{K}}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)(u^{-1})^*(e_i)\|_{K^\circ}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_{\tilde{K}^\circ}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

2.4 Εκτίμηση του ελάχιστου μέσου πλάτους.

Το μέσο πλάτος $w(K)$ ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K μπορεί να εκφραστεί στην μορφή

$$(*) \qquad w(K) = c_n \int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|_* d\omega,$$

όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K, $\{e_i\}$ σταθερή ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $\{g_i\}$ ανεξάρτητες standard κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Για τον σκοπό μας είναι προτιμότερο να δούμε την απόδειξη της ακόλουθης ανισότητας (η απόδειξη της $(*)$ είναι εντελώς ανάλογη):

Πρόταση 1. *Εστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ n-διάστατος χώρος Banach και K η μοναδιαία του μπάλα. Αν g_i ανεξάρτητες standard κανονικές τυχαίες μεταβλητές $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε*

$$w(K^\circ) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη: Εχουμε

$$\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|^2 e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} \|r\theta\|^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr\sigma(d\theta) \\
&= \frac{n\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|^2 \sigma(d\theta) \int_0^\infty r^{n+1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\
&= \frac{n\omega_n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}+1)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \|\theta\|^2 \sigma(d\theta) \\
&\geq n \left(\int_{S^{n-1}} \|\theta\| \sigma(d\theta) \right)^2 . \quad \square
\end{aligned}
$$

Η πρόταση που ακολουθεί είναι γνωστή σαν Λήμμα των Maurey-Pisier, και μας επιτρέπει να περάσουμε από τις κανονικές σε Rademacher τυχαίες μεταβλητές:

Πρόταση 2. *Για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, αν g_i είναι ανεξάρτητες standard κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε κάποιον χώρο πιθανότητας Ω και r_i είναι οι Rademacher συναρτήσεις στον E_2^n, ισχύει ότι*

$$
\begin{aligned}
c \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i\|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_1 \sqrt{\log n} \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i\|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

Απόδειξη: Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$
\int_\Omega |g_i(\omega)| d\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i\|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) \left(\int_\Omega |g_i(\omega)| d\omega \right) e_i\|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{E_2^n} \| \int_\Omega \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) |g_i(\omega)| e_i d\omega\|^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{E_2^n} \int_\Omega \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) |g_i(\omega)| e_i\|^2 d\omega d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} ,
\end{aligned}
$$

αν πάρουμε υπόψη μας το γεγονός οτι οι g_i στον Ω και οι $r_i|g_i|$ στον $E_2^n \times \Omega$ έχουν την ίδια κατανομή.

Για την δεύτερη ανισότητα τώρα, θέτουμε $h_i = g_i\chi_{\{|g_i|\leq\lambda\}}$ και $h_i' = g_i\chi_{\{|g_i|>\lambda\}}$ για $\lambda > 1$ το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα. Αρα, $g_i = h_i + h_i'$ και

$$\left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n h_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n h_i'(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορίζουμε $f : [-\lambda, \lambda]^n \to \mathbb{R}$, με

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)t_i e_i\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι η f είναι κυρτή, επομένως η μέγιστη τιμή της παίρνεται σε κορυφή του $[-\lambda, \lambda]^n$. Ακόμα, η f είναι άρτια και η τιμή της σε όλες τις κορυφές είναι η ίδια. Αρα,

$$f(t_1, \ldots, t_n) \leq f(\lambda, \ldots, \lambda) = \lambda\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Λόγω της ανεξαρτησίας και συμμετρίας των h_i, οι h_i και $r_i h_i$ έχουν την ίδια κατανομή στους Ω και $E_2^n \times \Omega$ αντίστοιχα. Επομένως,

$$(*) \quad \begin{aligned} \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n h_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega (\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)h_i(\omega)e_i\|^2 d\epsilon) d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{E_2^n} \lambda^2 \|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε το $\left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n h_i'(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ θα υποθέσουμε πρώτα ότι η νόρμα δίνεται από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή οτι βρισκόμαστε σε χώρο Hilbert. Τότε, πάλι λόγω ανεξαρτησίας και συμμετρίας των h_i' έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n h_i'(\omega)e_i\|_H^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |h_i'(\omega)|^2 \|e_i\|_H^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |h_i'(\omega)|^2 d\omega\right) \|e_i\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $I_1 = \int_\Omega |h_i'(\omega)|^2 d\omega$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{4}t^2 e^{\frac{-t^2}{2}} < te^{\frac{-t^2}{4}}$ για $t > 1$. Επομένως,

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_\lambda^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 4 \int_{\lambda}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt \\
&= \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda^2}{4}}^{\infty} e^{-s} ds = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστούμε και, χρησιμοποιώντας την συμμετρία των h_i' και τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) e_i \|_H^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^n I_1 \|e_i\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i \|_H^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Αν τώρα ο χώρος είναι χώρος Banach, υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ με $\|u\| \|u^{-1}\| = d(X, \ell_2^n)$, οπότε (ανάλογα με την απόδειξη της $(*)$)

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) e_i \|_X^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\Omega \| u(\sum_{i=1}^n h_i'(\omega) u^{-1}(e_i)) \|_X^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\| \left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) u^{-1}(e_i) \|_{\ell_2^n}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\| \|u^{-1}\| \left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) e_i \|_X^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\| \|u^{-1}\| c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i \|_X^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(X, \ell_2^n) c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i \|_X^2 d\epsilon \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Τώρα μπορούμε να εκτιμήσουμε το

$$
\left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\lambda + d(X, \ell_2^n) c e^{-\frac{\lambda^2}{c'}} \right) \| \sum_{i=1}^n r_i e_i \|_{L_2(X)}.
$$

Διαλέγουμε το λ έτσι ώστε $d(X, \ell_2^n) = e^{\frac{\lambda^2}{c'}}$. Τότε

$$
\left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i \|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \sqrt{\log d(X, \ell_2^n)} \| \sum_{i=1}^n r_i e_i \|_{L_2(X; E_2^n)}
$$

$$\leq \quad c_1\sqrt{\log n}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Συνδυάζοντας τις δύο προτάσεις, παίρνουμε την εκτίμηση για το ελάχιστο μέσο πλάτος:

Θεώρημα 1. *Αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει γραμμική εικόνα του $\tilde{K}$ με όγκο $|\tilde{K}| = 1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leq c\sqrt{n}\|Rad_n(X)\|\log n,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 1 γνωρίζουμε ότι

$$w(K^\circ) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

και από την Πρόταση 2,

$$\left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1\sqrt{\log n}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αρα

$$w(K^\circ) \leq \frac{c_1\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ομοια,

$$w(K) \leq \frac{c_1\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_*^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε γραμμική εικονα του K και το πολικό της (οι νόρμες βέβαια είναι αυτές που ορίζονται από τα δύο σώματα). Αν u η απεικόνιση του Λήμματος του Lewis και $\tilde{K} = u^{-1}(K)$, $\tilde{K}^\circ = u^*(K)$, τότε

$$\begin{aligned} w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) &\leq \frac{c_1^2\log n}{n}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_{\tilde{K}}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|_{(\tilde{K})^\circ}^2 d\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1^2 c\log n\|Rad_n(X)\|. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι $|\tilde{K}| = 1$ μπορούμε να δούμε ότι

$$w(\tilde{K}^\circ) \quad = \quad 2\int_{S^{n-1}}\|\theta\|\sigma(d\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 2\left(\int_{S^{n-1}} \|\theta\|^{-n}\sigma(d\theta)\right)^{-1/n} \\
&= 2\left(\frac{|D_n|}{|\tilde{K}|}\right)^{1/n} \\
&\geq \frac{c_3}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$\frac{c_3}{\sqrt{n}} w(\tilde{K}) \leq w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) \leq c_2 \log n \|Rad_n(X)\|,$$

δηλαδή

$$w(\tilde{K}) \leq c_4\sqrt{n}\log n\|Rad_n(X)\|. \quad \Box$$

Παρατήρηση. Η εκτίμηση του Pisier για την $\|Rad_n(X)\|$ μας δίνει μια πολύ καλή εκτίμηση για το ελάχιστο μέσο πλάτος:

Πόρισμα. *Κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει γραμμική εικόνα K με όγκο 1 και μέσο πλάτος $w(K) \leq c\sqrt{n}\log^2 n$.* $\Box$

Μπορεί μάλιστα κανείς να δείξει (βλέπε [Pi1]) οτι ο ένας από τους δύο λογαρίθμους στο παραπάνω Πόρισμα δεν είναι απαραίτητος. Αυτό που θα δούμε στη συνέχεια είναι οτι ούτε και η συμμετρία του K είναι απαραίτητη:

Θεώρημα 2. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $o \in \mathrm{int}(K)$. Υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο 1, τέτοια ώστε*

$$w(\tilde{K}) \leq c\sqrt{n}\log n.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K-K$ του K. Υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε $|T(K-K)| = 1$ και

$$w(T(K-K)) \leq c\sqrt{n}\log n.$$

Παρατηρούμε οτι $T(K-K) = TK - TK$, και

$$
\begin{aligned}
w(TK-TK) &= 2\int_{S^{n-1}} h_{TK-TK}(u)\sigma(du) \\
&= 2\int_{S^{n-1}} [h_{TK}(u) + h_{-TK}(u)]\sigma(du) \\
&= 2\int_{S^{n-1}} [h_{TK}(u) + h_{TK}(-u)]\sigma(du) \\
&= 2w(TK).
\end{aligned}
$$

Επίσης, από την ανισότητα των Rogers και Shephard, έχουμε

$$|TK| \geq 4^{-n}|TK-TK| = 4^{-n}.$$

Αρα, υπάρχει $c_1 \leq 4$ τέτοια ώστε το $\tilde{K} = c_1 TK$ να έχει όγκο 1. Σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$w(\tilde{K}) \leq 4w(TK) \leq 2c\sqrt{n}\log n. \quad \square$$

Παρατήρηση. Το μέσο πλάτος ενός κυρτού σώματος είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε οτι ο T στο Θεώρημα 2 είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

2.5 Χαρακτηρισμός της θέσης ελαχίστου μέσου πλάτους.

Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι $o \in \mathrm{int}K$). Λέμε οτι το K έχει *ελάχιστο μέσο πλάτος* αν $w(K) \leq w(TK)$ για κάθε $T \in SL_n$. Ενα απλό επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι μέσα σε κάθε κλάση γραμμικά ισοδύναμων σωμάτων με τον ίδιο όγκο, υπάρχει αντιπρόσωπος με ελάχιστο μέσο πλάτος. Σκοπός μας είναι να βρούμε αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε το K να έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Για απλότητα υποθέτουμε οτι η h_K είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και οτι το K είναι γνήσια κυρτό (λέμε τότε οτι το K είναι *λείο*).

Θεώρημα 1 [GM] *Ενα λείο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν*

$$(*) \qquad \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu\rangle \sigma(du) = \frac{\mathrm{tr}T}{2n} w(K)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, αυτή η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους είναι μοναδική αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Εστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Τότε, ο $(I+\varepsilon T)^*/[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους, επομένως

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u+\varepsilon Tu)\sigma(du) \geq [\det(I+\varepsilon T)]^{1/n} \int_{S^{n-1}} h_K(u)\sigma(du).$$

Ομως $h_K(u+\varepsilon Tu) = h_K(u) + \varepsilon\langle \nabla h_K(u), Tu\rangle + O(\varepsilon^2)$ και $[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n} = 1 + \varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O(\varepsilon^2)$, οπότε αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$(**) \qquad \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu\rangle \sigma(du) \geq \frac{\mathrm{tr}T}{2n} w(K).$$

Αντικαθιστώντας τον T με $-T$ στην $(**)$, βλέπουμε οτι ισχύει ισότητα στην $(*)$ για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε οτι η $(*)$ ισχύει. Θεωρούμε $T \in SL_n$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε οτι ο T^* είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τότε,

$$w(TK) = 2\int_{S^{n-1}} h_{TK}(u)\sigma(du) = 2\int_{S^{n-1}} h_K(T^*u)\sigma(du).$$

Ομως, $\nabla h_K(u)$ είναι το μοναδικό σημείο του συνόρου του K στο οποίο το u είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του K (βλέπε [Sch], σελ. 44). Ειδικότερα, $\nabla h_K(u) \in K$, και αυτό έχει σαν συνέπεια την

$$\langle \nabla h_K(u), z\rangle \leq h_K(z)$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Επεται οτι

$$w(TK) \geq 2\int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), T^* u\rangle \sigma(du) = \frac{\mathrm{tr}T^*}{n} w(K) \geq w(K).$$

Αυτό δείχνει οτι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Επιπλέον, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε να έχουμε ισότητα μόνο αν ο T είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Αυτό αποδεικνύει την μοναδικότητα της θέσης ελάχιστου μέσου πλάτους αν εξαιρέσουμε $U \in O(n)$. $\Box$

Θεωρούμε το μέτρο ν_K στην S^{n-1} με πυκνότητα h_K ως προς το σ. Θα αποδείξουμε οτι ένα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν το ν_K είναι ισοτροπικό, δηλαδή αν το $\int_{S^{n-1}} \langle u, \theta\rangle^2 \nu_K(du)$ είναι ανεξάρτητο από το $\theta \in S^{n-1}$.

Για τον σκοπό αυτό δίνουμε πρώτα μερικούς ορισμούς (βλέπε [Gr1] για τις λεπτομέρειες): Εστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. Γράφουμε $\hat{f}$ για τον περιορισμό της f στην S^{n-1}. Αν μια συνάρτηση F είναι ορισμένη στην S^{n-1}, η ακτινική επέκταση f της F στο $\mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ ορίζεται μέσω της $f(x) = F(x/|x|)$. Αν η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στην S^{n-1}, ορίζουμε

$$\Delta_o F = \widehat{\Delta f} \quad \textit{και} \quad \nabla_o F = \widehat{\nabla f},$$

όπου f είναι η ακτινική επέκταση της F. Ο Δ_o είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami. Από τον τύπο του Green έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} F\Delta_o G = \int_{S^{n-1}} G\Delta_o F = -\int_{S^{n-1}} \langle \nabla_o F, \nabla_o G\rangle.$$

Λήμμα 1. *Εστω K λείο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$I_K(\theta) = \int_{S^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), \theta\rangle \langle u, \theta\rangle \sigma(du) \quad , \quad \theta \in S^{n-1}.$$

Τότε,

$$\frac{w(K)}{2} + I_K(\theta) = (n+1)\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2 \sigma(du)$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Απόδειξη: Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \langle x, \theta\rangle^2/2$. Αμεσος υπολογισμός δείχνει οτι

$$(*) \qquad (\nabla_\circ \hat{f})(u) = \langle u, \theta\rangle \theta - \langle u, \theta\rangle^2 u$$

και

$$(**) \qquad (\Delta_\circ \hat{f})(u) = 1 - n\langle u, \theta\rangle^2.$$

Αφού η h_K είναι θετικά ομογενής βαθμού 1, έχουμε $(\nabla_\circ \hat{h_K})(u) = \nabla h_K(u) - h_K(u)u$ και $h_K(u) = \langle \nabla h_K(u), u\rangle$, $u \in S^{n-1}$. Από την $(*)$ προκύπτει οτι

$$\langle (\nabla_\circ \hat{f})(u), (\nabla_\circ \hat{h_K})(u)\rangle = \langle \nabla h_K(u), \theta\rangle\langle u, \theta\rangle - h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στη σφαίρα και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, βλέπουμε οτι

$$I_K(\theta) - \int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2 \sigma(du) = -\int_{S^{n-1}} h_K(u)(\Delta_\circ \hat{f})(u)\sigma(du),$$

το οποίο είναι ίσο με

$$-\frac{w(K)}{2} + n\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2 \sigma(du)$$

λόγω της $(**)$. □

Θεώρημα 2. *Ενα λείο κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν*

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u, \theta\rangle^2 \sigma(du) = \frac{w(K)}{2n}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ (ισοδύναμα, αν το ν_K είναι ισοτροπικό).

Απόδειξη: (Περιγραφή) Εύκολα ελέγχουμε οτι η ισότητα του Θεωρήματος 1 ισχύει για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ αν και μόνο αν

$$I_K(\theta) = \frac{w(K)}{2n}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Το ζητούμενο είναι τώρα συνέπεια του Θεωρήματος 1 και του Λήμματος 1. □

3. ΕΝΤΡΟΠΙΑ

3.1 Αριθμοί κάλυψης: η ανισότητα του Sudakov και η δυική της.

Εστω K και W δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Μας ενδιαφέρει ο ελάχιστος αριθμός μεταφορών του εW, $\varepsilon > 0$, που αρκούν για να καλύψουμε το K. Ορίζουμε λοιπόν τον *ε-αριθμό κάλυψης* $N(K, \varepsilon W)$ μέσω της

$$(1) \qquad N(K, \varepsilon W) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n : K \subseteq \cup(x_i + \varepsilon W)\},$$

αν δεν μας ενδιαφέρει η θέση των κέντρων x_i. Αν θέλουμε τα κέντρα x_i να ανήκουν στο K, θέτουμε

$$(2) \qquad \overline{N}(K, \varepsilon W) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \ldots, x_N \in K : K \subseteq \cup(x_i + \varepsilon W)\}.$$

Παρατηρήσεις. (i) Οι $N(K, \varepsilon W)$ και $\overline{N}(K, \varepsilon W)$ είναι φθίνουσες συναρτήσεις του ε.

(ii) Από τους παραπάνω ορισμούς είναι σαφές οτι

$$(3) \qquad N(K, \varepsilon W) \leq \overline{N}(K, \varepsilon W).$$

Μπορούμε όμως να δούμε οτι οι δύο αριθμοί κάλυψης είναι ουσιαστικά συγκρίσιμοι:

$$(4) \qquad \overline{N}(K, 2\varepsilon W) \leq N(K, \varepsilon W).$$

Απόδειξη: Θέτουμε $N = N(K, \varepsilon W)$. Υπάρχουν $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $K \subseteq \cup(x_i + \varepsilon W)$. Για κάθε $i = 1, \ldots, N$, πρέπει να ισχύει

$$K \cap (x_i + \varepsilon W) \neq \emptyset,$$

γιατί αλλιώς τα $x_j + \varepsilon W$, $j \neq i$ θα κάλυπταν το K (και θα ήταν λιγότερα από N). Επομένως, για κάθε $i \leq N$ υπάρχει $y_i \in K$ τέτοιο ώστε $\|x_i - y_i\|_W \leq \varepsilon$. Εστω $x \in K$. Υπάρχει $i \leq N$ τέτοιο ώστε $\|x - x_i\|_W \leq \varepsilon$, και από την τριγωνική ανισότητα, $\|x - y_i\|_W \leq 2\varepsilon$. Αρα,

$$K \subseteq \cup_{i \leq N}(y_i + 2\varepsilon W).$$

Δηλαδή, $\overline{N}(K, 2\varepsilon W) \leq N$. $\square$

(iii) Οι αριθμοί κάλυψης N ικανοποιούν την εξής πολλαπλασιαστική ανισότητα: Αν K, V και W είναι συμμετρικά κυρτά σώματα και $\varepsilon, \theta > 0$, τότε

$$(5) \qquad N(K, \varepsilon\theta W) \leq N(K, \varepsilon V) N(V, \theta W).$$

Απόδειξη: Θέτουμε $N_1 = N(K, \varepsilon V)$ και $N_2 = N(V, \theta W)$. Υπάρχουν $x_1, \ldots, x_{N_1} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq (x_1 + \varepsilon V) \cup \ldots \cup (x_{N_1} + \varepsilon V),$$

και $y_1, \ldots, y_{N_2} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$V \subseteq (y_1 + \theta W) \cup \ldots \cup (y_{N_2} + \theta W).$$

Θεωρούμε τα σημεία $x_i + \varepsilon y_j$. Το πλήθος τους είναι το πολύ $N_1 N_2$, και

$$\begin{aligned} K &\subseteq \cup_{i\leq N_1}(x_i+\varepsilon V)\subseteq \cup_{i\leq N_1}(x_i+\varepsilon\cup_{j\leq N_2}(y_j+\theta W)) \\ &\subseteq \cup_{i,j}(x_i+\varepsilon y_j+\varepsilon\theta W). \end{aligned}$$

Αρα, $N(K,\varepsilon\theta W)\leq N_1N_2$. $\square$

(iv) Ενας τρόπος για να εκτιμήσουμε τον $\overline{N}(K,\varepsilon W)$ είναι ο εξής: Θεωρούμε το μέγιστο πλήθος σημείων του K που ανά δύο απέχουν περισσότερο από ε ως προς την $\|\cdot\|_W$. Ενα τέτοιο σύνολο λέγεται *ε-δίκτυο ως προς την* $\|\cdot\|_W$.

Εστω $x_1,\dots,x_N$ ένα maximal ε-δίκτυο ως προς την $\|\cdot\|_W$ στο K. Τότε,

$$K\subseteq \cup_{i\leq N}(x_i+\varepsilon W). \tag{6}$$

Αλλιώς θα υπήρχε $x\in K$ με την ιδιότητα $\|x-x_i\|_W>\varepsilon$, $i=1,\dots,N$, και τα $x_1,\dots,x_N,x$ θα έδιναν ένα ε-δίκτυο με περισσότερα στοιχεία.

Από την (6) έπεται οτι $\overline{N}(K,\varepsilon W)\leq N$.

Σκοπός μας είναι να δώσουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων με βάση το μέσο πλάτος. Σύμφωνα με την παρατήρηση (iii), είναι αρκετό να εκτιμήσουμε τους $N(K,tD_n)$ και $N(D_n,tK)$:

Θεώρημα 1 (Sudakov) *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$\log N(K,tD_n)\leq cn\left(\frac{w(K)}{t}\right)^2, \tag{7}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Η αρχική απόδειξη της ανισότητας του Sudakov [Su] προέρχεται από την θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων. Αργότερα ο Talagrand (βλέπε [LT]) έδωσε μία σχετικά απλή απόδειξη της δυϊκής ανισότητας:

Θεώρημα 2. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$\log N(D_n,tK)\leq cn\left(\frac{w(K^\circ)}{t}\right)^2, \tag{8}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Θα δώσουμε πρώτα την απόδειξη του Θεωρήματος 2, από το οποίο έπεται και το Θεώρημα 1 με βάση ένα επιχείρημα δυϊσμού της N. Tomczak-Jaegermann.
Το επιχείρημα του Talagrand χρησιμοποιεί το μέτρο του Gauss γ_n που ορίζεται στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ από την

$$\gamma_n(A)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_A \exp(-|x|^2/2)dx. \tag{9}$$

Χρησιμοποιώντας την (9) βλέπουμε οτι το γ_n έχει δύο ιδιότητες: είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς και ταυτόχρονα είναι γινόμενο των αντίστοιχων μονοδιάστατων μέτρων γ_1.

Λήμμα. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\gamma_n(K) \geq \gamma_n(K+z) \geq \exp(-|z|^2/2)\gamma_n(K). \tag{10}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση $x \mapsto \exp(-|x|^2/2)$ είναι άρτια, ολοκληρώσιμη, και για κάθε $t > 0$ το σύνολο

$$\{x \mid \exp(-|x|^2/2) \geq t\}$$

είναι Ευκλείδεια μπάλα. Από την ανισότητα του Anderson (βλέπε Κεφάλαιο 1) έπεται οτι, για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \gamma_n(K) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-|x|^2) dx \\ &\geq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{K+z} \exp(-|x|^2/2) dx \\ &= \gamma_n(K+z). \end{aligned}$$

Για την δεύτερη ανισότητα, χρησιμοποιώντας την συμμετρία του K βλέπουμε οτι

$$\gamma_n(K+z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-|z+x|^2/2) dx \; = \; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-|z-x|^2/2) dx,$$

ή, παίρνοντας το ημιάθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων,

$$\gamma_n(K+z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \frac{\exp(-|z+x|^2/2) + \exp(-|z-x|^2/2)}{2} dx.$$

Η εκθετική συνάρτηση είναι κυρτή, επομένως

$$\begin{aligned} \gamma_n(K+z) &\geq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-[|x+z|^2 + |x-z|^2]/4) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-|x|^2/2 - |z|^2/2) dx \\ &= \exp(-|z|^2/2) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K \exp(-|x|^2/2) dx \\ &= \exp(-|z|^2/2)\gamma_n(K). \quad \square \end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2: Εστω $x_1, \ldots, x_N$ ένα σύνολο σημείων της D_n, maximal ως προς την

$$\|x_i - x_j\|_K > t \quad , \quad i \neq j.$$

Αυτό σημαίνει οτι τα $x_i + \frac{t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά. Επεται οτι, για κάθε $\lambda > 0$, τα $\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K$ έχουν ξένα εσωτερικά, και αφού το γ_n είναι μέτρο πιθανότητας,

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_n(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K) = \gamma_n\left(\cup_{i=1}^{N}(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K)\right) \leq 1. \tag{11}$$

Κάθε $x_i \in D_n$, άρα $|\lambda x_i| \leq \lambda$, $i = 1, \ldots, N$. Από το Λήμμα παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda x_i + \frac{\lambda t}{2}K) \geq \exp(-\lambda^2/2)\gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K) \quad , \quad i = 1, \ldots, N.$$

Επομένως, η (11) δίνει ένα άνω φράγμα για το N: Για κάθε $\lambda > 0$,

$$N \leq \frac{\exp(\lambda^2/2)}{\gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K)}. \tag{12}$$

Επιλέγουμε το $\lambda > 0$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) &\leq c\sqrt{n}\int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K \sigma(d\theta) \\ &= c\sqrt{n}w(K^\circ), \end{aligned}$$

οπότε η ανισότητα του Chebyshev δίνει

$$\gamma_n(\|x\|_K \geq \lambda t/2) \leq \frac{2}{\lambda t}\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) \leq \frac{2c\sqrt{n}}{\lambda t}w(K^\circ),$$

δηλαδή

$$1 - \gamma_n(\frac{\lambda t}{2}K) \leq \frac{2c\sqrt{n}}{\lambda t}w(K^\circ).$$

Παίρνοντας $\lambda = 4c\sqrt{n}w(K^\circ)/t$, έχουμε

$$\gamma_n\left(2c\sqrt{n}w(K^\circ)K\right) \geq \frac{1}{2},$$

και από την (12),

$$N \leq 2\exp\left(8c^2 n w^2(K^\circ)/t^2\right).$$

Σύμφωνα τώρα με τις παρατηρήσεις (ii) και (iv),

$$\log N(D_n, tK) \leq \log \overline{N}(D_n, tK) \leq \log N \leq 8c^2 n \left(\frac{w(K^\circ)}{t}\right)^2. \quad \square$$

Ενας άλλος τρόπος διατύπωσης του Θεωρήματος 2 είναι ο εξής:

$$\sup_{t>0} t\left(\log \overline{N}(D_n, tK)\right)^{1/2} \leq c\sqrt{n}w(K^\circ),$$

ανισότητα που αν εφαρμοστεί για το K° παίρνει τη μορφή

$$A := \sup_{t>0} t\left(\log \overline{N}(D_n, tK^\circ)\right)^{1/2} \leq c\sqrt{n}w(K). \tag{13}$$

Η N. Tomczak-Jaegermann (βλέπε [PT]) παρατήρησε μια ακριβή σχέση δυϊσμού ανάμεσα στους αριθμούς κάλυψης $N(K, tD_n)$ και $N(D_n, tK^\circ)$:

Θεώρημα 3. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$B = \sup_{t>0} t\left(\log N(K, tD_n)\right)^{1/2}.$$

Τότε, $B \leq 10A$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα οτι

$$2K \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ) \subseteq tD_n.$$

Γιατί, αν $x \in 2K$ και $x \in (t^2/2)K^\circ$, τότε

$$|x|^2 = \langle x, x\rangle \leq \|x\|_K \|x\|_{K^\circ} \leq 2\frac{t^2}{2} = t^2.$$

Επεται οτι

$$\overline{N}(K, tD_n) \leq \overline{N}(K, (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ)). \tag{14}$$

Η επόμενη παρατήρηση είναι οτι

$$\overline{N}(K, (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ)) = \overline{N}(K, \frac{t^2}{2}K^\circ). \tag{15}$$

[Ο λόγος είναι οτι, αν $x_1, \ldots, x_N \in K$ και $K \subseteq \cup_{i\leq N}(x_i + \frac{t^2}{2}K^\circ)$, τότε για κάθε $y \in K$ υπάρχει $i \leq N$ τέτοιο ώστε $y - x_i \in \frac{t^2}{2}K^\circ$, όμως $y - x_i \in 2K$ οπότε $y \in (x_i + (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ))$, δηλαδή

$$K \subseteq \cup_{i=1}^N (x_i + (2K) \cap (\frac{t^2}{2}K^\circ)).]$$

Παίρνοντας υπόψιν τις (14), (15) και τις αρχικές μας παρατηρήσεις για τους αριθμούς κάλυψης, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} N(K, tD_n) &\leq \overline{N}(K, tD_n) \leq \overline{N}(K, \frac{t^2}{2}K^\circ) \\ &\leq N(K, \frac{t^2}{4}K^\circ) \leq N(K, 2tD_n)N(D_n, \frac{t}{8}K^\circ). \end{aligned}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους και κάνοντας απλές πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} t^2\log N(K,tD_n) &\leq \frac{1}{4}(2t)^2\log N(K,2tD_n)+64(t/8)^2\log N(D_n,\frac{t}{8}K^\circ) \\ &\leq \frac{1}{4}(2t)^2\log N(K,2tD_n)+64A^2, \end{aligned}$$

και παίρνοντας sup ως προς $t>0$ καταλήγουμε στην

$$3B^2 \leq 256A^2. \quad \Box$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1: Από το Θεώρημα 3 και την (13), για κάθε $t>0$ έχουμε

$$t^2\log N(K,tD_n)\leq 100A^2\leq cnw^2(K),$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά. $\Box$

Η ανισότητα του Sudakov γενικεύεται για μη-συμμετρικά κυρτά σώματα. Η παρατήρηση αυτή θα μας χρειαστεί στη συνέχεια:

Πρόταση 4. *Εστω K κυρτό σώμα, με $o\in \mathrm{int}(K)$. Για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$t^2\log N(K,tD_n)\leq cnw^2(K),$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K-K$ του K. Τότε,

$$\begin{aligned} w(K-K) &= 2\int_{S^{n-1}} h_{K-K}(u)\sigma(du) \\ &= 2\int_{S^{n-1}} [h_K(u)+h_{-K}(u)]\sigma(du) \\ &= 2\int_{S^{n-1}} [h_K(u)+h_K(-u)]\sigma(du) \\ &= 2w(K). \end{aligned}$$

Αφού $o\in \mathrm{int}(K)$, έχουμε $K\subseteq K-K$ και η ανισότητα του Sudakov μας δίνει

$$t^2\log N(K,tD_n)\leq t^2\log N(K-K,tD_n)\leq cnw^2(K-K)=4cnw^2(K). \quad \Box$$

3.2 Η διάσπαση Dudley-Fernique.

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε οτι $o\in K$ και γράφουμε R για την διάμετρο του K. Για κάθε $j\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε πεπερασμένο υποσύνολο N_j του K τέτοιο ώστε

$$|N_j|=\overline{N}(K,(R/2^j)D_n),$$

και

$$K\subseteq \cup_{y\in N_j}(y+\frac{R}{2^j}D_n).$$

Τέλος, ορίζουμε

$$Z_j = N_j - N_{j-1} = \{y - y' \mid y \in N_j, y' \in N_{j-1}\}.$$

Λήμμα. *Για κάθε $x \in K$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in Z_j \cap (3R/2^j)D_n$, $j = 1, \ldots, m$ και $w_m \in (R/2^m)D_n$ τέτοια ώστε*

$$x = z_1 + \ldots + z_m + w_m.$$

Απόδειξη: Εστω $x \in K$. Από τον ορισμό του N_j, μπορούμε να βρούμε $y_j \in N_j$, $j = 1, \ldots, m$, τέτοιο ώστε

$$|x - y_j| \leq \frac{R}{2^j}.$$

Παρατηρήστε οτι σαν N_0 μπορούμε να πάρουμε το $\{o\}$. Γράφουμε

$$x = o + (y_1 - o) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_m - y_{m-1}) + (x - y_m).$$

Θέτουμε $y_0 = o$ και

$$w_m = x - y_m \quad , \quad z_j = y_j - y_{j-1} \quad , \quad j = 1, \ldots, m.$$

Τότε, $|w_m| = |x - y_m| \leq R/2^m$, και $z_j \in N_j - N_{j-1} = Z_j$. Επίσης,

$$|z_j| \leq |x - y_j| + |x - y_{j-1}| \leq \frac{R}{2^j} + \frac{R}{2^{j-1}} = \frac{3R}{2^j}.$$

Τέλος,

$$x = z_1 + \ldots + z_m + w_m. \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα του Sudakov (Πρόταση 3.1.4) μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα (διάσπαση Dudley-Fernique):

Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $o \in K$ και διάμετρο R. Υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $Z_j, j \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε*

$$\log |Z_j| \leq cn \left(\frac{2^j w(K)}{R} \right)^2,$$

που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in K$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in Z_j \cap (3R/2^j)D_n$, $j = 1, \ldots, m$ και $w_m \in (R/2^m)D_n$ τέτοια ώστε

$$x = z_1 + \ldots + z_m + w_m.$$

Η κατασκευή αυτή είναι απλή, αλλά πολύ χρήσιμη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε δύο εφαρμογές της στην εκτίμηση του μέσου πλάτους και της σταθεράς ισοτροπίας ενός κυρτού σώματος. Παρατηρήστε οτι η συμμετρία του K δεν είναι καθόλου απαραίτητη: η ανισότητα του Sudakov και η διάσπαση Dudley-Fernique αποδεικνύονται, όπως είδαμε, και για μη συμμετρικά σώματα.

4. Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΟΥ

4.1 Η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος.

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το o. Δηλαδή,

$$\int_K x_i dx = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ο τελεστής $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος:

$$\langle M(y), y\rangle = \int_K \langle x, y\rangle^2 dx \geq 0,$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, και αφού το K έχει μη κενό εσωτερικό, ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $y = o$. Ο πίνακας $M(K)$ που αντιστοιχεί στον M λέγεται *πίνακας αδρανείας* του K. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
[M(K)]_{ij} &= \langle M(e_j), e_i\rangle \\
&= \langle \int_K \langle x, e_j\rangle x dx, e_i\rangle \\
&= \int_K \langle x, e_j\rangle\langle x, e_i\rangle dx \\
&= \int_K x_i x_j dx.
\end{aligned}$$

Αφού ο $M(K)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος S τέτοιος ώστε $M = S^2$. Θεωρούμε την γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Το $\tilde{K}$ έχει κι αυτό σαν κέντρο βάρους το o, και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx \\
&= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx \\
&= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle x dx, S^{-1}y\rangle \\
&= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle M S^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |\mathrm{det} S|^{-1} |y|^2.
\end{aligned}$$

Ορισμός. Ενα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο βάρους το o, και ικανοποιεί την *ισοτροπική συνθήκη*

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = A|y|^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, όπου $A > 0$ σταθερά.

Η συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού δείχνει οτι κάθε κυρτό σώμα έχει affine εικόνα που είναι ισοτροπική. Δεν έχουμε παρά να πάρουμε μεταφορά του με κέντρο βάρους το o, την γραμμική της εικόνα που περιγράψαμε, και να κανονικοποιήσουμε τον όγκο της τελευταίας. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει οτι η *ισοτροπική θέση* ενός σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχίστου:

Θεώρημα 1. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το o. Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν*

$$\int_K |x|^2 dx \leq \int_{TK} |x|^2 dx$$

για κάθε $T \in SL_n$. Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει affine ισοτροπική εικόνα. Επιπλέον, η ισοτροπική αυτή εικόνα είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα οτι το K είναι ισοτροπικό, δηλαδή υπάρχει σταθερά $A > 0$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = A \quad , \quad \theta \in S^{n-1}.$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(**) \qquad \int_K \langle x, Tx\rangle dx = A(\mathrm{tr}T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: Η $(*)$ με $\theta = e_j$ και $\theta = (e_i + e_j)/\sqrt{2}$ δίνει

$$\int_K x_i x_j dx = A\delta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Αν $T = (t_{ij})$, τότε

$$\begin{aligned} \int_K \langle x, Tx\rangle dx &= \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \int_K x_i x_j dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n A t_{ij} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n A t_{ii} = A(\mathrm{tr}T). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε οτι ισχύει η $(**)$ και την εφαρμόσουμε για τον $Tx = \langle x, \theta\rangle\theta$, $\theta \in S^{n-1}$, παίρνουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx = A\mathrm{tr}T = A|\theta|^2 = A.$$

Εστω $T \in SL_n$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{TK} |x|^2 dx &= \int_K |Tx|^2 dx = \int_K \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= A\mathrm{tr}(T^*T) \geq nA = \int_K |x|^2 dx,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geq n[\det(T^*T)]^{1/n}$$

(το ίχνος είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών και η ορίζουσα το γινόμενό τους, και στην συγκεκριμμένη περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί). Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $T^*T = I$, δηλαδή αν $T \in O(n)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε οτι το K είναι λύση του προβλήματος ελαχίστου (τέτοιες λύσεις υπάρχουν: κάθε ισοτροπική θέση του K είναι όπως είδαμε μια τέτοια λύση). Εστω $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε ο $(I + \varepsilon T)/[\det(I + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Αρα,

$$(***) \qquad \int_K |x|^2 dx \leq \int_K \frac{|x + \varepsilon Tx|^2}{[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε οτι $|x + \varepsilon Tx|^2 = |x|^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O(\varepsilon^2)$ και

$$[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O(\varepsilon^2)$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Ετσι, η $(***)$ παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K |x|^2 dx \leq \varepsilon\int_K \langle x, Tx\rangle dx + O(\varepsilon^2),$$

και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$ καταλήγουμε στην

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K |x|^2 dx \leq \int_K \langle x, Tx\rangle dx.$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για τον $-T$, και λόγω γραμμικότητας καταλήγουμε στην

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K |x|^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx, \quad , \quad T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει όπως είδαμε οτι το K είναι ισοτροπικό.

Τέλος, αν έχουμε δύο ισοτροπικές θέσεις K, K' του ίδιου σώματος, τότε η μία είναι ορθογώνια εικόνα της άλλης. Αυτό γιατί αν $K' = TK$, τότε ισχύει ισότητα στην

$$\int_K |x|^2 dx \leq \int_{TK} |x|^2 dx,$$

και αυτό σημαίνει οτι $T^*T = I$, δηλαδή $T \in O(n)$. $\square$

Παρατήρηση. Η απόδειξη δείχνει οτι ένα σώμα ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη αν και μόνο αν ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού.

Το Θεώρημα 1 (πιό συγκεκριμένα, η μοναδικότητα της ισοτροπικής θέσης ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) εξασφαλίζει οτι η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n} \min\{\frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} |x|^2 dx \;\mid\; T \in GL_n\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του K αν υποθέσουμε οτι έχει κέντρο βάρους το o. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται *σταθερά ισοτροπίας* του σώματος K (πιό καλά, της γραμμικής κλάσης του K).

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει διατυπώθηκε από τον J. Bourgain:

Εικασία: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το o, $L_K \leq C$. Ισοδύναμα, αν K είναι ένα ισοτροπικό σώμα, τότε*

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leq C^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Παρατηρήστε οτι ζητάμε η σταθερά C να μην εξαρτάται ούτε από το σώμα K ούτε από την διάσταση n. Οπως θα δούμε, το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με πολλά άλλα γνωστά προβλήματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με την παρατήρηση οτι αντίστροφη εκτίμηση ισχύει και είναι σχετικά απλή. Επομένως, αυτό που ισχυρίζεται η εικασία είναι οτι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των κυρτών σωμάτων είναι (ομοιόμορφα ως προς n) της τάξης του 1.

Πρόταση 1 [MP] *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$L_K \geq L_{D_n} \geq c,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αν $r = \omega_n^{-1/n}$, τότε $|rD_n| = 1$, και το rD_n είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα. Εστω K τυχόν ισοτροπικό κυρτό σώμα. Παρατηρήστε οτι $|x| > r$ στο $K\backslash rD_n$ και $|x| \leq r$ στο $rD_n\backslash K$. Αφού τα K και rD_n έχουν τον ίδιο όγκο, έχουμε $|K\backslash rD_n| =$

$|rD_n\backslash K|$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω βλέπουμε οτι

$$\begin{aligned} nL_K^2 &= \int_K |x|^2 dx \\ &= \int_{K\cap rD_n} |x|^2 dx + \int_{K\backslash rD_n} |x|^2 dx \\ &\geq \int_{K\cap rD_n} |x|^2 dx + \int_{rD_n\backslash K} |x|^2 dx \\ &= \int_{rD_n} |x|^2 dx = nL_{D_n}^2 . \end{aligned}$$

Ενας απλός υπολογισμός δείχνει οτι

$$L_{D_n}^2 = \frac{1}{n}\int_{rD_n} |x|^2 dx = \frac{1}{n}\frac{n\omega_n}{n+2} r^{n+2} = \frac{\omega_n^{-2/n}}{n+2} \geq c^2,$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά, οπότε $L_K \geq L_{D_n} \geq c$. $\square$

4.2 Βασικές ιδιότητες ισοτροπικών σωμάτων.

(α) *Τομές ενός ισοτροπικού σώματος.*

Εστω K κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το o, και $\theta \in S^{n-1}$. Οπως είδαμε στην παράγραφο 1.2.2, η συνάρτηση

$$f(t) = |K \cap (\theta^{\perp} + t\theta)|$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της (η ιδιότητα αυτή της f είναι συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski, και αυτό είναι το πρώτο σημείο στο οποίο η κυρτότητα μπαίνει ουσιαστικά στην συζήτηση). Οπως θα δούμε, υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στον όγκο της κεντρικής τομής $|K \cap \theta^{\perp}|$ και σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx \quad , \quad p \geq 1.$$

Η σχέση αυτή γίνεται σαφής αν, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fubini, γράψουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα στη μορφή

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |t|^p f(t) dt.$$

Λήμμα 1(Hardy). *Εστω $f, g : [0,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_0^b f(t)dt = \int_0^b g(t)dt$ και για κάθε $s \in [0,b]$*

$$\int_0^s g(t)dt \geq \int_0^s f(t)dt.$$

Τότε, για κάθε $h : [0, b] \to \mathbb{R}^+$ *αύξουσα και μετρήσιμη, έχουμε*

$$\int_0^b h(t)g(t)dt \leq \int_0^b h(t)f(t)dt.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $\phi(t) = h(b) - h(t)$. Η ϕ είναι φθίνουσα, μη αρνητική, και υπάρχει αύξουσα ακολουθία φθινουσών απλών ϕ_n με $\phi_n \to \phi$ σχεδόν παντού. Παίρνοντας υπόψη το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, αρκεί να δείξουμε οτι

$$\int_0^b \phi_n(t)g(t)dt \geq \int_0^b \phi_n(t)f(t)dt.$$

Γιατί τότε,

$$\begin{aligned}
\int_0^b h(t)g(t)dt &= h(b)\int_0^b g(t)dt - \int_0^b \phi(t)g(t)dt \\
&= h(b)\int_0^b f(t)dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^b \phi_n(t)g(t)dt \\
&\leq h(b)\int_0^b f(t)dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^b \phi_n(t)f(t)dt \\
&= h(b)\int_0^b f(t)dt - \int_0^b \phi(t)f(t)dt \\
&= \int_0^b h(t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Υπάρχουν $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ και $a_1 > \ldots > a_n \geq 0$ τέτοιοι ώστε

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{I_i}(t),$$

όπου $I_i = [t_{i-1}, t_i)$. Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^N b_i \chi_{[0,t_i)}(t),$$

όπου $b_i = a_i - a_{i+1} \geq 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, και $b_N = a_N$. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^b \phi_n(t)g(t)dt &= \sum_{i=1}^N b_i \int_0^{t_i} g(t)dt \\
&\geq \sum_{i=1}^N b_i \int_0^{t_i} f(t)dt \\
&= \int_0^b \phi_n(t)f(t)dt. \quad \square
\end{aligned}$$

Πρόταση 1 [MP] *Εστω K κυρτό σώμα με όγκο 1 και κέντρο βάρους το o. Για κάθε $p>0$ και κάθε $\theta\in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \geq \frac{1}{2e(p+1)^{1/p}}\frac{1}{|K\cap\theta^{\perp}|}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $B=\int_0^{+\infty} f(t)dt$ όπου $f(t)=|K\cap(\theta^{\perp}+t\theta)|$, και ορίζουμε

$$g(t)=\|f\|_{\infty}\chi_{[0,B/\|f\|_{\infty}]}(t).$$

Τότε, οι f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος (έχουν και οι δύο φορέα κάποιο διάστημα της μορφής $[0,b]$), και παίρνοντας σαν αύξουσα συνάρτηση την $h(t)=t^p$ στο $[0,b]$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} t^p f(t)dt \geq \int_0^{B/\|f\|_{\infty}} t^p\|f\|_{\infty}dt = \frac{B^{p+1}}{(p+1)\|f\|_{\infty}^p}.$$

Τελείως ανάλογα, αν $A=\int_{-\infty}^0 f(t)dt$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^0 |t|^p f(t)dt \geq \frac{A^{p+1}}{(p+1)\|f\|_{\infty}^p}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βλέπουμε οτι

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx \geq \frac{B^{p+1}+A^{p+1}}{(p+1)\|f\|_{\infty}^p}.$$

Ομως, $A+B=|K|=1$, επομένως

$$A^{p+1}+B^{p+1}\geq 2^{-p}.$$

Αρα,

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \geq \frac{1}{2(p+1)^{1/p}}\frac{1}{\|f\|_{\infty}},$$

και το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα που ακολουθεί. $\Box$

Λήμμα 2 [MM] *Εστω K κυρτό σώμα με όγκο 1 και κέντρο βάρους το o. Αν $\theta\in S^{n-1}$ και $f(t)=|K\cap(\theta^{\perp}+t\theta)|$, τότε*

$$\|f\|_{\infty}\leq ef(0)=e|K\cap\theta^{\perp}|.$$

Απόδειξη: Εστω $[-a,b]$ ο φορέας της f όπου $a,b>0$, και $\|f\|_{\infty}=f(t_0)$. Θα δείξουμε οτι

$$f(0)\geq\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}f(t_0)\geq\frac{1}{e}f(t_0).$$

Αντικαθιστώντας το θ με $-\theta$ αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $0 < t_0 \leq b$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε οτι $f(0) < f(t_0)$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε). Αφού το K έχει κέντρο βάρους το o, έχουμε

$$\int_{-a}^{b} t[f(t)]dt = \int_K \langle x, \theta\rangle dx = 0.$$

Επομένως,

$$\int_{-a}^{0} (-t)[f(t)]dt = \int_{0}^{b} t[f(t)]dt \geq \int_{0}^{t_0} t[f(t)]dt.$$

Θέτουμε $h = f^{\frac{1}{n-1}}$ και θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση g που ικανοποιεί τις $g(0) = h(0)$ και $g(t_0) = h(t_0)$. Η h είναι κοίλη (από την ανισότητα Brunn-Minkowski), άρα, $g \geq h$ στο $[-a, 0]$ και $g \leq h$ στο $[0, t_0]$. Αφού $g(0) < g(t_0)$, η g είναι γνήσια αύξουσα και μηδενίζεται σε κάποιο $-\gamma < -a$. Δηλαδή, $g(t) = c(t+\gamma)$, για κάποιο $c > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma}^{0} (-t)[g(t)]^{n-1}dt &\geq \int_{-a}^{0} (-t)[g(t)]^{n-1}dt \\
&\geq \int_{-a}^{0} (-t)[h(t)]^{n-1}dt \\
&\geq \int_{0}^{t_0} t[h(t)]^{n-1}dt \\
&\geq \int_{0}^{t_0} t[g(t)]^{n-1}dt.
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει οτι

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{-\gamma}^{t_0} t[g(t)]^{n-1}dt \\
&= c^{n-1}\int_{-\gamma}^{t_0} t(t+\gamma)^{n-1}dt \\
&= c^{n-1}\int_{0}^{\gamma+t_0} t^{n-1}(t-\gamma)dt \\
&= c^{n-1}\left(\frac{(\gamma+t_0)^{n+1}}{n+1} - \gamma\frac{(\gamma+t_0)^n}{n}\right),
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει οτι

$$t_0 \leq \frac{\gamma}{n}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\frac{f(0)}{f(t_0)} &= \left(\frac{g(0)}{g(t_0)}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{\gamma}{\gamma+t_0}\right)^{n-1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Πρόταση 2 [MP] *Εστω K κυρτό σώμα με όγκο 1 και κέντρο βάρους το o. Για κάθε $p\geq 1$ και κάθε $\theta\in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{cp}{|K\cap\theta^{\perp}|},$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Οπως και στην απόδειξη της Πρότασης 1, ορίζουμε

$$B=\int_0^{\infty} f(t)dt \quad , \quad A=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτη, αν υπάρχει $s>0$ με την ιδιότητα $f(s)=f(0)/2$. Αυτό για παράδειγμα συμβαίνει οπωσδήποτε αν το K είναι γνήσια κυρτό. Παρατηρούμε οτι

$$a=\int_0^{\infty} f(t)dt \geq \int_0^{s} f(t)dt \geq sf(s)=sf(0)/2,$$

γιατί από το γεγονός οτι η f είναι λογαριθμικά κοίλη έπεται εύκολα οτι $f(t)\geq f(s)$ στο $[0,s]$. Από την άλλη πλευρά, αν $t>s$, τότε γράφοντας $s=(1-\frac{s}{t})0+\frac{s}{t}t$ παίρνουμε

$$f(s)\geq [f(0)]^{1-\frac{s}{t}}[f(t)]^{\frac{s}{t}},$$

το οποίο σημαίνει οτι $f(t)\leq f(0)2^{-t/s}$. Δηλαδή, από το σημείο s και πέρα, η f φθίνει εκθετικά ως προς t. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |t|^p f(t)dt &= \int_0^{s} t^p f(t)dt + \int_s^{\infty} t^p f(t)dt \\
&\leq \|f\|_{\infty}\int_0^{s} t^p dt + \int_s^{\infty} t^p f(0)2^{-t/s}dt \\
&\leq f(0)\left(e\frac{s^{p+1}}{p+1} + s^{p+1}\int_1^{\infty} u^p 2^{-u}du\right) \\
&\leq (cp)^p f(0)s^{p+1} \leq (cp)^p f(0)\left(\frac{2B}{f(0)}\right)^{p+1} \\
&\leq (c_1p)^p/[f(0)]^p,
\end{aligned}$$

αφού $B<1$.

Αν τώρα για κάθε $s>0$ στον φορέα της f ισχύει $f(s)>f(0)/2$, τότε τον ρόλο του s παίζει το $s_0=\max\{s>0: f(s)>0\}$. Είναι $B\geq f(0)s_0/2$ και

$$\int_0^{\infty} |t|^p f(t)dt = \int_0^{s_0} t^p f(t)dt \leq ef(0)s_0^{p+1}/(p+1),$$

και συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε την ίδια περίπου εκτίμηση όπως πριν (και μάλιστα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το οτι η $\log f$ είναι κοίλη).

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εκτιμάμε το ολοκλήρωμα στο $(-\infty, 0]$. Επεται οτι

$$\begin{aligned}\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx &= \int_0^{\infty} |t|^p f(t)dt + \int_{-\infty}^{0} |t|^p f(t)dt \\ &\leq \left(\frac{c_2 p}{f(0)}\right)^p . \quad \square\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο Προτάσεις βλέπουμε οτι αν $1 \leq q < p < \infty$, τότε για κάθε K και θ όπως παραπάνω,

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq cp \left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

(παρατηρήστε οτι η $(q+1)^{1/q}$ είναι μακρυά από το 0 και το ∞ στο $[1,\infty)$).

Ειδικότερα, αν το K είναι ισοτροπικό, το γεγονός οτι

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = L_K^2$$

ανεξάρτητα από το $\theta \in S^{n-1}$ μας οδηγεί στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1. *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $p \geq 1$ και κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$c_1 L_K \leq \left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq c_2 p L_K,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. $\square$

Επίσης, εφαρμόζοντας τις Προτάσεις 1 και 2 με $p = 2$, παίρνουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των τομών ενός ισοτροπικού σώματος:

Θεώρημα 2. *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\frac{c_1}{L_K} \leq |K \cap \theta^{\perp}| \leq \frac{c_2}{L_K},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. $\square$

Αυτό σημαίνει οτι οι $(n-1)$-διάστατες τομές ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος που περνούν από το κέντρο βάρους του είναι περίπου ίσες: ο λόγος τους είναι φραγμένος από απόλυτη σταθερά. Είναι μάλιστα ίσες με $1/L_K$ (αν εξαιρέσουμε απόλυτες σταθερές), και αυτό δείχνει οτι η ακόλουθη εικασία είναι ισοδύναμη με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς που διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο:

Εικασία του υπερεπιπέδου: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K να ισχύει: για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,*

$$|K \cap \theta^{\perp}| \geq c.$$

Η ανισότητα του Θεωρήματος 1 συχνά διατυπώνεται στην εξής ισοδύναμη μορφή:

Θεώρημα 3. *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\int_K \exp(|\langle x,\theta\rangle|/cL_K)dx \leq 2,$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αναπτύσσουμε το ολοκλήρωμα και επιλέγουμε την σταθερά c στο τέλος. Από το Θεώρημα 1 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_K \exp(|\langle x,\theta\rangle|/cL_K)dx &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_K \frac{|\langle x,\theta\rangle|^k}{c^kL_K^k}dx\\ &\leq 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{c_2kL_K}{cL_K}\right)^k\\ &\leq 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_2k}{c(k!)^{1/k}}\right)^k\\ &\leq 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\\ &\leq 2,\end{aligned}$$

αν επιλέξουμε $c=3ec_2$. $\square$

Παρατήρηση: Είναι εύκολο να δει κανείς οτι ισχύει και το αντίστροφο: η δεξιά ανισότητα στο Θεώρημα 1 είναι συνέπεια του Θεωρήματος 3. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της $e^x \geq x^k/k!$, $x\geq 0$.

Η Orlicz νόρμα $\|f\|_{L^{\psi_\alpha}}$, $\alpha\geq 1$ της f ορίζεται από την

$$\|f\|_{L^{\psi_\alpha}} = \inf\{\lambda>0 \mid \int_K \exp((|f(x)|/\lambda)^\alpha)dx \leq 2\}.$$

Αυτό λοιπόν που ισχυρίζεται το Θεώρημα 3 είναι οτι: υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε για κάθε ισοτροπικό σώμα K και κάθε $\theta\in S^{n-1}$ η συνάρτηση $f(x)=\langle x,\theta\rangle/L_K$ στο K έχει Orlicz νόρμα $\|f\|_{L^{\psi_1}}\leq c$.

Από το Θεώρημα 3 παίρνουμε πολύ ισχυρές εκτιμήσεις για την συνάρτηση κατανομής της $x\mapsto\langle x,\theta\rangle$:

Θεώρημα 4. *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\mathrm{Prob}\,(|\langle x,\theta\rangle| \geq cL_Kt) \leq 2e^{-t}$$

για κάθε $t>0$, όπου $c>0$ η σταθερά του Θεωρήματος 3.

Απόδειξη: Από την ανισότητα του Markov και το Θεώρημα 3, για κάθε θ και $t>0$ έχουμε

$$\begin{aligned} 2 &\geq \int_K \exp(|\langle x,\theta\rangle|/cL_K)dx \\ &\geq \int_{\{x:|\langle x,\theta\rangle|\geq cL_K t\}} \exp(|\langle x,\theta\rangle|/cL_K)dx \\ &\geq e^t \mathrm{Prob}\left(|\langle x,\theta\rangle| \geq cL_K t\right). \quad \square \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η εξάρτηση της σταθεράς από το p καθώς $p\to\infty$ στο Θεώρημα 1 είναι βέλτιστη. Αν, για παράδειγμα, το K είναι κώνος στην διεύθυνση του θ (δηλαδή, αν η $|K\cap(\theta^{\perp}+t\theta)|^{\frac{1}{n-1}}$, $t>0$ είναι γραμμική στον φορέα της) τότε εύκολα ελέγχουμε οτι η σταθερά που απαιτείται για την δεξιά ανισότητα είναι γραμμική συνάρτηση του p. Υπάρχουν όμως σώματα K (π.χ. ο κύβος) για τα οποία σταθερά της τάξης του $\sqrt{p}$ είναι αρκετή για κάθε διεύθυνση $\theta\in S^{n-1}$. Λέμε τότε οτι το K ικανοποιεί ψ_2-εκτίμηση, και ακριβώς όπως στο Θεώρημα 3 μπορούμε να δούμε οτι

$$\|\langle x,\theta\rangle/L_K\|_{L^{\psi_2}} \leq c.$$

(β) *Η διάμετρος ενός ισοτροπικού σώματος.*

Σκοπός μας εδώ είναι να εκτιμήσουμε την διάμετρο ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K, παίρνοντας σαν παράμετρο την σταθερά ισοτροπίας L_K:

Θεώρημα 5 [KLS] *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Η διάμετρος του K ικανοποιεί την* $\mathrm{diam}(K)\leq 2(n+1)L_K$.

Απόδειξη: Εστω $x\in K$. Ορίζουμε $h:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ με

$$h(u)=\max\{t>0 : x+tu\in K\}.$$

Τότε, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} 1=|K| &= n\omega_n\int_{S^{n-1}}\int_0^{h(u)} t^{n-1}dt\sigma(du) \\ &= \omega_n\int_{S^{n-1}}[h(u)]^n\sigma(du). \end{aligned}$$

Το K είναι ισοτροπικό, επομένως για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} L_K^2 &= \int_K \langle y,\theta\rangle^2 dy \\ &= n\omega_n\int_{S^{n-1}}\int_0^{h(u)} t^{n-1}\langle x+tu,\theta\rangle^2 dt\sigma(du) \\ &= n\omega_n\int_{S^{n-1}}\int_0^{h(u)} \left(t^{n-1}\langle x,\theta\rangle^2+2t^n\langle x,\theta\rangle\langle u,\theta\rangle+t^{n+1}\langle u,\theta\rangle^2\right)dt\sigma(du) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{(h(u))^n}{n}\langle x,\theta\rangle^2 + 2\frac{(h(u))^{n+1}}{n+1}\langle x,\theta\rangle\langle u,\theta\rangle + \frac{(h(u))^{n+2}}{n+2}\langle u,\theta\rangle^2 \right)\sigma(du) \\
&\geq n\omega_n \int_{S^{n-1}} \frac{(h(u))^n}{n(n+1)^2}\langle x,\theta\rangle^2\sigma(du) \\
&= \frac{\langle x,\theta\rangle^2}{(n+1)^2}\omega_n \int_{S^{n-1}} (h(u))^n\sigma(du) \\
&= \frac{\langle x,\theta\rangle^2}{(n+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, αν $x \in K$ τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$|\langle x,\theta\rangle| \leq (n+1)L_K.$$

Αυτό σημαίνει οτι

$$|x| = \max_{\theta\in S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle| \leq (n+1)L_K. \quad \square$$

Παρατήρηση: Η εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 5 δεν βελτιώνεται. Η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n έχει όγκο $2^n/n!$. Αν την πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλη σταθερά ώστε να έχει όγκο 1, τότε η σταθερά είναι της τάξης του n, δηλαδή η ισοτροπική της μοναδιαίας μπάλας του ℓ_1^n έχει διάμετρο της τάξης του n.

(γ) *ψ_2-εκτίμηση για την Ευκλείδεια νόρμα.*

Δείχνουμε εδώ οτι αν K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα τότε η $x \mapsto |x|$ συμπεριφέρεται καλύτερα από τα συναρτησοειδή $x \mapsto \langle x,\theta\rangle$. Θυμηθείτε οτι

$$\int_K |x|^2 dx = nL_K^2,$$

δηλαδή, ο μέσος της $|x|$ είναι περίπου $\sqrt{n}L_K$. Το Θεώρημα που ακολουθεί οφείλεται στον S. Alesker [Al]:

Θεώρημα 6. *Αν K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\int_K \exp((|x|/c\sqrt{n}L_K)^2)dx \leq 2,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε οτι, για κάθε $p \geq 1$

$$\left(\int_K |x|^p dx\right)^{1/p} \leq c'\sqrt{p}\sqrt{n}L_K$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c' > 0$ (κατόπιν, ακολουθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3). Από το Θεώρημα 1 ξέρουμε οτι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx \leq c_2^p p^p L_K^p.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στην D_n παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_{D_n}\int_K |\langle x,y\rangle|^p dxdy &\leq c_2^p p^p L_K^p \int_{D_n} |y|^p dy \\ &= c_2^p p^p L_K^p \frac{n\omega_n}{n+p}.\end{aligned}$$

Αλλάζοντας την σειρά της ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{D_n}\int_K |\langle x,y\rangle|^p dxdy &= \int_K |x|^p \left(\int_{D_n} |\langle \frac{x}{|x|},y\rangle|^p dy\right) dx \\ &= A_p \int_K |x|^p dx,\end{aligned}$$

όπου

$$A_p = \int_{D_n} |\langle \xi,y\rangle|^p dy \quad , \quad \xi \in S^{n-1}.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται, και είναι ίσο με

$$A_p = \omega_n \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^p t \cos^n t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt}.$$

Επομένως,

$$\int_K |x|^p dx \leq \frac{n}{n+p} c_2^p p^p L_K^p \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt}{\int_0^{\pi/2} \sin^p t \cos^n t dt}.$$

Με απλούς υπολογισμούς καταλήγουμε στην

$$\left(\int_K |x|^p dx\right)^{1/p} \leq c_3 \sqrt{p(1+\frac{p}{n})}\sqrt{n} L_K.$$

Δηλαδή, αν $p \leq n$ έχουμε εξασφαλίσει την

$$(*) \qquad \left(\int_K |x|^p dx\right)^{1/p} \leq c_3 \sqrt{2}\sqrt{p}\sqrt{n} L_K.$$

Αν $p > n$, χρησιμοποιούμε την εκτίμηση του Θεωρήματος 5 για την διάμετρο του K. Ξέρουμε οτι $|x| \leq (n+1)L_K$ για κάθε $x \in K$, επομένως

$$(**) \qquad \left(\int_K |x|^p dx\right)^{1/p} \leq (n+1)L_K \leq 2\sqrt{p}\sqrt{n} L_K.$$

Συνδυάζοντας τις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε οτι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c' > 0$ τέτοια ώστε

$$\left(\int_K |x|^p dx\right)^{1/p} \leq c' \sqrt{p}\sqrt{n} L_K$$

για κάθε $p \geq 1$. $\square$

(δ) *Το μέσο πλάτος ενός συμμετρικού ισοτροπικού σώματος.*

Εστω K συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα. Το μέσο πλάτος $w(K)$ ορίστηκε στην Παράγραφο 2.1 μέσω της

$$w(K) = 2\int_{S^{n-1}} h_K(u)\sigma(du) = 2\int_{S^{n-1}} \max_{x\in K} |\langle x,u\rangle|\sigma(du).$$

Είδαμε οτι η διάμετρος του K φράσσεται από $2(n+1)L_K$, άρα μια απλή πρώτη εκτίμηση του $w(K)$ είναι η

$$w(K) \leq cnL_K.$$

Θα δούμε εδώ οτι μια καλύτερη εκτίμηση είναι πάντα δυνατή. Δείχνουμε πρώτα ένα φράγμα για αριθμούς κάλυψης:

Λήμμα 3. *Εστω K και W κυρτά σώματα, με το W συμμετρικό ως προς το o. Υποθέτουμε ακόμα οτι $W \subseteq K$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$N(K,tW) \leq \left(1+\frac{2}{t}\right)^n \frac{|K|}{|W|}.$$

Απόδειξη: Εστω $\{x_1,\dots,x_N\}$ maximal υποσύνολο του K ως προς την ιδιότητα

$$\|x_i - x_j\|_W \geq t \quad , \quad i\neq j.$$

Τότε, $K \subseteq \cup_{i\leq N}(x_i + tW)$. Επίσης, τα $x_i + \frac{t}{2}W$ έχουν ξένα εσωτερικά, οπότε για κάθε $s>0$ και $i\neq j$ θα έχουμε

$$\mathrm{int}\left(sx_i + \frac{ts}{2}W\right) \cap \mathrm{int}\left(sx_j + \frac{ts}{2}W\right) = \emptyset.$$

Επιλέγουμε το s έτσι ώστε $s + \frac{st}{2} = 1$. Τότε, αφού $W \subseteq K$ και το K είναι κυρτό, βλέπουμε οτι

$$sx_i + \frac{ts}{2}W \subseteq K \quad , \quad i = 1,\dots,N.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} N\left(\frac{ts}{2}\right)^n |W| &= \sum_{i=1}^N |sx_i + \frac{ts}{2}W| \\ &= |\cup_{i\leq N}(sx_i + \frac{ts}{2}W)| \\ &\leq |K|. \end{aligned}$$

Παίρνοντας υπόψη και την επιλογή του s συμπεραίνουμε οτι

$$N \leq \left(\frac{2}{ts}\right)^n \frac{|K|}{|W|} = \left(1+\frac{2}{t}\right)^n \frac{|K|}{|W|}. \quad \square$$

Λήμμα 4. *Εστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $s > 0$ ισχύει*

$$N(K, sD_n) \leq c \exp\left(\frac{4n^{3/2}L_K}{s}\right).$$

Απόδειξη: Το K είναι ισοτροπικό, επομένως

$$\int_K |x|^2 dx = nL_K^2,$$

και η ανισότητα του Markov δίνει

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |x| \geq 2\sqrt{n}L_K\right) \leq \frac{1}{4},$$

δηλαδή, $|K \cap 2\sqrt{n}L_K D_n| \geq 3/4$. Θέτουμε $W = K \cap 2\sqrt{n}L_K D_n$, και εφαρμόζουμε το Λήμμα 3: Για κάθε $t > 0$ είναι

$$N(K, tW) \leq \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2}{t}\right)^n.$$

Επεται οτι

$$N(K, 2t\sqrt{n}L_K D_n) \leq N(K, tW) \leq \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2}{t}\right)^n.$$

Παίρνοντας $s = 2t\sqrt{n}L_K$, συμπεραίνουμε οτι

$$N(K, sD_n) \leq \frac{4}{3}\left(1 + \frac{4\sqrt{n}L_K}{s}\right)^n \leq \frac{4}{3}\exp\left(\frac{4n^{3/2}L_K}{s}\right). \quad \Box$$

Θεώρημα 7. *Εστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leq cn^{3/4}L_K,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την διάσπαση Dudley-Fernique του K. Αν R είναι η διάμετρος του K, τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, κάθε $x \in K$ γράφεται στη μορφή

$$x = z_1 + \ldots + z_m + w_m,$$

όπου $z_j \in Z_j \cap \frac{3R}{2^j}D_n$, $w_m \in \frac{R}{2^m}D_n$, και Z_j πεπερασμένο σύνολο με πληθάριθμο που ικανοποιεί την

$$\log|Z_j| \leq \log N(K, (R/2^j)D_n) + \log N(K, (R/2^{j-1})D_n),$$

ανισότητα που, αν πάρουμε υπόψη το Λήμμα 4, γράφεται στη μορφή

$$\log|Z_j| \leq c_1 \frac{n^{3/2}L_K 2^j}{R}.$$

Από την διάσπαση έπεται άμεσα οτι, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}
\max_{x\in K}|\langle x,\theta\rangle| &\leq \sum_{j=1}^{m}\max_{z\in Z_j\cap(3R/2^j)D_n}|\langle z,\theta\rangle| + \max_{z\in(R/2^m)D_n}|\langle z,\theta\rangle| \\
&= \sum_{j=1}^{m}\max_{z\in Z_j\cap(3R/2^j)D_n}|\langle z,\theta\rangle| + \frac{R}{2^m} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\max_{z\in Z_j\cap(3R/2^j)D_n}|\langle z,\theta\rangle| + 2,
\end{aligned}$$

αν επιλέξουμε σαν m τον μικρότερο φυσικό για τον οποίο $R \leq 2^{m+1}$.

Σταθεροποιούμε $j \in \{1,\dots,m\}$, και γράφουμε $\overline{z}$ για το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του $z \in Z_j$ (μπορούμε να υποθέσουμε οτι κάθε $z \in Z_j$ είναι μη μηδενικό). Ξέρουμε οτι

$$\int_{S^{n-1}}|\langle u,\theta\rangle|\sigma(d\theta) \leq \left(\int_{S^{n-1}}\langle u,\theta\rangle^2\sigma(d\theta)\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad u \in S^{n-1}$$

και εκτιμώντας την p-νόρμα της $\theta \mapsto \langle u,\theta\rangle$ βλέπουμε οτι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$ τέτοια ώστε

$$\|\langle u,\theta\rangle\|_{L^{\psi_2}} \leq c_3\|\langle u,\theta\rangle\|_1,$$

δηλαδή,

$$\int_{S^{n-1}}\exp\left(\frac{n|\langle u,\theta\rangle|^2}{c_3^2}\right)\sigma(d\theta) \leq 2.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov καταλήγουμε στην

$$\sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \max_{z\in Z_j}|\langle \overline{z},\theta\rangle| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{nt^2}{c_3^2}\right)\ |Z_j|.$$

Για κάθε $A > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}}\max_{z\in Z_j}|\langle \overline{z},\theta\rangle|\sigma(d\theta) &= \int_0^\infty \sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \max_{z\in Z_j}|\langle \overline{z},\theta\rangle| \geq t\right)dt \\
&\leq A + \int_A^\infty \sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \max_{z\in Z_j}|\langle \overline{z},\theta\rangle| \geq t\right)dt \\
&\leq A + \int_A^\infty 2\exp\left(-\frac{nt^2}{c_3^2}\right)\ |Z_j|dt
\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $A \simeq \sqrt{\log|Z_j|}/\sqrt{n}$, με απλές εκτιμήσεις καταλήγουμε στην

$$\int_{S^{n-1}}\max_{z\in Z_j}|\langle \overline{z},\theta\rangle|\sigma(d\theta) \leq c_4\frac{\sqrt{\log|Z_j|}}{\sqrt{n}}.$$

Αρα,

$$\int_{S^{n-1}} \max_{z\in Z_j\cap(3R/2^j)D_n} |\langle z,\theta\rangle|\sigma(d\theta) \leq c_4 \frac{3R}{2^j}\frac{\sqrt{\log |Z_j|}}{\sqrt{n}}.$$

Τώρα μπορούμε να φράξουμε το μέσο πλάτος του K ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{w(K)}{2} &= \int_{S^{n-1}} \max_{x\in K} |\langle x,\theta\rangle|\sigma(d\theta) \\
&\leq 2 + \sum_{j=1}^{m} \int_{S^{n-1}} \max_{z\in Z_j\cap(3R/2^j)D_n} |\langle z,\theta\rangle|\sigma(d\theta) \\
&\leq 2 + \sum_{j=1}^{m} c_4 \frac{3R}{2^j}\frac{\sqrt{\log |Z_j|}}{\sqrt{n}} \\
&\leq 2 + \sum_{j=1}^{m} c_4 \frac{3R}{2^j}\frac{\sqrt{c_1}n^{3/4}\sqrt{L_K}2^{j/2}}{\sqrt{Rn}} \\
&\leq 2 + c_5\sqrt[4]{n}\sqrt{L_K}\sqrt{R}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^{j/2}} \\
&\leq c_6\sqrt[4]{n}\sqrt{L_K}\sqrt{R}.
\end{aligned}$$

Αφού $R \leq 2(n+1)L_K$, παίρνουμε τελικά

$$w(K) \leq cn^{3/4}L_K. \quad \square$$

4.3 Η εκτίμηση του Bourgain για την σταθερά ισοτροπίας.

Η καλύτερη ως τώρα εκτίμηση για το πρόβλημα της σταθεράς ισοτροπίας έχει δοθεί από τον J. Bourgain:

Θεώρημα [Bou1] *Αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n$, όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.*

Θα δούμε οτι η υπόθεση της συμμετρίας δεν είναι απαραίτητη. Ακολουθώντας σε γενικές γραμμές το επιχείρημα του Bourgain, θα δείξουμε οτι

$$L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n$$

για κάθε κυρτό σώμα K.

Απόδειξη: Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Το μέσο πλάτος είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς του σώματος, επομένως, σύμφωνα με το Κεφάλαιο 2, υπάρχει συμμετρικός, θετικά ορισμένος $T \in SL_n$ τέτοιος ώστε

$$w(TK) \leq c\sqrt{n}\log n.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 είδαμε οτι ένα ισοτροπικό σώμα ικανοποιεί την

$$\int_K \langle x,Sx\rangle dx = \frac{\mathrm{tr}S}{n}\int_K |x|^2dx$$

για κάθε $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ο T έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές και ορίζουσα 1, άρα $\mathrm{tr}T \geq n$. Επομένως,

$$nL_K^2 = \int_K |x|^2 dx \leq \frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K |x|^2 = \int_K \langle x, Tx \rangle dx.$$

Ομως, για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, Tx \rangle \leq \max_{y \in TK} |\langle x, y \rangle|.$$

Αρα,

$$nL_K^2 \leq \int_K \max_{y \in TK} |\langle y, x \rangle| dx.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την διάσπαση Dudley-Fernique του TK. Αν R είναι η διάμετρος του TK, είδαμε οτι για $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα Z_j τέτοια ώστε

$$\log |Z_j| \leq cn \left(\frac{w(TK) 2^j}{R} \right)^2,$$

και κάθε $y \in TK$ γράφεται στη μορφή

$$y = z_1 + \ldots + z_m + w_m,$$

όπου $z_j \in Z_j \cap (3R/2^j) D_n$ και $w_m \in (R/2^m) D_n$. Επεται οτι

$$\begin{aligned} \max_{y \in TK} |\langle y, x \rangle| &\leq \sum_{j=1}^m \max_{z \in Z_j \cap (3R/2^j) D_n} |\langle z, x \rangle| + \max_{w \in (R/2^m) D_n} |\langle w, x \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \max_{z \in Z_j \cap (3R/2^j) D_n} |\langle \overline{z}, x \rangle| + \frac{R}{2^m} |x|, \end{aligned}$$

όπου $\overline{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του z. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, καθώς και την $\int_K |x| dx \leq \sqrt{n} L_K$, βλέπουμε οτι

$$\begin{aligned} (*) \quad nL_K^2 &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j \cap (3R/2^j) D_n} |\langle \overline{z}, x \rangle| dx + \frac{R}{2^m} \int_K |x| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j \cap (3R/2^j) D_n} |\langle \overline{z}, x \rangle| dx + \frac{R}{2^m} \sqrt{n} L_K. \end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε καθένα από τα ολοκληρώματα στο άθροισμα, χρησιμοποιούμε την πληροφορία που παρέχει το Θεώρημα 4.2.4 για τα γραμμικά συναρτησοειδή σε ισοτροπικά κυρτά σώματα. Για κάθε $j = 1, \ldots, m$ και κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\left(x \in K : \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x \rangle| \geq t \right) &\leq |Z_j| \mathrm{Prob}\left(x \in K : |\langle u, x \rangle| \geq t \right) \\ &\leq 2|Z_j| \exp\left(-\frac{t}{cL_K} \right). \end{aligned}$$

Για κάθε $A > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_K \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| dx &= \int_0^{\infty} \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| \geq t\right) dt \\ &\leq A + \int_A^{\infty} \mathrm{Prob}\left(x\in K : \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| \geq t\right) dt \\ &\leq A + \int_A^{\infty} 2|Z_j| \exp\left(-\frac{t}{cL_K}\right) dt.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $A \simeq L_K \log |Z_j|$, καταλήγουμε στην

$$\int_K \max_{z\in Z_j} |\langle \overline{z}, x\rangle| dx \leq c_1 L_K \log |Z_j| \leq c'' n L_K \left(\frac{w(TK)2^j}{R}\right)^2.$$

Επιστρέφοντας στην $(*)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} nL_K^2 &\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{3R}{2^j} c'' n L_K \left(\frac{w(TK)2^j}{R}\right)^2 + \frac{R}{2^m}\sqrt{n} L_K \\ &\leq \frac{c_1 2^m n L_K w^2(TK)}{R} + \frac{R\sqrt{n}L_K}{2^m}.\end{aligned}$$

Εχουμε το δικαίωμα να επιλέξουμε το m, και η βέλτιστη επιλογή είναι όταν

$$\frac{2^m n L_K w^2(TK)}{R} \simeq \frac{R\sqrt{n}L_K}{2^m},$$

δηλαδή, $R/2^m \simeq \sqrt[4]{n}\, w(TK)$. Με αυτήν την επιλογή του m βλέπουμε οτι

$$nL_K^2 \leq c_2 \sqrt[4]{n}\, w(TK) \sqrt{n} L_K,$$

και αφού $w(TK) \leq c_3 \sqrt{n} \log n$, έχουμε $nL_K^2 \leq c n^{5/4} \log n L_K$, δηλαδή

$$L_K \leq c\sqrt[4]{n} \log n. \quad \square$$

4.4 Ισοδύναμες διατυπώσεις της εικασίας του υπερεπιπέδου.

(α) *Το πρόβλημα του Sylvester.*

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1, και επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα, ομοιόμορφα μέσα από το K, $(n+1)$ το πλήθος σημεία $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Η κυρτή τους θήκη $\mathrm{co}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ είναι ένα τυχαίο simplex μέσα στο K. Για κάθε $p \geq 1$ ορίζουμε

$$m_p(K) = \left(\int_K \cdots \int_K |\mathrm{co}(x_1, \ldots, x_{n+1})|^p dx_{n+1} \ldots dx_1\right)^{1/p}.$$

Για K με αυθαίρετο όγκο, κανονικοποιούμε ορίζοντας

$$m_p(K) = \left(\frac{1}{|K|^{n+p+1}} \int_K \dots \int_K |\mathrm{co}(x_1, \dots, x_{n+1})|^p dx_{n+1} \dots dx_1 \right)^{1/p}.$$

Η ποσότητα $m_1(K)$ είναι η μέση τιμή του (κανονικοποιημένου) όγκου ενός τυχαίου simplex μέσα στο K. Παρατηρήστε ακόμα οτι η $m_p(K)$ είναι αναλλοίωτη ως προς affine μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο: αν $T \in SL_n$ και $u \in \mathbb{R}^n$, τότε $m_p(K) = m_p(TK + u), p \geq 1$.

Το πρόβλημα του Sylvester είναι το εξής: να βρεθούν εκείνες οι affine κλάσεις σωμάτων για τις οποίες ελαχιστοποιείται ή μεγιστοποιείται η $m_p(K)$. Είναι γνωστό οτι, για κάθε $p \geq 1$,

$$m_p(K) \geq m_p(rD_n)$$

όπου rD_n η μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές [Gr2]. Το πρόβλημα του μεγίστου είναι ανοικτό αν $n \geq 3$:

Εικασία του simplex. *Για κάθε κυρτό σώμα K με όγκο 1, ισχύει*

$$m_1(K) \leq m_1(S_n),$$

όπου S_n simplex στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1.

Η εικασία είναι σωστή αν $n = 2$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε οτι το πρόβλημα του Sylvester σχετίζεται με την εικασία του υπερεπιπέδου: αν η εικασία του simplex ισχύει, τότε $L_K \leq C$ για κάθε κυρτό σώμα K.

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε μια παραλλαγή της $m_p(K)$:

$$S_p(K) = \left(\frac{1}{|K|^{n+p}} \int_K \dots \int_K |\mathrm{co}(o, x_1, \dots, x_n)|^p dx_n \dots dx_1 \right)^{1/p}.$$

Πρόταση 1. *Αν το K έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το o, τότε για κάθε $p \geq 1$ ισχύει*

$$S_p(K) \leq m_p(K) \leq (n+1) S_p(K).$$

Απόδειξη: Για κάθε $x \in K$ ορίζουμε

$$S_p(K; x) = \left(\int_K \dots \int_K |\mathrm{co}(x, x_1, \dots, x_n)|^p dx_n \dots dx_1 \right)^{1/p}.$$

Ξέρουμε οτι $|\mathrm{co}(x, x_1, \dots, x_n)| = |\det(\tilde{x}, \tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_n})|/n!$ όπου $\tilde{z} = (z, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ αν $z \in \mathbb{R}^n$, και αυτή η ορίζουσα είναι affine συνάρτηση του x. Επομένως, η $|\mathrm{co}(x, x_1, \dots, x_n)|^p$ είναι κυρτή συνάρτηση στο K. Ολοκληρώνοντας ως προς $x_1, \dots, x_n$ βλέπουμε οτι η $S_p^p(K; x)$ είναι επίσης κυρτή. Αφού το o είναι το κέντρο βάρους του K και $|K| = 1$, συμπεραίνουμε οτι

$$S_p^p(K; o) \leq \int_K S_p^p(K; x) dx,$$

δηλαδή
$$S_p^p(K)\leq m_p^p(K).$$
Αυτό αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα. Για την δεξιά ανισότητα παρατηρούμε οτι, αν $x_1,\ldots,x_{n+1}\in K$, τότε
$$|\mathrm{co}(x_1,\ldots,x_{n+1})|=\frac{1}{n!}|\det(\tilde{x}_1\ldots,\tilde{x}_{n+1})|$$
όπου $\tilde{x}_j=(x_j,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$, οπότε αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την στήλη $(1,\ldots,1)$ και παίρνοντας τριγωνική ανισότητα έχουμε
$$|\mathrm{co}(x_1,\ldots,x_{n+1})|\leq\sum_{j=1}^{n+1}|\mathrm{co}(o,x_i:i\neq j)|.$$
Επεται οτι
$$\begin{aligned}
m_p(K) &= \left(\int_K\cdots\int_K|\mathrm{co}(x_1,\ldots,x_{n+1})|^p dx_{n+1}\ldots dx_1\right)^{1/p}\\
&\leq \left(\int_K\cdots\int_K\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\mathrm{co}(o,x_i:i\neq j)|\right)^p dx_{n+1}\ldots dx_1\right)^{1/p}\\
&\leq \sum_{j=1}^{n+1}\left(\int_K\cdots\int_K|\mathrm{co}(o,x_i:i\neq j)|^p dx_{n+1}\ldots dx_1\right)^{1/p}\\
&= (n+1)S_p(K). \quad \square
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f_i:K\to\mathbb{R}$ με $x_i\mapsto\det(x_1,\ldots,x_n)$ για σταθερά $x_j, j\neq i$ στο K, είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Παίρνοντας υπόψη μας τις αντίστροφες ανισότητες Hölder της παραγράφου 4.2(α), δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε οτι:

Πρόταση 2. *Για κάθε κυρτό σώμα K με όγκο 1 και κέντρο βάρους το o, έχουμε*
$$S_2(K)\leq c^n S_1(K),$$
όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά. $\square$

Η σχέση αυτών των ποσοτήτων με την σταθερά ισοτροπίας του K γίνεται φανερή από την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 3 (Blaschke). *Αν το K έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το o, τότε*
$$S_2^2(K)=\frac{\det(M(K))}{n!}.$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό μας,
$$S_2^2(K)=\int_K\cdots\int_K|\mathrm{co}(o,x_1,\ldots,x_n)|^2dx_n\ldots dx_1.$$

Γράφουμε $x_i = (x_{ij}), j = 1, \dots, n$. Τότε,

$$|\mathrm{co}(o, x_1, \dots, x_n)| = \frac{|\det(x_1, \dots, x_n)|}{n!},$$

επομένως

$$(n!)^2 S_2^2(K) = \int_K \cdots \int_K |\det(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_n \dots dx_1.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(n!)^2 S_2^2(K) &= \int_K \cdots \int_K \left(\sum_\sigma \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)} \right) \left(\sum_\tau \epsilon_\tau \prod_{i=1}^n x_{i,\tau(i)} \right) dx_n \dots dx_1 \\
&= \int_K \cdots \int_K \left(\sum_{\sigma,\tau} \epsilon_\sigma \epsilon_\tau \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)} x_{i,\tau(i)} \right) dx_n \dots dx_1 \\
&= \int_K \cdots \int_K \left(\sum_{\sigma,\varphi} \epsilon_\varphi \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)} x_{i,\varphi(\sigma(i))} \right) dx_n \dots dx_1 \\
&= \sum_{\sigma,\varphi} \epsilon_\varphi \prod_{i=1}^n \left(\int_K x_i x_{\varphi(i)} dx \right) \\
&= n! \, [\det(M(K))]. \quad \square
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Εστω K κυρτό σώμα με όγκο 1 και κέντρο βάρους το o. Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς οτι, αν $T \in SL_n$ τότε $M(TK) = TM(K)T^*$, επομένως

$$\det(M(TK)) = \det(M(K)).$$

Επιλέγοντας τον T έτσι ώστε το TK να είναι ισοτροπικό, βλέπουμε οτι

$$\det(M(K)) = L_K^{2n}.$$

Παίρνοντας υπόψη μας την Πρόταση 3, έχουμε αποδείξει το εξής:

Θεώρημα 1. *Αν το K έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το o, τότε*

$$L_K^{2n} = n! \, S_2^2(K). \quad \square$$

Πόρισμα 1. *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει $L_K \leq c\sqrt{n}$.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε οτι το K είναι ισοτροπικό, επομένως ότι έχει όγκο 1. Το χωρίο στο οποίο ολοκληρώνουμε έχει μέτρο 1, και η κυρτή θήκη σημείων του K έχει όγκο το πολύ 1. Αρα,

$$L_K \leq \sqrt[2n]{n!} \leq c\sqrt{n}.$$

Οπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να δώσουμε και καλύτερη εκτίμηση, η παρούσα όμως απόδειξη δεν χρησιμοποιεί κανένα «βαρύ» εργαλείο. $\square$

Πόρισμα 2. *Αν η εικασία του simplex είναι σωστή, τότε*

$$L_K \leq C$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το simplex

$$S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{n+1} \leq x_i \leq \frac{n}{n+1} \; , \; \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{n+1}\}.$$

Το $S_n' = (n!)^{1/n} S_n$ έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το o. Ενας απλός υπολογισμός δείχνει οτι

$$\int_{S_n'} x_i^2 dx < \frac{(n!)^{1+\frac{2}{n}}}{(n+2)!},$$

και επειδή ο $M(K)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, η ανισότητα του Hadamard δίνει

$$\begin{aligned} S_2^2(S_n') &= \frac{\det(M(S_n'))}{n!} \\ &\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{(n!)^{1+\frac{2}{n}}}{(n+2)!}\right)^n \\ &\leq \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $m_1(K) \leq m_1(S_n')$, και συνδυάζοντας τις Προτάσεις 1,2 και 3, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} L_K^n &= \sqrt{n!}\, S_2(K) \leq \sqrt{n!}\, c^n S_1(K) \\ &\leq \sqrt{n!}\, c^n m_1(K) \leq \sqrt{n!}\, c^n m_1(S_n') \\ &\leq \sqrt{n!}\, c^n (n+1) S_1(S_n') \leq \sqrt{n!}\, c^n (n+1) S_2(S_n') \\ &\leq (n+1)c^n. \end{aligned}$$

Επεται οτι $L_K \leq 2c$. □

(β) *Ο τύπος του Busemann.*

Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε οτι $o \in \mathrm{int}(K)$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε την τομή $K \cap \theta^\perp$ του K, και την κανονικοποίηση της $S_1(\cdot)$

$$S_1(K \cap \theta^\perp) = \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|^n} \int_{K\cap\theta^\perp} \cdots \int_{K\cap\theta^\perp} |\mathrm{co}(o, x_1, \ldots, x_{n-1})| dx_{n-1} \ldots dx_1$$

ώστε να μην έχει σημασία ο όγκος της $K \cap \theta^\perp$: με αυτόν τον τρόπο, η $S_1(\cdot)$ γίνεται αναλλοίωτη ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Ο H. Busemann έδειξε έναν τύπο που συνδέει τον όγκο του K με τα εμβαδά των $(n-1)$-διάστατων τομών $K\cap\theta^\perp$, $\theta\in S^{n-1}$:

Θεώρημα 1. *Αν K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $o\in \mathrm{int}(K)$, τότε*

$$|K|^{n-1} = \frac{n!\,\omega_n}{2}\int_{S^{n-1}} |K\cap\theta^\perp|^n S_1(K\cap\theta^\perp)\sigma(d\theta).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^{n(n-1)} = \mathbb{R}^n_1\oplus\ldots\oplus\mathbb{R}^n_{n-1}$, και το $\tilde{K} = K\times\ldots\times K\subset \mathbb{R}^{n(n-1)}$. Για ευκολία θα γράφουμε τις συντεταγμένες ενός $x_i\in\mathbb{R}^n_i$ στη μορφή $x_i=(x_i^1,\ldots,x_i^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}(*)\qquad |K|^{n-1} &= \int_K\cdots\int_K dx_{n-1}\ldots dx_1\\ &= \int_{\tilde{K}} dx^1_{n-1}\ldots dx^n_{n-1}\ldots dx^1_1\ldots dx^n_1.\end{aligned}$$

Για δοσμένα $x_1,\ldots,x_{n-1}$, ορίζουμε $a_1,\ldots,a_{n-1}$ σαν τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$x_i^n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_i^j \quad,\quad i=1,\ldots,n-1,$$

και θεωρούμε τις νέες συντεταγμένες $x_1^1,\ldots,x_1^{n-1},a_1,\ldots,x^1_{n-1},\ldots,x^{n-1}_{n-1},a_{n-1}$ στον $\mathbb{R}^{n(n-1)}$. Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι

$$(**)\qquad J=\det[(x_i^j)_{i,j=1,\ldots,n-1}].$$

(Το σύνολο στο οποίο $J=0$ έχει μέτρο 0 και δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα στην $(*)$, και έξω από το σύνολο αυτό ο μετασχηματισμός είναι καλά ορισμένος.)

Παίρνοντας $b=(1+\sum a_j^2)^{-1/2}$, βλέπουμε οτι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα θ του υπερεπιπέδου $x^n = a_1x^1+\ldots a_{n-1}x^{n-1}$ περιγράφεται είτε από την

$$\theta^j = ba_j\ ,\ j=1,\ldots,n-1,\quad ,\quad \theta^n=-b,$$

ή από την

$$\theta^j = -ba_j\ ,\ j=1,\ldots,n-1,\quad ,\quad \theta^n=b.$$

Αν ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει το θ με τον x^n-άξονα, τότε $b=|\cos\phi|$, επομένως $d\theta = \frac{1}{b}d\theta^1\ldots d\theta^{n-1}$. Πάλι, μπορούμε να αγνοήσουμε εκείνα τα υπερεπίπεδα που είναι παράλληλα στον x^n-άξονα. Μπορούμε τότε να δούμε οτι

$$\det[(\partial\theta^j/\partial a_i)_{i,j=1,\ldots,n-1}] = b^{n+1},$$

επομένως

$$\begin{aligned}d\theta &= \frac{1}{b}d\theta^1\ldots d\theta^{n-1} = b^n da_1\ldots da_{n-1}\\ &= |\cos^n\phi|da_1\ldots da_{n-1}.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ακόμα οτι για το υπερεπίπεδο $x_j^n = a_1 x_j^1 + \ldots + a_{n-1} x_j^{n-1}$ έχουμε

$$dx_j = |\sec\phi| dx_j^1 \ldots dx_j^{n-1}.$$

Παίρνοντας υπόψη μας όλες τις παραπάνω σχέσεις γράφουμε

$$\begin{aligned} |K|^{n-1} &= \int_{J^{-1}\tilde{K}} |J| dx_1^1 \ldots dx_1^{n-1} \ldots dx_{n-1}^1, \ldots, dx_{n-1}^{n-1} da_1 \ldots da_{n-1} \\ &= \frac{n\omega_n}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{K\cap\theta^\perp} \cdots \int_{K\cap\theta^\perp} |J\sec\phi| dx_1 \ldots dx_{n-1} \sigma(d\theta), \end{aligned}$$

βλέποντας τα $x_1, \ldots, x_{n-1}$ σαν σημεία του $\theta^\perp$. Από την $(**)$, η προβολή του simplex $\mathrm{co}(o, x_1, \ldots, x_{n-1})$ στο επίπεδο $x^n = 0$ έχει όγκο $|J|/(n-1)!$. Αφού όλα αυτά τα σημεία ανήκουν στον $\theta^\perp$, έχουμε

$$|\mathrm{co}(o, x_1, \ldots, x_{n-1})| |\cos\phi| = \frac{|J|}{(n-1)!}.$$

Επεται οτι

$$\begin{aligned} |K|^{n-1} &= \frac{n!\,\omega_n}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{K\cap\theta^\perp} \cdots \int_{K\cap\theta^\perp} |\mathrm{co}(o, x_1, \ldots, x_{n-1})| dx_{n-1} \ldots dx_1 \sigma(d\theta) \\ &= \frac{n!\,\omega_n}{2} \int_{S^{n-1}} |K\cap\theta^\perp|^n S_1(K\cap\theta^\perp) \sigma(d\theta). \quad \square \end{aligned}$$

Παρατηρήστε οτι, από το Θεώρημα 4.4.1 έχουμε

$$S_1(K\cap\theta^\perp) \le S_2(K\cap\theta^\perp) = L_{K\cap\theta^\perp}^{n-1} / \sqrt{(n-1)!}.$$

Αν λοιπόν δεχτούμε οτι η σταθερά ισοτροπίας οποιουδήποτε κυρτού σώματος είναι μικρότερη από κάποια σταθερά C, τότε καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} |K|^{n-1} &\le C^n \frac{n!\omega_n}{2\sqrt{(n-1)!}} \int_{S^{n-1}} |K\cap\theta^\perp|^n \sigma(d\theta) \\ &\le (cC)^n \int_{S^{n-1}} |K\cap\theta^\perp|^n \sigma(d\theta). \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο τύπος του Busemann μας δίνει το εξής:

Θεώρημα 2. *Αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα $L_W \le C$ για κάθε κυρτό σώμα W, τότε για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $o \in \mathrm{int}(K)$ ισχύει*

$$|K|^{\frac{n-1}{n}} \le cC \max_{\theta\in S^{n-1}} |K\cap\theta^\perp|,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. $\square$

Παρατήρηση. Ο τύπος του Busemann, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $L_W \geq c$ για κάθε W, έχει σαν συνέπεια την ανισότητα

$$|K|^{\frac{n-1}{n}} \geq c' \left(\int_{S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}|^n \sigma(d\theta) \right)^{1/n}$$

όπου $c' > 0$ απόλυτη σταθερά. Αρκεί να παρατηρήσουμε οτι

$$\begin{aligned} |K|^{n-1} &= \frac{n!\omega_n}{2} \int_{S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}|^n S_1(K \cap \theta^{\perp}) \sigma(d\theta) \\ &\geq \frac{n!\omega_n}{2c^n} \int_{S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}|^n S_2(K \cap \theta^{\perp}) \sigma(d\theta) \\ &= \frac{n!\omega_n}{2c^n} \int_{S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}|^n \frac{L_{K\cap\theta^{\perp}}^{(n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \sigma(d\theta) \\ &\geq c_1^n \int_{S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}|^n \sigma(d\theta). \end{aligned}$$

Αμεση συνέπεια των παραπάνω είναι η ισοδυναμία της εικασίας της σταθεράς ισοτροπίας με την ακόλουθη γενικευμένη εικασία του υπερεπιπέδου:

Εικασία: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το o και όγκο 1 να ισχύει*

$$\max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}| \geq c.$$

Πράγματι, η συζήτηση που έχει προηγηθεί αποδεικνύει το εξής:

Θεώρημα 3. *Εστω $C > 0$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει $L_K \leq c_1 C$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.*

(β) *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το o και όγκο 1, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $|K \cap \theta^{\perp}| \geq c_2/C$, όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε το (α), τότε το (β) προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2, με $c_2 = 1/(cc_1)$. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε το (β) και αν K είναι τυχόν ισοτροπικό κυρτό σώμα, τότε βρίσκουμε $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $|K \cap \theta^{\perp}| \geq c_2/C$, και από την Πρόταση 4.2(α).2 έχουμε

$$L_K^2 = \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \leq \frac{c^2}{|K \cap \theta^{\perp}|^2} \leq \left(\frac{cC}{c_2} \right)^2,$$

δηλαδή, $L_K \leq c_1 C$ με $c_1 = c/c_2$. $\square$

(γ) *Το ασυμπτωτικό πρόβλημα των Busemann και Petty.*

Το πρόβλημα των Busemann και Petty διατυπώθηκε αρχικά για συμμετρικά κυρτά σώματα ως εξής:

Υποθέτουμε οτι K_1 και K_2 είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με κοινό κέντρο συμμετρίας το o, και

$$|K_1 \cap \theta^\perp| \leq |K_2 \cap \theta^\perp|$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ρωτάμε αν $|K_1| \leq |K_2|$.

Η απάντηση είναι θετική αν $n \leq 4$ και αρνητική για όλες τις μεγαλύτερες διαστάσεις. Αυτό όμως που παραμένει ανοικτό είναι η ακόλουθη ασυμπτωτική έκδοση του προβλήματος:

Εικασία. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, αν K_1 και K_2 είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το o, και $|K_1 \cap \theta^\perp| \leq |K_2 \cap \theta^\perp|$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, τότε $|K_1| \leq c|K_2|$.*

Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς οτι η παραπάνω εικασία είναι ισοδύναμη με την εικασία της σταθεράς ισοτροπίας. Ας υποθέσουμε πρώτα οτι υπάρχει $C > 0$ τέτοια ώστε $L_W \leq C$ για κάθε κυρτό σώμα W. Αν τα K_1 και K_2 ικανοποιούν την

$$|K_1 \cap \theta^\perp| \leq |K_2 \cap \theta^\perp|$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, τότε το Θεώρημα 2 και η παρατήρηση που ακολουθεί δείχνουν οτι

$$\begin{aligned}
|K_1|^{\frac{n-1}{n}} &\leq cC\left(\int_{S^{n-1}} |K_1 \cap \theta^\perp|^n\right)^{1/n} \\
&\leq cC\left(\int_{S^{n-1}} |K_2 \cap \theta^\perp|^n\right)^{1/n} \\
&\leq \frac{cC}{c'}|K_2|^{\frac{n-1}{n}},
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$|K_1| \leq c_3|K_2|$$

όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε οτι η εικασία ισχύει, και ας θεωρήσουμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K. Εστω $\theta_0 \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$|K \cap \theta_0^\perp| = \max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^\perp|.$$

Επιλέγουμε $r > 0$ έτσι ώστε $r^{n-1}\omega_{n-1} = |K \cap \theta_0^\perp|$. Τότε,

$$|K \cap \theta^\perp| \leq r^{n-1}\omega_{n-1} = |(rD_n) \cap \theta^\perp|$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, άρα

$$|K| \leq c|rD_n| = \frac{c\omega_n}{\omega_{n-1}^{\frac{n}{n-1}}}|K \cap \theta_0^\perp|^{\frac{n}{n-1}}.$$

Αφού $|K| = 1$, βλέπουμε οτι

$$|K \cap \theta_0^\perp| \geq c,$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ομως το K είναι ισοτροπικό, άρα $|K \cap \theta^{\perp}| \simeq 1/L_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Επομένως, $L_K \leq C$ για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$.

Ολη η συζήτηση που κάναμε συνοψίζεται στο ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(α) *Υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει*

$$L_K \leq c_1.$$

(β) *Υπάρχει σταθερά $c_2 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το o να ισχύει*

$$|K|^{\frac{n-1}{n}} \leq c_2 \max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}|.$$

(γ) *Υπάρχει σταθερά $c_3 > 0$ τέτοια ώστε, αν K_1 και K_2 είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το o που ικανοποιούν την*

$$|K_1 \cap \theta^{\perp}| \leq |K_2 \cap \theta^{\perp}|$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, να ισχύει

$$|K_1| \leq c_3 |K_2|.$$

(δ) *Υπάρχουν σταθερές $c_4, c_5 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το o να ισχύει*

$$\frac{c_4}{\sqrt{n}} \leq [m_1(K)]^{1/n} \leq \frac{c_5}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

Ο κατάλογος των ισοδύναμων διατυπώσεων του προβλήματος είναι μακρύς: για τον λόγο αυτό, το ερώτημα θεωρείται κεντρικό. Αν κανείς κοιτάξει με προσοχή τις αποδείξεις των Θεωρημάτων αυτής της παραγράφου, θα δεί οτι η εξάρτηση ανάμεσα στις c_1 ως c_5 είναι γραμμική ή αντίστροφα γραμμική.

4.5 Τυχαία σημεία σε ισοτροπικά κυρτά σώματα.

Θεωρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Ξέρουμε οτι για κάθε $y \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει εδώ είναι το εξής: Δίνονται $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Να δοθεί εκτίμηση για τον ελάχιστο φυσικό αριθμό m_0 που έχει την ιδιότητα: για κάθε $m \geq m_0$, m τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_m \in K$ ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \delta$ την

$$(1-\varepsilon)L_K^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \langle x_j, y\rangle^2 \leq (1+\varepsilon)L_K^2$$

για κάθε $y \in S^{n-1}$. Θα δούμε την απάντηση του Bourgain [Bou2]: Μπορούμε να πάρουμε το m_0 της τάξης του $n(\log n)^2$.

Λήμμα 1. *Εστω* $\{f_j\}_{j\leq m}$ *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο 0. Αν* $\|f_j\|_1 \leq 2$ *και* $\|f_j\|_\infty \leq B$*, τότε για κάθε* $\varepsilon \in (0,1)$ *έχουμε*

$$\text{Prob}\left(|\sum_{j=1}^{m} f_j| > \varepsilon m\right) \leq 2\exp(-\varepsilon^2 m/8B). \quad \Box \tag{6}$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την αριθμητική ανισότητα $e^x \leq 1 + x + x^2, x \leq 1$, και το γεγονός οτι κάθε f_j έχει μέσο 0, βλέπουμε οτι, αν $\lambda B < 1$ τότε

$$\begin{aligned}\int e^{\lambda f_j} &\leq 1 + \lambda^2 \int f_j^2 \leq 1 + \lambda^2 \|f_j\|_1 \|f_j\|_\infty \\ &\leq 1 + 2B\lambda^2 \leq \exp(2B\lambda^2).\end{aligned}$$

Επεται οτι

$$\int \exp\left(\lambda \sum_{j=1}^{m} f_j\right) \leq \exp(2Bm\lambda^2),$$

και η ανισότητα του Markov μας δίνει

$$\text{Prob}\left(\sum_{j=1}^{m} f_j > \varepsilon m\right) \leq \exp(2Bm\lambda^2 - \lambda\varepsilon m).$$

Επιλέγοντας $\lambda = \varepsilon/4B$ (παρατηρείστε οτι $\lambda B < 1$), παίρνουμε

$$\text{Prob}\left(\sum_{j=1}^{m} f_j > \varepsilon m\right) \leq \exp(-\varepsilon^2 m/8B).$$

Κάνοντας τα ίδια για τις $-f_j$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. $\Box$

Λήμμα 2. *Εστω* K *ισοτροπικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$*. Σταθεροποιούμε* $\theta, \delta, \varepsilon \in (0,1)$*. Αν* $B \geq c(\varepsilon)\log n$ *και* $m \geq c\varepsilon^{-2} n \log(\frac{2}{\delta\theta})(\frac{B}{c_1 L_K})^2$*, τότε* m *τυχαία σημεία* $x_1, \ldots, x_m \in K$ *ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1-\delta$ *την*

$$(1-\varepsilon)L_K^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{\{j:|\langle x_j, y\rangle| \leq B\}} \langle x_j, y\rangle^2 \leq (1+\varepsilon)L_K^2$$

για όλα τα y *σε ένα* θ*-δίκτυο της* S^{n-1}*.*

Απόδειξη: Υπάρχει θ-δίκτυο $\mathcal{N}$ για την S^{n-1}, με πληθάριθμο $|\mathcal{N}| \leq (3/\theta)^n$.

Σταθεροποιούμε $y \in \mathcal{N}$, και ορίζουμε $f : K \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{L_K^2}\langle x, y\rangle^2 \chi_{\{z:|\langle z,y\rangle|\leq B\}}(x).$$

Λόγω του Θεωρήματος 4.2.4, αν επιλέξουμε $B > c(\varepsilon)\log n$, τότε

$$(*) \qquad 1 - \int_K f(x)dx = \frac{1}{L_K^2}\int_{\{z:|\langle z,y\rangle|>B\}} \langle x,y\rangle^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

όποιο κι αν είναι το $y \in S^{n-1}$. Ορίζουμε $f_j(x_1,\ldots,x_m) = f(x_j) - \int_K f$ στο K^m. Εύκολα ελέγχουμε οτι

$$\|f_j\|_1 \leq 2 \quad , \quad \mathbb{E}f_j = 0 \quad , \quad \|f_j\|_\infty \leq \left(\frac{B}{L_K}\right)^2.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1 παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left(|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m f(x_j) - \int_K f(x)dx| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 2\exp(-\varepsilon^2 m/8(B/L_K)^2) < \delta|\mathcal{N}|^{-1},$$

αν επιλέξουμε

$$m \geq c\varepsilon^{-2}\log\left(\frac{2}{\delta\theta}\right) n \left(\frac{B}{L_K}\right)^2.$$

Αυτό σημαίνει οτι με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ τα $x_1,\ldots,x_m$ ικανοποιούν την

$$(**) \qquad |\frac{1}{m}\sum_{\{j:|\langle x_j,y\rangle|\leq B\}} \langle x_j,y\rangle^2 - L_K^2\int_K f(x)dx| \leq \frac{\varepsilon}{2}L_K^2,$$

για κάθε $y \in \mathcal{N}$. Από τις $(*)$ και $(**)$ έπεται το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 3. *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα, $\delta \in (0,1)$, $m \geq n$, και $x_1,\ldots,x_m$ τυχαία σημεία στο K. Με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ έχουμε*

$$|\sum_{i\in E} x_i| \leq c(\delta)L_K\sqrt{\log m}\left(\sqrt{|E|}\sqrt{n} + \sqrt{\log m}|E|\right)$$

για κάθε $E \subseteq \{1,\ldots,m\}$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.2.6, τα $x_1,\ldots,x_m$ ικανοποιούν την

$$|x_j| \leq C_2\sqrt{n}L_K t \quad , \quad j = 1,\ldots,m$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2m\exp(-t^2)$. Αν $t \geq c_1(\delta)\sqrt{\log m}$, τότε αυτή η πιθανότητα είναι $> 1-\frac{\delta}{2}$. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε οτι όλα τα x_j ικανοποιούν την

$$|x_j| \leq c_1(\delta)\sqrt{n}L_K\sqrt{\log m}.$$

Εστω $E \subseteq \{1,\ldots,m\}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\sum_{i\in E} x_i|^2 &= \sum_{i\in E}|x_i|^2 + \sum_{i\neq j\in E}\langle x_i,x_j\rangle \\ &\leq c_1^2(\delta)L_K^2 n\log m|E| + \sum_{i\neq j\in E}\langle x_i,x_j\rangle. \end{aligned}$$

Ορίζουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές δ_i με $P(\delta_i = 1) = P(\delta_i = 0) = 1/2$. Τότε,

$$\mathbb{E}\langle \sum_{i=1}^{m} \delta_i x_i, \sum_{j=1}^{m}(1-\delta_j)x_j \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i \neq j \in E} \langle x_i, x_j \rangle$$

Επομένως, υπάρχουν $E_1, E_2 \subset E$ με $|E_1| \geq |E_2|$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j \in E} \langle x_i, x_j \rangle &\leq 4 \langle \sum_{i \in E_1} x_i, \sum_{j \in E_2} x_j \rangle \\ &\leq 4 \sum_{i \in E_1} |\langle x_i, \sum_{j \in E_2} x_j \rangle|. \end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε το τελευταίο άθροισμα στη μορφή

$$\sum_{i \in E_1} |\langle x_i, \sum_{j \in E_2} x_j \rangle| = |\sum_{j \in E_2} x_j| \sum_{i \in E_1} |\langle x_i, y_{E_2} \rangle|,$$

όπου

$$y_{E_2} = \frac{\sum_{j \in E_2} x_j}{|\sum_{j \in E_2} x_j|} \quad , \quad |y_{E_2}| = 1.$$

Παρατηρήστε οτι το $\{x_i\}_{i \in E_1}$ είναι ανεξάρτητο από το y_{E_2}, αφού $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Αν σταθεροποιήσουμε προς στιγμή τον πληθάριθμο $|E_1| = k$, τότε από το Θεώρημα 4.2.4 παίρνουμε
(*)

$$\text{Prob}\left(\vec{x} \in K^m : \exists E_1 \subset E, |E_1| = k, \sum_{i \in E_1} |\langle x_i, y_{E_2} \rangle| > tkL_K \right) < m^{ck} \exp(-ckt).$$

Η πιθανότητα αυτή μπορεί να γίνει μικρότερη από δ/m αν πάρουμε $t \simeq \log m$,. Μπορούμε λοιπόν παίρνοντας $k = 1, \ldots, m$ και εξαιρώντας λίγα $(x_1, \ldots, x_m) \in K^m$, να υποθέσουμε οτι με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{\delta}{2}$ τα $x_1, \ldots, x_m$ ικανοποιούν το εξής: Για κάθε $E \subseteq \{1, \ldots, m\}$,

$$\sum_{i \neq j \in E} \langle x_i, x_j \rangle \leq c_2(\delta) L_K \log m \max_{E_1 \subset E} \left\{ |E_1| |\sum_{j \in E \setminus E_1} x_j| \right\}.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, σταθεροποιούμε $s \in \mathbb{N}$ και γράφουμε

$$A_s = \max_{|F| \leq s} |\sum_{j \in F} x_j|.$$

Τότε,

$$|\sum_{i \in E} x_i|^2 \leq c_1^2(\delta) L_K^2 n \log m |E| + c_2(\delta) L_K \log m |E| A_{|E|},$$

άρα

$$A_{|E|}^2 \leq c_3(\delta)\left(L_K^2 n\log m|E| + L_K \log m|E|A_{|E|}\right),$$

το οποίο μας δίνει

$$A_{|E|} \leq c(\delta)\left(L_K\sqrt{n}\sqrt{\log m}\sqrt{|E|} + L_K\log m|E|\right). \quad \square$$

Θεώρημα 1. *Εστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και $\delta, \varepsilon \in (0,1)$. Αν $m \geq c'(\delta,\varepsilon)n(\log n)^2$, τότε m τυχαία σημεία $x_1,\ldots,x_m \in K$ ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ την*

$$(1-\varepsilon)L_K^2 \leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\langle x_j, y\rangle^2 \leq (1+\varepsilon)L_K^2$$

για κάθε $y \in S^{n-1}$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $\theta \in (0,1)$ το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα (σαν μικρό πολλαπλάσιο του ε). Παίρνουμε

$$B \simeq c(\delta,\varepsilon)L_K\log m,$$

όπου $c(\delta,\varepsilon)$ σταθερά μεγαλύτερη από την σταθερά του Λήμματος 2. Τότε, ξέρουμε οτι με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{\delta}{2}$, τυχαία $x_1,\ldots,x_m \in K$ ικανοποιούν την

$$(*) \qquad (1-\varepsilon)L_K^2 \leq \frac{1}{m}\sum_{\{j:|\langle x_j,y\rangle|\leq B\}}\langle x_j,y\rangle^2 \leq (1+\varepsilon)L_K^2$$

για κάθε y σε ένα θ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S^{n-1}. Αφού $m \geq n$, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε οτι τα $x_1,\ldots,x_m$ ικανοποιούν το Λήμμα 3 με πιθανότητα $> 1-\frac{\delta}{2}$. Για κάθε $\beta \geq B$ και $y \in S^{n-1}$, ορίζουμε

$$E_\beta(y) = \{j \leq m \,|\, |\langle x_j,y\rangle| > \beta\}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3 μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του $E_\beta(y)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\beta|E_\beta| &\leq \sum_{j\in E_\beta}|\langle x_j,y\rangle| \leq \max_{\varepsilon_j=\pm1, j\in E_\beta}|\sum \varepsilon_j x_j| \\
&\leq 2\max_{F\subseteq E_\beta}|\sum_{j\in F}x_j| \\
&\leq 2c(\delta)L_K\sqrt{\log m}\sqrt{n}\sqrt{|E_\beta|} + 2c(\delta)L_K\log m|E_\beta| \\
&\leq 2c(\delta)L_K\sqrt{\log m}\sqrt{n}\sqrt{|E_\beta|} + \frac{\beta}{2}|E_\beta|,
\end{aligned}$$

αν $B > 4c(\delta)L_K\log m$, οπότε συμπεραίνουμε οτι

$$\beta^2|E_\beta| \leq c_1(\delta)L_K^2 n\log m.$$

Παρατηρήστε οτι αυτή η εκτίμηση είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του $y \in S^{n-1}$. Επεται οτι,

$$\begin{aligned}
\sum_{\{j:|\langle x_j,y\rangle|>B\}} \langle x_j,y\rangle^2 &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \sum_{\{j:2^kB<|\langle x_j,y\rangle|\leq 2^{k+1}B\}} \langle x_j,y\rangle^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |E_{2^kB}|(2^{k+1}B)^2 \\
&\leq c_1(\delta)L_K^2 n(\log m)k_0.
\end{aligned}$$

όπου η άθροιση είναι πάνω από τα μη κενά E, και k_0 είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $\mathrm{diam}(K) \leq 2^{k_0}B$. Αφού το K είναι ισοτροπικό, έχουμε το φράγμα $\mathrm{diam}(K) \leq (n+1)L_K$, επομένως

$$k_0 \leq c\log\left(\frac{nL_K}{B}\right) \leq c(\varepsilon)\log n.$$

Αν επιλέξουμε κατάλληλα την σταθερά $c'(\delta,\varepsilon)$, αφού $m > c'(\delta,\varepsilon)n(\log n)^2$ έχουμε

$$\frac{1}{m}\sum_{\{j:|\langle x_j,y\rangle|>B\}} \langle x_j,y\rangle^2 \leq \frac{c_2(\delta,\varepsilon)L_K^2 n(\log n)(\log m)}{m} < \varepsilon L_K^2.$$

Σε συνδυασμό με την $(*)$ αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για όλα τα $y \in \mathcal{N}$. Τέλος, παίρνοντας $\theta = \varepsilon/10$ και χρησιμοποιώντας ένα συνηθισμένο επιχείρημα διαδοχικής προσέγγισης, μπορούμε να περάσουμε την εκτίμηση σε όλα τα $y \in S^{n-1}$. $\square$

Αναφορές

[Al] S. Alesker, *ψ_2-estimate for the Euclidean norm on a convex body in isotropic position*, Oper. Theory Adv. Appl. **77** (1995), 1-4.

[And] T.W. Anderson, *The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 170-176.

[Bo] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Inventiones Math. **30** (1975), 207-216.

[Bou1] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[Bou2] J. Bourgain, *Random points in isotropic convex sets*, Convex Geometric Analysis, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **34** (1999), 53-58.

[D1] S. Dar, *Remarks on Bourgain's problem on slicing of convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 61-66.

[D2] S. Dar, *On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies*, Israel J. Math. **97** (1997), 151-156.

[FT] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[Gar] R.J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, New York, 1995.

[Gr1] H. Groemer, *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **61**, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[Gr2] H. Groemer, *On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set*, Pacific J. Math. **45** (1973), 525-533.

[GM] A.A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. (to appear).

[Jo] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[KLS] R. Kannan, L. Lovasz and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[Le] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[LT] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[MM] E. Makai, Jr. and H. Martini, *The cross-section body, plane sections of convex bodies and approximation of convex bodies, I*, Geom. Dedicata **63** (1996), 267-296.

[MP] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64-104.

[MS] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[Pi1] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[Pi2] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375-392.

[PT] A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Remarques sur les nombres d'entropie d'un opérateur et de son transposé*, C.R. Acad. Sci. Paris **301** (1985), 743-746.

[RS] C.A. Rogers and G. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. **8** (1957), 220-233.

[Sch] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[Su] V.N. Sudakov, *Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces*, Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 412-415.