ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

MÖBIUS ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ ΧΩΡΟΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΩΣΤΑΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΠΑΝΤΕΡΗΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΜΙΧΑΛΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2011

UNIVERSITY OF CRETE
FACULTY OF SCIENCES AND ENGINEERING
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER THESIS

MÖBIUS INVARIANT SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

KOSTAS ELEFTHERIOY PANTERIS

THESIS ADVISOR
MICHAEL PAPADIMITRAKIS

HERAKLIO
JUNE 2011

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος "Μαθηματικά και Εφαρμογές τους" στον τομέα "Θεωρητικά Μαθηματικά" και κατατέθηκε τον Ιούνιο του 2011. Την επιτροπή κρίσης αυτής της εργασίας αποτέλεσαν οι

Μήτσης Θεμιστοκλής, Επίκουρος Καθηγητής
Παπαδημητράκης Μιχαήλ, Αναπληρωτής Καθηγητής
Παπαδοπούλου Σουζάννα, Καθηγήτρια

Επιβλέπων Καθηγητής ήταν ο κ. Παπαδημητράκης Μιχαήλ.

Στη μνήμη του πατέρα μου Λευτέρη

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παπαδημητράκη, που χωρίς τη συνεχή και πάντα πρόθυμη καθοδήγησή του, η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη. Ήταν πάντα παρών για να με ενθαρρύνει, να με στηρίξει ψυχολογικά, αλλά και να με συμβουλεύσει στην υλοποίηση της εργασίας μου. Ως επιστήμονας, αλλά και ως άνθρωπος, είχε απολύτως καθοριστική συμβολή στη διαμόρφωση και ολοκλήρωση της εργασίας, αλλά και αποτελούσε για μένα μόνιμο σημείο αναφοράς σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχικών μου σπουδών. Αναμφίβολα, θεωρώ τον εαυτό μου πολύ τυχερό που συνεργάστηκα μαζί του.

Επίσης, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω το Θέμη Μήτση, με τον οποίο οι συχνές συζητήσεις που έκανα, σε όλη τη διάρκεια της εργασίας, υπήρξαν πάντα πολύτιμες και εποικοδομητικές.

Ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω την κ. Σουζάννα Παπαδοπούλου, η οποία κατά τις μεταπτυχιακές μου σπουδές, ήταν δίπλα μου, πρόθυμη να προσφέρει τη βοήθειά της.

Θα ήταν παράλειψή μου αν δεν ευχαριστούσα το Γιώργο Κωστάκη, ο οποίος, ειδικά στο πρώτο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών, μού προσέφερε βοήθεια τόσο στον τομέα της ενθάρρυνσης κατά τις δύσκολες στιγμές, όσο και σε μαθηματικά προβλήματα που πάντα ήταν πρόθυμος να ακούσει και να συζητήσει μαζί μου.

MÖBIUS INVARIANT SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

This master thesis consists of five chapters, including introduction.
In chapter 2, Möbius invariant function spaces are defined, examples of such spaces are listed and some general propositions are proved. In chapter 3, the minimal Möbius invariant function space $\mathcal{M}$ is presented along with the basic theorems concerning this space. Chapter 4 is dedicated to the composition operator defined in a Möbius invariant function space. Results related to conditions under which a composition operator maps a Möbius invariant function space to itself are proved. Finally, in chapter 5, the focus is on the study of composition operator in the minimal Möbius invariant function space $\mathcal{M}$ and there are proofs of results related to when this operator maps $\mathcal{M}$ to $\mathcal{M}$.

MÖBIUS ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ ΧΩΡΟΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια, μαζί με την εισαγωγή.
Στο **κεφάλαιο 2** περιέχεται ο ορισμός των Möbius αναλλοίωτων χώρων συναρτήσεων, παραδείγματα τέτοιων χώρων, καθώς και κάποιες βασικές προτάσεις που αφορούν σε αυτούς. Στο **κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται ο ελάχιστος (minimal) Möbius αναλλοίωτος χώρος $\mathcal{M}$ και βασικά θεωρήματα γι΄ αυτόν τον χώρο. Στο **κεφάλαιο 4** παρατίθενται αποτελέσματα που αφορούν στον τελεστή σύνθεσης όταν αυτός ορίζεται σε ένα Möbius αναλλοίωτο χώρο, καθώς και συνθήκες για το πότε ο τελεστής αυτός απεικονίζει έναν τέτοιο χώρο στον εαυτό του. Στο **κεφάλαιο 5** γίνεται μελέτη του τελεστή σύνθεσης όταν αυτός ορίζεται στον ελάχιστο Möbius αναλλοίωτο χώρο $\mathcal{M}$ και αποδεικνύονται αποτελέσματα για το πότε ο τελεστής αυτός απεικονίζει το χώρο $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{M}$.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Möbius αναλλοίωτος χώρος
Möbius συνάρτηση
Ομάδα συναρτήσεων Möbius
Χώρος αναλυτικών συναρτήσεων
Ελάχιστος χώρος
Τελεστής σύνθεσης
Χώρος Bloch
Χώρος Besov
Χώρος BMOA
Χώρος Hardy
Carleson μέτρα
Γινόμενο Blaschke

KEYWORDS

Möbius invariant space
Möbius function
Möbius function group
Analytic function space
Minimal space
Composition operator
Bloch space
Besov space
BMOA space
Hardy space
Carleson measure
Blaschke product

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Συμβολίζουμε με $\Delta(z;r)$ τον ανοικτό δίσκο με κέντρο z και ακτίνα $r > 0$ και ειδικώτερα $\Delta = \Delta(0;1)$. Η ομάδα Möbius G αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις ϕ οι οποίες απεικονίζουν τον Δ σύμμορφα επί του εαυτού του. Κάθε $\phi \in G$ έχει τη μορφή

$$\phi(z) = \lambda\phi_\alpha(z), \quad |\lambda| = 1, \quad \alpha \in \Delta.$$

όπου

$$\phi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z} \tag{1}$$

Μερικές φορές μπορεί να θεωρήσουμε στην ϕ_α να είναι $|\alpha| = 1$, οπότε η ϕ_α είναι σταθερή και $\phi_\alpha(z) = \alpha$.

Η G είναι ομάδα ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων. Πράγματι, αν $\lambda\phi_b$ και $\mu\phi_\alpha$ είναι δύο στοιχεία της G, τότε έχουμε

$$(\lambda\phi_b \circ \mu\phi_\alpha)(z) = \lambda\frac{b - \mu\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}}{1 - \overline{b}\mu\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}} = \lambda\mu\frac{b\overline{\mu} - \frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}}{1 - \overline{b\overline{\mu}}\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}} = \lambda\mu k\phi_\gamma(z), \tag{2}$$

όπου

$$\gamma = \frac{\overline{\alpha} - b\overline{\mu}}{1 - \overline{\alpha}b\overline{\mu}} \tag{3}$$

$$k = \frac{b\overline{\mu\alpha} - 1}{1 - \overline{b}\mu\alpha} \tag{4}$$

και

$$|\lambda\mu k| = 1$$

Το ουδέτερο στοιχείο της G είναι το $-\phi_0 = z$ και το αντίστροφο στοιχείο του $\lambda\phi_\alpha$ είναι το $\overline{\lambda}\phi_{\lambda\alpha}$.
Επίσης, αν $z, w \in \Delta$ τότε η ψευδοϋπερβολική απόσταση των z και w ορίζεται ως

$$\rho(z, w) = \left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right|.$$

Για $\phi \in G$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\rho(\phi(z), \phi(w)) = \rho(z, w)$$

$$(5) \qquad |\phi'(z)| = \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$$

Επίσης, για $\psi : \Delta \to \Delta$ αναλυτική έχουμε, ως άμεσες συνέπειες του Λήμματος του Schwarz τις σχέσεις

$$(6) \qquad \rho(\psi(z), \psi(w)) \leqq \rho(z, w)$$

$$(7) \qquad |\psi'(z)| \leqq \frac{1-|\psi(z)|^2}{1-|z|^2}$$

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τη μελέτη γραμμικών χώρων αναλυτικών στο Δ συναρτήσεων, οι οποίοι απεικονίζονται στον εαυτό τους, αν πάρουμε τη σύνθεση $f \circ \phi$ των στοιχείων τους f με κάθε συνάρτηση ϕ στην ομάδα G.
Έστω ότι X είναι ένας γραμμικός χώρος αναλυτικών στο Δ συναρτήσεων που περιέχει τις στάθερες συναρτήσεις και $\|\cdot\|_X$ μία νόρμα στον X. Ας υποθέσουμε ότι ο X απεικονίζεται (αν συνθέσουμε τα στοιχεία του με κάθε Möbius συνάρτηση) στον ευατό του κατά ένα ομοιόμορφα φραγμένο τρόπο, δηλαδή $\|f \circ \phi - (f \circ \phi)(0)\|_X \leqq C\|f - f(0)\|_X$, όπου $f \in X$ και $\phi \in G$. Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα: η σύγκλιση ως προς την νόρμα του X να συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του Δ οπότε και την κατά σημείο σύγκλιση. Τότε ο χώρος αυτός πρέπει να είναι υποσύνολο του χώρου Bloch B. O χώρος B αποτελείται από όλες τις αναλυτικές στο Δ συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

$$\|f\|_B = |f(0)| + \sup_{|z|<1} |f'(z)|(1-|z|^2) < +\infty.$$

Ας αιτιολογήσουμε τον εγκλεισμό $X \subset B$. Υπάρχει $C > 0$ ώστε $|f'(0)| \leqq C\|f - f(0)\|_X$ για κάθε $f \in X$. Αν δεν ισχύει το τελευταίο, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_n \in X$ ώστε $|f_n'(0)| > n\|f_n - f_n(0)\|_X$. Αλλά τότε θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $g_n = \frac{f_n - f_n(0)}{n\|f_n - f_n(0)\|_X}$ έχουμε ότι $\|g_n\|_X = \frac{\|f_n - f_n(0)\|_X}{n\|f_n - f_n(0)\|_X} = \frac{1}{n} \to 0$, καθώς $n \to +\infty$. Επειδή υποθέσαμε ότι η σύγκλιση ως προς την νόρμα συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του Δ, έπεται ότι θα πρέπει $g_n'(0) \to 0$. Όμως, $|g_n'(0)| = \frac{|f_n'(0)|}{n\|f_n - f_n(0)\|_X} > 1$. Καταλήγουμε λοιπόν σε αντίφαση. Άρα υπάρχει $C > 0$ ώστε $|f'(0)| \leqq C\|f - f(0)\|_X$ για κάθε $f \in X$. Έστω $\alpha \in \Delta$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\phi_\alpha \in G$. Επειδή $f \circ \phi_\alpha \in X$, έχουμε $|(f \circ \phi_\alpha)'(0)| \leqq C\|f \circ \phi_\alpha - (f \circ \phi_\alpha)(0)\|_X \leqq C\|f - f(0)\|_X$, επομένως ισχύει ότι $|f'(\phi_\alpha(0))|\,|\phi_\alpha'(0)| \leqq C\|f - f(0)\|_X$. Οπότε τελικά, για κάθε $\alpha \in \Delta$ έχουμε

$$(8) \qquad |f'(\alpha)|\,(1-|\alpha|^2) \leqq C\|f - f(0)\|_X$$

από όπου συνεπάγεται ότι $X \subseteq B$.

Επίσης, με παρόμοια επιχειρήματα όπως παραπάνω, έχουμε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$|f(0)| \leqq C\|f\|_X \tag{9}$$

για κάθε $f \in X$. Από τις σχέσεις (8) και (9) έπεται ότι

$$\|f\|_B \leqq C\|f\|_X$$

για κάθε $f \in X$, από όπου συνεπάγεται ότι η εμφύτευση του χώρου X στον B γίνεται με συνεχή τρόπο.

Στο **κεφάλαιο 2** αυτής της εργασίας περιέχεται ο ορισμός των Möbius αναλλοίωτων χώρων συναρτήσεων, παραδείγματα τέτοιων χώρων, καθώς και κάποιες βασικές προτάσεις που αφορούν σε αυτούς. Στο **κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται ο ελάχιστος (minimal) Möbius αναλλοίωτος χώρος $\mathcal{M}$ και βασικά θεωρήματα γι΄ αυτόν τον χώρο. Στο **κεφάλαιο 4** παρατίθενται αποτελέσματα που αφορούν στον τελεστή σύνθεσης $C_\psi(f) = f \circ \psi$, όπου $\psi\colon \Delta \to \Delta$ αναλυτική, καθώς και συνθήκες για το πότε ο τελεστής αυτός απεικονίζει έναν Möbius αναλλοίωτο χώρο στον εαυτό του. Στο **κεφάλαιο 5** γίνεται μελέτη του τελεστή σύνθεσης C_ψ όταν αυτός ορίζεται στον ελάχιστο Möbius αναλλοίωτο χώρο $\mathcal{M}$.

Στην παρούσα εργασία με dA θα συμβολίζεται το κανονικοποιημένο στον Δ μέτρο Lebesgue, οπότε $\iint\limits_{\Delta} dA(z) = 1$. Επίσης, οι απόλυτες σταθερές θα συμβολίζονται με C και πολλές φορές δύο σταθερές με το ίδιο σύμβολο C στην ίδια σχέση μπορεί να μην είναι ίδιες. Ο συμβολισμός $f \asymp g$ σημαίνει ότι υπάρχουν σταθερές $C > 0$ ώστε $Cg \leqq f \leqq Cg$. Τέλος, το $C_p, \ldots$ δηλώνει ότι η σταθερά εξαρτάται μόνο από την ποσότητα $p, \ldots$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Möbius αναλλοίωτοι χώροι συναρτήσεων.

1. Ορισμός Möbius αναλλοίωτου χώρου συναρτήσεων.

Ορισμός 1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος αναλυτικών στο Δ συναρτήσεων που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και $\|\cdot\|_X$ μια νόρμα σε αυτόν. Ο X είναι Möbius αναλλοίωτος αν:

(α) για κάθε $f \in X$ ισχύει $f \in B$ και

$$\|f\|_B \leqq C\|f\|_X.$$

(β) ο X είναι πλήρης.

(γ) για κάθε $\phi \in G$ και για κάθε $f \in X$, η σύνθεση $C_\phi(f) = f \circ \phi$ ανήκει στον X και ισχύει:

$$\|f \circ \phi - (f \circ \phi)(0)\|_X \leqq C\|f - f(0)\|_X.$$

Παρατήρηση 1: Κάποιοι συγγραφείς, στον ορισμό του Möbius αναλλοίωτου χώρου συναρτήσεων προσθέτουν (εκτός από τις παραπάνω τρεις) μία ακόμα προϋπόθεση:

(δ) για κάθε $f \in X$, η απεικόνιση $\phi \mapsto f \circ \phi$ είναι συνεχής από το G στον X. Δηλαδή: αν $\lambda_n \to \lambda$ και $\alpha_n \to \alpha$ τότε $f \circ (\lambda_n \phi_{\alpha_n}) \to f \circ (\lambda \phi_\alpha)$ στον X.

Στην παρούσα εργασία θα δεχτούμε ως ορισμό του Möbius αναλλοίωτου χώρου συναρτήσεων την ικανοποίηση των (α),(β) και (γ) που επισημάναμε παραπάνω. Για την επιπρόσθετη ιδιότητα (δ) θα αναφέρουμε για κάθε χώρο που εξετάζουμε αν αυτός την ικανοποιεί ή όχι.
Παρατήρηση 2: Στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (α) με την:

(α)′ η σύγκλιση ως προς τη νόρμα συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του Δ.

Στην εισαγωγή αποδείχθηκε ότι η (α)′ μαζί με τη (γ) συνεπάγονται την (α). Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, υποθέτουμε το (α) και θεωρούμε ακολουθία συναρτήσεων f_n που συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση 0 στον X. Θα δείξουμε ότι έχουμε και την ομοιόμορφη σύγκλιση της f_n στην 0 στα συμπαγή υποσύνολα του Δ.
Από την (α) και το ότι $\|f_n\|_X \to 0$ συνεπάγεται $\|f_n\|_B \to 0$. Έστω $0 \leqq r < 1$. Τότε για $w \in \overline{\Delta(0;r)}$ έχουμε

$$|f_n'(w)| \leqq \frac{\|f_n\|_B}{1-r^2}.$$

Άρα για $z \in \overline{\Delta(0;r)}$ έχουμε

$$|f_n(z)| = |f_n(0) + \int_0^z f_n'(w)dw|$$

$$\leqq |f_n(0)| + \int_0^z |f_n'(w)|dw \leqq \|f_n\|_B + \frac{r}{1-r^2}\|f_n\|_B,$$

οπότε

$$\sup_{z\in\overline{\Delta(0;r)}} |f_n(z)| \leqq C_r\|f_n\|_B \to 0.$$

Άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Δ.

2. Παραδείγματα

(α) Ο p-χώρος Besov B_p, όπου $1 < p < +\infty$**,** ορίζεται ως ο χώρος των αναλυτικών στο Δ συναρτήσεων f για τις οποίες

$$\iint_\Delta |f'(z)|^p(1-|z|^2)^{p-2}dA(z) < +\infty.$$

Στο χώρο B_p ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_{B_p}$ μέσω της

$$\|f\|_{B_p}^p = |f(0)|^p + (p-1)\iint_\Delta |f'(z)|^p(1-|z|^2)^{p-2}dA(z)$$

Με την νόρμα $\|\cdot\|_{B_p}$ ο χώρος B_p είναι χώρος Banach, οπότε ικανοποιείται η προϋπόθεση (β) του **Ορισμού 1.**

<u>Απόδειξη της προϋπόθεσης (α) του **Ορισμού 1.**</u>

Έστω $f \in B_p$ και $z \in \Delta$. Θεωρούμε τον δίσκο

$$\Delta(z;r),\ \ r = \frac{1-|z|}{2}$$

Για την αναλυτική συνάρτηση f' έχουμε

$$|f'(z)| \leqq \frac{1}{|\Delta(z;r)|}\iint_{\Delta(z;r)} |f'(w)|dA(w) \leqq \frac{C}{(1-|z|)^2}\iint_{\Delta(z;r)} |f'(w)|dA(w) \tag{10}$$

Για $w \in \Delta(z;r)$ είναι $1-|w| \asymp 1-|z|$ οπότε

$$|f'(z)| \leqq \frac{C}{1-|z|}\iint_{\Delta(z;r)} \frac{|f'(w)|}{1-|w|}dA(w)$$

Επειδή $1-|z| \asymp 1-|z|^2$ και $1-|w| \asymp 1-|w|^2$ έπεται ότι

$$|f'(z)| \leqq \frac{C}{1-|z|^2} \iint\limits_{\Delta(z;r)} \frac{|f'(w)|}{1-|w|^2} dA(w) \Rightarrow$$
$$|f'(z)| \leqq \frac{C}{1-|z|^2} \iint\limits_{\Delta(z;r)} \frac{|f'(w)|(1-|w|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{(1-|w|^2)^{\frac{2p-2}{p}}} dA(w)$$

Αν $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, εφαρμόζοντας την ανισότητα *Hölder* στο δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leqq \frac{C}{1-|z|^2} \Big(\iint\limits_{\Delta(z;r)} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^{p-2} dA(w) \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\iint\limits_{\Delta(z;r)} \frac{1}{(1-|w|^2)^{\frac{(2p-2)q}{p}}} dA(w) \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqq \frac{C_p}{1-|z|^2} \|f\|_{B_p} \Big(\iint\limits_{\Delta(z;r)} \frac{1}{(1-|w|^2)^2} dA(w) \Big)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f'(z)|(1-|z|^2) &\leqq C_p \Big(\iint\limits_{\Delta(z;r)} \frac{1}{(1-|w|^2)^2} dA(w) \Big)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{B_p} \\ &\leqq C_p \Big(\frac{1}{(1-|z|^2)^2} \cdot |\Delta(z;r)| \Big)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{B_p} \leqq C_p \|f\|_{B_p}. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με τη σχέση $|f(0)| \leqq \|f\|_{B_p}$, μας δίνει τελικά ότι

$$\|f\|_B \leqq C_p \|f\|_{B_p} < +\infty.$$

Απόδειξη της προϋπόθεσης (γ) του **Ορισμού 1.**

Έστω $f \in B_p$. Αν ϕ είναι μία συνάρτηση Möbius, τότε

$$\|f\circ\phi - (f\circ\phi)(0)\|_{B_p}^p = (p-1) \iint\limits_{\Delta} |f'(\phi(z))|^p |\phi'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-2} dA(z)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5) έχουμε

$$\|f\circ\phi - (f\circ\phi)(0)\|_{B_p}^p = (p-1) \iint\limits_{\Delta} |f'(\phi(z))|^p (1-|\phi(z)|^2)^{p-2} |\phi'(z)|^2 dA(z)$$

Κάνοντας τη συνήθη αλλαγή μεταβλητής $\phi(z)=w$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f\circ\phi - (f\circ\phi)(0)\|_{B_p}^p &= (p-1) \iint\limits_{\Delta} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^{p-2} dA(w) \\ &= \|f-f(0)\|_{B_p}^p \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι ο χώρος B_p ικανοποιεί το (γ) του **Ορισμού 1.**

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο χώρος B_p ικανοποιεί και την ιδιότητα (δ).
Όταν $p = 2$ ο 2-χώρος **Besov** είναι γνωστός ως χώρος **Dirichlet** και συμβολίζεται με $\mathscr{D}$. Ο χώρος αυτός αποτελείται από όλες τις αναλυτικές στο Δ συναρτήσεις f των οποίων το εμβαδό της εικόνας τους (συμπεριλαμβανομένης της πολλαπλότητας κάθε τιμής) είναι πεπερασμένο. Η νόρμα $\|\cdot\|_{\mathscr{D}}$ του χώρου αυτού ορίζεται μέσω της

$$\|f\|_{\mathscr{D}}^2 = |f(0)|^2 + \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 dA(z)$$

και προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f|g\rangle_{\mathscr{D}} = f(0)\overline{g(0)} + \iint_{\Delta} f'(z)\overline{g'(z)} dA(z)$$

δηλαδή ο $\mathscr{D}$ είναι χώρος Hilbert.
(β) Ο χώρος H^∞ των φραγμένων αναλυτικών συναρτήσεων στο Δ είναι Möbius αναλλοίωτος χώρος, όπως είναι και **η άλγεβρα του δίσκου** A που αποτελείται από τις συναρτήσεις του H^∞ που είναι συνεχείς στο $\overline{\Delta}$, δηλαδή στην κλειστότητα του Δ. Η νόρμα και στις δύο περιπτώσεις είναι η supremum νόρμα, δηλαδή

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{\Delta} |f(z)|$$

και

$$\|f\|_A = \max_{z\in\overline{\Delta}} |f(z)| = \sup_{z\in\Delta} |f(z)|$$

Ο A είναι κλειστός υπόχωρος του H^∞. Οι χώροι H^∞ και A είναι χώροι Banach, οπότε ικανοποιείται η προϋπόθεση (β) του **Ορισμού 1.**

Απόδειξη της προϋπόθεσης (α) του **Ορισμού 1.**
Ο χώρος H^∞ περιέχεται στον χώρο Bloch B. Έστω $f \in H^\infty$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_{H^\infty} = 1$. Τότε από τη σχέση (7) γνωρίζουμε ότι

$$\left|f'(\alpha)\right| \leqq \frac{1-|f(\alpha)|^2}{1-|\alpha|^2}, \quad \alpha \in \Delta$$

Άρα

$$(1-|\alpha|^2)|f'(\alpha)| \leqq 1-|f(\alpha)|^2 \leqq 1, \quad \alpha \in \Delta$$

Οπότε τελικά $\|f\|_B \leqq |f(0)| + 1 \leqq 2\|f\|_{H^\infty}$, οπότε $f \in B$.

Επίσης, ισχύει $A \subset H^\infty$, άρα $A \subset B$.

Απόδειξη της προϋπόθεσης (γ) του **Ορισμού 1.**
Για $f \in H^\infty$ και $\phi \in G$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|f\circ\phi - (f\circ\phi)(0)\|_{H^\infty} &= \sup_{z\in\Delta}|f(\phi(z)) - f(\phi(0))| \\ &\leqq \sup_{z\in\Delta}|f(\phi(z)) - f(0)| + |f(0) - f(\phi(0))| \\ &= \sup_{w\in\Delta}|f(w) - f(0)| + |f(\phi(0)) - f(0)| \\ &\leqq 2\|f - f(0)\|_{H^\infty}\end{aligned}$$

Ομοίως γίνεται η απόδειξη και για την άλγεβρα του δίσκου A.
Ο χώρος H^∞ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) που αναφέρθηκε μετά τον ορισμό 1. Η ιδιότητα (δ) ισχύει όμως αν στο χώρο αυτό θεωρήσουμε την ασθενώς-* τοπολογία ή την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Δ. Ο χώρος A ικανοποιεί και την ιδιότητα (δ).
(γ) Είναι αξιοσημείωτο ότι **οι χώροι Hardy** $H^p, 1 \leqq p < \infty$ δεν είναι Möbius αναλλοίωτοι. Μία αναλυτική στο Δ συνάρτηση f ανήκει στο χώρο H^p αν

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0\leqq r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Οι χώροι αυτοί ικανοποιούν τις συνθήκες (α), (β) και (δ) του **ορισμού 1** αλλά δεν ικανοποιούν τη συνθήκη (γ) του ορισμού, γιατί

$$\|\phi_\alpha\|_{H^p} = \frac{1}{\left(1-|\alpha|^2\right)^{\frac{1}{p}}}, \alpha \in \Delta.$$

Θεωρώντας την $f(z) = z$ η οποία ανήκει στο χώρο $H^p, 1 \leqq p < \infty$ τότε αν ίσχυε η συνθήκη (γ) του **ορισμού 1** θα είχαμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(1-|\alpha|^2\right)^{\frac{1}{p}}} &= \|\phi_\alpha\|_{H^p} = \|z\circ\phi_\alpha\|_{H^p} \\ &\leqq C\|z\|_{H^p} < +\infty\end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο στην τελευταία σχέση όταν $|\alpha| \to 1$ έχουμε άτοπο.
(δ) Ο χώρος $BMOA$. Μία συνάρτηση f αναλυτική στο Δ λέμε ότι είναι στον $BMOA$, αν ανήκει στον χώρο H^1, οπότε η συνοριακή συνάρτηση f στον $\mathbb{T}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{T})$, και ισχύει

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |f(\theta) - f_I| d\theta < +\infty,$$

όπου I είναι τυχαίο τόξο του $\mathbb{T}$, $|I|$ είναι το μήκος του I και

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(\theta) d\theta.$$

Στο χώρο $BMOA$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{BMOA} = |f(0)| + \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |f(\theta) - f_I| d\theta.$$

Για κάθε $p \in [1, +\infty)$ ορίζουμε

$$\|f\|_{BMOA_p} = |f(0)| + \sup_{\alpha \in \Delta} \|f \circ \phi_\alpha - f(a)\|_{H^p}.$$

Είναι γνωστό ότι οι νόρμες $\|f\|_{BMOA_p}$ είναι όλες ισοδύναμες με τη νόρμα $\|f\|_{BMOA}$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος John - Nirenberg.
Ο χώρος $BMOA$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_{BMOA}$ είναι χώρος Banach, άρα ικανοποιείται η προϋπόθεση (β) του **Ορισμού 1.**
Ο υπόχωρος $VMOA$ του χώρου $BMOA$ αποτελείται από τις συναρτήσεις f που είναι αναλυτικές στο Δ και για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{|\alpha| \to 1} \|f \circ \phi_\alpha - f(\alpha)\|_{H^p} = 0.$$

Ο χώρος $VMOA$ ταυτίζεται με την κλειστότητα των πολυωνύμων στον χώρο $BMOA$, οπότε, ως κλειστός υπόχωρος του $BMOA$, είναι και αυτός χώρος Banach.

Απόδειξη της προϋπόθεσης (α) του **Ορισμού 1.**

Έστω $f \in BMOA$ και $\alpha \in \Delta$. Τότε θέτοντας $g_\alpha = f \circ \phi_\alpha - f(\alpha)$, έχουμε ότι η g_α είναι αναλυτική στο Δ και $g'_\alpha(z) = f'(\phi_\alpha(z))\phi'_\alpha(z)$. Αλλά $\phi'_\alpha(z) = \frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}z)^2}$, οπότε έχουμε ότι $|g'_\alpha(0)| = |f'(\alpha)|(1-|\alpha|^2)$. Αν $0 < r < 1$, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f'(\alpha)|(1-|\alpha|^2) = |g'_\alpha(0)| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{g_\alpha(z)}{z^2} dz \Big| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi r} \int\limits_0^{2\pi} |g_\alpha(re^{i\theta})| d\theta \leqq \frac{\|g_\alpha\|_{H^1}}{r}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο όταν $r \to 1^-$, έχουμε

$$|f'(\alpha)|(1-|\alpha|^2) \leqq \|g_\alpha\|_{H^1}$$

Άρα

$$\sup_{|\alpha|<1} |f'(\alpha)|(1-|\alpha|^2) \leqq \sup_{|\alpha|<1} \|g_\alpha\|_{H^1} \Rightarrow \|f\|_B \leqq \|f\|_{BMOA_1}.$$

Προφανώς, το ίδιο ισχύει για $f \in VMOA$.

Απόδειξη της προϋπόθεσης (γ) του **Ορισμού 1.**

Έστω $\phi = \lambda\phi_b \in G$ και $f \in BMOA$. Τότε

$$\begin{aligned}\|f\circ\phi - (f\circ\phi)(0)\|_{BMOA_1} &= \sup_{|\alpha|<1} \|(f\circ\phi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\phi)(\alpha)\|_{H^1} \\ &= \sup_{|\alpha|<1} \|f(\lambda\phi_b\circ\phi_\alpha) - f(\lambda\phi_b(\alpha))\|_{H^1}\end{aligned}$$

Αλλά $\phi_b \circ \phi_\alpha = \mu\phi_c$ για κάποια μ με $|\mu| = 1$ και $c \in \Delta$. Θέτοντας $z = 0$ στη σχέση αυτή παίρνουμε $\phi_b(\alpha) = \mu c$, οπότε

$$\|f(\lambda\phi_b\circ\phi_\alpha) - f(\lambda\phi_b(\alpha))\|_{H^1} = \|f(\lambda\mu\phi_c) - f(\lambda\mu c)\|_{H^1} = \|f(\phi_c) - f(c)\|_{H^1}$$

Άρα

$$\|f\circ\phi - (f\circ\phi)(0)\|_{BMOA_1} \leqq \sup_{|c|<1} \|f\circ\phi_c - f(c)\|_{H^1} = \|f - f(0)\|_{BMOA_1}$$

Για το χώρο $VMOA$ θα δείξουμε ότι αν $f \in VMOA$ και $\phi \in G$ τότε $f\circ\phi \in VMOA$. Όπως πριν είναι

$$\|(f\circ\phi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\phi)(\alpha)\|_{H^1} = \|f\circ\phi_c - f(c)\|_{H^1}$$

Αν $|\alpha| \to 1$ τότε $|c| \to 1$, οπότε

$$\lim_{|\alpha|\to 1} \|(f\circ\phi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\phi)(\alpha))\|_{H^1} = \lim_{|c|\to 1} \|f\circ\phi_c - f(c)\|_{H^1} = 0.$$

Άρα $f\circ\phi \in VMOA$.

Ο χώρος $BMOA$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) που αναφέρθηκε μετά τον ορισμό 1. Η ιδιότητα (δ) όμως ισχύει στον $BMOA$ αν σε αυτόν θεωρήσουμε την ασθενώς-* τοπολογία ή την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Δ. Ο χώρος $VMOA$ ικανοποιεί και την ιδιότητα (δ).

(ε) Ο χώρος Bloch B είναι Möbius αναλλοίωτος χώρος. Στο χώρο αυτό θεωρούμε, όπως έχουμε ήδη πει, τη νόρμα

$$\|f\|_B = |f(0)| + \sup_{|z|<1} |f'(z)|(1-|z|^2).$$

Ο χώρος B εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_B$ είναι χώρος Banach, επομένως ικανοποιείται η συνθήκη (β) του **ορισμού 1.**

Επίσης, είναι προφανές ότι ικανοποιείται η προϋπόθεση (α) του **Ορισμού 1.**

Απόδειξη της προϋπόθεσης (γ) του **Ορισμού 1.**

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5). Είναι

$$\begin{aligned}\|f\circ\phi-(f\circ\phi)(0)\|_B &= \sup_{|z|<1}|(f\circ\phi)'(z)|(1-|z|^2)\\ &= \sup_{|z|<1}|f'(\phi(z))||\phi'(z)|(1-|z|^2)\\ &= \sup_{|z|<1}|f'(\phi(z)|(1-|\phi(z)|^2)\\ &= \sup_{|w|<1}|f'(w)|(1-|w|^2)=\|f-f(0)\|_B.\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\|f\circ\phi-(f\circ\phi)(0)\|_B=\|f-f(0)\|_B.$$

Η συνθήκη (δ) (που αναφέραμε ως παρατήρηση μετά τον **ορισμό 1**) δεν ισχύει για το χώρο B. Ισχύει, όμως, κατά κάποιο ασθενέστερο τρόπο: η απεικόνιση $\phi\mapsto f\circ\phi$ είναι συνεχής από το G στο χώρο των αναλυτικών στο Δ συναρτήσεων με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Δ.

(στ) Ο χώρος μικρός Bloch B_0, υπόχωρος του χώρου Bloch B, αποτελείται από τις συναρτήσεις $f\in B$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{|z|\to 1}|f'(z)|(1-|z|^2)=0$$

Στο χώρο B_0, θεωρούμε την ίδια νόρμα με αυτή του χώρου B

$$\|f\|_{B_0}=|f(0)|+\sup_{|z|<1}|f'(z)|(1-|z|^2)$$

Ο χώρος B_0 είναι Möbius αναλλοίωτος χώρος.

Με τη νόρμα $\|\cdot\|_{B_0}$, ο χώρος B_0 είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου B και επομένως είναι χώρος Banach. Οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (β) του **Ορισμού 1.**

Η συνθήκη (α) του **Ορισμού 1** ισχύει κατά προφανή τρόπο. Για την συνθήκη (γ) ισχύουν τα ίδια με το χώρο B, αλλά πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι αν $f\in B_0$ και $\phi\in G$ τότε $f\circ\phi\in B_0$. Έχουμε ότι

$$|(f\circ\phi)'(z)|(1-|z|^2)=|f'(\phi(z))||\phi'(z)|(1-|z|^2)=|f'(\phi(z))|(1-|\phi(z)|^2).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to 1}|(f\circ\phi)'(z)|(1-|z|^2) &= \lim_{|z|\to 1}|f'(\phi(z))|(1-|\phi(z)|^2)\\ &= \lim_{|w|\to 1}|f'(w)|(1-|w|^2)=0.\end{aligned}$$

Άρα $f\circ\phi\in B_0$.

Επιπλέον ο χώρος B_0 ικανοποιεί και την ιδιότητα (δ).

3. Προτάσεις για τους Möbius αναλλοίωτους χώρους

Πρόταση 1. *Έστω X ένας Möbius αναλλοίωτος χώρος συναρτήσεων που επιπλέον ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) που δώσαμε μετά τον ορισμό 1 και $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $f \in X$ και $z \in \Delta$, τότε ο τελεστής*

$$T(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z)g(\theta)d\theta \tag{11}$$

απεικονίζει τον X στον X και $\|T(f)\|_X \leqq \|f\|_X \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta)|d\theta$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την $\phi_0(z) = -z$. Επειδή ο χώρος X ικανοποιεί την ιδιότητα (δ), η απεικόνιση $\theta \mapsto \frac{1}{2\pi}[f \circ (-e^{i\theta}\phi_0)]g(\theta)$ από το διάστημα $[0,2\pi]$ στον χώρο Banach X είναι συνεχής, άρα *Riemann* ολοκληρώσιμη. Άρα, το ολοκλήρωμα $T(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z)g(\theta)d\theta$ υπάρχει ως στοιχείο του X και

$$\begin{aligned}
\|T(f)(z)\|_X &= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z)g(\theta)d\theta\right\|_X \\
&\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(e^{i\theta}z)\|_X |g(\theta)|d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f\|_X |g(\theta)|d\theta \\
&= \|f\|_X \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta)|d\theta
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2. *Έστω X ένας Möbius αναλλοίωτος χώρος συναρτήσεων που επιπλέον ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) που δώσαμε μετά τον ορισμό 1.*

(i) *Αν $f \in X$ και $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ στο Δ, τότε $\alpha_n z^n \in X$ για $n = 0,1,2,\ldots$ και*

$$|\alpha_n|\|z^n\|_X \leqq \|f\|_X, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

(ii) *Αν ο X δεν περιέχει μόνο τις σταθερές, τότε ο X περιέχει όλα τα πολυώνυμα και ισχύει $\|z^n\|_X \leqq Cn,\ n = 0,1,2,\cdots$*

(iii) *Αν ο X δεν περιέχει μόνο τις σταθερές, τότε τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον X.*

Αποδειξη. (i) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}z)e^{-in\vartheta}d\theta.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (1) αυτό το ολοκλήρωμα είναι στοιχείο του χώρου X και ένας απλός υπολογισμός μας δίνει την τιμή του ίση με $\alpha_n z^n$. Επίσης, πάλι σύμφωνα με την Πρόταση (1), ϑα ισχύει η σχέση $\|\alpha_n z^n\|_X \leqq \|f\|_X$, δηλαδή $|\alpha_n|\ \|z^n\|_X \leqq \|f\|_X$.

(ii) Έστω $F(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$ μια μη σταθερή συνάρτηση στον X. Σταθεροποιούμε ένα N για το οποιο ισχύει $\alpha_N \neq 0, N \geqq 1$. Τότε, σύμφωνα με το (i), $z^N \in X$ και συνεπώς η συνάρτηση $(\frac{r-z}{1-rz})^N$ ανήκει στον X για όλα τα $r \in (-1,1)$. Για $r = \frac{1}{2}$, έχουμε ότι όλοι οι συντελεστές Taylor της συναρτησης $(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z})^N$ είναι διαφορετικοί από το μηδέν. Εφαρμόζοντας το (i) στη συνάρτηση αυτή, έχουμε ότι $z^n \in X$ για $n = 0, 1, \ldots$ οπότε ο X περιέχει τα πολυώνυμα. Επίσης, εφαρμόζοντας το (i) στη συνάρτηση $\phi_r(z) = \frac{r-z}{1-rz} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-r^2)r^{n-1}z^n, 0 \leqq r < 1$, έχουμε

$$(1-r^2)r^{n-1}\|z^n\|_X \leqq C, \quad 0 < r < 1$$

όπου χρησιμοποιήϑηκε το γεγονός ότι $\|\phi_\alpha\|_X \leqq C$ για κάϑε $\alpha \in \Delta$. Αυτό ισχύει γιατί

$$\|\phi_\alpha - \phi(\alpha)\|_X = \|z \circ \phi_\alpha - (z \circ \phi_\alpha)(0)\|_X \leqq C\|z\|_X$$

και επομένως

$$\|\phi_\alpha\|_X \leqq C\|z\|_X + |\phi(\alpha)|\ \|1\|_X \leqq C$$

Παίρνοντας $r^2 = \frac{n-1}{n+1}$ η παραπάνω σχέση δίνει

$$\|z^n\|_X \leqq C\tfrac{n+1}{2}(1+\tfrac{2}{n-1})^{\frac{n-1}{2}} \leqq Cn$$

από όπου έπεται το ζητούμενο.

(iii) Έστω $f \in X$ με $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$. Επειδή ο X περιέχει όλα τα πολυώνυμα έπεται ότι η συνάρτηση

$$\sigma_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\alpha_k z^k$$

αποτελεί στοιχείο του X. Με ένα απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$\sigma_n(f;z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})\sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e^{-ik\theta}d\theta$$

Οι συναρτήσεις $K_n(\theta) := \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e^{-ik\vartheta}$ είναι οι γνωστές συναρτήσεις του $Fejer$. Από την πρόταση (1), έχουμε ότι

$$\|\sigma_n(f)\|_X \leqq \|f\|_X \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\theta)d\theta = \|f\|_X$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $\|f(ze^{i\theta}) - f(z)\|_X < \varepsilon$, όταν $|\theta| < \delta$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma_n(f;z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})K_n(\theta)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)K_n(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f(ze^{i\theta}) - f(z)\Big]K_n(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f) - f\|_X &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(e^{i\theta}z) - f(z)\|_X K_n(\theta)d\theta \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|<\delta}\|f(ze^{i\theta}) - f(z)\|_X K_n(\theta)d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|\theta|<\pi}\|f(ze^{i\theta}) - f(z)\|_X K_n(\theta)d\theta \\ &\leqq \varepsilon + \frac{1}{2\pi}2\|f\|_X\int_{\delta\le|\theta|<\pi} K_n(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Από γνωστή ιδιότητα των συναρτήσεων $Fejer$ έχουμε ότι αν $\delta > 0$ τότε $\int\limits_{\delta\le|\theta|<\pi} K_n(\theta)d\theta \to 0$ όταν $n \to +\infty$. Άρα τελικά

$$\limsup_{n\to+\infty}\|\sigma_n(f) - f\|_X \leqq \varepsilon$$

οπότε $\|\sigma_n(f) - f\|_X \to 0$.
Άρα τα πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο X.

$\square$

Πρόταση 3. *Έστω X ένας Möbius αναλλοίωτος χώρος συναρτήσεων που επιπλέον ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) που δώσαμε μετά τον ορισμό 1. Αν $f \in X$ τότε για κάθε $r \in [0,1)$ η συνάρτηση $f_r(z) = f(rz)$ ανήκει στον X, $\|f_r\|_X \leqq \|f\|_X$ και $f_r \to f$ στον X, καθώς $r \uparrow 1$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in X$ και $r \in [0,1)$. Είναι

$$f_r(z) = f(rz) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})P_r(\theta)d\theta$$

όπου $P_r(\theta)$ είναι ο πυρήνας Poisson.
Χρησιμοποιώντας την πρόταση (1) έχουμε ότι

$$\|f_r\|_X \leqq \|f\|_X \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)d\theta = \|f\|_X.$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} f_r(z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z)P_r(\theta)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)P_r(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[f(e^{i\theta}z) - f(z)\Big]P_r(\theta)d\theta \end{aligned}$$

οπότε

$$\|f_r - f\|_X \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(e^{i\theta}z) - f(z)\|_X P_r(\theta)d\theta. \tag{12}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|f(e^{i\theta}z) - f(z)\|_X < \varepsilon$, όταν $|\theta| < \delta$. Οπότε, από τη σχέση (12), έχουμε

$$\begin{aligned} \|f_r - f\|_X &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|<\delta} \|f(e^{i\theta}z) - f(z)\|_X P_r(\theta)d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\theta|<\pi} \|f(e^{i\theta}z) - f(z)\|_X P_r(\theta)d\theta \\ &\leqq \varepsilon + 2\|f\|_X \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\theta|<\pi} P_r(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Άλλά από γνωστή ιδιότητα του Πυρήνα Poisson έχουμε ότι για $\delta > 0$ είναι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\theta|<\pi} P_r(\theta)d\theta \to 0$$

όταν $r \to 1$. Άρα

$$\limsup_{r\to 1^-} \|f_r - f\|_X \leqq \varepsilon$$

οπότε $\|f_r - f\|_X \to 0$ όταν $r \to 1^-$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο χώρος $\mathcal{M}$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τον **ελάχιστο Möbius αναλλοίωτο χώρο συναρτήσεων $\mathcal{M}$.**
Ο χώρος $\mathcal{M}$ αποτελείται από όλες τις αναλυτικές συναρτήσεις στο Δ οι οποίες είναι της μορφής:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_{\alpha_k}(z), \qquad |\alpha_k| \leqq 1 \tag{13}$$

όπου $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$.
Από το κριτήριο του $Weierstrass$ προκύπτει ότι κάθε f που ορίζεται από την (13) είναι αναλυτική στο Δ και συνεχής στο $\overline{\Delta}$.
Στο χώρο $\mathcal{M}$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \inf \left\{ \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| : \text{ η σχέση (13) ισχύει } \right\}$$

Ειδικότερα, $\|\phi_\alpha\|_{\mathcal{M}} \leqq 1$ για κάθε $\alpha \in \Delta$.
Βλέπουμε ότι στην (13) η σειρά συγκλίνει στην f όχι μόνο ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του Δ, αλλά και ως προς τη νόρμα του $\mathcal{M}$. Είναι

$$f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{\alpha_k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \phi_{\alpha_k}$$

Άρα

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{\alpha_k} \Big\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda_k| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Αν X είναι οποιοσδήποτε Möbius αναλλοίωτος χώρος, που επιπλέον ικανοποιεί την ιδιότητα (δ) που αναφέρθηκε μετά τον **ορισμό 1** και δεν περιέχει μόνο τις σταθερές, τότε, όπως δείξαμε στην Πρόταση (2), η συνάρτηση $f(z) = z$ ανήκει στον X. Γενικότερα, έστω X Möbius αναλλοίωτος χώρος που περιέχει την ταυτοτική $f(z) = z$. Τότε ο X περιέχει όλες τις Möbius συναρτήσεις. Επιπλέον έχουμε

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_{\alpha_k}\|_X \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \, \|\phi_{\alpha_k}\|_X \leqq C \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$$

και συνεπώς

$$(14) \qquad \|f\|_X \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}, \qquad f \in \mathcal{M}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ εμφυτεύεται συνεχώς σε κάθε άλλο Möbius αναλλοίωτο χώρο που περιέχει την $f(z) = z$.

Απόδειξη της προϋπόθεσης (α) του **Ορισμού 1.**

Από τα παραπάνω έπεται ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ περιέχεται στο χώρο Bloch B και επιπλέον ισχύει ότι $\|f\|_B \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}$.

Απόδειξη της προϋπόθεσης (β) του **Ορισμού 1.**

Ο χώρος $\mathcal{M}$ με τη νόρμα που ορίσαμε παραπάνω είναι χώρος Banach, άρα ικανοποιείται η συνθήκη (β) του **ορισμού 1.** Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό.

Έστω $f_n \in \mathcal{M}$ και $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|f_n\|_{\mathcal{M}} < +\infty$. Επιλέγουμε αναπαράσταση για κάθε f_n τέτοια ώστε $f_n = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \lambda_{n,j}\phi_{\alpha_{n,j}}$ και $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} |\lambda_{n,j}| \leqq 2\|f_n\|_{\mathcal{M}}$. Είναι

$$\sum_{n,j=1}^{+\infty} |\lambda_{n,j}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}|\lambda_{n,j}|\Big) \leqq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\|f_n\|_{\mathcal{M}} < +\infty$$

Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{n,j}\phi_{\alpha_{n,j}}(z)\Big) = \sum_{n,j=1}^{+\infty}\lambda_{n,j}\phi_{\alpha_{n,j}}(z)$$

διότι η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως. Άρα $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{M}$ οπότε αν $m \in \mathbb{N}$ τότε

$$f(z) - \sum_{n=1}^{m} f_n(z) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{\substack{n=m+1\\ j=1}}^{+\infty}\lambda_{n,j}\phi_{\alpha_{n,j}}(z)$$

Άρα

$$\Big\|f(z) - \sum_{n=1}^{m} f_n\Big\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum_{\substack{n=m+1\\ j=1}}^{+\infty}|\lambda_{n,j}| \leqq 2\sum_{n=m+1}^{+\infty}\|f_n\|_{\mathcal{M}} \to 0$$

όταν $m \to +\infty$.

Άρα ο $\mathcal{M}$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη της προϋπόθεσης (γ) του **Ορισμού 1.**

Αν $f \in \mathcal{M}$, τότε έστω $f - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty}\lambda_j\phi_{\alpha_j}$ οποιαδήποτε αναπαράσταση της $f - f(0)$. Για κάθε $\phi \in G$ έχουμε ότι $\phi_{\alpha_j}\circ\phi \in G$. Θέτοντας $\phi_{\alpha_j}\circ\phi = \mu_j\phi_{\beta_j}$, έχουμε ότι $f\circ\phi - f(0) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty}\lambda_j\mu_j\phi_{\beta_j}$, οπότε

$$\|f \circ \phi - f(0)\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$$

Επίσης,

$$|(f \circ \phi)(0) - f(0)| \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j||\phi_{\beta_j}(0)| \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$$

Άρα

$$\|f \circ \phi - (f \circ \phi)(0)\|_{\mathcal{M}} \leqq \|f \circ \phi - f(0)\|_{\mathcal{M}} + \|(f \circ \phi)(0) - f(0)\|_{\mathcal{M}} \leqq 2 \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$$

Άρα

$$\|f \circ \phi - (f \circ \phi)(0)\|_{\mathcal{M}} \leqq 2\|f - f(0)\|_{\mathcal{M}}$$

Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (γ) του **Ορισμού 1**.
Αξιοσημείωτο είναι ότι ο χώρος $\mathcal{M}$ ικανοποιεί και την επιπρόσθετη ιδιότητα (δ) που αναγράφεται στην παρατήρηση μετά τον **ορισμό 1**. Ο ισχυρισμός αυτός θα αποδειχθεί στην υποενότητα 3.2.
Παρακάτω αποδεικνύουμε ένα χρήσιμο Λήμμα.
Λήμμα 1. *Για κάθε* $\alpha \in \overline{\Delta}$ *ισχύει* $\|\phi_\alpha\|_{\mathcal{M}} = 1$.

Αποδειξη. Έστω ότι

$$\phi_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \phi_{\alpha_n}, \quad \alpha_n \in \overline{\Delta}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| < +\infty$$

Έχουμε λοιπόν ότι,

$$|\phi_\alpha(z)| \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n||\phi_{\alpha_n}(z)| \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|, \quad z \in \Delta$$

Παίρνοντας όριο στην τελευταία σχέση όταν $|z| \to 1$ έχουμε ότι

$$1 \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|$$

Άρα τελικά

$$1 \leqq \|\phi_\alpha\|_{\mathcal{M}} \tag{15}$$

Δεδομένου ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα, έπεται το ζητούμενο. □

1. Το βασικό θεώρημα στον $\mathcal{M}$

Πριν πάμε στο βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας, θα αποδείξουμε δύο χρήσιμα, για τη συνέχεια, λήμματα.

Λήμμα 2. *Αν g συνάρτηση αναλυτική στο Δ και $\iint\limits_{\Delta} |g''(z)|dA(z) < +\infty$ τότε*

$$g(z) - g(0) - g'(0)z = -\iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)\frac{1}{\overline{\alpha}}\, g''(\alpha)dA(\alpha)$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$-\iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)\frac{1}{\overline{\alpha}}\, g''(\alpha)dA(\alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}-z}{1-re^{-i\theta}z}\frac{1}{re^{-i\vartheta}}g''(re^{i\theta})d\theta r dr$$

Θέτοντας $\zeta = e^{i\theta}$ για $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ τότε το ζ διατρέχει το μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ και ισχύει $d\theta = \frac{d\zeta}{i\zeta}$ οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^1\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{(r\zeta - z)\zeta}{\left(1-\frac{rz}{\zeta}\right)r}\, g''(r\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} r dr = -\frac{1}{\pi i}\int_0^1\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{(r\zeta - z)\zeta}{\zeta - rz}\, g''(r\zeta)d\zeta dr$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy, το τελευταίο ολοκήρωμα είναι ίσο με

$$-2\int_0^1 (r^2z - z)rz\, g''(r^2z)dr = -zg'(0) + g(z) - g(0)$$

$\square$

Λήμμα 3. *Αν f αναλυτική συνάρτηση στο Δ τότε*

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|z|}|f(z)|dA(z) \le C\iint\limits_{\Delta} |f(z)|dA(z)$$

όπου C σταθερά.

Απόδειξη. Έστω f συνάρτηση αναλυτική στο Δ. Έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|z|}|f(z)|dA(z) = \iint\limits_{|z|<\frac{1}{2}} \frac{1}{|z|}|f(z)|dA(z) + \iint\limits_{\frac{1}{2}\leqq|z|<1} \frac{1}{|z|}|f(z)|dA(z) = I_1 + I_2$$

Αν $|z| < \frac{1}{2}$, τότε $\Delta(z;\frac{1}{2}) \subset \Delta$ οπότε

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{|\Delta(z;\frac{1}{2})|} \iint\limits_{\Delta(z;\frac{1}{2})} |f(\alpha)| dA(\alpha) \leqq C \iint\limits_{\Delta} |f(\alpha)| dA(\alpha)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} I_1 &\leqq C \iint\limits_{|z|<\frac{1}{2}} \frac{1}{|z|} \iint\limits_{\Delta} |f(\alpha)| dA(\alpha) dA(z) \\ &= C \iint\limits_{\Delta} |f(\alpha)| dA(\alpha) \iint\limits_{|z|<\frac{1}{2}} \frac{1}{|z|} dA(z) = C \iint\limits_{\Delta} |f(\alpha)| dA(\alpha). \end{aligned}$$

Τέλος,

$$I_2 \leq C \iint\limits_{\frac{1}{2}\leq|z|<1} |f(z)| dA(z) \leq C \iint\limits_{\Delta} |f(z)| dA(z).$$

Άρα τελικά έχουμε

$$I_1 + I_2 \leq C \iint\limits_{\Delta} |f(z)| dA(z).$$

□

Θεώρημα 1. *Έστω f αναλυτική στο Δ. Έχουμε ότι $f \in \mathcal{M}$ αν και μόνο αν*

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)| dA(z) < +\infty$$

Επίσης ισχύει

$$\|f\|_{\mathcal{M}} \asymp |f(0)| + |f'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |f''(\alpha)| dA(\alpha) \tag{16}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε το χώρο συναρτήσεων X που αποτελείται από τις αναλυτικές στον Δ συναρτήσεις g με την ιδιότητα $g(0) = g'(0) = 0$ και $\iint\limits_{\Delta} |g''(\alpha)| dA(\alpha) < +\infty$.

Στον X ορίζουμε τη νόρμα $\|g\|_X = \iint\limits_{\Delta} |g''(z)| dA(z)$. Από το Λήμμα (2) και το γεγονός ότι $g(0) = g'(0) = 0$ έχουμε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ γράφεται

$$Ig(z) = -\iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z) \frac{1}{\alpha} g''(\alpha) dA(\alpha), \;\; g \in X$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε διαμέριση του μοναδιαίου δίσκου που αποτελείται από μετρήσιμα σύνολα Δ_j, ξένα ανά δύο, που έχουν ψευδοϋπερβολική διάμετρο μικρότερη από ε. Έστω α_j τυχόν σημείο του Δ_j. Τότε, αν $z \in \Delta_j$, έχουμε $|\frac{\alpha_j - z}{1-\bar{\alpha_j} z}| < \varepsilon$.
Οπότε

$$
\begin{aligned}
Ig(z) &= -\iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha) = -\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j} \phi_\alpha(z)\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha) \\
&= -\sum_{j=1}^{+\infty}\phi_{\alpha_j}(z)\iint\limits_{\Delta_j}\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}[\phi_{\alpha_j}(z) - \phi_\alpha(z)]\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha)
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε τον τελεστή $S : X \to X$ ως εξής

$$
Sg(z) = -\sum_{j=1}^{+\infty}\phi_{\alpha_j}(z)\iint\limits_{\Delta_j}\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha) + k(g) + \lambda(g)z,
$$

όπου

$$
k(g) = \sum_{j=1}^{+\infty}\phi_{\alpha_j}(0)\iint\limits_{\Delta_j}\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha)
$$

και

$$
\lambda(g) = \sum_{j=1}^{+\infty}\phi'_{\alpha_j}(0)\iint\limits_{\Delta_j}\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha).
$$

Ο ορισμός του S είναι καλός γιατί $Sg \in X$, αν $g \in X$. Από το κριτήριο $Weierstrass$ έχουμε ότι η σειρά $\sum_{j=1}^{+\infty}\phi_{\alpha_j}(z)\iint\limits_{\Delta_j}\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Δ, άρα η Sg είναι αναλυτική συνάρτηση στο Δ. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι $Sg(0) = Sg'(0) = 0$. Επιπλέον ισχύει

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\Delta}|Sg''(z)|dA(z) &\leqq C\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}|\phi''_{\alpha_j}(z)|\iint\limits_{\Delta}|g''(\alpha)|dA(\alpha)dA(z) \\
&\leqq C\iint\limits_{\Delta}|\phi''_{\alpha_j}(z)|dA(z) \\
&\leqq C\iint\limits_{\Delta}\frac{1-|\alpha|}{|1-\overline{\alpha}z|^3}dA(z) < +\infty
\end{aligned}
$$

όπου για την εκτίμηση του τελευταίου ολοκληρώματος χρησιμοποιήθηκε η σχέση (20) που θα αποδείξουμε παρακάτω. Άρα $Sg \in X$. Τότε

$$(I-S)(g)(z)=\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}[\phi_{\alpha_j}(z)-\phi_\alpha(z)]\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha)-k(g)-\lambda(g)z$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον Δ από το κριτήριο του $Weierstrass$, διότι

$$\iint\limits_{\Delta_j}|\phi_{\alpha_j}(z)-\phi_\alpha(z)|\frac{1}{|\overline{\alpha}|}|g''(\alpha)|dA(\alpha)\leqq C\iint\limits_{\Delta_j}|g''(\alpha)|dA(\alpha)$$

και

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}|g''(\alpha)|dA(\alpha)=\iint\limits_{\Delta}|g''(\alpha)|dA(\alpha)<+\infty.$$

Άρα

$$(I-S)(g)''(z)=\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}[\phi''_{\alpha_j}(z)-\phi''_\alpha(z)]\frac{1}{\overline{\alpha}}g''(\alpha)dA(\alpha).$$

Έχουμε λοιπόν για τη νόρμα του $(I-S)(g)$ στον X ότι

$$\begin{aligned}\|(I-S)(g)\|_X&=\iint\limits_{\Delta}|(I-S)(g)''(z)|dA(z)\\&\leqq\iint\limits_{\Delta}\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}|\phi''_{\alpha_j}(z)-\phi''_\alpha(z)|\frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha)dA(z)\\&=\sum_{j=1}^{+\infty}\iint\limits_{\Delta_j}\Big(\iint\limits_{\Delta}\Big|\phi''_{\alpha_j}(z)-\phi''_\alpha(z)\Big|dA(z)\Big)\frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha)\end{aligned}\tag{17}$$

Θα κάνουμε κάποιους υπολογισμούς για το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Delta}|\phi''_{\alpha_j}(z)-\phi''_\alpha(z)|dA(z)$.
Επειδή η ψευδοϋπερβολική απόσταση των α_j και α είναι μικρή, ισχύει η σχέση

$$\frac{|1-\overline{\alpha_j}z|}{|1-\overline{\alpha}z|}\asymp 1,\ \ z\in\Delta\tag{18}$$

και μετά από πράξεις

$$\Big|\phi''_{\alpha_j}(z)-\phi''_\alpha(z)\Big|\leqq C\frac{|\alpha_j-\alpha|}{|1-\overline{\alpha}z|^3}\Big(1+\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|}\Big)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Delta}\Big|\phi''_{\alpha_j}(z)-\phi''_\alpha(z)\Big|dA(z)\\&\leqq C|\alpha_j-\alpha|\Big[\iint\limits_{\Delta}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}z|^3}dA(z)+(1-|\alpha|^2)\iint\limits_{\Delta}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}z|^4}dA(z)\Big]\end{aligned}\tag{19}$$

Θα εκτιμήσουμε τα ολοκληρώματα τους δεύτερου μέλους της σχέσης (19) κάνοντας πρώτα κάποιους γενικούς υπολογισμούς. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $0 \leqq |\alpha| \leqq \frac{1}{2}$. Τότε για $k \geq 3$ έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}z|^k} dA(z) \leqq \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{(1-|\alpha|)^k} dA(z) = \frac{1}{(1-|\alpha|)^k} \leqq C_k$$

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $\frac{1}{2} < |\alpha| \leqq 1$. Θέτοντας $\beta = \frac{1}{\overline{\alpha}}$, $d_1 = |\beta| - 1$, $d_2 = d_1 + 2$ και $\Delta(\beta; d_1; d_2) = \{z \in \mathbb{C} \colon d_1 \leqq |z| \leqq d_2\}$ τότε, για $k \geqq 3$, έχουμε

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}z|^k} dA(z) &\leqq C_k \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\left|z - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right|^k} dA(z)\\ &= C_k \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|z-\beta|^k} dA(z)\\ &\leqq C_k \iint\limits_{\Delta(\beta;d_1;d_2)} \frac{1}{|z-\beta|^k} dA(z)\\ &\leqq C_k \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{r^k} r dr \leqq \frac{C_k}{d_1^{k-2}} \leqq \frac{C_k}{(1-|\alpha|)^{k-2}}\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για $k \geqq 3$ και για $\alpha \in \Delta$ έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}z|^k} dA(z) \leqq \frac{C_k}{(1-|\alpha|)^{k-2}} \tag{20}$$

Άρα από την (19)

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta} \left|\phi''_{\alpha_j}(z) - \phi''_{\alpha}(z)\right| dA(z) &\leqq C_k |\alpha_j - \alpha| \Big[\frac{1}{1-|\alpha|^2} + \frac{1-|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)^2}\Big]\\ &\leqq C \frac{|\alpha_j - \alpha|}{1-|\alpha|^2}\end{aligned} \tag{21}$$

Από την $\left|\frac{\alpha-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}\alpha_j}\right| < \varepsilon$ συνεπάγεται $|\alpha - \alpha_j| \leqq C\varepsilon(1-|\alpha|^2)$. Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$\iint\limits_{\Delta} \left|\phi''_{\alpha_j}(z) - \phi''_{\alpha}(z)\right| dA(z) \leqq C \frac{|\alpha_j - \alpha|}{1-|\alpha|^2} \leqq C\varepsilon \tag{22}$$

Οπότε από τη σχέση (17) έχουμε

$$\|(I-S)(g)\|_X \leqq C\varepsilon \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha) \leqq C\varepsilon\|g\|_X \tag{23}$$

Άρα $\|I-S\| \leq C\varepsilon$ και αν το ε επιλεγεί κατάλληλα μικρό τότε μπορούμε να έχουμε ότι $\|I-S\|<1$. Άρα ο $S\colon X \to X$ είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή αν $h \in X$ τότε υπάρχει $g \in X$ ώστε

$$h(z) = Sg(z) = -\sum_{j=1}^{+\infty} \phi_{\alpha_j}(z) \iint\limits_{\Delta_j} \frac{1}{\alpha} g''(\alpha)dA(\alpha) + k(g) + \lambda(g)z$$

Θέτοντας

$$\lambda_j = \lambda_j(g) = -\iint\limits_{\Delta_j} \frac{1}{\alpha} g''(\alpha)dA(\alpha),\ \ k = k(g),\ \ \lambda = \lambda(g) \tag{24}$$

έχουμε για τη συνάρτηση $h \in X$ ότι

$$h(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \phi_{\alpha_j}(z) + k + \lambda z \tag{25}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
|k| = |k(g)| &\leqq \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} |\phi_{\alpha_j}(0)| \frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha) \\
&\leqq C \iint\limits_{\Delta} |g''(\alpha)|dA(\alpha) = C\|g\|_X \\
&= C\|S^{-1}h\|_X \leqq C\|h\|_X
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
|\lambda| = |\lambda(g)| &\leqq \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} |\phi'_{\alpha_j}(0)| \frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha) \\
&\leqq C \iint\limits_{\Delta} |g''(\alpha)|dA(\alpha) \leqq C\|h\|_X.
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha) = \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|\alpha|}|g''(\alpha)|dA(\alpha) \leqq C\|h\|_X.$$

Άρα

$$\|h\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j| + |k| + |\lambda| \leqq C\|h\|_X$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι f είναι αναλυτική στο Δ για την οποία ισχύει ότι

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)| dA(z) < +\infty.$$

Θέτουμε $h(z) = f(z) - f(0) - f'(0)z$. Τότε η h είναι αναλυτική στο Δ, $h'' = f''$ στο Δ, $h(0) = 0$ και $h'(0) = 0$. Άρα $h \in X$, οπότε $h \in \mathcal{M}$ οπότε $f \in \mathcal{M}$ και

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}} = \|f(0) + f'(0)z + h\|_{\mathcal{M}} &\leqq |f(0)| + |f'(0)| + \|h\|_{\mathcal{M}} \\
&\leqq C(|f(0)| + |f'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |h''(z)| dA(z)) \\
&= C(|f(0)| + |f'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |f''(z)| dA(z))
\end{aligned}$$

Άρα

$$\|f\|_{\mathcal{M}} \leqq C(|f(0)| + |f'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |f''(z)| dA(z)) \tag{26}$$

Συνεχίζουμε, τώρα, την απόδειξη του Θεωρήματος, δείχνοντας την αντίστροφη συνεπαγωγή. Θα δείξουμε ότι αν $f \in \mathcal{M}$ τότε

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)| dA(z) < +\infty$$

Έστω $\alpha \in \Delta$. Από τη σχέση (20) έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta} |\phi''_\alpha(z)| dA(z) \leqq C(1 - |\alpha|^2) \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1 - \overline{\alpha} z|^3} dA(z) \leqq C \tag{27}$$

Επειδή $f \in \mathcal{M}$ έπεται ότι η f γράφεται

$$f(z) = \textstyle\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \phi_{\alpha_j}(z), \text{ όπου } \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j| < +\infty$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z) = \iint\limits_{\Delta} |\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \phi''_{\alpha_j}(z)|dA(z)$$
$$\leq \iint\limits_{\Delta} \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j||\phi''_{\alpha_j}(z)|dA(z)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j| \iint\limits_{\Delta} |\phi''_{\alpha_j}(z)|dA(z) \leq C \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$$

Άρα

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z) < C\|f\|_{\mathcal{M}} \tag{28}$$

Ομοίως, $f(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \alpha_j$ και $f'(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j(1 - |\alpha_j|^2)$, επομένως $|f(0)| \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$ και $|f'(0)| \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$. Οπότε έχουμε

$$|f(0)| \leqq \|f\|_{\mathcal{M}}$$

και

$$|f'(0)| \leqq \|f\|_{\mathcal{M}}$$

όπου σε συνδυασμό με τη σχέση (28) καταλήγουμε στο

$$|f(0)| + |f'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |f''(\alpha)|dA(\alpha) \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}} \tag{29}$$

Από τις σχέσεις (26) και (29) έπεται η σχέση (16).

□

Το παρακάτω πόρισμα μας δίνει έναν ακόμα χαρακτηρισμό του χώρου $\mathcal{M}$.

Πόρισμα 1. *Μία αναλυτική στο Δ συνάρτηση f ανήκει στο χώρο $\mathcal{M}$ αν και μόνο αν η f έχει αναπαράσταση της μορφής*

$$f(z) = \iint\limits_{\overline{\Delta}} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} d\mu(\alpha) \tag{30}$$

για κάποιο πεπερασμένο μέτρο Borel στο $\overline{\Delta}$.
Επίσης, ισχύει η σχέση

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \min\{\|\mu\| : \ \textit{η σχέση (30) ισχύει}\ \}$$

Αποδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $f \in \mathcal{M}$ τότε η f έχει αναπαράσταση όπως αυτή της σχέσης (30). Έστω $f \in \mathcal{M}$. Είδαμε ότι η f γράφεται ως

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)z - \iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)\frac{1}{\overline{\alpha}}f''(\alpha)dA(\alpha) \\ &= f(0)\iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)d\delta_1(\alpha) - f'(0)\iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)d\delta_0(\alpha) - \iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)\frac{1}{\overline{\alpha}}f''(\alpha)dA(\alpha) \end{aligned}$$

όπου με δ_w συμβολίσαμε το μέτρο Dirac στο σημείο w. Αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε

$$d\mu(\alpha) = f(0)d\delta_1(\alpha) - f'(0)d\delta_0(\alpha) - \frac{1}{\overline{\alpha}}f''(\alpha)dA(\alpha)$$

τότε έχουμε ότι

$$f(z) = \iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha(z)d\mu(\alpha)$$

Αντίστροφα, έστω ότι η f έχει αναπαράσταση όπως αυτή της σχέσης (30). Τότε έχουμε ότι

$$f''(z) = \iint\limits_{\overline{\Delta}} \frac{-2\overline{\alpha}(1-|\alpha|^2)}{(1-\overline{\alpha}z)^3}d\mu(\alpha)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z) &\leqq \iint\limits_{\Delta}\iint\limits_{\overline{\Delta}} \frac{2|\alpha|(1-|\alpha|^2)}{|1-\overline{\alpha}z|^3}d|\mu|(\alpha)dA(z) \\ &= \iint\limits_{\overline{\Delta}}\iint\limits_{\Delta} \frac{2|\alpha|(1-|\alpha|^2)}{|1-\overline{\alpha}z|^3}dA(z)d|\mu|(\alpha) \end{aligned}$$

Λόγω της σχέσης (20), έχουμε ότι

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z) \leqq C\|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα (1) έχουμε ότι $f \in \mathcal{M}$.
Θα αποδείξουμε τώρα τη σχέση

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \min\Big\{\|\mu\| \colon \text{ η σχέση (30) ισχύει }\Big\}$$

Έστω $M_f = \{\mu \colon f = \iint\limits_{\overline{\Delta}} \phi_\alpha d\mu(\alpha)\}$. Σύμφωνα με όσα αποδείξαμε παραπάνω έχουμε ότι αν $f \in \mathcal{M}$ τότε υπάρχει μ τέτοιο ώστε $f(z) = \iint\limits_{\overline{\Delta}} \phi_\alpha d\mu(\alpha)$. Άρα $M_f \neq \varnothing$. Θεωρούμε διαμέριση του Δ σε ξένα μεταξύ τους σύνολα Δ_j, με ψευδοϋπερβολική διάμετρο μικρότερη από ε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος (1). Έχουμε

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \phi_\alpha(z) d\mu(\alpha) + \int\limits_{\mathbb{T}} \phi_\alpha(z) d\mu(\alpha) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \Big(\phi_\alpha(z) - \phi_{\alpha_j}(z)\Big) d\mu(\alpha) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \phi_{\alpha_j}(z) d\mu(\alpha) + \int\limits_{\mathbb{T}} \alpha d\mu(\alpha) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \Big(\phi_\alpha(z) - \phi_{\alpha_j}(z)\Big) d\mu(\alpha) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_{\alpha_j}(z)\mu(\Delta_j) + \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \alpha d\mu(\alpha)\Big)\phi_1(z)
\end{aligned}
$$

Είναι

$$
\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_{\alpha_j}(z)\mu(\Delta_j) + \int\limits_{\mathbb{T}} \alpha d\mu(\alpha)\phi_1(z) \Big\|_{\mathcal{M}} &\leqq \sum_{j=1}^{+\infty} |\mu(\Delta_j)| + \Big| \int\limits_{\mathbb{T}} \alpha d\mu(\alpha) \Big| \\
&= |\mu|(\Delta) + |\mu|(\mathbb{T}) = \|\mu\|
\end{aligned}
$$

Θέτοντας $h(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \Big(\phi_\alpha(z) - \phi_{\alpha_j}(z)\Big) d\mu(\alpha)$, έχουμε

$$
\|h\|_{\mathcal{M}} \leqq C\Big(|h(0)| + |h'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |h''(z)| dA(z)\Big)
$$

Επειδή η ψευδοϋπερβολική απόσταση των α_j και α είναι μικρότερη από ε έπεται ότι και $|\alpha_j - \alpha| \leqq C\varepsilon$. Άρα

$$
|h(0)| \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} |\alpha_j - \alpha| d|\mu|(\alpha) \leqq C\varepsilon \|\mu\|.
$$

και

$$
|h'(0)| \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \Big| |\alpha_j|^2 - |\alpha|^2 \Big| d|\mu|(\alpha) \leqq C\varepsilon \|\mu\|
$$

Επίσης,

$$
\iint\limits_{\Delta} |h''(z)| dA(z) \leqq \sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \Big(\iint\limits_{\Delta} |\phi''_\alpha(z) - \phi''_{\alpha_j}(z)| dA(z) \Big) d|\mu|(\alpha) \leqq C\varepsilon \|\mu\|,
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (22). Άρα τελικά

$$
\|f\|_{\mathcal{M}} \leqq (C\varepsilon + 1)\|\mu\|
$$

Οπότε

$$\|f\|_{\mathcal{M}} \leqq \|\mu\|$$

και

$$\|f\|_{\mathcal{M}} \leqq \inf_{\mu \in M_f} \|\mu\|. \tag{31}$$

Η ανισότητα στη σχέση (31) είναι στην πραγματικότητα ισότητα. Αν $f \in \mathcal{M}$, τότε από τον ορισμό της νόρμας στο χώρο $\mathcal{M}$ έχουμε ότι $\|f\|_{\mathcal{M}} = \inf\{\sum\limits_j |\lambda_j|\}$, όπου το infimum παίρνεται σε όλες τις αποδεκτές αναπαραστάσεις $f = \sum\limits_1^{+\infty} \lambda_j \phi_{\alpha_j}$ της f.

Κάθε αναπαράσταση της f της μορφής $f = \sum\limits_1^{+\infty} \lambda_j \phi_{\alpha_j}$ αντιστοιχεί στο μέτρο $\mu = \sum\limits_1^{+\infty} \lambda_j \delta_{\alpha_j}$, οπότε όλα αυτά τα μέτρα μ ανήκουν στο M_f και $\|\mu\| = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|$. Επειδή η νόρμα $\|f\|_{\mathcal{M}}$ ορίζεται ως infimum αυτών των $\|\mu\|$, έπεται ότι

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \inf_{\mu \in M_f} \|\mu\| \tag{32}$$

Θα αποδείξουμε ότι το infimum στη σχέση (32) είναι minimum, δηλαδή υπάρχει $\mu_0 \in M_f$ τέτοιο ώστε $\|\mu_0\| = \|f\|_{\mathcal{M}}$.
Από τη σχέση (32) έπεται ότι υπάρχει ακολουθία μέτρων $\mu_n \in M_f$ ώστε $\|\mu_n\| \to \|f\|_{\mathcal{M}}$. Επειδή η μοναδιαία μπάλα στο χώρο των μέτρων είναι w^*-συμπαγής, έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία μ_{n_k} της μ_n και μέτρο μ_0 ώστε

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{w^*} \mu_0 \tag{33}$$

Τότε

$$\iint\limits_{\overline{\Delta}} \phi_\alpha d\mu_{n_k}(\alpha) \longrightarrow \iint\limits_{\overline{\Delta}} \phi_\alpha d\mu_0(\alpha) \tag{34}$$

Επίσης ισχύει

$$f = \iint\limits_{\overline{\Delta}} \phi_\alpha d\mu_{n_k}(\alpha), \quad \alpha \in \overline{\Delta} \tag{35}$$

Από τις σχέσεις (34) και (35) προκύπτει ότι

$$f = \iint\limits_{\Delta} \phi_\alpha d\mu_0(\alpha) \tag{36}$$

οπότε $\mu_0 \in M_f$ και

$$\|f\|_{\mathcal{M}} \leqq \|\mu_0\|.$$

Από τη σχέση (33) έχουμε ότι

$$\|\mu_0\| \leqq \liminf_k \|\mu_{n_k}\| = \|f\|_{\mathcal{M}}.$$

Άρα

$$\|\mu_0\| = \|f\|_{\mathcal{M}}$$

Άρα δείξαμε ότι

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \min_{\mu \in M_f} \|\mu\|.$$

□

Θεώρημα 2. *Ο χώρος $\mathcal{M}$ είναι Άλγεβρα και ισχύει*

$$\|fg\|_{\mathcal{M}} \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}\|g\|_{\mathcal{M}} \tag{37}$$

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι

$$\|\phi_\alpha \phi_b\|_{\mathcal{M}} \leqq C \qquad \text{για κάθε } \alpha, b \in \Delta.$$

Αρκεί να δείξουμε την παραπάνω σχέση για $b = 0$ γιατί

$$\|\phi_\alpha \phi_b\|_{\mathcal{M}} = \|z(\phi_\alpha \circ \phi_b)(z)\|_{\mathcal{M}} = \|z\phi_c\|_{\mathcal{M}}$$

Έστω $\psi(z) = z\phi_c(z)$. Τότε $\psi(0) = 0, \psi'(0) = \phi_c(0) = c$ και $\psi''(z) = z\phi_c''(z) + 2\phi_c'(z)$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{\mathcal{M}} &\leqq C\Big(|\psi(0)| + |\psi'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |\psi''(z)| dA(z)\Big) \\
&\leqq C\Big(|c| + \iint\limits_{\Delta} |\phi_c''(z)| dA(z) + 2\iint\limits_{\Delta} |\phi_c'(z)| dA(z)\Big) \\
&\leqq C\Big(1 + \iint\limits_{\Delta} \frac{1-|c|^2}{|1-\bar{c}z|^3} dA(z) + 2\iint\limits_{\Delta} \frac{1-|c|^2}{|1-\bar{c}z|^2} dA(z)\Big) \leqq C
\end{aligned}$$

Έστω $f, g \in \mathcal{M}$ με $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \phi_{\alpha_j}(z)$ και $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \phi_{b_k}(z)$ τότε έχουμε

$$fg = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \phi_{\alpha_j} \phi_{b_k}$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} |\lambda_j|\,|\mu_k|\,\|\phi_{\alpha_j}\phi_{b_k}\|_{\mathcal{M}} &\leqq C\sum_{j,k}|\lambda_j|\,|\mu_k| \\ &\leqq C\sum_{j}|\lambda_j|\sum_{k}|\mu_k| < +\infty. \end{aligned}$$

Επειδή ο $\mathcal{M}$ είναι χώρος Banach, συνεπάγεται ότι $fg \in \mathcal{M}$ και

$$\|fg\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum_{j,k} |\lambda_j|\,|\mu_k| \|\phi_{\alpha_j}\phi_{b_k}\|_{\mathcal{M}} \leqq C\sum_{j}|\lambda_j|\sum_{k}|\mu_k|$$

Άρα

$$\|fg\|_{\mathcal{M}} \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}\|g\|_{\mathcal{M}}$$

□

2. Η ιδιότητα (δ) του $\mathcal{M}$

Ο χώρος $\mathcal{M}$, εκτός από τον ορισμό του Möbius αναλλοίωτου χώρου, ικανοποιεί και την επιπλέον ιδιότητα (δ). Αναφέρουμε ξανά την επιπρόσθετη ιδιότητα του χώρου $\mathcal{M}$: *για κάθε $f \in \mathcal{M}$, η απεικόνιση $\phi \mapsto f \circ \phi$ είναι συνεχής από το G στον $\mathcal{M}$. Δηλαδή: αν $|\mu_n| = |\mu| = 1, \alpha_n,\ \alpha \in \Delta$ όπου $\mu_n \to \mu$ και $\alpha_n \to \alpha$ τότε $f \circ (\mu_n \phi_{\alpha_n}) \to f \circ (\mu \phi_\alpha)$ στον $\mathcal{M}$.*

Θα αποδείξουμε πρώτα δύο χρήσιμα Λήμματα.

Λήμμα 4. *Αν $\alpha_n, \alpha \in \Delta$ και $\alpha_n \to \alpha$, τότε $\phi_{\alpha_n} \to \phi_\alpha$ στον $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Λόγω της σχέσης (16) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\phi_{\alpha_n} - \phi_\alpha\|_{\mathcal{M}} &\leqq C\Big(|\phi_{\alpha_n}(0) - \phi_\alpha(0)| + |\phi'_{\alpha_n}(0) - \phi'_\alpha(0)| \\ &\quad + \iint\limits_{\Delta} |\phi''_{\alpha_n}(z) - \phi''_\alpha(z)| dA(z)\Big) \\ &\leqq C\Big(|\alpha_n - \alpha| + \Big||\alpha_n|^2 - |\alpha|^2\Big| \\ &\quad + \iint\limits_{\Delta} |\phi''_{\alpha_n}(z) - \phi''_\alpha(z)| dA(z)\Big) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (21) έχουμε ότι $\iint\limits_{\Delta} |\phi''_{\alpha_n}(z) - \phi''_\alpha(z)| dA(z) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ Άρα τελικά

$$\|\phi_{\alpha_n} - \phi_\alpha\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

□

Λήμμα 5. *Αν $\beta \in \Delta$, $\alpha_n, \alpha \in \Delta$, $|\mu_n| = |\mu| = 1$ και $\mu_n \to \mu$ και $\alpha_n \to \alpha$ τότε έχουμε ότι $\phi_\beta \circ (\mu_n \phi_{\alpha_n}) \xrightarrow{n\to+\infty} \phi_\beta \circ (\mu\phi_\alpha)$ στον $\mathcal{M}$.*

Αποδειξη. Κάνοντας χρήση των σχέσεων (2), (3), (4) και ορίζοντας τα k_n και k όπως στις σχέσεις αυτές, έχουμε ότι $\phi_\beta \circ (\mu_n \phi_{\alpha_n}) = \mu_n k_n \phi_{\gamma_n}$ και $\phi_\beta \circ (\mu \phi_\alpha) = \mu k \phi_\gamma$, όπου $\gamma_n = \frac{\overline{\beta}\mu_n\alpha_n - 1}{1-\beta\overline{\mu_n\alpha_n}}\overline{\mu_n}\phi_\beta(\mu_n\alpha_n)$ και $\gamma = \frac{\overline{\beta}\mu\alpha-1}{1-\beta\overline{\mu\alpha}}\overline{\mu}\phi_\beta(\mu\alpha)$. Λόγω της συνέχειας της ϕ_β έχουμε ότι $\gamma_n \to \gamma$. Άρα

$$\begin{aligned}\|\phi_\beta \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) - \phi_\beta \circ (\mu\phi_\alpha)\|_{\mathcal{M}} &= \|\mu_n k_n \phi_{\gamma_n} - \mu k \phi_\gamma\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqq |\mu_n k_n| \ \|\phi_{\gamma_n} - \phi_\gamma\|_{\mathcal{M}} + |\mu_n k_n - \mu k| \ \|\phi_\gamma\|_{\mathcal{M}} \to 0.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4. *Η δράση $\phi \mapsto f \circ \phi$, από την ομάδα Möbius G στο χώρο $\mathcal{M}$, είναι συνεχής.*

Αποδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $\alpha_n, \alpha \in \Delta$, $|\mu_n| = |\mu| = 1$, $\mu_n \to \mu$, $\alpha_n \to \alpha$ και $f \in \mathcal{M}$. Επειδή $f \in \mathcal{M}$, η f έχει αναπαράσταση της μορφής $f(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \phi_{c_i}$, όπου $\lambda_i, c_i \in \Delta$ και $\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i| < +\infty$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |\lambda_i| < \varepsilon \tag{38}$$

Επίσης έχουμε ότι $f \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i(\phi_{c_i} \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}))$ και $f \circ (\mu\phi_\alpha) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i(\phi_{c_i} \circ (\mu\phi_\alpha))$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\|f \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) - f \circ (\mu\phi_\alpha)\|_{\mathcal{M}} &= \Big\| \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i(\phi_{c_i} \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n})) - \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i(\phi_{c_i} \circ (\mu\phi_\alpha)) \Big\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqq \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i| \|\phi_{c_i} \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) - \phi_{c_j} \circ (\mu\phi_\alpha)\|_{\mathcal{M}} + 2 \sum_{i=N+1}^{+\infty} |\lambda_i| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i| \|\phi_{c_i} \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) - \phi_{c_j} \circ (\mu\phi_\alpha)\|_{\mathcal{M}} + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα (5)

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) - f \circ (\mu\phi_\alpha)\|_{\mathcal{M}} \leqq 2\varepsilon$$

Άρα

$$f \circ (\mu_n\phi_{\alpha_n}) \to f \circ (\mu\phi_\alpha)$$

στον $\mathcal{M}$. □

3. Δυϊκότητα

Θεώρημα 3. *Ως ισομορφισμοί ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις δυϊκότητας*

$$\mathcal{M}^* \cong B \tag{39}$$

και

$$B_0^* \cong \mathcal{M} \tag{40}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα τη σχέση (39). Έστω $b \in B$ και $f \in \mathcal{M}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $l_b : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ως εξής

$$l_b(f) := f(0)\overline{b(0)} + f'(0)\overline{b'(0)} + \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\overline{\alpha}} f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)\overline{b'(\alpha)}dA(\alpha)$$

Το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\overline{\alpha}} f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)\overline{b'(\alpha)}dA(\alpha)$ είναι καλά ορισμένο γιατί

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|\alpha|}|f''(\alpha)|(1-|\alpha|^2)|b'(\alpha)|dA(\alpha) \leqq C\|b\|_B \iint\limits_{\Delta} |f''(\alpha)|dA(\alpha) < +\infty$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το l_b είναι γραμμική απεικόνιση. Επίσης έχουμε

$$|l_b(f)| \leqq \Big(|f(0)| + |f'(0)| + C\iint\limits_{\Delta} |f''(\alpha)|dA(\alpha)\Big)\|b\|_B \leqq C\|b\|_B\|f\|_{\mathcal{M}}$$

οπότε το l_b είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, άρα $l_b \in \mathcal{M}^*$ και $\|l_b\| \leqq C\|b\|_B$. Ορίζουμε τον τελεστή $T : B \to \mathcal{M}^*$, με $T(b) = l_b$. Έστω $l \in \mathcal{M}^*$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $b : \Delta \to \mathbb{C}$ ως εξής

$$b(0) = \overline{l(1)}$$

και

$$b'(z) = \frac{\overline{l(\phi_z)} - \overline{l(1)z}}{|z|^2 - 1}$$

Θα δείξουμε ότι η b' είναι αναλυτική στο Δ, δηλαδή ότι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{b'(z+h)} - \overline{b'(z)}}{\overline{h}} = \lim_{h\to 0} l\Big(\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{\phi_{z+h}(w) - (z+h)}{|z+h|^2 - 1} - \frac{\phi_z(w) - z}{|z|^2-1}\Big)\Big)$$

υπάρχει. Θα χρησιμοποιήσουμε τον υπολογισμό

$$\frac{\phi_z(w) - z}{|z|^2 - 1} = \frac{\frac{z-w}{1-\overline{z}w} - z}{|z|^2-1} = \frac{w}{1-\overline{z}w}$$

Οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{\phi_{z+h}(w)-(z+h)}{|z+h|^2-1}-\frac{\phi_z(w)-z}{|z|^2-1}\Big)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{w}{1-\overline{(z+h)}w}-\frac{w}{1-\overline{z}w}\Big)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{w^2}{(1-\overline{(z+h)}w)(1-\overline{z}w)}$$
$$=\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω σημειακό όριο αποτελεί και όριο στον $\mathcal{M}$. Έχουμε

$$\Big\|\frac{w^2}{(1-\overline{(z+h)}w)(1-\overline{z}w)}-\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big\|_{\mathcal{M}}=|h|\ \Big\|\frac{w^3}{(1-\overline{z}w)^2(1-\overline{(z+h)}w)}\Big\|_{\mathcal{M}}$$

Θέτοντας $\Phi_h(w):=\frac{w^3}{(1-\overline{z}w)^2(1-\overline{(z+h)}w)}$ έχουμε ότι $\Phi_h(0)=0$ και $\Phi_h'(0)=0$. Επίσης, παίρνοντας $|h|\leqq\frac{1-|z|}{2}$ έχουμε ότι $|\Phi_h''(w)|\leqq C_z$, όπου C_z είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το z και όχι από το w. Άρα

$$|h|\ \Big\|\frac{w^3}{(1-\overline{z}w)^2(1-\overline{(z+h)}w)}\Big\|_{\mathcal{M}}\leqq|h|C\Big(|\Phi_h(0)|+|\Phi_h'(0)|+\iint\limits_{\Delta}|\Phi_h''(w)|dA(w)\Big)$$
$$\leqq|h|C_z\to 0$$

όταν $h\to 0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{\phi_{z+h}(w)-(z+h)}{|z+h|^2-1}-\frac{\phi_z(w)-z}{|z|^2-1}\Big)\to\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}$$

στον $\mathcal{M}$. Άρα

$$l\Big(\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{\phi_{z+h}(w)-(z+h)}{|z+h|^2-1}-\frac{\phi_z(w)-z}{|z|^2-1}\Big)\Big)\to l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)$$

Άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{b'(z+h)}-\overline{b'(z)}}{\overline{h}}=l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)$$

Οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{b'(z+h)-b'(z)}{h}=\overline{l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)}$$

Άρα b' αναλυτική στο Δ. Θα δείξουμε τώρα ότι $b\in B$ και $\|b\|_B\leqq C\|l\|$. Έχουμε

$$|b(0)|=|l(1)|\leqq\|l\|\ \|1\|_{\mathcal{M}}\leqq\|l\|$$

και

$$(1-|z|^2)|b'(z)|=|l(\phi_z-z)|\leqq\|l\|\ \|\phi_z-z\|_{\mathcal{M}}$$
$$\leqq\|l\|(1+|z|)\leqq 2\|l\|$$

Άρα $b\in B$ και

$$\|b\|_B\leqq C\|l\|. \tag{41}$$

Αν $f \in \mathcal{M}$ τότε η f γράφεται $f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \phi_{\alpha_j}(z)$ όπου $\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j| < +\infty$. Επειδή η σειρά συγκλίνει στην f στον $\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} l_b(f) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j l_b(\phi_{\alpha_j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \Big(\alpha_j \overline{b(0)} + (|\alpha|^2 - 1)\overline{b'(\alpha_j)}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j l(\phi_{\alpha_j}) = l(f) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι

$$l_b(\phi_{\alpha_j}) = \alpha_j \overline{b(0)} + (|\alpha|^2 - 1)\overline{b'(\alpha_j)}.$$

Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε κατόπιν υπολογισμών και κάνοντας χρήση του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy. Οπότε τελικά έχουμε ότι

$$l = l_b = T(b)$$

άρα ο T είναι επί.

Επίσης από τη σχέση (41) έχουμε

$$\|b\|_B \leqq C\|l\| = C\|T(b)\|_{\mathcal{M}^*}$$

οπότε ο T είναι ισομορφισμός.

Θα αποδείξουμε τώρα τη σχέση (40). Έστω $f \in \mathcal{M}$ και $b \in B_0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $l_f : B_0 \to \mathbb{C}$ ως εξής

$$l_f(b) = b(0)\overline{f(0)} + b'(0)\overline{f'(0)} + \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\alpha}\overline{f''(\alpha)}(1 - |\alpha|^2)b'(\alpha)dA(\alpha)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το l_f είναι γραμμική απεικόνιση. Επίσης έχουμε

$$|l_f(b)| \leqq \Big(|f(0)| + |f'(0)| + C\iint\limits_{\Delta} |f''(\alpha)|dA(\alpha)\Big)\|b\|_B \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}\|b\|_B$$

οπότε το l_f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, άρα $l_f \in B_0^*$ και $\|l_f\| \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}$.

Ορίζουμε τον τελεστή $S : \mathcal{M} \to B_0^*$, με $S(f) = l_f$. Έστω $l \in B_0^*$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{C}$ ως εξής

$$f(0) = \overline{l(1)}$$

και

$$f(z) = \overline{l(b_z)} - \overline{l(1)}, \quad z \neq 0$$

όπου $b_z(w) = log\frac{1}{1-\overline{z}w}$, $w \in \Delta$ με $b_z(0) = 0$. Με απλούς υπολογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι $b_z \in B_0$. Θα δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στο Δ. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\Big(\overline{f(z+h)} - \overline{f(z)}\Big) &= \frac{1}{h}\Big(l(b_{z+h}) - l(b_z)\Big) = l\Big(\frac{1}{h}(b_{z+h} - b_z)\Big) \\ &= l\Big(\frac{1}{h}\Big(log\frac{1}{1-\overline{(z+h)}w} - log\frac{1}{1-\overline{z}w}\Big)\Big) \end{aligned}$$

Αλλά όταν $h \to 0$:

$$\frac{1}{\overline{h}}\Big(log\frac{1}{1-\overline{(z+h)}w} - log\frac{1}{1-\overline{z}w}\Big) \to \frac{w}{1-\overline{z}w}.$$

Θα δείξουμε ότι η τελευταία σχέση σύγκλισης, εκτός από σημειακά, ισχύει και ως προς τη νόρμα του χώρου B_0. Θέτουμε

$$G_h(w) = \frac{1}{\overline{h}}\Big(log\frac{1}{1-\overline{(z+h)}w} - log\frac{1}{1-\overline{z}w}\Big)$$

και

$$G(w) = \frac{w}{1-\overline{z}w}.$$

Θα δείξουμε ότι $\|G_h(w) - G(w)\|_B \to 0$ όταν $h \to 0$. Είναι

$$\frac{d}{dw}\Big(G_h(w) - G(w)\Big) = \frac{\overline{h}w}{(1-\overline{(z+h)}w)(1-\overline{z}w)^2}$$

Άρα, άν $|h| < \frac{1-|z|}{2}$, έχουμε

$$\|G_h(w) - G(w)\|_B = |h| \sup_{w\in\Delta}(1-|w|^2)\frac{|w|}{|1-\overline{(z+h)}w| \ |1-\overline{z}w|^2} \leqq C_z|h|$$

και επομένως $G_h(w) \to G(w)$ στον B_0.
Έχουμε λοιπόν ότι όταν $h \to 0$:

$$l\Big(\frac{1}{\overline{h}}\Big(log\frac{1}{1-\overline{(z+h)}w} - log\frac{1}{1-\overline{z}w}\Big)\Big) \to l\Big(\frac{w}{1-\overline{z}w}\Big)$$

Οπότε

$$\frac{1}{\overline{h}}\Big(\overline{f(z+h)} - \overline{f(z)}\Big) \xrightarrow{h\to 0} l\Big(\frac{w}{1-\overline{z}w}\Big)$$

και

$$f'(z) = \overline{l\Big(\frac{w}{1-\overline{z}w}\Big)}$$

Άρα η f είναι αναλυτική στο Δ. Θα υπολογίσουμε τώρα την f''. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\overline{f'(z+h)} - \overline{f'(z)}}{\overline{h}} &= \frac{1}{\overline{h}}\Big[l\Big(\frac{w}{1-\overline{(z+h)}w}\Big) - l\Big(\frac{w}{1-\overline{z}w}\Big)\Big] \\ &= l\Big(\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{w}{1-\overline{(z+h)}w} - \frac{w}{1-\overline{z}w}\Big)\Big)\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\frac{1}{\overline{h}}\Big(\frac{w}{1-\overline{(z+h)}w} - \frac{w}{1-\overline{z}w}\Big) \to \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}$$

όταν $h \to 0$. Όπως πριν αποδεικνύεται ότι το όριο εκτός από σημειακό είναι και όριο στον B_0. Άρα

$$f''(z) = \overline{l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)}$$

Θα δείξουμε ότι $\iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z) < +\infty$, από όπου έπεται ότι $f \in \mathcal{M}$. Έστω $h \in C(\Delta)$ και $h(z) = 0$ για $R < |z| < 1$ για κάποιο $R \in (0,1)$. Είναι

$$f''(z)\overline{h(z)} = \overline{l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)\Big)}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Big|\iint\limits_{\Delta} f''(z)\overline{h(z)}dA(z)\Big| &= \Big|\iint\limits_{\Delta} l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)\Big)dA(z)\Big| \\ &\overset{*}{=} \Big|l\Big(\iint\limits_{\Delta} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)dA(z)\Big)\Big| \\ &\leqq \|l\| \ \Big\|\iint\limits_{\Delta} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)dA(z)\Big\|_{B_0}\end{aligned}$$

Θα δικαιολογήσουμε την ισότητα (*) στην παραπάνω σχέση. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε διαμέριση του δίσκου $\overline{\Delta(0;R)}$ που αποτελείται από μετρήσιμα σύνολα Δ_j, όπως στο Θεώρημα (1), και σημεία $z_j \in \Delta_j$. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{w^2}{(1-\overline{z_j}w)^2}h(z_j)|\Delta_j| \to \iint\limits_{\Delta} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)dA(z) \tag{42}$$

στον B_0, καθώς $\varepsilon \to 0$. Θέτοντας $h_1(z) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^3}$ έχουμε

$$\begin{aligned}&(1-|w|^2)\Big|\frac{d}{dw}\Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{w^2}{(1-\overline{z_j}w)^2}h(z_j)|\Delta_j| - \iint\limits_{\overline{\Delta(0;R)}} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)dA(z)\Big]\Big| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{\Delta_j} \Big|\frac{2w}{(1-\overline{z_j}wh(z_j))^3}h(z_j) - \frac{2w}{(1-\overline{z}w)^3}h(z)\Big|dA(z) \\ &\leqq C\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{\Delta_j} |h_1(z_j)h(z_j) - h_1(z)h(z)|dA(z) \\ &\leqq C\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{\Delta_j} |h_1(z_j) - h_1(z)| \ |h(z)|dA(z) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{\Delta_j} |h_1(z_j)| \ |h(z_j) - h(z)|dA(z) = I_1 + I_2\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις και χρησιμοποιώντας τη σχέση (18) καταλήγουμε στο

$$I_1 \leqq \frac{C\varepsilon\|h\|_\infty}{(1-R)^6}$$

Επίσης, λόγω του ότι η συνάρτηση h είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{\Delta(0;R)}$ έπεται ότι καθώς το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο μηδέν θα υπάρχει διαμέριση ώστε $|h(z_j)-h(z)|<\varepsilon$, οπότε $I_2 \leqq C\varepsilon$.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι η σύγκλιση της σχέσης (42) ισχύει στο χώρο B. Εύκολα δείχνουμε ότι $\frac{w^2}{(1-\overline{z_j}w)^2}h(z_j)|\Delta_j| \in B_0, \quad j=1,\cdots,n$. Επειδή ο B_0 είναι κλειστός υπόχωρος του B, έπεται ότι η οριακή συνάρτηση $\iint\limits_{\Delta} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)dA(z)$ ανήκει στο B_0, οπότε η σύγκλιση της σχέσης (42) ισχύει στο χώρο B_0. Οπότε

$$l\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{w^2}{(1-\overline{z_j}w)^2}h(z_j)|\Delta_j|\Big) \to l\Big(\iint\limits_{\Delta} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}h(z)dA(z)\Big)$$

Αλλά

$$l\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{w^2}{(1-\overline{z_j}w)^2}h(z_j)|\Delta_j|\Big) = \sum_{j=1}^{n} l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z_j}w)^2}\Big)h(z_j)|\Delta_j|$$

Όμως το τελευταίο άθροισμα τείνει στο $\iint\limits_{\Delta} l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)h(z)dA(z)$ καθώς το πλάτος της διαμέρισης των Δ_j τείνει στο μηδέν. Δικαιολογήσαμε λοιπόν την ισότητα (*).

Επίσης

$$\begin{aligned}\|g\|_B &= \sup_{w\in\Delta}(1-|w|^2)\Big|\iint\limits_{\Delta} \frac{2w}{(1-\overline{z}w)^3}h(z)dA(z)\Big| \\ &\leqq 2\|h\|_{L^\infty} \sup_{w\in\Delta}(1-|w|^2)\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{z}w|^3}dA(z) \leqq C\|h\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

Οπότε

$$\Big|\iint\limits_{\Delta} f''(z)\overline{h(z)}dA(z)\Big| \leqq C\|l\| \ \|h\|_{L^\infty}$$

Άρα

$$\iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z) \leqq C\|l\|$$

συνεπώς $f \in \mathcal{M}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $l_f = l$. Αν $b \in B_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} l_f(b) &= b(0)\overline{f(0)} + b'(0)\overline{f'(0)} + \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\alpha} f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)b'(\alpha)dA(\alpha) \\ &= b(0)l(1) + b'(0)l(w) + \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\alpha} l\Big(\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)(1-|\alpha|^2)b'(\alpha)dA(\alpha) \\ &\overset{**}{=} b(0)l(1) + b'(0)l(w) + l\Big(\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\alpha}\frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}(1-|\alpha|^2)b'(\alpha)dA(\alpha)\Big)\end{aligned}$$

Η ισότητα (**) δικαιολογείται όμοια με την ισότητα (*) παραπάνω. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy και κατόπιν υπολογισμών βρίσκουμε ότι

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\alpha} \frac{w^2}{(1-\overline{z}w)^2}(1-|\alpha|^2)b'(\alpha)dA(\alpha) = -wb'(0) + b(w) - b(0)$$

Οπότε τελικά έχουμε

$$l_f(b) = b(0)l(1) + b'(0)l(w) - b'(0)l(w) + l(b) - b(0)l(1) = l(b)$$

Άρα

$$Sf = l_f = l$$

Άρα ο S είναι επί. Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{M}} &\leqq C\Big(|f(0)| + |f'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |f''(z)|dA(z)\Big) \\ &\leqq C\Big(|l(1)| + |l(w)| + c\|l\|\Big) \leqq C\|l\| = C\|Sf\| \end{aligned}$$

Άρα ο S είναι ισομορφισμός. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τελεστές σύνθεσης

1. Ένα βασικό θεώρημα

Ανάμεσα στους τελεστές που απεικονίζουν ένα Möbius αναλλοίωτο χώρο στον εαυτό του, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τελεστές σύνθεσης. Πιο συγκεκριμένα, αν ψ είναι αναλυτική συνάρτηση που απεικονίζει το δίσκο Δ στον εαυτό του, τότε ο τελεστής σύνθεσης C_ψ

$$C_\psi(f) = f \circ \psi$$

απεικονίζει αναλυτικές συναρτήσεις στο Δ σε αναλυτικές συναρτήσεις στο Δ. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε πότε ο τελεστής C_ψ απεικονίζει συγκεκριμένους Möbius αναλλοίωτους χώρους στον εαυτό τους.
Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $M_p(f;r)$ που ορίζουμε ως εξής

$$M_p(f;r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leqq r < 1, \quad 1 \leqq p < +\infty$$

και

$$M_\infty(f;r) = \sup_{0\leqq\theta<2\pi} |f(re^{i\theta})|, \quad 0 \leqq r < 1$$

Επίσης, μια βασική, για τη συνέχεια, έννοια είναι αυτή του **subordination**: Έστω f και F συναρτήσεις αναλυτικές στο Δ με $f(z) = F(\omega(z))$ για κάποια συνάρτηση ω αναλυτική στο Δ που ικανοποιεί την $|\omega(z)| \leqq |z|$, τότε

$$M_p(f;r) \leqq M_p(F;r), \quad 1 \leqq p \leqq +\infty$$

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση ω δεν απαιτείται να είναι 1-1. Μία απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος για το subordination υπάρχει στο [**5**].

Θεώρημα 4. *Έστω X οποιοσδήποτε από τους χώρους H^∞, A, $BMOA$, $VMOA$, B και B_0. Τότε από την αναλυτική $\psi\colon \Delta \to \Delta$ παίρνουμε ένα φραγμένο τελεστή σύνθεσης στον X αν και μόνο αν $\psi \in X$.*

Απόδειξη. Όλοι οι χώροι που αναφέρθηκαν παραπάνω περιέχουν την ταυτοτική συνάρτηση $f(z) = z$ οπότε είναι προφανές ότι $\psi = z \circ \psi \in X$ αν ο C_ψ απεικονίζει τον X στον X. Για το αντίστροφο, θεωρούμε κάθε ένα χώρο χωριστά. Το ζητούμενο είναι προφανές για τους χώρους H^∞ και την A.

Ο χώρος Bloch B απεικονίζεται στον εαυτό του από τον τελεστή σύνθεσης C_ψ για κάθε $\psi\colon \Delta \to \Delta$. Αυτό είναι μια συνέπεια της:

$$|\psi'(z)|(1-|z|^2) \leqq 1-|\psi(z)|^2, \quad z \in \Delta.$$

Αν $f \in B$, τότε

$$\begin{aligned} |(f\circ\psi)'(z)|(1-|z|^2) &= |f'(\psi(z))||\psi'(z)|(1-|z|^2) \\ &\leqq |f'(\psi(z))|(1-|\psi(z)|^2) \\ &\leqq \sup_{|w|<1}|f'(w)|(1-|w|^2) \\ &\leqq \|f\|_B \end{aligned} \tag{43}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(\psi(0))-f(0)| &= \Big|\int_0^{\psi(0)} f'(z)dz\Big| \\ &\leqq \max_{z\in[0,\psi(0)]}|f'(z)| \;\; |\psi(0)| \\ &\leqq \frac{\|f\|_B}{1-|z|^2} \;\; |\psi(0)| \\ &\leqq \frac{\|f\|_B}{1-|\psi(0)|^2} \;\; |\psi(0)| \end{aligned}$$

Όπου παραπάνω με $[0,\psi(0)]$ συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία 0 και $\psi(0)$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} |f(\psi(0))| &\leqq \frac{\|f\|_B}{1-|\psi(0)|^2} \;\; |\psi(0)| + |f(0)| \\ &\leqq \frac{\|f\|_B}{1-|\psi(0)|^2} \;\; |\psi(0)| + \|f\|_B \\ &= \Big(\frac{|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|^2}+1\Big)\|f\|_B \end{aligned} \tag{44}$$

Οπότε από τη σχέση (43) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(\psi(0))| + |(f\circ\psi)'(z)|(1-|z|^2) &\leqq \Big(\frac{|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|^2}+1\Big)\|f\|_B + \|f\|_B \\ &\leqq C\|f\|_B \end{aligned}$$

Άρα ο τελεστής $C_\psi : B \to B$ είναι φραγμένος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f \in B_0$, $\psi \in B_0$ και υπάρχει ακολουθία $\{z_n\}$ με $|z_n| \to 1$ αλλά

$$(f\circ\psi)'(z_n)(1-|z_n|^2) \geqq \delta > 0$$

Χρησιμοποιώντας στον τελευταίο υπολογισμό την αναλλοίωτη μορφή του Λήμματος του Schwarz έχουμε

$$\delta \leqq |f'(w_n)|(1-|w_n|^2), \quad w_n = \psi(z_n).$$

Επειδή $f \in B_0$ συμπεραίνουμε ότι η $\{w_n\}$ δεν πλησιάζει το σύνορο $|w| = 1$, δηλαδή ότι ισχύει $|w_n| \leqq r_0$ για κάποιο $r_0 < 1$. Αλλά τότε $|f'(w_n)| \leqq M_{r_0}$ για όλα τα n και έχουμε

$$\delta \leqq |f'(\psi(z_n))||\psi'(z_n)|(1-|z_n|^2) \leqq M_{r_0}|\psi'(z_n)|(1-|z_n|^2) \to 0,$$

επειδή $\psi \in B_0$. Η αντίφαση στην οποία καταλήξαμε δείχνει ότι $f \circ \psi \in B_0$.
Θα αποδείξουμε ότι αν $\psi \in BMOA$ τότε ο C_ψ απεικονίζει τον $BMOA$ στον εαυτό του Έστω $\alpha \in \Delta$. Υποθέτουμε $\psi(\alpha) = 0$. Θέτουμε $\phi = \psi \circ \phi_\alpha : \Delta \to \Delta$, οπότε $\phi(0) = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(f\circ\psi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\psi)(\alpha)\|_{H^2}^2 &= \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\phi(re^{i\theta})) - f(0)|^2 d\theta \\
&\leqq \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(0)|^2 d\theta \\
&= \|f - f(0)\|_{H^2}^2
\end{aligned}$$

Άρα, όταν $\psi(\alpha) = 0$

$$\|(f\circ\psi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\psi)(\alpha)\|_{H^2}^2 \leqq \|f - f(0)\|_{H^2}^2 \tag{45}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το $\psi(\alpha)$ δεν είναι απαραίτητα μηδέν και χρησιμοποιώντας τη σχέση $(\phi_{\psi(\alpha)} \circ \psi)(\alpha) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\|(f\circ\psi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\psi)(\alpha)\|_{H^2}^2 \\
&= \|(f\circ\phi_{\psi(\alpha)}\circ\phi_{\psi(\alpha)}\circ\psi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\phi_{\psi(\alpha)}\circ\phi_{\psi(\alpha)}\circ\psi)(\alpha)\|_{H^2}^2 \\
&\leqq \|f\circ\phi_{\psi(\alpha)} - f\circ\phi_{\psi(\alpha)}(0)\|_{H^2}^2 \\
&= \|f\circ\phi_{\psi(\alpha)} - f(\psi(\alpha))\|_{H^2}^2 \leqq \|f\|_{BMOA}^2,
\end{aligned}$$

όπου η πρωτελευταία ανισότητα παραπάνω ισχύει λόγω της σχέσης (45), δεδομένου ότι $(\phi_{\psi(\alpha)} \circ \psi)(\alpha) = 0$. Άρα

$$\sup_{\alpha\in\Delta}\|(f\circ\psi)\circ\phi_\alpha - (f\circ\psi)(\alpha)\|_{H^2}^2 \leqq \|f\|_{BMOA}^2, \tag{46}$$

οπότε $f \circ \psi \in BMOA$. Άρα ο C_ψ απεικονίζει τον $BMOA$ στον $BMOA$.
Παρόμοια με τη σχέση (44) και κάνοντας χρήση της ανισότητας $\|f\|_B \leqq C\|f\|_{BMOA}$ (μια απόδειξη της ανισότητας υπάρχει στο [**8**], σελ. 31) αποδεικνύουμε ότι

$$|f(\psi(0))| \leqq C\|f\|_{BMOA}$$

που σε συνδυασμό με τη σχέση (46) μας οδηγεί στο

$$\|f\circ\psi\|_{BMOA} \leqq C\|f\|_{BMOA}.$$

Άρα ο τελεστής $C_\psi : BMOA \to BMOA$ είναι φραγμένος.
Για το χώρο $VMOA$ έχουμε ότι $f \in VMOA$ αν και μόνο αν

$$\lim_{|\alpha|\to 1} \|f \circ \phi_\alpha - f(\alpha)\|_{H^2} = 0$$

Έστω $\psi \in VMOA$ και $\psi\colon \Delta \to \Delta$. Τότε για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε

$$\begin{aligned}\|\psi^n \circ \phi_\alpha - (\psi(\alpha))^n\|_{H^2} &= \left\| \{\psi \circ \phi_\alpha - \psi(\alpha)\} \sum_{k=0}^{n-1} (\psi^k \circ \phi_\alpha)(\psi(\alpha))^{n-k-1} \right\|_{H^2} \\ &\leqq n\|\psi \circ \phi_\alpha - \psi(\alpha)\|_{H^2} \to 0,\end{aligned}$$

καθώς $|\alpha| \to 1$.

Οπότε $\psi^n \in VMOA$, άρα $p \circ \psi \in VMOA$ για κάθε πολυώνυμο p. Ο τελεστής σύνθεσης C_ψ απεικονίζει τον $BMOA$ στον $BMOA$ και είναι φραγμένος. Επίσης, ο C_ψ απεικονίζει τον υπόχωρο του $BMOA$ που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα στον $VMOA$. Επειδή τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $VMOA$ έπεται ότι ο C_ψ απεικονίζει τον $VMOA$ στον $VMOA$.

□

2. Τελεστές σύνθεσης και γενικευμένα μέτρα Carleson

Έστω $0 < h < 1, 0 \leqq \theta < 2\pi$. Θέτουμε

$$Q(h,\theta) = \{re^{it}\colon 1-h < r < 1 \text{ και } |t-\theta| < \pi h\}$$
$$S(h,\theta) = \{re^{it}\colon |re^{it} - e^{i\theta}| < h\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $S(h,\theta) \subseteq Q(h,\theta)$, αν $0 < h < 1,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ και ότι υπάρχει σταθερά C ώστε $Q(h,\theta) \subseteq S(Ch,\theta)$, αν $0 < h < \frac{1}{C}$ και $0 \leqq \theta < 2\pi$. Ένα πεπερασμένο θετικό μέτρο μ στο Δ είναι μέτρο Carleson, αν υπάρχει σταθερά C_μ με

$$\mu(Q(h,\theta)) \leqq Ch \quad 0 < h < 1, \quad 0 \leqq \theta < 2\pi$$

ή ισοδύναμα αν

$$\mu(S(h,\theta)) \leqq C_\mu h \quad 0 < h < 1, \quad 0 \leqq \theta < 2\pi.$$

Θα δείξουμε ότι μέτρα που ικανοποιούν μία γενικευμένη συνθήκη Carleson (την οποία θα ορίσουμε παρακάτω) παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των αναλυτικών συναρτήσεων $\psi\colon \Delta \to \Delta$ οι οποίες παράγουν φραγμένους τελεστές σύνθεσης σε συγκεκριμένους Möbius αναλλοίωτους χώρους X.

Ξεκινούμε θεωρώντας τους p-χώρους Besov B_p για $1 < p < +\infty$. Υπενθυμίζουμε ότι $f \in B_p$ αν και μόνο αν

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-2} dA(z) < +\infty.$$

Έστω μια αναλυτική συνάρτηση $\psi\colon \Delta \to \Delta$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε πότε ο τελεστής σύνθεσης C_ψ απεικονίζει το B_p στο B_p. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $w = \psi(z)$ έχουμε

(47)
$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} |(f\circ\psi)'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-2} dA(z) &= \iint_{\Delta} |f'(\psi(z))|^p \{|\psi'(z)|(1-|z|^2)\}^{p-2} |\psi'(z)|^2 dA(z)\\ &= \iint_{\Delta} |f'(w)|^p \, G_\psi(w) dA(w),\end{aligned}$$

όπου

$$G_\psi(w) = \sum_{\psi(z)=w} \{|\psi'(z)|(1-|z|^2)\}^{p-2}.$$

Αν $p=2$ τότε $G_\psi(w)$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου $\psi^{-1}(\{w\})$. Έστω μ το μέτρο

$$\mu(E) = \iint_{E} G_\psi(w) dA(w)$$

Τότε ο C_ψ απεικονίζει τον B_p στον B_p αν και μόνο αν η ταυτοτική απεικόνιση από τον υπόχωρο του $L^p(\Delta, (1-|z|^2)^{p-2}dA)$, που αποτελείται από τις παραγώγους των συναρτήσεων στον B_p, στο χώρο $L^p(\mu)$ είναι φραγμένη. Αυτό γιατί αν ο τελεστής που ορίζεται ως $T : L^p(\Delta, (1-|z|^2)^{p-2}dA) \to L^p(\mu)$ με $T(f') = f'$, για κάθε $f \in B_p$, είναι φραγμένος τότε έχουμε

$$\|T(f')\|_{L^p(\mu)} \leqq C\|f'\|_{L^p(\Delta,(1-|z|^2)^{p-2}dA)}$$

δηλαδή

$$\iint_{\Delta} |f'(w)|^p \, G_\psi(w) dA(w) \leqq C \iint_{\Delta} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-2} dA(z)$$

που από τη σχέση (47) συνεπάγεται ότι ο C_ψ απεικονίζει τον B_p στον B_p.
Αντίστροφα αν ο C_ψ απεικονίζει τον B_p στον B_p τότε έχουμε

$$\|f\circ\psi\|_{B_p} \leqq C\|f\|_{B_p}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (47) έχουμε ότι

$$\iint_{\Delta} |f'(w)|^p \, G_\psi(w) dA(w) \leqq C \iint_{\Delta} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^{p-2} dA(z)$$

που συνεπάγεται ότι ο T είναι φραγμένος.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2. Έστω μ ένα θετικό πεπερασμένο μέτρο στο Δ, X ένας Möbius αναλλοίωτος χώρος και $\|\cdot\|_X$ η νόρμα του X. Θα λέμε ότι το μ είναι ένα $(X,p)-Carleson$ μέτρο, αν υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε

$$\|f'\|_{L^p(\mu)} \leqq C\|f\|_X, \quad f \in X.$$

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τα $(B_p,p)-Carleson$ μέτρα και ταυτόχρονα τα $(\mathcal{M},p)-Carleson$ μέτρα, καθορίζοντας ποιές ψ ορίζουν φραγμένους τελεστές C_ψ από τον B_p στον B_p και από τον $\mathcal{M}$ στον B_p.

Θεώρημα 5. *Έστω $1<p<\infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *το μ είναι $(B_p,p)-Carleson$ μέτρο*
(2) *υπάρχει μία σταθερά C_p τέτοια ώστε $\mu(S(h,\theta)) \leqq C_p h^p$, για κάθε $h \in (0,1)$, και $\theta \in [0,2\pi)$*
(3) *υπάρχει μια σταθερά C_p τέτοια ώστε*

$$\iint\limits_{\Delta} (P_\alpha(z))^p d\mu(z) \leqq C_p,$$

για κάθε $\alpha \in \Delta$, όπου $P_\alpha(z) = \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}$.

(4) *το μ είναι $(\mathcal{M},p)-Carleson$ μέτρο.*

Απόδειξη. ***(1)*** $\Rightarrow$***(3):*** Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει. Τότε

$$\iint\limits_{\Delta} |f'|^p d\mu \leqq C\Big(|f(0)| + \iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^p(1-|z|^2)^{p-2}dA(z)\Big)$$

για όλες τις συναρτήσεις $f \in B_p$. Πιο συγκεκριμένα, αν $\alpha \in \Delta$, αυτό ισχύει για τη συνάρτηση $\phi_\alpha(z) = \frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta} \Big(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\Big)^p d\mu(z) &\leqq C\Big(|\alpha| + \iint\limits_{\Delta} \Big(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\Big)^p (1-|z|^2)^{p-2}dA(z)\Big)\\ &\leqq C_p\Big(1 + \iint\limits_{\Delta} \frac{(1-|\alpha|^2)^p}{|1-\overline{\alpha}z|^{p+2}}dA(z)\Big) \leqq C_p\end{aligned}$$

σύμφωνα με τη σχέση (20).

(3) ⇒(4): Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει. Έστω $f = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_{\alpha_k}$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned}\|f'\|_{L^p(\mu)} &\leqq \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| \Big(\iint_{\Delta} |\phi'_{\alpha_k}(z)|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| \Big(\iint_{\Delta} (P_\alpha(z))^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \leqq C_p \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\|f'\|_{L^p(\mu)} \leqq C_p \|f\|_{\mathcal{M}}$$

για κάθε $f \in \mathcal{M}$.
(4) ⇒(3): Υποθέτουμε ότι η (4) ισχύει. Τότε θέτοντας $f = \phi_\alpha$ παίρνουμε την (3).
(3) ⇒(2): Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει. Έστω $h \in (0,1)$ και $\theta \in [0, 2\pi)$. Θέτουμε $\alpha = (1-h)e^{i\theta}$. Τότε

$$\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2} \asymp \frac{1}{h},$$

αν $|z - e^{i\theta}| < h$, και συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^p}\mu(S(h,\theta)) &\leqq C_p \iint_{S(h,\theta)} (\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2})^p d\mu(z) \\ &\leqq C_p \iint_{\Delta} (\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2})^p d\mu(z) \leqq C_p\end{aligned}$$

Οπότε ισχύει η (2).
(2) ⇒(1): Υποθέτουμε ότι η (2) ισχύει. Για $z = re^{i\theta}$ θέτουμε

$$E_1(z) = \Big\{ w \colon |w - z| < \frac{1-|z|}{2} \Big\}$$

Τότε

$$E_1(z) \subseteq S\Big(2(1-|z|), \theta\Big)$$

Επιπλέον, αν $w \in E_1(z)$ τότε

$$1-|w| \asymp 1-|z|.$$

Επειδή η f είναι αναλυτική έχουμε ότι και η f' είναι αναλυτική οπότε

$$|f'(z)| \leqq \frac{C}{(1-|z|)^2} \iint_{E_1(z)} |f'(w)| dA(w)$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} |f'(z)|^p d\mu(z) &\leqq C \iint_{\Delta} \frac{1}{(1-|z|)^2} \iint_{E_1(z)} |f'(w)|^p dA(w) d\mu(z) \\
&\leqq C \iint_{\Delta} \iint_{\Delta} |f'(w)|^p \chi_{E_1(z)}(w)(1-|w|)^{-2} dA(w) d\mu(z) \\
&= C \iint_{\Delta} |f'(w)|^p (1-|w|)^{-2} (\iint_{\Delta} \chi_{E_1(z)}(w) d\mu(z)) dA(w)
\end{aligned}$$

Όμως, αν $w \in E_1(z)$, έχουμε ότι $|w-e^{i\theta}| < 2(1-|w|)$. Άρα

$$\chi_{E_1(z)}(w) \leqq \chi_{S(2(1-|z|),\theta)}(w), \quad z=|z|e^{i\theta}$$

Άρα

$$\iint_{\Delta} \chi_{E_1(w)}(z)\, d\mu(z) \leqq \mu(S(2(1-|w|),\theta)) \leqq A\, 2^p\, (1-|w|)^p$$

Οπότε έχουμε

$$\iint_{\Delta} |f'(z)|^p\, d\mu(z) \leqq C_p \iint_{\Delta} |f'(w)|^p (1-|w|^2)^{p-2} dA(w) \leqq C_p \|f\|_{B_p}$$

που σημαίνει ότι το μ είναι $(B_p, p) - Carleson$ μέτρο. $\square$

Μία ειδική περίπτωση αξίζει να αναφερθεί χωριστά. Αν $p \geqq 2$ και αν υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε ο πληθάριθμος $n(w)$ του συνόλου $\psi^{-1}(\{w\})$ να είναι $\leqq N$ για όλα τα $w \in \Delta$, τότε ο τελεστής C_ψ απεικονίζει τον B_p στον B_p. Αυτό έπεται από την αναλλοίωτη μορφή του Λήμματος Schwarz

$$|\psi'(z)|(1-|z|^2) \leqq 1-|\psi(z)|^2$$

χρησιμοποιούμενη κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta} |(f\circ\psi)'(z)|^p(1-|z|^2)^{p-2}dA(z) &\leqq \iint\limits_{\Delta} |f'(\psi(z))|^p\{|\psi'(z)|(1-|z|^2)\}^{p-2}|\psi'(z)|^2dA(z)\\ &\leqq \iint\limits_{\Delta} |f'(\psi(z))|^p\{1-|\psi(z)|^2\}^{p-2}|\psi'(z)|^2dA(z)\\ &= \iint\limits_{\Delta} |f'(w)|^p(1-|w|^2)^{p-2}n(w)dA(w)\\ &\leqq N \iint\limits_{\Delta} |f'(w)|^p(1-|w|^2)^{p-2}dA(w).\end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση των τελεστών σύνθεσης στο χώρο Dirichlet $\mathscr{D}$ για να δούμε πώς το Θεώρημα (5) παρέχει μια απάντηση για το ποιες συναρτήσεις $\psi\colon \Delta\to\Delta$ απεικονίζουν το χώρο $\mathscr{D}$ στον εαυτό του. Το

$$\|f\circ\psi\|_{\mathscr{D}} \leqq \|f\|_{\mathscr{D}}$$

ισοδυναμεί με

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta} |f'(w)|^2n(w)dA(w) &= \iint\limits_{\Delta} |f'(\psi(z))|^2|\psi'(z)|^2dA(z)\\ &\leqq |f(\psi(0))|^2 + \iint\limits_{\Delta} |f'(\psi(z))|^2|\psi'(z)|^2dA(z)\\ &= \|f\circ\psi\|_{\mathscr{D}}^2 \leqq C\iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^2dA(z)\end{aligned}$$

Έτσι ο τελεστής C_ψ απεικονίζει τον $\mathscr{D}$ στον $\mathscr{D}$ όταν το $d\mu = n(w)dA$ είναι ένα $(\mathscr{D},2)-$ $Carleson$ μέτρο. Σύμφωνα με το Θεώρημα (5) αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{(1-|\alpha|^2)^2}{|1-\overline{\alpha}w|^4}n(w)dA(w) \leqq C,\ \ |\alpha|<1$$

ή ισοδύναμα όταν

$$h^{-2}\iint\limits_{S(h,\theta)} n(w)dA(w) \leqq C,\ \ 0<h<1,\ \ 0\leqq\theta<2\pi$$

Παρακάτω έχουμε ένα θεώρημα που χαρακτηρίζει τα $(B,p)-Carleson$ μέτρα.

Θεώρημα 6. *Έστω μ ένα θετικό πεπερασμένο μέτρο στο Δ και $0 < p < \infty$. Τότε*

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{d\mu(z)}{(1-|z|^2)^p} < \infty \tag{48}$$

αν και μόνο αν υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε για κάθε $f \in B$ να ισχύει

$$\Big\{ \iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^p d\mu(z) \Big\}^{\frac{1}{p}} \leqq C\|f\|_B. \tag{49}$$

Απόδειξη. Ότι το (48) συνεπάγεται το (49) είναι εύκολο. Αν $f \in B$ τότε

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^p d\mu(z) &= \iint\limits_{\Delta} \{|f'(z)|(1-|z|^2)\}^p (1-|z|^2)^{-p} d\mu(z) \\ &\leqq \|f\|_B{}^p \iint\limits_{\Delta} \frac{d\mu(z)}{(1-|z|^2)^p}. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, για να αποδείξουμε ότι το (49) συνεπάγεται το (48) θα κάνουμε χρήση του παρακάτω αποτελέσματος που αφορά στις lacunary σειρές.

Λήμμα 6. *Υποθέτουμε ότι $\{n_k\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων που ικανοποιεί τη σχέση $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq \lambda > 1$ για όλα τα k. Έστω $0 < p < \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά $B_{p,\lambda}$ τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} B_{p,\lambda}^{-1} \Big(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} &\leqq \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{in_k\theta} \Big|^p d\theta \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqq B_{p,\lambda} \Big(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ και για κάθε $N = 1, 2, \cdots$.

Μια απόδειξη του παραπάνω λήμματος υπάρχει στο [**12**].
Έστω, λοιπόν, ότι ισχύει η σχέση (49). Αρκεί να θεωρήσουμε μόνο εκείνα τα z για τα οποία $r = |z| \geqq \frac{1}{2}$. Αυτό γιατί αν $|z| \leqq \frac{1}{2}$, τότε, δεδομένου ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, η σχέση (48) ισχύει αυτόματα.
Έστω

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$$

Η f είναι αναλυτική στο Δ και ανήκει στο χώρο B διότι για $r = |z| \geqq \frac{1}{2}$,

$$|f'(z)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n r^{2^n-1} \leqq C \int\limits_{1}^{\infty} 2^x r^{2^x} dx \leqq \frac{C}{1-r}$$
.

όπου C είναι σταθερά.
Θεωρώντας τη συνάρτηση $f_\theta(z) = f(e^{i\theta}z)$, έχουμε ότι $f_\theta \in B$ και $\|f\|_B = \|f_\theta\|_B$.

Θέτοντας στη σχέση (49) όπου f την f_θ και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της ως προς θ έχουμε

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \iint\limits_{\Delta} |e^{i\theta} f'(e^{i\theta}z)|^p d\mu(z) d\theta \leqq C_p \int\limits_{0}^{2\pi} \|f\|_B^p d\theta$$

Άρα

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \iint\limits_{\Delta} |f'(e^{i\theta}z)|^p d\mu(z) d\theta \leqq C_p \|f\|_B^p$$

Επειδή

$$|f'(e^{i\theta}z)| = |\sum_{k=1}^{\infty} 2^k e^{i(2^k-1)\theta} z^{2^k-1}|$$

έχουμε ότι

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} |\sum_{k=1}^{\infty} 2^k e^{i(2^k-1)\theta} z^{2^k-1}|^p d\theta d\mu(z) \leqq C_p \|f\|_B^p.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C_p \iint\limits_{\Delta} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} |z|^{2(2^k-1)} \Big)^{\frac{p}{2}} d\mu(z) &\leqq \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} |\sum_{k=1}^{\infty} 2^k z^{2^k-1} e^{i(2^k-1)\theta}|^p d\theta d\mu(z) \\ &\leqq C_p \|f\|_B^p \end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{C}{(1-|z|)^2} \leqq \int_{x_0}^{\infty} 2^{2x}|z|^{2(2^x-1)}dx \leqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k}|z|^{2(2^k-1)},$$

όπου $x_0 = -log_2 log\frac{1}{|z|}$. Συνεπώς

$$\iint_{\Delta} \frac{1}{(1-|z|^2)^p} d\mu(z) \leqq C_p \|f\|_B^p$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τελεστές σύνθεσης στον $\mathcal{M}$

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε διάφορα αποτελέσματα που σχετίζονται με αυτές τις αναλυτικές συναρτήσεις $\psi\colon \Delta \to \Delta$ οι οποίες παράγουν φραγμένους τελεστές σύνθεσης στον $\mathcal{M}$.

Θεώρημα 7. *Ο τελεστής $C_\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ με $C_\psi = f \circ \psi$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν* $\sup\limits_{\alpha\in\overline{\Delta}} \|\phi_\alpha \circ \psi\|_{\mathcal{M}} < +\infty$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι C_ψ είναι φραγμένος. Τότε υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $\|f \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}, \quad f \in \mathcal{M}$. Αν $\alpha \in \overline{\Delta}$ τότε $\|\phi_\alpha \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq C\|\phi_\alpha\|_{\mathcal{M}} \leqq C$. Άρα $\sup\limits_{\alpha\in\overline{\Delta}} \|\phi_\alpha \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq C$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\sup\limits_{\alpha\in\overline{\Delta}} \|\phi_\alpha \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq C$

Έστω $f \in \mathcal{M}$ τότε $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \phi_{\alpha_n}, \ \ \alpha_n \in \overline{\Delta}$ και $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| < +\infty$.
Έχουμε

$$f \circ \psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left(\phi_{\alpha_n} \circ \psi\right)$$

Άρα

$$\|f \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| \, \|\phi_{\alpha_n} \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq C \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|$$

Οπότε

$$\|f \circ \psi\|_{\mathcal{M}} \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}.$$

Άρα ο τελεστής C_ψ είναι φραγμένος.

$\square$

Λήμμα 7. *Αν $\alpha \in \overline{\Delta}$ τότε έχουμε ότι*

$$\sup_{\alpha\in\overline{\Delta}} \|\phi_\alpha \circ \psi\|_{\mathcal{M}} < +\infty$$

αν και μόνο αν

$$\sup_{\alpha\in\overline{\Delta}} \iint\limits_{\Delta} |(\phi_\alpha \circ \psi)''(z)| dA(z) < +\infty$$

Αποδειξη. Από το Θεώρημα (1) έχουμε ότι

$$\sup_{\alpha\in\overline{\Delta}} \|\phi_\alpha \circ \psi\|_{\mathcal{M}} < +\infty$$

αν και μόνο αν

$$\sup_{\alpha\in\overline{\Delta}} \Big(\Big|\frac{\alpha-\psi(0)}{1-\overline{\alpha}\psi(0)}\Big| + \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(0)|^2}|\psi'(0)| + \iint\limits_{\Delta} |(\phi_\alpha \circ \psi)''(z)| dA(z) \Big) < +\infty$$

που είναι ισοδύναμο με το

$$\sup_{|\alpha|<1} \iint\limits_{\Delta} |(\phi_\alpha \circ \psi)''(z)| dA(z) < +\infty$$

διότι

$$\Big|\frac{\alpha-\psi(0)}{1-\overline{\alpha}\psi(0)}\Big| \leqq 1$$

και

$$\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(0)|^2}|\psi'(0)| \leqq \frac{(1-|\alpha|^2)(1-|\psi(0)|^2)}{|1-\overline{\alpha}\psi(0)|^2} \leqq 4.$$

□

Λήμμα 8. *Αν $\alpha \in \overline{\Delta}$ έχουμε ότι*

$$\iint\limits_{\Delta} |\phi'_\alpha(z)|^2 dA(z) \leqq C$$

όπου C είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του α.

Αποδειξη. Έχουμε ότι

$$\iint\limits_{\Delta} |\phi'_\alpha(z)|^2 dA(z) = (1-|\alpha|^2)^2 \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}z|^4} dA(z) \leqq C$$

λόγω της σχέσης (20).

□

Λήμμα 9. *Αν $f \in \mathcal{M}$ τότε έχουμε*

$$\iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^2 dA(z) \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}^2$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{M}$. Τότε

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \phi_{\alpha_n}, \ \ \alpha_n \in \overline{\Delta}, \ \ \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| < +\infty$$

Έχουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \phi'_{\alpha_n}(z)$$

Άρα

$$|f'(z)|^2 \leqq (\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n||\phi'_{\alpha_n}(z)|)^2 \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n||\phi'_{\alpha_n}(z)|^2$$

Έχουμε λοιπόν

$$\iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^2 dA(z) \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| \iint\limits_{\Delta} |\phi'_{\alpha_n}(z)|^2 dA(z)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (8) στην τελευταία σχέση έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^2 dA(z) \leqq C(\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|)^2$$

Οπότε

$$\iint\limits_{\Delta} |f'(z)|^2 dA(z) \leqq C\|f\|_{\mathcal{M}}^2$$

□

Λήμμα 10.

$$\sup_{|\alpha|<1} \iint_{\Delta} |\phi_\alpha'(\psi(z))|^2 \, |\psi'(z)|^2 dA(z) < +\infty \tag{50}$$

αν και μόνο αν

$$\sup_{|\alpha|<1} \iint_{\Delta} |\phi_\alpha''(\psi(z))| \, |\psi'(z)|^2 dA(z) < +\infty \tag{51}$$

Αποδειξη. Όπως έχουμε ήδη κάνει, με $n_\psi(w)$ θα συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του συνόλου $\psi^{-1}(\{w\})$.
Έχουμε ότι

$$(50) \Leftrightarrow \sup_{|\alpha|<1} \iint_{\Delta} \frac{(1-|\alpha|^2)^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(z)|^4} |\psi'(z)|^2 dA(z) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{|\alpha|<1} (1-|\alpha|^2)^2 \iint_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4} n_\psi(w) dA(w) < +\infty \tag{52}$$

Επίσης για τη σχέση (51) έχουμε

$$(51) \Leftrightarrow \sup_{|\alpha|<1} \iint_{\Delta} |\alpha| \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(z)|^3} |\psi'(z)|^2 dA(z) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sup_{|\alpha|<1} (1-|\alpha|^2) \iint_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w) dA(w) < +\infty. \tag{53}$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, θα ορίσουμε τα τετράγωνα Carleson (Carleson squares) και θα αναφέρουμε δύο σχέσεις σχετικά με αυτά. Αν $\alpha \in \Delta$, τότε θεωρούμε το τόξο I, μήκους

$$|I| = 1 - |\alpha|, \tag{54}$$

πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$, έτσι ώστε, η ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από το α, να τέμνει το διάστημα I στο μέσο του. Τότε ορίζουμε το αντίστοιχο τετράγωνο Carleson $S(I)$ (που αντιστοιχεί στο διάστημα I και κατ΄ επέκταση στο σημείο α) ως το σύνολο

$$S(I)=\left\{re^{it}\colon e^{it}\in I, 1-\frac{|I|}{2\pi}\leqq r<1\right\}$$

Παρατηρούμε ότι $S(I)=Q(\theta;h)$ με $e^{i\theta}=\frac{\alpha}{|\alpha|}$ και $h=\frac{|I|}{2\pi}$.
Σχετικά με το τόξο $I\subset\mathbb{T}$ και το σύνολο $S(I)\subset\overline{\Delta}$ ισχύει η παρακάτω σχέση

$$|I|\asymp|1-\overline{\alpha}w|,\quad w\in S(I) \tag{55}$$

Θα δείξουμε ότι τόσο η (52) όσο και η (53) είναι ισοδύναμες με τη σχέση

$$\sup_I\frac{1}{|I|^2}\iint\limits_{S(I)}n_\psi(w)dA(w)<+\infty, \tag{56}$$

όπου C είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του I.

Απόδειξη (52) $\Rightarrow$ (56) :
Έστω ότι ισχύει η σχέση (52). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|^2}\iint\limits_{S(I)}n_\psi(w)dA(w)&\leqq(1-|\alpha|^2)^2\iint\limits_{S(I)}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4}n_\psi(w)dA(w)\\&\leqq(1-|\alpha|^2)^2\iint\limits_{\Delta}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4}n_\psi(w)dA(w)\leqq C_\psi\end{aligned}$$

Απόδειξη (56) $\Rightarrow$ (52) :
Υποθέτουμε ότι ισχύει η (56). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

(i) $0\leqq|\alpha|\leqq\frac{1}{2}$. Τότε έχουμε ότι $|1-\overline{\alpha}w|\geqq\frac{1}{2}$. Άρα

$$\begin{aligned}(1-|\alpha|^2)^2\iint\limits_{\Delta}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4}n_\psi(w)dA(w)&\leqq C\iint\limits_{\Delta}n_\psi(w)dA(w)\\&\leqq C|\mathbb{T}|^2\frac{1}{|\mathbb{T}|^2}\iint\limits_{\Delta}n_\psi(w)dA(w)\leqq C\end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2}\leqq|\alpha|<1$. Θεωρούμε το τόξο $I_0\subseteq\mathbb{T}$ που καθορίζεται από το α. Θεωρούμε, επίσης, την πεπερασμένη ακολουθία τόξων $I_0,I_1,\cdots,I_N$ με κοινό μέσο και μήκη τέτοια ώστε $|I_N|<2\pi\leqq2|I_N|$. Θεωρούμε και $I_{N+1}=\mathbb{T}$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
&(1-|\alpha|^2)^2 \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq (1-|\alpha|^2)^2 \iint\limits_{S(I_0)} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4} n_\psi(w)dA(w) \\
&\quad + (1-|\alpha|^2)^2 \sum_{n=0}^{N} \iint\limits_{S(I_{n+1})\setminus S(I_n)} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^4} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq C\frac{(1-|\alpha|)^2}{|I_0|^4} \iint\limits_{S(I_0)} n_\psi(w)dA(w) \\
&\quad + C(1-|\alpha|)^2 \sum_{n=0}^{N} \iint\limits_{S(I_{n+1})\setminus S(I_n)} \frac{1}{(2^n|I_0|)^4} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq \frac{C}{|I_0|^2} \iint\limits_{S(I_0)} n_\psi(w)dA(w) + \frac{C}{|I_0|^2} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{4n}} \iint\limits_{S(I_{n+1})\setminus S(I_n)} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq \frac{C}{|I_0|^2} \iint\limits_{S(I_0)} n_\psi(w)dA(w) + \frac{C}{|I_0|^2} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{4n}} \iint\limits_{S(I_{n+1})} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq C_\psi + C_\psi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = C_\psi
\end{aligned}
$$

Απόδειξη (53) $\Rightarrow$ (56) :

Έστω ότι ισχύει η σχέση (53). Τότε ισχύει

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|I|^2} \iint\limits_{S(I)} n_\psi(w)dA(w) &\leqq (1-|\alpha|^2) \iint\limits_{S(I)} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq (1-|\alpha|^2) \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w)dA(w) \leqq C_\psi
\end{aligned}
$$

Απόδειξη (56) $\Rightarrow$ (53) :

Υποθέτουμε ότι ισχύει η (56). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

(i) $0 \leqq |\alpha| \leqq \frac{1}{2}$. Τότε έχουμε ότι $|1-\overline{\alpha}w| \geqq \frac{1}{2}$. Άρα

$$
\begin{aligned}
(1-|\alpha|^2) \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w)dA(w) &\leqq C \iint\limits_{\Delta} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq C|\mathbb{T}|^2 \frac{1}{|\mathbb{T}|^2} \iint\limits_{\Delta} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq C
\end{aligned}
$$

(ii) $\frac{1}{2} \leqq |\alpha| < 1$. Θεωρούμε τα ίδια τόξα $I_0, I_1, \cdots, I_{N+1}$ με την προηγούμενη απόδειξη. Τότε:

$$
\begin{aligned}
&(1-|\alpha|^2) \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq (1-|\alpha|^2) \iint\limits_{S(I_0)} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w)dA(w) \\
&\quad + (1-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{N} \iint\limits_{S(I_{n+1})\setminus S(I_n)} \frac{1}{|1-\overline{\alpha}w|^3} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq \frac{C(1-|\alpha|)}{|I_0|^3} \iint\limits_{S(I_0)} n_\psi(w)dA(w) \\
&\quad + C(1-|\alpha|) \sum_{n=0}^{N} \iint\limits_{S(I_{n+1})\setminus S(I_n)} \frac{1}{(2^n|I_0|)^3} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq \frac{C}{|I_0|^2} \iint\limits_{S(I_0)} n_\psi(w)dA(w) + \frac{C}{|I_0|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n}} \iint\limits_{S(I_{n+1})\setminus S(I_n)} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq \frac{C}{|I_0|^2} \iint\limits_{S(I_0)} n_\psi(w)dA(w) + \frac{C}{|I_0|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n}} \iint\limits_{S(I_{n+1})} n_\psi(w)dA(w) \\
&\leqq C_\psi + C_\psi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = C_\psi.
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα 8. *Έχουμε ότι*

$$
\sup_{\alpha \in \overline{\Delta}} \iint\limits_{\Delta} |(\phi_\alpha \circ \psi)''(z)| dA(z) < +\infty, \tag{57}
$$

δηλαδή ο C_ψ είναι φραγμένος στον $\mathcal{M}$, αν και μόνο αν

$$
\sup_{\alpha \in \overline{\Delta}} \iint\limits_{\Delta} |\phi''_\alpha(\psi(z))(\psi'(z))^2| dA(z) < +\infty \tag{58}
$$

και

$$
\sup_{\alpha \in \overline{\Delta}} \iint\limits_{\Delta} |\phi'_\alpha(\psi(z))\psi''(z)| dA(z) < +\infty \tag{59}
$$

Αποδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύουν οι σχέσεις (58) και (59). Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\overline{\Delta}}\iint\limits_{\Delta}|(\phi_\alpha\circ\psi)''(z)|dA(z) &= \sup_{\alpha\in\overline{\Delta}}\iint\limits_{\Delta}|\phi_\alpha''(\psi(z))(\psi'(z))^2+\phi_\alpha'(\psi(z))\psi''(z)|dA(z)\\ &\leqq \sup_{\alpha\in\overline{\Delta}}\iint\limits_{\Delta}|\phi_\alpha''(\psi(z))(\psi'(z))^2|dA(z)\\ &\quad+\sup_{\alpha\in\overline{\Delta}}\iint\limits_{\Delta}|\phi_\alpha'(\psi(z))\psi''(z)|dA(z)<+\infty.\end{aligned}$$

Έστω ότι ισχύει η σχέση (57). Από το Λήμμα (7) έχουμε

$$\|\phi_\alpha\circ\psi\|_{\mathcal{M}}\leqq C_\psi. \tag{60}$$

Άρα από το Λήμμα (9) έχουμε

$$\iint\limits_{\Delta}|(\phi_\alpha\circ\psi)'|^2dA(z)\leqq C\|\phi_\alpha\circ\psi\|_{\mathcal{M}}^2\leqq C_\psi.$$

Οπότε

$$\iint\limits_{\Delta}|\phi_\alpha'(\psi(z))|^2|\psi'(z)|^2dA(z)\leqq C_\psi. \tag{61}$$

Από το Λήμμα (10) η σχέση (61) είναι ισοδύναμη με τη σχέση (58). Άρα ισχύει η σχέση (58), επομένως και η (59). □

Πριν περάσουμε στο επόμενο θεώρημα θα κάνουμε κάποιους χρήσιμους υπολογισμούς. Έστω $\psi:\Delta\to\Delta$ αναλυτική. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi_1(z)=(\phi_b\circ\psi)(z)$, όπου $b=\psi(0)$. Προφανώς $\psi_1(0)=0$ και $\psi=\phi_b\circ\psi_1$. Αν $\alpha\in\Delta$ θέτουμε $d:=\frac{b-\alpha}{1-\overline{b}\alpha}$. Σε όλα τα παρακάτω, μέχρι το τέλος της εργασίας, η συνάρτηση ψ_1 και το d θα χρησιμοποιούνται όπως ακριβώς ορίστηκαν εδώ. Έχουμε

$$\begin{aligned}1-\overline{\alpha}\psi(z) &= 1-\overline{\alpha}\frac{b-\psi_1(z)}{1-\overline{b}\psi_1(z)}\\ &= \frac{(1-\overline{\alpha}b)(1-\overline{d}\psi_1(z))}{1-\overline{b}\psi_1(z)}\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{1}{|1-\overline{\alpha}\psi(z)|}=\frac{|1-\overline{b}\psi_1(z)|}{|1-\overline{\alpha}b|\ |1-\overline{d}\psi_1(z)|}\leqq\frac{C_b}{|1-\overline{d}\psi_1(z)|}. \tag{62}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$1-|d|^2 = 1-\Big|\frac{b-\alpha}{1-\overline{b}\alpha}\Big|^2 = \frac{(1-|b|^2)(1-|\alpha|^2)}{|1-\overline{b}\alpha|^2}$$

έχουμε

$$\frac{1-|\alpha|^2}{1-|d|^2} = \frac{|1-\overline{b}\alpha|^2}{1-|b|^2} \leqq C_b. \tag{63}$$

Θα κάνουμε έναν ακόμα υπολογισμό. Από την (62) συνεπάγεται

$$\sup_{|z|=r}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}\psi(z)|} \leqq C_b \sup_{|z|=r}\frac{1}{|1-\overline{\alpha}\psi_1(z)|} \leqq C_b \sup_{|z|=r}\frac{1}{1-|\alpha|\ |\psi_1(z)|} \leqq C_b\frac{1}{1-r|\alpha|},$$

επειδή $|\psi_1(z)| \leqq |z|$.

Θεώρημα 9. *Έστω ότι $\psi : \Delta \to \Delta$ και $\psi'' \in H^1$. Τότε ο τελεστής C_ψ είναι φραγμένος στον $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Επειδή $\psi'' \in H^1$ έπεται ότι $\psi' \in H^\infty$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Hardy. Αν $f \in H^1$ με $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ τότε

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\alpha_n|}{n+1} \leqq \pi\|f\|_{H^1} \tag{64}$$

Αν λοιπόν $\psi''(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ τότε $\psi'(z) = \psi'(0) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n+1}z^{n+1}$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\|\psi'\|_{H^\infty} &= \|\psi'(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n+1}z^{n+1}\|_{H^\infty}\\ &\leqq |\psi'(0)| + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|b_n|}{n+1}\\ &\overset{(64)}{\leqq} |\psi'(0)| + \pi\|\psi''\|_{H^1} < +\infty\end{aligned}$$

Άρα $\psi' \in H^\infty$. Στους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε subordination καθώς και τις σχέσεις (20), (62) και (63).

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Delta}\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(z)|^3}|\psi'(z)|^2dA(z) &\leqq C_b\|\psi'\|_\infty^2\iint\limits_{\Delta}\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{d}\psi_1(z)|^3}dA(z)\\ &\leqq C_b\|\psi'\|_\infty^2\iint\limits_{\Delta}\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{d}z|^3}dA(z)\\ &\leqq C_b\|\psi'\|_\infty^2\frac{1-|\alpha|^2}{1-|d|^2} \leqq C_b\|\psi'\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(re^{i\theta})|^2}|\psi''(re^{i\theta})|d\theta dr \leqq \int_0^1 M_1(\psi'';r)\Big\{\sup_\theta \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(re^{i\theta})|^2}\Big\}dr$$

$$(65)\qquad \leqq C_b\int_0^1 M_1(\psi'';r)\frac{1-|\alpha|^2}{(1-|d|r)^2}dr$$

$$\leqq C_b\|\psi''\|_{H^1}\int_0^1\frac{1-|\alpha|^2}{(1-|d|r)^2}dr$$

$$\leqq C\frac{1-|\alpha|^2}{1-|d|^2}\|\psi''\|_{H^1}\leqq C_b\|\psi''\|_{H^1}$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς, καθώς και το Θεώρημα (8), έχουμε ότι ο C_ψ απεικονίζει το χώρο $\mathcal{M}$ στον εαυτό του. □

Πριν δούμε παρακάτω ένα παρόμοιο θεώρημα, θα αποδείξουμε ένα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 11. *Αν $p>\frac{1}{2}$ τότε*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-2rcos\theta+r^2)^p}=2\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(1-2rcos\theta+r^2)^p}\leqq A_p\frac{1}{(1-r)^{2p-1}}.$$

Απόδειξη. Επειδή $sinx\geqq\frac{2}{\pi}x$ όταν $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ έπεται ότι για $\theta\in[0,\pi]$

$$1-2rcos\theta+r^2=(1-r)^2+4rsin^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\geqq(1-r)^2+\frac{4r}{\pi^2}\theta^2$$

Άρα για $r\in[\frac{1}{2},1)$ έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-2rcos\theta+r^2)^p}\leqq\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{((1-r)^2+2\pi^{-2}\theta^2)^p}$$

$$\leqq\int_0^{1-r}\frac{d\theta}{(1-r)^{2p}}+C_p\int_{1-r}^{2\pi}\frac{d\theta}{\theta^{2p}}\leqq\frac{C_p}{(1-r)^{2p-1}}.$$

□

Θεώρημα 10. *Αν $u(r)=\sup_\theta|\psi''(re^{i\theta})|$ είναι στον $L^1(0,1)$ τότε ο C_ψ απεικονίζει τον $\mathcal{M}$ στον εαυτό του.*

Απόδειξη. Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι ψ' είναι φραγμένη αν

$$u(r) = \sup_{\theta} |\psi''(re^{i\theta})|$$

είναι ολοκληρώσιμη ως προς r. Πράγματι, έχουμε

$$|\psi'(z)| \leqq |\psi'(0)| + \int_0^z |\psi''(w)| \ |dw| \leqq |\psi'(0)| + \int_0^1 u(r)dr.$$

Κάνοντας υπολογισμούς παρόμοιους με αυτούς της σχέσης (65) έχουμε

$$\iint_{\Delta} \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\alpha\psi(re^{i\theta})|^3} |\psi'(re^{i\theta})|^2 d\theta dr \leqq C\|\psi'\|_{\infty}^2,$$

για κάθε $\alpha \in \Delta$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (62), (63) και subordination έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi''(re^{i\theta})| \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(re^{i\theta})|^2} d\theta r dr &\leqq \int_0^1 u(r) \{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\psi(re^{i\theta})|^2} d\theta \} r dr \\
&\leqq C_b \int_0^1 u(r) \{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{d}\psi_1(re^{i\theta})|^2} d\theta \} r dr \\
&\leqq C_b \int_0^1 u(r) \{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{d}re^{i\theta}|^2} d\theta \} r dr \\
&\leqq C_b \int_0^1 u(r) \frac{1-|\alpha|^2}{1-|d|r} r dr \\
&\leqq C_b \int_0^1 u(r) \frac{1-|\alpha|^2}{1-|d|^2} dr \\
&\leqq C_b \int_0^1 u(r) < \infty.
\end{aligned}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις που αποδείξαμε και το Θεώρημα (8), έχουμε ότι ο C_ψ απεικονίζει το χώρο $\mathcal{M}$ στον εαυτό του. □

Έστω $\psi \in \mathcal{M}$ με $\|\psi\|_\infty \leqq 1$. Το Θεώρημα (9) μας λέει ότι ο C_ψ απεικονίζει τον $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{M}$ αν

$$M_1(\psi''; r) \in L^\infty(0,1).$$

Το Θεώρημα (10) μας λέει ότι ο C_ψ απεικονίζει τον $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{M}$ αν

$$M_\infty(\psi''; r) \in L^1(0,1).$$

Στο θεώρημα που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθεί η έννοια του γινομένου Blaschke. Αν $N \in \mathbb{N}$ και $0 < |z_n| < 1, \; n = 1, 2, \cdots, N$ ορίζουμε ως γινόμενο Blaschke βαθμού N τη συνάρτηση

$$B(z) = \prod_{n=1}^{N} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$$

Το παρακάτω είναι ένα αποτέλεσμα που αφορά στη νόρμα του τελεστή σύνθεσης C_B όταν το B είναι ένα γινόμενο Blaschke βαθμού 2.

Πρόταση 5. *Έστω B ένα γινόμενο Blaschke βαθμού 2. Τότε*

$$\|C_B\| \leqq \|C_{z^2}\| = \|M_z\|$$

όπου C_{z^2} είναι ο τελεστής σύνθεσης με τη συνάρτηση z^2, M_z είναι ο πολλαπλασιασμός επί z και όλοι οι τελεστές απεικονίζουν το χώρο $\mathcal{M}$ στον εαυτό του.

Απόδειξη. Έστω z_1, z_2 οι ρίζες του B. Αν Γ είναι η υπερβολική ευθεία που ενώνει τα z_1 και z_2 και b το μέσο ανάμεσα στα z_1 και z_2 πάνω στη Γ, τότε η συνάρτηση ϕ_b απεικονίζει το b στο 0 και τα z_1, z_2 σε σημεία συμμετρικά ως προς το 0. Η συνάρτηση ϕ_b (ως μετασχηματισμός Möbius) διατηρεί τις υπερβολικές αποστάσεις, δηλαδή, αν ρ είναι η ψευδοϋπερβολική μετρική, τότε $\rho(z, w) = \rho(\phi_b(z), \phi_b(w))$. Οπότε, αφού ισχύει ότι $\rho(z_1, b) = \rho(z_2, b)$, έπεται ότι θα ισχύει και $\rho(\phi_b(z_1), \phi_b(b)) = \rho(\phi_b(z_2), \phi_b(b))$, δηλαδή $\rho(\phi_b(z_1), 0) = \rho(\phi_b(z_2), 0)$. Οπότε τελικά έχουμε ότι

$$|\phi_b(z_1)| = |\phi_b(z_2)|$$

Άρα τα $\phi_b(z_1)$ και $\phi_b(z_2)$ έχουν ίσες Ευκλείδειες αποστάσεις από το κέντρο του μοναδιαίου δίσκου. Επίσης, θα ανήκουν και στην ίδια ευθεία (διάμετρο του κύκλου) γιατί οι γαιωδεσιακές που περνάνε από το κέντρο του κύκλου είναι οι διάμετροι, οπότε η αρχική υπερβολική ευθεία Γ θα απεικονίζεται σε κάποια διάμετρο μέσω της ϕ_b. Οπότε τα σημεία $\phi_b(z_1)$ και $\phi_b(z_2)$ είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο O του μοναδιαίου δίσκου, άρα θα ισχύει $\phi_b(z_1) = -\phi_b(z_2)$. Έστω $\alpha = [\phi_b(z_1)]^2$, τότε

$$\phi_\alpha({\phi_b}^2(z_j)) = \phi_\alpha(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2$$

Η συνάρτηση $\phi_\alpha({\phi_b}^2)$ είναι αναλυτική στο Δ και έχει ρίζες μόνο τις z_1 και z_2. Οπότε η συνάρτηση $\frac{\phi_\alpha({\phi_b}^2)}{B}$ είναι αναλυτική στο Δ, συνεχής στο $\overline{\Delta}$ και δεν έχει καμία ρίζα στο $\overline{\Delta}$. Επειδή είναι $\left|\frac{\phi_\alpha(\phi_b(z)^2)}{B(z)}\right| = 1$ στο $\mathbb{T}$ συνεπάγεται ότι $\frac{\phi_\alpha(\phi_b^2(z))}{B(z)} = \lambda$ σταθερή στο Δ. Άρα τελικά

$$\phi_\alpha(\phi_b(z)^2) = \lambda B(z), \quad |\lambda| = 1, z \in \Delta$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι μπορούμε να βρούμε σημεία $\alpha, b \in \Delta$ τέτοια ώστε

$$\phi_\alpha({\phi_b}^2) = \lambda B, \quad |\lambda| = 1$$

Έστω $\psi = \overline{\lambda}\phi_\alpha$. Τότε έχουμε

$$f \circ \psi \circ z^2 \circ \phi_b = f \circ \psi \circ \phi_b^2 = f \circ (\overline{\lambda}\phi_\alpha(\phi_b^2)) = f \circ B$$

Άρα

$$\begin{aligned} \|f \circ B\|_{\mathcal{M}} &= \|f \circ \psi \circ z^2 \circ \phi_b\|_{\mathcal{M}} = \|f \circ \psi \circ z^2\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqq \|C_{z^2}\| \ \|f \circ \psi\|_{\mathcal{M}} = \|C_{z^2}\| \ \|f\|_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο τελεστής C_{z^2} απεικονίζει τον $\mathcal{M}$ στον εαυτό του και είναι φραγμένος, αφού ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος (8). Οπότε έχουμε $\|C_B\| \leqq \|C_{z^2}\|$.

Έστω $\alpha \in \Delta$. Θέτουμε $\alpha = b^2$. Τότε

$$\phi_\alpha \circ z^2 = \frac{\alpha - z^2}{1 - \overline{\alpha} z^2} = \frac{b^2 - z^2}{1 - \overline{b}^2 z^2} = \frac{b - z}{1 - \overline{b}z}\frac{b + z}{1 + \overline{b}z} = (\phi_b(z))(-\phi_{-b}(z))$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\phi_\alpha(\phi_b^2) = (\phi_b(\phi_b))(-\phi_{-b}(\phi_b)) = z \ \frac{\frac{2b}{1+|b|^2} - z}{1 - \frac{2b}{1+|b|^2} z}$$

Έτσι

$$\phi_\alpha({\phi_b}^2(z)) = z\phi_c(z), \quad c = \frac{2b}{1+|b|^2} \tag{66}$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι για $\alpha \in \Delta$ και $\alpha = b^2$ υπάρχει $c \in \Delta$ $(c = \frac{2b}{1+|b|^2})$ ώστε $\phi_\alpha(\phi_b^2) = z\phi_c(z)$. Αντίστροφα, αν $c \in \Delta$ τότε υπάρχει μοναδικό $b \in \Delta$ τέτοιο ώστε $c = \frac{2b}{1+|b|^2}$ και συνεπώς με $\alpha = b^2$ έχουμε

$$z\phi_c(z) = \phi_\alpha({\phi_b}^2(z)) \tag{67}$$

όπου το α εξαρτάται από το c.
Δείξαμε, λοιπόν, ότι για $c \in \Delta$ μπορούμε να βρούμε μοναδικό $b \in \Delta$ (από τη σχέση $c = \frac{2b}{1+|b|^2}$) και $\alpha \in \Delta$ (από τη σχέση $\alpha = b^2$) ώστε $z\phi_c(z) = \phi_\alpha({\phi_b}^2(z))$
Έστω $f = \sum \lambda_j \phi_{c_j}$ ένα στοιχείο του $\mathcal{M}$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (67) έχουμε

$$zf(z) = \sum \lambda_j z\phi_{c_j}(z) = \sum \lambda_j \phi_{\alpha_j}({\phi_{b_j}}^2(z))$$

Οπότε

$$\|zf(z)\|_{\mathcal{M}} \leqq \sum |\lambda_j| \, \|\phi_{\alpha_j} \circ {\phi_{b_j}}^2\|_{\mathcal{M}}$$

Αλλά το $\phi_{b_j}^2$ είναι γινόμενο Blaschke βαθμού 2, οπότε, από το πρώτο μέρος της πρότασης έχουμε ότι

$$\|\phi_{\alpha_j} \circ {\phi_{b_j}}^2\|_{\mathcal{M}} \leqq \|\phi_{\alpha_j}\|_{\mathcal{M}} \, \|C_{\phi_{b_j}^2}\| = \|C_{\phi_{b_j}^2}\| \leqq \|C_{z^2}\|$$

Άρα έχουμε ότι

$$\|zf(z)\| \leqq \sum |\lambda_j| \, \|C_{z^2}\|$$

οπότε

$$\|zf(z)\|_{\mathcal{M}} \leqq \|C_{z^2}\| \, \|f\|_{\mathcal{M}}$$

άρα τελικά

$$\|M_z\| \leqq \|C_{z^2}\| \tag{68}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f = \sum \mu_j \phi_{\alpha_j}$ είναι στον $\mathcal{M}$, και, χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (67), τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|f \circ z^2\|_{\mathcal{M}} &= \|\sum \lambda_j \phi_{\alpha_j} \circ z^2\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqq \sum |\lambda_j| \, \|\phi_{b_j}\phi_{-b_j}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \sum |\lambda_j| \, \|z\phi_{c_j}\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqq \|M_z\| \sum |\lambda_j|, \end{aligned}$$

οπότε

$$\|f \circ z^2\|_{\mathcal{M}} \leqq \|M_z\| \, \|f\|_{\mathcal{M}}$$

Οπότε

$$\|C_{z^2}\| \leqq \|M_z\| \tag{69}$$

Από τις εξισώσεις (68) και (69) έχουμε τελικά ότι

$$\|C_{z^2}\| = \|M_z\|$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] J. Arazy, S. Fisher, J. Peetre, *Möbius invariant function spaces*, J. Reigne Angew. Math., 363, 1985, 110-145

[2] O. Blasco, *Composition operators on the minimal space invariant under Möbius transformations*, Complex and Harmonic Analysis - Proceedings of the International Conference May 25-27, 2006, Aristotle University of Thessaloniki, 2006, 157-166

[3] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer, 1978

[4] P. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces*, American Mathematical Society, 2004

[5] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Dover Publications, 2000

[6] G. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons Ltd., 1999

[7] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, Inc., 1981.

[8] D. Girela, *Analytic Functions of Bounded Mean Oscillation*, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. No 4, 2001

[9] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989

[10] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1986

[11] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 1996

[12] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, American Mathematical Society, 2007

[13] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 2003