Ακουστική διάδοση στη θάλασσα στις τρείς διαστάσεις

ΕΛΕΝΗ ΜΗΛΑΚΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2004

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμημα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Απρίλιο του 2004. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ.Μιχάλης Ταρουδακης ,τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη βοήθεια και συμπαράσταση του καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι : Γ.Μακράκης ,Ι.Παπαδάκης και Μ.Ταρουδάκης

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετάται το πρόβλημα ακουστικής διάδοσης στις τρείς διαστάσεις.Ένα πρόβλημα το οποίο δεν έχει λυθεί πλήρως για το τρισδιάστατο θαλάσσιο περιβάλλον με τυχαία ανομοιογένεια του πυθμένα.

Η δομή της εργασίας είναι ως εξής.Στο Κεφάλαιο 1 διατυπώνεται η κυματική εξίσωση σε ένα θαλάσσιο κυματοδηγό και οι συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν.Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος στις τρείς διαστάσεις παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2 η αντιμετώπιση του προβλήματος στις δύο διαστάσεις.Αναφέρονται οι σημαντικότερες μέθοδοι επίλυσης της ακουστικής εξίσωσης σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας που είναι η μέθοδος των Ακτίνων , η Ολοκληρωτική Αναπαράσταση,η μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών και η Παραβολική Προσέγγιση.Στο τρίτο Κεφάλαιο περιοριζόμαστε στη μελέτη της μεθόδου Κανονικών Ιδιομορφών παρουσιάζοντας μοντέλα που έχουν βρεθεί για την αντιμετώπιση θαλάσσιων περιβάλλοντων με τυχαία τοπική ανομοιογένεια,με κωνική ανύψωση του πυθμένα και κυλινδικό νησί.Στο Κεφάλαιο 4 μελετάται η μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης.Έπειτα από τη διατύπωση της εξίσωσης στις τρείς διαστάσεις παρουσιάζονται εναλλακτικές μορφές παραβολικής εξίσωσης όπως το μοντέλο των *Siegmann-Kriegwmann-Lee* ,οι κώδικες $FOR3D$,$IMP3D$,$PE3D$,$PECan$ και τα μοντέλα των $Sturm$, $Fawcett$.Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται σύγκριση των δύο μεθόδων στις τρείς διαστάσεις και εξάγονται αποτελέσματα για την αποδοτικότητα και τους περιορισμούς κάθε μίας.

Λέξεις κλειδιά:Κυματική εξίσωση, Εξίσωση $Helmholtz$, Μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών, Μέθοδος Παραβολικής Προσσέγγισης

Κεφάλαιο 1

Η κυματική εξίσωση σε θαλάσσιο κυματοδηγό

Τα ακουστικά κύματα στα ρευστά μέσα είναι διαμήκη κύματα που οδεύουν στο μέσον με χαρακτηριστική ταχύτητα. Η ακουστική εξίσωση προκύπτει απο συνδιασμένη εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των ρευστών που διέπουν τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Τα μεγέθη αυτά είναι η πίεση P,η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου $\mathbf{u}$ και η πυκνότητα ρ, τα οποία είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και του χρόνου t.Τα παραπάνω μεγέθη μεταβάλλονται λίγο γύρω από κάποια τιμή ισορροπίας , επομένως μπορούν να γραφούν ως ένα άθροισμα των τιμών τους όταν δεν υπάρχει διαταραχή συν μία μικρή μεταβολή.Η σχέση που εκφράζει τη μεταβολή αυτή για την πίεση ,το χαρακτηριτικό μέγεθος με το οποίο θα ασχοληθούμε ως επί το πλείστον, δίνεται από τη μορφή :

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, t) = P^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \epsilon P^{(1)}(\mathbf{r}, t)$$

όπου η παράμετρος ϵ χαρακτηρίζει τις μικρές μεταβολές.Οι εκθέτες (0) και (1) χαρακτηρίζουν τις τιμές στο αδιατάραχο μέσο και τις μεταβολές λόγω της ακουστικής διέγερσης αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης είναι:
1.Η εξίσωση της συνέχειας

$$-\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1.1}$$

που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας.
2.Η εξίσωση του $Euler$

$$-\nabla P^{(1)} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \tag{1.2}$$

που εκφράζει τη διατήρηση της ορμής.
3.Η καταστατική εξίσωση

$$P^{(1)} = g(\rho) \tag{1.3}$$

που συσχετίζει τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας . Η μορφή της συνάρτησης g εξαρτάται από το υλικό μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διάδοση.

Η εξίσωση που προκύπτει από γραμμικοποίηση των παραπάνω εξισώσεων καλείται γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση σε μέσο χωρίς απώλειες:

$$\nabla^2 P^{(1)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t) \tag{1.4}$$

όπου $f(\mathbf{r}, t)$ εκφράζει τη διέγερση (πηγή) που προκαλεί τα κύματα και $c(\mathbf{r}, t)$ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου η οποία θεωρείται συνήθως ανεξάρτητη του χρόνου $c(\mathbf{r})$.

Σχήμα 1.Τυπικό προφίλ ταχύτητας του ήχου σε βαθεία θάλασσα.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ακουστικά κύματα που προέρχονται απο σημειακές αρμονικές πηγές,οι οποίες μαθηματικά εκφράζονται ως εξής:

$$f(\mathbf{r},t) = -A\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)e^{-i\omega t} \tag{1.5}$$

όπου $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ η συνάρτηση δέλτα ,$\mathbf{r}_0$ το διάνυσμα θέσης της πηγής ,A ο συντελεστής που εκφράζει την ισχύ της πηγής (στη συνέχεια θεωρούμε A=1) και ω η κυκλική συχνότητα ($\omega = 2\pi f$).

Επομένως καταλήγουμε [1]:
α)στην ομογενή ακουστική εξίσωση, αν η πηγή δεν περιέχεται στο εξεταζόμενο χωρίο

$$\nabla^2 P^{(1)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.6}$$

β)στη μη ομογενή ακουστική εξίσωση, αν η πηγή περιέχεται στο εξεταζόμενο χωρίο:

$$\nabla^2 P^{(1)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)e^{-i\omega t} \tag{1.7}$$

Εφόσον οι συντελεστές των δύο διαφορικών όρων στην (1.4) είναι ανεξάρτητοι του χρόνου η διάσταση της κυματικής εξίσωσης μπορεί να περιοριστεί σε τρεις χρησιμοποιώντας ενα μετασχηματισμο *Fourier* συχνότητας - χρόνου [2] :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega && (1.8)\\ f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt && (1.9)\end{aligned}$$

Απομονώνουμε με τον τρόπο αυτό την εξάρτηση της ακουστικής πίεσης από το χρόνο αφού μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$P^{(1)}(\mathbf{r},t) = P(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{1.10}$$

και μεταβαίνουμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας . Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στις (1.6) και (1.7) προκύπτουν η ομογενής και η μη-ομογενής εξίσωση *Helmholtz* αντίστοιχα :

$$\begin{aligned} \nabla^2 P(\mathbf{r},\omega) + k^2(\mathbf{r})P(\mathbf{r},\omega) &= 0 && (1.11)\\ \nabla^2 P(\mathbf{r},\omega) + k^2(\mathbf{r})P(\mathbf{r},\omega) &= -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}) && (1.12)\end{aligned}$$

όπου $k(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})}$ ο αριθμός κύματος.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον αναλυτικό τύπο για το ∇ οι (1.11) και (1.12) γράφονται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k^2 P &= 0 && (1.13)\\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k^2 P &= -\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) && (1.14)\end{aligned}$$

στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Σε πολλά περιβάλλλοντα η αντιμετώπιση του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης είναι ευκολότερη αν χρησιμοποιηθεί το κυλινδρικό συστήμα συντεταγμένων στην έκφραση της εξίσωσης *Helmholtz* καθώς και των υπολοίπων εξισώσεων που εμφανίζονται κατά την προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος . Θεωρώντας λοιπόν $\mathbf{r} = (r, z, \phi)$ η μορφή που παίρνουν οι εξίσωσεις (1.13) και (1.14) αντίστοιχα είναι :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z} + [k(r,z)]^2 P = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z} + [k(r,z)]^2 P = -\frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(z - z_0)\delta(\phi) \tag{1.16}$$

Έχει ,λοιπόν , επικρατήσει να αντιμετωπίζονται τα προβλήματα ακουστικής διάδοσης έχοντας ως πεδιακή εξίσωση την *Helmholtz* και όχι την κυματική λόγω του περιορισμού της στις τρείς διαστάσεις .Η ακουστική πίεση δίδεται συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω ,όπως άλλωστε φαίνεται στις σχέσεις (1.11) και (1.12), η οποία όμως λαμβάνει συγκεκριμένη τιμή για κάθε πρόβλημα.Επιπλέον η χρήση της εξίσωσης *Helmholtz* έγγυται και στο πλήθος των μεθόδων αντιμετώπισής της , σημαντικότερες από τις οποίες είναι η Μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών,η Παραβολική Προσέγγιση ,η Φασματική Μέθοδος που βασίζεται στους μετασχηματισμούς *Hankel* ,η Γεωμετρική Ακουστική, οι Πεπερασμένες Διαφορές και τα Πεπερασμένα Στοιχεία έχοντας θεωρήσει φραγμένο ακουστικό πεδίο.Αντιθέτως μονάχα οι τρείς τελευταίες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό της κυματικής εξίσωσης .

Το κόστος εντούτις της χρήσης της εξίσωσης *Helmholtz* έγγυται στον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού *Fourier* δηλαδή στην ολοκλήρωση πάνω από άπειρες , θεωρητικά , κυκλικές συχνότητες για μία δεδομένη χρονική στιγμή.

Η ανωτέρω διαφορική εξίσωση μαζί με κάποιας μορφής συνοριακών συνθηκών αποτελεί το πρόβλημα του οποίου ζητάμε τη λύση .Περιβάλλοντα τα οποία θα μελετήσουμε είναι όπως αυτό του σχήματος 2.

Ο πυθμένας αποτελείται από επάλληλα ρευστά ιζηματογενή στρώματα ,με διαφορετικές φυσικές ιδιότητες , τα οποία σχηματίζουν μια ανομοιομορφία τυχαίου σχήματος .Η διέγερση που προκαλεί το ηχητικό πεδίο είναι μια σημειακή αρμονική πηγή που έχει τοποθετηθεί στη θέση $\mathbf{r_0} = (0, z_0, 0)$ και ένας λήπτης έχει τοποθετηθεί σε τυχαία απόσταση R.

Εάν το χωρίο στο οποίο ορίζεται το πρόβλημα είναι πεπερασμένο,το πρόβλημα έχει μοναδική λύση εάν προσδιοριστεί η τιμή της άγνωστης συνάρτησης ή/και της παραγώγου αυτής στο σύνορο.Εάν το πεδίο δεν έχει σύνορο ως προς κάποια διάσταση θα πρέπει να ορισθεί μια κατάλληλη συνθήκη για την επάπειρον συμπεριφορά της λύσης Αναλυτικότερα ,στα ακουστικά προβλήματα συναντάμε σύνορα ελεύθερα με μηδενική τιμή της πίεσης πάνω σε αυτά(περίπτωση επιφάνειας της θάλασσας -συνθήκη $Dirichlet$),σύνορα ακλόνητα με μηδενική τιμή της κάθετης παραγώγου της πίεσης πάνω σε αυτά (ακλόνητος πυθμένας -συνθήκη $Neumann$) σύνορα διαπερατά απο τον ήχο με συνεχή την πίεση και την κάθετη ταχύτητα πάνω σε αυτά(διεπιφάνεια νερού-ιζήματος, ιζήματος -πυθμένα).Τέλος,αν το πεδίο δεν είναι φραγμένο επιβάλουμε οριακές συνθήκες που καθορίζουν τη συμπεριφορά του ακουσικού πεδίο στο άπειρο(π.χ. συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ [3])

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης σε ένα τρισδιάστατο περιβάλλον ($3D$) .Το πρόβλημα όπως περιγράψαμε παραπάνω δεν επιδέχεται λύση σε κλειστή μορφή στη γενική περίπτωση όπου οι παράμετροι του προβλήματος και η γεωμετρία των συνόρων ακολουθούν ένα τυχαίο νόμο. Μέθοδοι που έχουν εφαρμοστεί μέχρι και σήμερα στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος διάδοσης είναι η μέθοδος των Ακτίνων,η μέθοδος της Ολοκληρωτικής Αναπαράστασης ,η μέθοδος των Κανονικών Ιδιομορφών και η πιο πρόσφατη της Παραβολικής Εξίσωσης. Στα επόμενα κεφάλαια θα ανάφερουμε συνοπτικά όλες τις παραπάνω μεθόδους καθώς και τις εκφράσεις της πίεσης σε κάθε μία από αυτές στο δυδιάστατο περιβάλλον ενώ εκτενής αναφορά θα γίνει για τις δύο τελευταίες μεθόδους στο τρισδιάστατο περιβάλλον.

Σχήμα 2.Το θαλάσσιο περιβάλλον

Κεφάλαιο 2

Ακουστική διάδοση σε δύο διαστάσεις

2.1 Εισαγωγή

Θα επικεντρώσουμε την ανάλυση που ακολουθεί στο πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε δύο διαστάσεις . Το πρόβλημα που περιγράψαμε δεν επιδέχεται λύση σε κλειστή μορφή στη γενική περίπτωση όπου οι μεταβολές των παραμέτρων του προβλήματος και η γεωμετρία των συνόρων ακολουθεί ενα τυχαίο νόμο.Αναλυτικές λύσεις υπάρχουν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις συνήθως επίπεδων γεωμετριών ή γεωμετριών που χαρακτηρίζονται απο απλά σχήματα.

Σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων που είναι πολύ βολικό στην περίπτωση της σημειακής πηγής το ακουστικό πεδίο υπολογίζεται μόνο ως προς το βάθος και την απόσταση. Η γεωμετρία του προβλήματος περιγράφεται στο σχήμα 3.

Σχήμα 3.Το διδιάστατο θαλάσσιο περιβάλλον

Πρόκειται για ένα περιβάλλον που ορίζετα από την επιφάνεια της θάλασσας σε βάθος $z = 0$ και επάλληλα ρευστά στρώματα στον πυθμένα . Το πρόβλημα μελετάται για μία σημειακή πηγή που θα θεωρηθεί ότι έχει τοποθετηθεί στη θέση $\mathbf{r_0} = (0, z_0)$ ενώ ένας λήπτης βρίσκεται σε τυχαία απόσταση R.Το πρόβλημα παρουσιάζει έτσι αξονική συμμετρία.

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τον άξονα των z να διέρχεται από την πηγή με το 0 του άξονα να βρίσκεται σε ένα σύνορο του περιβάλλοντος .Κάτω από τις συνθήκες αυτές η ακουστική εξίσωση για την πίεση που οφείλεται σε μία σημειακή αρμονική πηγή σε περιβάλλον σταθερής πυκνότητας δίδεται από τη σχέση [4]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k^2 P = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z - z_0) \qquad (2.1)$$

Για τον πλήρη καθορισμό του προβλήματος θα επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες.Η επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$) απαιτούμε να είναι ελεύθερη πιέσεων ,δηλαδή να μην είναι δυνατή η μετάδοση του ήχου από το νερό στον αέρα. Κατα μήκος του συνόρου νερού -πυθμένα επιβάλλουμε συνθήκες συνέχειας της πίεσης και της κάθετης παραγώγου αυτής ενώ ίδια απαίτηση έχουμε για κάθε διεπιφάνεια στον πυθμένα.Κάτω από τα στρώματα αυτά θεωρούμε μία άκαμπη ($\frac{\partial P}{\partial z} = 0$) ή μια ελεύθερη πιέσεων ($P = 0$) συνοριακή διεπιφάνεια ή ακόμα μπορεί να θεωρηθεί υπόστρωμα που επεκτείνεται μέχρι το άπειρο .Αν το χωρίο επεκτείνεται επ άπειρον ως προς την οριζόντια απόσταση r επιβάλλουμε μία συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ που καθορίζει τη συμπεριφορά της λύσης στο άπειρο ($r \to \infty$).

Οι μέθοδοι για την επίλυση της (1.1)με δεδομένες οριακές συνθήκες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία το περιβάλλον θεωρείται οριζόντια στρωματοποιημένο($horizontally\ stratified$ ή $range-independent$) δηλαδή ο πυθμένας είναι επίπεδος και ο αριθμός κύματος k είναι συνάρτηση μόνο του βάθους.Στη δεύτερη κατηγορία θεωρούμε περιβάλλον όπου οι παράμετροι που το χαρακτηρίζουν όπως η ταχύτητα ήχου και η γεωμετρία των συνόρων μεταβάλλονται με την απόσταση ($range\ dependent$).

2.2 Μέθοδοι επίλυσης της ακουστικής εξίσωσης σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας

2.2.1 Μέθοδος Ακτίνων(*Ray methods*)

Η μέθοδος των ακτίνων αποτελεί την πρώτη προσέγγιση για την επίλυση της εξίσωσης *Helmholtz* ,η οποία παρουσιάστηκε απο τον *Weston* το 1961 [5]. Αρχικά μελέτησε το πρόβλημα σε οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο και αργότερα εξέτασε δύο ειδικές περιπτώσεις, μίας σταθερής κλίσης του πυθμένα σε ισοταχύ θαλάσσιο περιβάλλον και ενός κυκλικού νησιού.Στα 1974 οι *Weinberg* και *Burridge*[5] αντιμετώπισαν το ακουστικό πρόβλημα σε ένα στρώμα του οποίου οι παράμετροι μεταβάλλονται αργά με την οριζόντια απόσταση ,υπολογίζοντας μια υβριδική λύση που υπολογίζεται με συνδιασμό της μεθόδου των ακτίνων και των ιδιομορφών.

Η βασική παραδοχή της μεθόδου είναι ότι τοπικά οι ηχητικές ακτίνες θεωρούνται επίπεδες .Η πίεση σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\mathbf{r} = (x, y, z)$ αναπαρίσταται ως [2]:

$$P(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\omega W(\mathbf{r})}$$

όπου $A(\mathbf{r})$ η συνάρτηση πλάτους και$W(\mathbf{r})$ η συνάρτηση φάσης του ακουστικού κύματος η οποία μεταβάλλεται γρήγορα με την απόσταση σε σχέση με το μήκος κύματος .

Η μελέτη περιορίζεται στον υπολογισμό της συνάρτησης φάσης μέσω της οποίας θα αντληθούν οι ιδιότητες για τη γεωμετρία των ηχητικών ακτίνων και κατα επέκταση του ακουστικού πεδίου.Η αντικατάσταση της παραπάνω έκφρασης της ακουστικής πίεσης στην εξίσωση *Helmholtz* δίνει μία εξίσωση συναρτήσει του $A(\mathbf{r})$ η οποία όμως καταλήγει στην Εικονική εξίσωση (*Eikonal Equation*):

$$|\nabla W|^2 = \frac{1}{c^2}$$

έπειτα από την απαίτηση για διάδοση σε μεγάλες συχνότητες .

Η μέθοδος των ακτίνων αποτελεί ένα γρήγορο και ικανοποιητικό εργαλείο αναπαράστασης της εικόνας του πεδίου και οι απαραίτητοι υπολογισμοί είναι απλοί και εκτελούνται γρήγορα. Επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιβάλλοντα μεταβλητών παραμέτρων και πολύπλοκης βαθυμετρίας. Απο την άλλη μεριά ο αριθμός των ακτίνων που πρέπει να υπολογιστούν είναι μεγάλος. Η μέθοδος δεν παρέχει ακρίβεια στις καυστικές ζώνες (*caustics zones*),στις ζώνες σκιάς (*shadow zones*) καθώς και στις χαμηλόσυχνες ηχητικές διαδόσεις.Τέλος δεν περιγράφει ικανοποιητικά τις ανακλάσεις απο τον πυθμένα και δεν μπορεί να περιγράψει τη διάδοση διατμητικών κυμάτων σε ελαστικό πυθμένα.

Η μέθοδος των Ακτίνων εφαρμόζεται για την απεικόνιση του ακουστικού πεδίου ,τον υπολογισμό χρόνων άφιξης , κατανομών έντασης καθώς και απωλειών διάδοσης .

2.2.2 Ολοκληρωτική Αναπαράσταση(*Integral Transform Solution*)

Η μέθοδος της ολοκληρωτικής αναπαράστασης σε οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο περιγράφηκε αρχικά απο τον *Pekeris* [6] , ο οποίος αντιμετώπισε το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης χρησιμοποιώντας δύο ή τρία ενδιάμεσα στρώματα.Αργότερα οι *Jardetzky* και *Ewing*, *Jardetzky* και *Press* [2] χρησιμοποίησαν την ίδια τεχνική για τη διερεύνηση σεισμών σε κυματοδηγούς με λίγα στρώματα.Η μέθοδος τους βασίζεται στην εφαρμογή μιας σειράς ολοκληρωτικών μετασχηματισμών στην εξίσωση *Helmholtz* ώστε να περιοριστεί η τεσσάρων διαστάσεων μερική διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.Αυτές οι εξισώσεις λύνονται αναλυτικά σε κάθε στρώμα και οι άγνωστοι συντελεστές που εμφανίζονται υπολογίζονται από τις συνθήκες στο σύνορο και στις διεπιφάνειες.

Σε οριζόντια στρωματοποιημένο περιβάλλον όπου οι διεπιφάνειες είναι επίπεδες και παράλληλες και τα χαρακτηριστικά κάθε μέσου δίνονται ως συνάρτηση μονάχα του βάθους,η πίεση γράφεται ως ένας μετασχηματισμός *Hankel* μηδενικής τάξης [2] :

$$P(r,z) = \int_0^{\infty} P(k_r,z) J_0(k_r r) k_r dk_r$$

$$P(k_r,z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P(r,z) H_0^{(1)}(k_r r) k_r dr$$

όπου $J_0(k_r r)$η συνάρτηση *Bessel* μηδενικής τάξης,k_r ο οριζόντιος αριθμός κύματος και $H_0^{(1)}(k_r r)$η συνάρτηση *Hankel* πρώτου είδους μηδενικής τάξης.

Για αποστάσεις μεγαλύτερες από μερικά μήκη κύματος από την πηγή ($kr >> 1$) ισχύει η ασυμπτωτική έκφραση της συνάρτησης *Hankel* και επομένως η πίεση γράφεται στη μορφή [7]

$$P(r,z) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{r} P(k_r,z) e^{ik_r} r dk_r$$

όπου ο παράγοντας $\frac{1}{\sqrt{r}}$ υποδηλώνει την κυλινδρική γεωμετρική εξασθένηση του πεδίου.

Η μέθοδος της ολοκληρωτικής αναπαράστασης εφαρμόζεται τόσο σε περιβάλλοντα των οποίων το προφίλ ταχύτητας μεταβάλεται με το βάθος όπως και σε ελαστικούς πυθμένες. Η μέθοδος εφαρμόζεται τόσο σε ρηχή όσο και σε βαθειά θάλασσα τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες συχνότητες.Επειδή όμως ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνει με τη συχνότητα και το βάθος του νερού η μέθοδος θεωρείται λιγότερο κατάλληλη για εφαρμογές υψηλών συχνοτήτων σε βαθειά θάλασσα , ενώ δεν είναι εύκολη η επέκταση σε περιβάλλοντα μεταβαλλόμενων συναρτήσει της απόστασης παραμέτρων.

2.2.3 Μέθοδος κανονικών ιδιομορφών($Normal\ modes$)

Η μέθοδος των κανονικών ιδιομορφών χρησιμοποιείται στην υποβρύχια ακουστική αρκετά χρόνια. Η πρώτη δημοσίευση έγινε απο τον $Pekeris$,στα 1948,ο οποίος ασχολήθηκε με το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε ένα απλό μοντέλο δύο στρωμάτων,της θάλασσας και του ιζήματος,όταν το προφίλ ταχύτητας είναι σταθερό.Αρκετοί είναι έκτοτε εκείνοι που ασχολήθηκαν με διδιάστατα προβλήματα διάδοσης σε περιβάλλον μεταβαλλόμενων με την απόσταση παραμέτρων με ανομοιγενή γεωμετρία του πυθμένα όπως θαλάσσια βουνά ή σφήνες.

Όπως αναφέρθηκε ήδη στις περισσότερες των περιπτώσεων που μελετάται ένα πρόβλημα κυματικής διάδοσης η μεταβολή των παραμέτρων ως προς το αζιμούθιο (σε ένα κυλινδρικό σύστημα αναφοράς) αγνοούνταν και το πρόβλημα λυνόταν θεωρώντας το περιβάλλον αξονοσυμμετρικό.Σε αυτά τα προβλήματα η γνωστή μέθοδος των κανονικών ιδιομορφών χρησιμοποιούνταν ευρέως είτε με την κλασσική της μορφή (προσέγγιση του $Evans$ ή $Boyles$)είτε με την αδιαβατική προσέγγιση είτε με τεχνικές που βασίζονταν σε τοπικές ιδιομορφές (σύζευξη σφηνοειδών ιδιομορφών ,χρήση συζευγμένων ιδιομορφών με κατάλληλους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων) .Οι παραπάνω απλοποιήσεις είναι λογικές μακρυά από την ανομοιογένεια του πυθμένα και για σχετικά μεγάλες συχνότητες αλλά δεν είναι χρήσιμες για τη μελέτη του γενικού προβλήματος διάδοσης.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών ιδιομορφών το ακουστικό πεδίο σε οριζόντια στρωματοποιημένο περιβάλλον χωρίζεται ως προς το βάθος και την απόσταση και η ακουστική πίεση στο κυλινδρικό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ανάπτυξης σε σειρά ως εξής [4]:

$$P(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(r) u_m(z) \tag{2.2}$$

Οι συναρτήσεις $u_m(z)$ ικανοποιούν την εξίσωση βάθους:

$$\frac{d^2 u_m(z)}{dz^2} + \{k^2(z) - k_{r_m}^2\} u_m(z) = 0 \tag{2.3}$$

όπου $k_{rm}(=\sqrt{\lambda})$ οι ιδιοτιμές του προβλήματος.Το πρόβλημα βάθους συνοδεύεται από οριακές συνθήκες που προέρχονται από τις αντίστοιχες συνθήκες του προβλήματος της ακουστικής πίεσης .

Η εξίσωση βάθους προκύπτει απο την ομογενή $Helmholtz$ με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών και λύνεται αριθμητικά όταν το k είναι συνάρτηση του z γενικής μορφής.Όταν το τελικό σύνορο είναι πεπερασμένο η εξίσωση βάθους ορίζεται σε ένα διάστημα $[0, H]$.Το αντίστοιχο πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα $Sturm - Liouville$ [8] του οποίου η γενική μορφή δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dz}\Big(\rho(z)\frac{du}{dz}\Big) + q(z)u + \lambda r(z)u = 0 \tag{2.4}$$

ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και τις συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2\frac{du}{dz}(a) \;=\; 0 \tag{2.5}$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2\frac{du}{dz}(b) \;=\; 0 \tag{2.6}$$

όπου οι συντελεστές α_1 ,α_2 , β_1 ,β_2 είναι πραγματικοί αριθμοί , οι συναρτήσεις $\rho(z)$, $q(z)$ και $r(z)$ είναι πραγματικές και συνεχείς ,η συνάρτηση $\rho(z)$ διαφορίσιμη και οι συναρτήσεις $q(z)$ και $r(z)$ θετικές στο διάστημα $[a, b]$. Για το πρόβλημα βάθους εύκολα παρατηρούμε ότι $p(z) = 1$, $q(z) = k^2(z)$ και $r(z) = -1$.

Για το γενικό πρόβλημα $Sturm-Liouville$ γνωρίζουμε ότι υπάρχουν άπειρο το πλήθος ιδιοτιμές λ_i , $i = 1, 2, ...$, είναι όλες πραγματικές και σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί μία μονάχα ιδιοσυνάρτηση που παρουσιάζει $i - 1$ μηδενισμούς στο διάστημα $[a, b]$. Επιπλέον , το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων είναι πλήρες και κάθε συνεχής συνάρτηση με τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο μπορεί να αναπτυχθεί σε μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά.Τέλος το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων αποτελεί ορθοκανονικό σύνολο με συνάρτηση βάρους $r(z)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το φάσμα των ιδιοτιμών της προβλήματος βάθους αποτελείται από άπειρο πλήθος διακριτών ιδιομορφών όταν ο πυθμένας περατούται σε ακλόνητη διεπιφάνεια ή ελεύθερη διεπιφάνεια ενώ στην περίπτωση πυθμένα που εκτείνεται στο άπειρο το φάσμα αποτελείται από ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι (ιδιόμορφο πρόβλημα $Sturm - Liouville$).

Η έκφραση που προκύπτει για την ακουστική πίεση για οριζόντια στρωματοποιημένο περιβάλλον προκύπτει έπειτα από αντικατάσταση της (2.2) στην ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ και είναι:

$$P(r, z) = \frac{i}{4\rho}\sum_{m=1}^{\infty} u_m(z)u_m(z_0)H_0^{(1)}(k_{rm}r) \tag{2.7}$$

όπου k_{rm} ο οριζόντιος αριθμός κύματος και $H_0^{(1)}(k_{rm}r)$ η συνάρτηση $Hankel$ πρώτου είδους μηδενικής τάξης που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $Bessel$:

$$\frac{d^2H_0^{(1)}(k_{rm}r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dH_0^{(1)}(k_{rm}r)}{dr} + k_0^2H_0^{(1)}(k_{rm}r) = 0 \tag{2.8}$$

Για την ειδική περίπτωση [4] όπου η ταχύτητα του ήχου στο νερό και η πυκνότητα παραμένουν σταθερές και ο πυθμένας θεωρείται άκαμπτος ($\frac{du_m}{dz}(H) = 0$) η έκφραση για την ακουστική πίεση δίνεται ως μία σειρά ημιτόνων της μορφής

$$P(r,z) = \frac{i}{2h}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(k_{zm}z)\sin(k_{zm}z_0)H_0^{(1)}(k_{rm}r) \tag{2.9}$$

όπου k_{zm} ο κάθετος αριθμός κύματος .

Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο είδη ιδιομορφών. Το πρώτο όμως είδος είναι εκείνο για το οποίο το k_{rm} είναι πραγματικός αριθμός και αντιστοιχεί σε ιδιομορφές για τις οποίες υπάρχει κυματικό φαινόμενο (κανονικές ιδιομορφές).

2.2.4 Μέθοδος συζευγμένων ιδιομορφών (*Coupled Normal Modes*)

Όταν ο πυθμένας δεν είναι οριζόντιος ή η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται με την απόσταση το περιβάλλον δεν είναι οριζόντια στρωματοποιημένο και η θεωρία των κανονικών ιδιομορφών , όπως αναφέρθηκε προηγουμένως , δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο των συζευγμένων ιδιομορφών που αποτελεί επέκταση της θεωρίας των κανονικών ιδιομορφών.

Η ακουστική πίεση γράφεται στη μορφή [4]:

$$P(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(r)u_m(r;z) \tag{2.10}$$

Οι συναρτήσεις $u_m(r;z)$ ονομάζονται τοπικές ιδιομορφές λόγω της εξάρτησής τους από την απόσταση r.

Αντικαθιστώντας την (2.10) στην ομογενή εξίσωση $Helmholtz$,λαμβάνοντας υπ όψιν το τοπικό πρόβλημα βάθους και χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των τοπικών ιδιομορφών καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d^2F_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_m}{dr} + k_{rm}^2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\{A_{mn}F_n + B_{mn}(\frac{F_n}{r} + 2\frac{dF_n}{dr})\} \tag{2.11}$$

Από τη μελέτη του παραπάνω προβλήματος πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές σύζευξης A_{mn} και B_{mn} μέσω των ολοκληρωμάτων [4] :

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m(r,z) \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}(r,z) dz \tag{2.12}$$

$$B_{mn} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m(r,z) \frac{\partial u_n}{\partial r}(r,z) dz \tag{2.13}$$

Το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης έχει αντιμετωπιστεί στην περίπτωση ενός περιβάλλοντος αξονικής συμμετρίας με πυθμένα τυχαίου σχήματος σε πεπερασμένο χωρίο διακριτοποιώντας κατάλληλα την περιοχή της ανομοιογένειας. Θεωρούμε ,λοιπόν ,το περιβάλλον του σχήματος 4.

Αποτελείται από ένα στρώμα νερού και επάλληλα στρώματα ιζήματος που καταλήγουν σε ένα τελείως άκαμπτο πυθμένα.Τα σημεία επαφής μεταξύ των στρωμάτων συμβολίζονται ως $J_l = \{r, h : r \geq 0, h = h_l(r)\}$ $l = 1, 2, ...$ και μπορεί να έχουν αυθαίρετο σχήμα.Θεωρούμε ότι μια αρμονική σημειακή πηγή κυκλικής συχνότητας ω έχει τοποθετηθεί σε βάθος z_0.

Πέρα απο την απόσταση $r = r^F$ θεωρούμε ότι οι παράμετροι του προβλήματος δεν εξαρτόνται από την απόσταση και θα αναφέρεται ως $farfield$ ενώ το περιβάλλον κοντά στην ανομοιογένεια θα αναφέρεται ως $nearfield$ και θα έχει τις ίδιες παραμέτρους όπως το πεδίο μακριά από την ανομοιογένεια . Ανάμεσα στα δύο αυτά χωρία υπάρχει το ενδιάμεσο πεδίο($intermediatefield$) το οποίο χαρακτηρίζεται από αυθαίρετη μεταβολή του προφίλ ταχύτητας $c = c(r, z)$.Το προφίλ ταχύτητας τόσο στο πεδίο κοντά στην ανομοιογένια όσο και μακρυά από αυτή θα είναι συνάρτηση μόνο του z. Συμβολίζουμε, τέλος, τη γεωμετρική περιοχή στο l-ιοστό στρώμα ως D_l και ολόκληρο το χωρίο ως D.

Σχήμα 4. Γεωμετρική αναπαράσταση ενός $range - dependent$ περιβάλλοντος αξονικής συμμετρίας με επάλληλα στρώματα

Η εξίσωση που περιγράφει την ακουστική διάδοση είναι η μη ομογενής $Helmholtz$ η οποία στο κυλινδρικό σύστημα και περιβάλλον σταθερής πυκνότητας γράφεται:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k^2 P = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z - z_{0)} \tag{2.14}$$

Με βάση το συμβολισμό που υιοθετήθηκε η πίεση $P(r, z)$ ορίζεται ως P_l^* όπου ο δείκτης i παραπέμπει στο στρώμα ορισμού και ο $*$ στο πεδίο.Η ακουστική πίεση πρέπει να ικανοποιεί και τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$P_l^* = 0 \; \sigma\tau o J_0^* \tag{2.15}$$

$$P_l^* = P_{l+1} \; \sigma\tau o J_l^* \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial P_l^*}{\partial \mathbf{n}_l^*} = -\frac{1}{\rho_{l+1}}\frac{\partial P_{l+1}^*}{\partial \mathbf{n}_l^*} \quad \sigma\tau o J_l^* \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial P_L^*}{\partial z} = 0 \quad \sigma\tau o J_L^* \tag{2.18}$$

$$* \in \{N, I, F\}$$

όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα , και μια συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ που ορίζει ότι το άπειρο απορροφά και δεν επανακτινοβολεί ενέργεια.

Θα μελετήσουμε πρώτα την ενδιάμεση υποπεριοχή , όπου εμφανίζεται η ανομοιογένια,διακριτοποιώντας την σε κυλινδρικούς δακτυλίους ακτίνας r_j ,$j = 1, .., A - 1$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Το βάθος της διεπιφάνειας μεταξύ του στρώματος l και $l + 1$ σε κάθε κύλινδρο j θα συμβολίζεται ως h_l^j και το τμήμα ως D_l^j.

Σχήμα 5.Η διακριτοποίηση του πεδίου

Σε κάθε έναν από τους δακτυλίους οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται μόνο με το βάθος εκτός από το προφίλ ταχύτητας που μπορεί να μεταβάλλεται και με την οριζόντια απόσταση.Η εξίσωση που ικανοποιείται σε κάθε κύλινδρο είναι η ομογενής $Helmholtz$ με τις οριακές συνθήκες (2.15)-(2.18) Σε κάθε δακτύλιο D_l^j ορίζουμε ένα πρόβλημα βάθους

$$\frac{d^2 u_m^l}{dz^2} + [k^2 - (k_m^l)^2]u_m^l = 0 \tag{2.19}$$

με τις ακόλουθες οριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u_{m,l}^j(0) &= 0 & (2.20) \\ u_{m,l}^j(h_l^j) &= u_{m,l+1}^j(h_l^j) & (2.21) \\ \frac{1}{\rho_l^j}\frac{du_{m,l}^j}{dz}(h_l^j) &= \frac{1}{\rho_{l+1}^j}\frac{du_{m,l+1}^j}{dz}(h_l^j) & (2.22) \\ \frac{du_{m,L}^j}{dz}(h_L^j) &= 0 & (2.23) \end{aligned}$$

όπου $u_{m,l}^j$ η λύση του προβλήματος βάθους σε κάθε στρώμα.

Εφόσον οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθοκανονικές η ακουστική πίεση μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά η λύση της οποίας δίνεται από τη σχέση [4]

$$P^j(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\{A_m^j H_0^{(1)}(k_m^j r) + B_m^j H_0^{(2)}(k_m^j r)\}u_m^j(z) \quad j = 1, ...A-1 \tag{2.24}$$

Για την περίπτωση $j = F$ από τη συνθήκη ακτινοβολίας γνωρίζουμε ότι $B_m^j = 0$ [4] επομένως η πίεση στην υποπεριοχή μακρυά από την ανομοιομορφία δίνεται από τη σχέση :

$$P^F(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^F H_0^{(1)}(k_m^F r)u_m^F(z) \tag{2.25}$$

Απομένει η μελέτη της συνθήκης της πηγής.Στο χωρίο που ορίζεται από $0 < r \leq r_N$ μπορούμε να χωρίσουμε τη λύση μας σε δύο όρους, ως η λύση του προβλήματος στο πεδίο ακτινοβολίας ($radiation\ field$),που ορίζεται όταν δεν υπάρχει ανομοιογένεια, και του προβλήματος στο πεδίο διάθλασης ($diffraction\ field$),το οποίο εμφανίζεται λόγω της ανομοιογένειας. Επομένως η έκφραση της πίεσης δίνεται ως:

$$P(r,z) = P_{rd}(r,z) + P_d(r,z) \tag{2.26}$$

Το πρόβλημα ακτινοβολίας αναφέρεται σε ένα περιβάλλον του οποίου οι παράμετροι δε μεταβάλλονται με την απόσταση και ο πυθμένας είναι οριζόντια στρωματοποιημένος.Η πίεση ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ με ομογενής συνθήκες στις διεπιφάνειες και στο σύνορο.Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών η πίεση γράφεται στη μορφή:

$$P_{rd} = \frac{1}{4\rho_l} \sum_{m=1}^{\infty} u_m^N(z_0) u_m^N(z) H_0^{(1)}(k_m^N r) u_m^N(z) \tag{2.27}$$

Το πρόβλημα διάθλασης ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ και η λύση της δίνεται από τη σχέση

$$P_d = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^N J_0(k_m^N r) u_m^N(z) \tag{2.28}$$

όπου η χρήση της $Bessel$ στην έκφραση της πίεσης περίθλασης οφείλεται στο γεγονός ότι η πίεση περίθλασης είναι παντού αναλυτική ακόμα και στο $r = 0$. Επομένως η πίεση στην περιοχή κοντά στην ανομειογένεια θα δίνεται ως άθροισμα των (2.27)και (2.28) Για την αριθμητική επεξεργασία της λύσης κρατάμε μονάχα πεπερασμένο το πλήθος όρους στις σειρές αρκεί να έχουμε επιτύχει ικανοποιητική ακρίβεια στην αναπαράσταση. Ο υπολογισμός των άγνωστων συντελεστών γίνεται με τη μέθοδο του $Evans$ [9] και βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε συντελεστής στο χωρίο j εκφράζεται ως γραμμικός συνδιασμός των συντελεστών στα προηγούμενα χωρία που προκύπτουν από σύζευξη των ιδιομορφών.Χρησιμοποιούμε επιπλέον την ορθοκανονικότητα των ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος βάθους καθώς και τους συντελεστές σύζευξης [4]

$$C1_{mn}^j = \int_0^{h_L} \frac{1}{\rho^j} u_m^j u_n^{j+1} dz \tag{2.29}$$

$$C2_{mn}^j = \int_0^{h_L} \frac{1}{\rho^{j+1}} u_m^j u_n^{j+1} dz \tag{2.30}$$

που εκφράζουν την ανταλλαγή ενέργειας κατα τη διάδοση του ήχου στις διάφορες κυματομορφές και συνεισφέρουν αρκετά στην απλοποίηση των συντελεστών. Όπως έχει αποδειχθεί [10][11][12] η ανωτέρω διαδικασία προκύπτει ως εφαρμογή μιας μεταβολικής αρχής (*variation principle*) που έχει εφαρμοστεί σε γενικά περιβάλλοντα με μεταβολές σε δύο και τρείς διαστάσεις .

Το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης της μεταβολικής αρχής σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με άλλες μεθόδους που χρησιμοποιούνται σε περιβάλλοντα με μεταβαλόμενες με την απόσταση παραμέτρους είναι η αποφυγή περιορισμών όσον αφορά τη γωνία διάδοσης , την επιστρεφόμενη ενέργεια ,τη δομή του πυθμένα και τη μεταβολή των παραμέτρων ως προς την απόσταση και το βάθος. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεταβολικής αρχής αποτελεί η μη απαίτηση εκ των προτέρων (*a priori*) συνθηκών για την πίεση περίθλασης στην ενδιάμεση περιοχή.

Γενικά οι μέθοδοι των ιδιομορφών είναι ικανοποιητικές για εφαρμογές σε ρηχή θάλασσα για χαμηλές ως μεσαίες συχνότητες και για περιβάλλοντα τόσο με σταθερές όσο και με μη σταθερές ως προς την απόσταση παραμέτρους.Επειδή ο αριθμός των ιδιομορφών είναι ανάλογος με το βάθος του νερού και την συχνότητα και ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνει με τον αριθμό των ιδιομορφών οι μέθοδοι είναι μη πρακτικές για εφαρμογές σε βαθειά θάλασσα και μεγάλες συχνότητες.Όταν μάλιστα το περιβάλλον δεν είναι οριζόντια στρωματοποιημένο και απαιτείται ο χωρισμός του πεδίου σε πολλά τμήματα οι μέθοδοι είναι πολύ δύσκολοι να εφαρμοστούν.

2.2.5 Μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης (*Parabolic equation*)

Η μέθοδος της παραβολικής προσέγγισης εμφανίστηκε πρώτη φορά στα μέσα της δεκαετίας του 1940, όταν οι *Leontovich* και *Fock* [13]την εφάρμοσαν στο πρόβλημα ηλεκτομαγνητικής ακτινιβολίας στην ατμόσφαιρα.Από τότε η μέθοδος έχει εφαρμοστεί σε πολλούς τομείς της φυσικής ,όπως της οπτικής ,της πλασματοφυσικής ,της σεισμολογίας και της υποβρύχιας ακουστικής.

Όταν συνεκτικές πηγές οπτικής ακτινοβολίας (*lasers*) καθορίστηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 1960 ήταν φυσική απαίτηση η εφαρμογή της παραβολικής εξίσωσης για το πρόβλημα διάδοσης δέσμης *laser* .Σε αυτό τον τομέα η παραβολική κυματική εξίσωση αναφέρεται ως ' $quasi - optical$ ' εξίσωση.Αυτή η εξίσωση εφαρμόστηκε ευρέως σε μη γραμμικά προβλήματα διάδοσης οπτικής όπου ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από την πυκνότητα δίνοντας με τον τρόπο αυτό μια μη γραμμική εξίσωση κύματος παραβολικής μορφής η οποία συχνά αναφέρεται ως ' μη γραμμική *Schrödinger* ' εξίσωση.Η μέθοδος της παραβολικής εξίσωσης χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1968 στη μελέτη του προβλήματος διάδοσης δεσμών σε τυχαία μέσα.Οι δέσμες μπορούσαν να αποτελούνταν από κύματα ακτίνων,ακουστικά κύματα ή οπτικά κύματα.Το παραπάνω αφηρημένο πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα κίνησης ενός μορίου σε τυχαίο δυναμικό στην κβαντομηχανική .Στον τομέα διάδοσης σεισμικών κυκάτων η μέθοδος άρχισε να χρησιμοποιείται περίπου το 1970 .

Στην υποβρύχια ακουστική η μέθοδος της παραβολικής εξίσωσης εμφανίστηκε από τους *Hardin* και *Tappert* [14]στις αρχές του 1970.Το σχήμα για την αριθμητική λύση του προβλήματος διάδοσης το οποίο χρησιμοποίησαν βασίζονταν στους μετασχηματισμούς *Fourier*. Το βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι ο τελεστής *Helmholtz* της ακουστικής κυματικής εξίσωσης προσεγγίζεται από ένα τελεστή τύπου *Schrödinger*.Μετατρέπεται με τον τρόπο αυτό το ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ένα παραβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών.Αυτό άλλωστε αποτελεί τον κύριο λόγο που η μέθοδος της παραβολικής προσέγγισης εφαρμόζεται σε περιβάλλοντα στα οποία οι παράμετροι του μεταβάλλονται με την απόσταση.

Τα υπολογιστικά προγράμματα επίλυσης της παραβολικής εξίσωσης είναι αρκετά όπως η $Split-Step\ Fourier$ [2] μέθοδος που πρωτοχρησιμοποιήθηκε στα τέλη του 1970 απο τους $Hardin$ και $Tappert$ και μπορούσε να αντιμετωπίσει μερίκες μονάχα περιπτώσεις και οι μέθοδοι Πεπερασμένων Διαφορών και Πεπερασμένων Στοιχείων [15].Η τεχνική $Split-Step\ Fourier$ είναι αποδοτική για προβλήμα διάδοσης σε μεγάλες αποστάσεις με μικρή γωνία διάδοσης με αμελητέα αλληλεπίδραση του πυθμένα.Η μέθοδος επεκτάθηκε σε πολύ μεγαλύτερες ακουστικές συχνότητες και έδωσε καλά υπολογιστικά αποτελέσματα.Μία ακόμα επέκταση ώστε να περιέχεται στο δείκτη διάθλασης τυχαία εσωτερική διακύμανση του κύκατος έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για προβλήματα σε μικρές αποστάσεις τόσο σε ρηχές όσο και σε βαθειές θάλασσες,η διάδοση είναι ευρύτερης γωνίας και η επίδραση του πυθμένα είναι σημαντική.Αυτές οι απαιτήσεις επιβάλουν τη χρήση μιας παραβολικής εξίσωσης ευρύτερης γωνίας η οποία μπορεί να λυθεί αριθμητικά με μεθόδους όπως πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων στοιχείων,μέθοδοι που εμφανίζονται στα μέσα του 1980. Επιπλέον οι μεγάλες διαφορές στην ταχύτητα του ήχου και στην πυκνότητα που παρουσιάζονται μεταξύ των στρωματών του νερού και του πυθμένα επηρεάζουν δυσμενώς την υπολογιστική ικανότητα της μεθόδου $Split-Step$, η οποία στην περίπτωση μεγάλων αλληλεπιδράσεων απαιτεί μία λεπτομερή διακριτοποίηση $(\Delta r, \Delta z)$.Από την άλλη πλευρά οι μέθοδοι Πεπερασμένων Διαφορών /Πεπερασμένων Στοιχείων μπορούν να χρησιμοποιηθούν σχεδόν σε όλες της μορφές της παραβολικής εξίσωσης από την $standard$ έως και αυτή της πολύ-μεγάλης γωνίας.Το κύριο μειονέκτημα των μεθόδων αυτών σε σχέση με τη μεθόδο $split-step$,είναι η μη αποδοτικότητά τους σε προβλήματα μεγάλων αποστάσεων με μικρές γωνίες διάδοσης και μικρή ή καθόλου αλληλεπίδραση του πυθμένα.Πρακτικά τα περισσότερα θαλάσσια περιβάλλοντα με τα οποία ασχολείται η υποβρύχια ακουστική είναι της παραπάνω μορφής και αυτό καθιστά τον κύριο λόγο χρησιμοποίησης της μεθόδου $Split-Step$ ακόμα και σήμερα. Στη δεκαετία του 1990 αρχισε να χρησιμοποιείται η μέθοδος των συναρτήσεων $Green$ από τους $Gilbert$ και Di [2] .Παρέχει τη δυνατότητα αντιμετώπισης πιο γενικών περιπτώσεων μοιάζει με τη μέθοδο $Split-Step\ Fourier$ αλλά είναι ταχύτερη.Η πιο πρόσφατη τεχνική υπολογισμού της παραβολικής εξίσωσης είναι το σχήμα λύσης $Split-Step\ Padé$ που προτάθηκε από τον $Collins$ [2] .

Όταν το ακουστικό πεδίο διαδίδεται σε μικρό εύρος γωνιών κοντά στην οριζόντιο,όπως συμβαίνει για χαμηλές συχνότητες μακριά από την πηγή,η πίεση μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τον $Tappert$ [2] ως

$$P(r,z) = \psi(r,z) H_0^{(1)}(k_0 r) \tag{2.31}$$

όπου η συνάρτηση $\psi(r,z)$ μεταβάλεται αργά με την απόσταση και k_0 ο αριθμός κύματος αναφοράς . Η εξίσωση $Hankel$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $Bessel$:

$$\frac{d^2 H_0^{(1)}(k_0 r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dH_0^{(1)}(k_0 r)}{dr} + k_0^2 H_0^{(1)}(k_0 r) = 0 \tag{2.32}$$

η οποία αντικαθίσταται από την ασυμπτωτικής της έκφραση όταν $k_0 r \gg 1$,

$$H_0^{(1)}(k_0 r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_0}} e^{-i(k_0 r - \frac{\pi}{4})} \tag{2.33}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.31) στην ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ και θεωρώντας οτι $k_0 r \gg 1$ καταλήγουμε στην απλοποιημένη ελλειπτική κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2(n^2 - 1)\psi = 0 \tag{2.34}$$

Τέλος,χρησιμοποιούμε τη βασική προσέγγιση

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \ll 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

και καταλήγουμε στην βασική ($standard$) παραβολική εξίσωση του κύματος :

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2(n^2 - 1)\psi = 0 \tag{2.35}$$

η οποία παρουσιάστηκε στην υποβρύχια ακουστική από τους $Hardin$ και $Tappert$ [2] . Όπως μπορεί να δειχθεί η εξίσωση αυτή δίδει λύσεις που βρίσκονται πολύ κοντά στις λύσεις της εξίσωσης $Helmholtz$ όταν η γωνία διάδοσης των ιδιομορφών είναι μικρή ($narrow\ angle\ approximation$). Η παραπάνω εξίσωση θεωρείται ακριβής για γωνίες διάδοσης ως προς την οριζόντιο μεταξύ $10 - 15°$.

Η διάδοση σε μεγαλύτερες γωνίες έχει αντιμετωπιστεί και λυθεί αριθμητικά. Ο τρόπος κατασκευής παραβολικών εξισώσεων ευρύτερης γωνίας πραγματοποιείται χωρίζοντας την απλοποιημένη ελλειπτική εξίσωση (2.34) σε δύο παράγοντες, ένα εξερχόμενο και ένα εισερχόμενο κυματισμό,όπου λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τον εξερχόμενο κυματισμό καταλήγουμε στην παραβολική κυματική εξίσωση μίας κατεύθυνσης ($one - way$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0 \Big[\sqrt{n^2 + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}} - 1\Big]\psi \tag{2.36}$$

Με κατάλληλες προσεγγίσεις του ριζικού καταλήγει στο διευρημένο πεδίο εφαρμογής της παραβολικής εξίσωσης (παραβολική προσέγγιση ευρείας γωνίας). Γράφοντας τη ρίζα στη μορφή

$$Q = \sqrt{1+q}$$

όπου $q = \epsilon + \mu$, $\epsilon = n^2 - 1$ και $\mu = \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ και θεωρώντας κατάλληλες προσεγγίσεις για την παραβολική εξίσωση μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ακουστικό πρόβλημα με μεγαλύτερο εύρος γωνίας κατά τη διάδοση των ηχητικών ακτίνων από την πηγή.

Μία κλασματικού τύπου προσεγγιστική συνάρτηση για την τετραγωνική ρίζα γενικής μορφής είναι η ,

$$\sqrt{1+q} \simeq \frac{a_0 + a_1 q}{b_0 + b_1 q}$$

Για διάφορες τιμές των συντελεστών οδηγούμαστε σε διαδόσεις μικρής ,ευρείας ή μεγάλης γωνίας ως προς την οριζόντιο.

Θεωρώντας $a_0 = 1$,$a_1 = 0.5$,$b_0 = 1$ και $b_1 = 0$ οδηγούμαστε στην προσέγγιση του *Tappert* [2] , η οποία καταλήγει στην βασική παραβολική προσέγγιση.Μία άλλη επιλογή των συντελεστών έγινε από τον *Claerbout* [2] , $a_0 = 1$,$a_1 = 0.75$,$b_0 = 1$ και $b_1 = 0.25$, η οποία καταλήγει σε παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας . Τέλος θεωρώντας $a_0 = 0.99987$,$a_1 = 0.79624$,$b_0 = 1$ και $b_1 = 0.30102$ παίρνουμε την μεγάλης γωνίας παραβολική εξίσωση του *Greene* [2] . Οι μέχρι τώρα προσεγγίσεις είναι ασφαλείς για γωνίες διάδοσης ως προς την οριζόντιο με εμβέλεια $\pm 40°$.

Η χρήση άλλων κλασματικών μορφών προσέγγισης όπως οι σειρές *Padé* δίνουν παραβολικές εξισώσεις πολύ μεγάλης γωνίας. Η υπόριζος ποσότητα αναπαρίσταται τότε ως

$$\sqrt{1+q} = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{j,m} q}{1 + b_{j,m} q} + \bigcirc(q^{2m+1}) \tag{2.37}$$

όπου m το πλήθος των όρων στο ανάπτυγμα και

$$\begin{aligned} a_{j,m} &= \frac{2}{2m+1} \sin^2\Big(\frac{j\pi}{2m+1}\Big) \\ b_{j,m} &= \cos^2\Big(\frac{j\pi}{2m+1}\Big) \end{aligned}$$

Μία ακόμη διάσπαση του τελεστή Q προτάθηκε από τους *Thomson* και *Chapman* [16] σύμφωνα με την οποία ο τελεστής γράφεται ως :

$$Q \simeq \sqrt{1+\mu} + \sqrt{1+\epsilon} - 1 \tag{2.38}$$

Η παραβολική προσεγγιστική εξίσωση που προκύπτει

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0 \Big(n - 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \Big) \psi \tag{2.39}$$

δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για διάδοση ευρείας γωνίας σε θαλάσσια περιβάλλοντα με μέτρια μεταβολή του δείκτη διάθλασης και μπορεί να λυθεί με τον αλγόριθμο $Split - Step\ Fourier$.

Τέλος, μία διαφορετική μορφή παραβολικής εξίσωσης προτάθηκε το 1989 από τον $Berman$ [2] γνωστή ως $LOGPE$ η οποία δίνεται από τη μορφή

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0 \Big\{ \ln n + \frac{1}{2} \ln \Big[\cos^2 \Big(-\frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} \Big) \Big] \Big\} \psi \tag{2.40}$$

Αριθμητικά παραδείγματα δείχνουν ότι η $LOGPE$ δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για γωνίες διάδοσης $\sim \pm 20°$ ως προς την οριζόντιο.

Για την αντιμετώπιση του ημιάπειρου πυθμένα εισαγάγουμε μία συνθήκη προσαρμογής [17] ,η οποία μετατρέπει το ημιάπειρο ως προς το βάθος πρόβλημα, στο οποίο θεωρούμε συνθήκη ακτινοβολίας καθώς το z τείνει στο άπειρο ,σε ένα ισοδύναμο σε φραγμένο πεδίο. Εισαγωγή τέτοιων συνθηκών έχει γίνει από τον Παπαδάκη ,ο οποίος μελέτησε το περιβάλλον του παρακάτω σχήματος.

Σχήμα 6.Το βασικό περιβάλλον μελέτης

Αποτελείται από ένα στρώμα νερού, πυκνότητας ρ_w και βάθους z_b, και ένα ομογενές ημιάπειρο στρώμα,πυκνότητας ρ_b και ταχύτητας διάδοσης του ήχου c_b. Μια σημειακή αρμονική πηγή έχει τοποθετηθεί σε βάθος z_0. Το περιβάλλον όπως έχει περιγραφεί έχει αξονική συμμετρία, ικανοποιεί τη μη-ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ και χρησιμοποιώντας την παραβολική τεχνική αναπαράστασης η ακουστική πίεση γράφεται,

$$P(r,z) = \psi(r,z) H_0^{(1)}(k_0 r) \tag{2.41}$$

Στη συνέχεια κανοντας τις επιτρεπτές απλοποιήσεις και προσεγγίσεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\partial^2 \psi(r,z)}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi(r,z)}{\partial r} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1)\psi(r,z) = -\frac{1}{2\pi r}\delta(z - z_0)\delta(r) \tag{2.42}$$

Επιπλέον απαιτούμε συνέχεια της πίεσης και της κάθετης παραγώγου αυτής στη διαχωριστική διεπιφάνεια νερού-πυθμένα.

Ο Παπαδάκης κατέληξε στη συνθήκη προσαρμογής θεωρώντας το εξής ζεύγος μετασχηματισμών $Fourier$ [17]:

$$\Psi(\lambda) = \frac{k_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ik_0(\lambda-1)r}{2}} \psi(r) dr \tag{2.43}$$

$$\psi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ik_0(\lambda-1)r}{2}} \Psi(\lambda) d\lambda \tag{2.44}$$

Η συνθήκη προσαρμογής βρίσκεται έπειτα από αντικατάσταση της έκφρασης για το $\Psi(\lambda)$ στην εξίσωση (2.42) και στις συνοριακές συνθήκες και δίδεται από τη σχέση:

$$\psi(r, z_b) = -\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi k_0}} \frac{\rho_b}{\rho_w} \int_0^r e^{ik_0(n_b^2 - 1)(r-s)/2} \times (r-s)^{-1/2} \psi_z(s, z_b) ds \tag{2.45}$$

Η παραπάνω συνθήκη δίνει το πεδίο σε απόσταση r και βάθος ίσο με αυτό της διαχωριστικής διεπιφάνειας σε όρους της κάθετης παραγώγου της πολλαπλασιασμένης με ένα διάνυσμα φάσης το οποίο εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του υποπυθμένα και ολοκληρώνοντας κατα μήκος της διεπιφάνειας του πυθμένα από 0 έως την τρέχουσα απόσταση.Στην απλή περίπτωση ενος ελαστικού ημιάπειρου ομογενούς πυθμένα ο χειρισμός της συνθήκης προσαρμογής γίνεται με αναλυτικές μεθόδους αλλά για γενικές συνοριακές συνθήκες η αριθμητική αντιμετώπιση είναι αναγκαία. Αριθμητικό μοντέλο που έχει χρησιμοποιηθεί είναι αυτό των πεπερασμένων διαφορών $IFD + IMPED(FFT)$. Εφαρμόζεται σε περιβάλλον ρηχής θάλασσας σταθερού βάθους και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν η διεπιφάνεια νερού -πυθμένα θεωρείται οριζόντια . Ανάλογη διαδικασία μπορεί να υπολογίσει τη συνθήκη προσαρμογής σε πυθμένα με απότομη κλίση.

Η μέθοδος της παραβολικής προσέγγισης μπορεί να εφαρμοστεί σχεδόν σε όλα τα θαλάσσια περιβάλλοντα.Ένα σημαντικό μειονέκτημα της σε σχέση με την ελλειπτική εξίσωση $Helmholtz$ αποτελεί το γεγονός ότι είναι κυματική εξίσωση μιας φοράς και μπορεί να λυθεί με τεχνικές λύσεων $range-marching$. Απαιτείται όμως ο καθορισμός αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Σχήμα 7.Το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών για την Π.Ε.

Για τον καθορισμό των αρχικών συνθηκών($starting\ field$),δηλαδή για την εύρεση μιας ιδιότητας της πίεσης σε κάθε βάθος z για την αρχική απόσταση r_0, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο αναλυτικές όσο και υπολογιστικές μέθοδοι.

Παράδειγμα αριθμητικής αρχικής συνθήκης της πηγής αποτελεί η συνθήκη ιδιομορφών [2] , η οποία είναι αρκετά χρήσιμη σε στρωματοποιημένα περιβάλλοντα διότι εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των αρχικών συνθηκών. Το εύρος της γωνίας διάδοσης εξαρτάται από τον αριθμό των ιδιομορφών που λαμβάνουμε υπόψιν. Η παραπάνω συνθήκη της πηγής δεν παρουσιάζει περιορισμό για το βάθος στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η πηγή.Είναι όμως ακατάλληλη όταν η πηγή είναι τοποθετημένη πάνω από πυθμένα με απότομη κλίση.

Οι συναρτήσεις αναλυτικής πηγής είναι με τέτοιο τρόπο σχεδιασμένες ώστε να βρίσκονται όσο πιο κοντά γίνεται στη σημειακής πηγής λύση της εξίσωσης

$Helmholtz$ στην περιοχή μακρυά από την ανομοιογένεια σε ένα ομογενές μέσο. Ο $Tappert$ [2] πρότεινε την $Gaussian$ συνθήκη της πηγής η οποία αποτελεί κατάλληλη αρχική συνθήκη για την $standard$ παραβολική εξίσωση.Όταν όμως θέλουμε να ασχοληθούμε με προβλήματα κυματικής διάδοσης σε μεγάλο εύρος γωνίας τότε χρειάζεται η εισαγωγή άλλων αρχικών συνθηκών.Τέτοιου είδους συναρτήσεις πηγών είναι η $Green$ [2] , που χρησιμοποιείται στην παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας ,του $Thomson$ [2] η οποία είναι ιδανική ως αρχική συνθήκη στην παραβολική εξίσωση πολυ-μεγάλης γωνίας και η γενικευμένη $Gaussian$ συνθήκη της πηγής [2] .Όλες οι παραπάνω αναλυτικές εκφράσεις για την πηγή αναφέρονται στην περίπτωση που η πηγή βρίσκεται σε ένα ομογενές μέσο.Ειδική αντιμετώπιση πρέπει να γίνει όταν η πηγή βρίσκεται κοντά σε σύνορο .

Προβλήματα ,επίσης ,παρουσιάζονται στην παραβολική μέθοδο κατά την επιλογή του αριθμού κύματος αναφοράς k_0 που εμφανίζεται μέσω του δείκτη διάθλασης $n(r,z)$,για τον οποίο έχουμε απαιτήσει να μεταβάλλεται αργά με την απόσταση r.Διαφορετικές επιλογές στην τιμή του k_0 επιφέρουν αλλαγές στην λύση της εξίσωσης $Hankel$ όσο και της συνάρτησης $\psi(r,z)$. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί από μεγάλο πλήθος ερευνητών όπως ο $Pierce$,$Jensen$ και $Martinelli$, $Pierce$ και Lee αλλά χωρίς να έχει βρεθεί κατάλληλη επιλογή του k_0 ακόμα.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών στις τρείς διαστάσεις

3.1 Εισαγωγή

Η αντιμετώπιση του προβλήματος ακουστικής διάδοσης σε τρισδιάστασο περιβάλλον μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα συνδιασμό των μεθόδων των κανονικών ιδιομορφών όπως έχουν υλοποιηθεί σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας και της αδιαβατικής μεθόδου σύμφωνα με την οποία δε λαμβάνεται υπόψιν η σύζευξη ανάμεσα στις ιδιομορφές διάδοσης .

Για την αντιμετώπιση του ακουστικού προβλήματος σε ένα τρισδιάστατο θαλάσσιο περιβάλλον που οφείλεται στην αλληλεπίδραση μιας σημειακής πηγής και ενός κυλινδρικού εμποδίου πρώτος ο *Evans* [18] χρησιμοποίησε μια τεχνική πινάκων ως γενίκευση της μεθόδου σύζευξης ιδιομορφών κατά τμήματα.Έχοντας ως βάση την παραπάνω μέθοδο το πρόβλημα καθορισμού του ακουστικού πεδίου οφειλούμενο σε μία σημειακή πηγή γύρω από ένα διαπερατό αξονοσυμμετρικό βουνό έχει μελετηθεί πλήρως.

Ο *Harrison* [19] μελέτησε ισοταχύ περιβάλλοντα μεταβλητού βάθους χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο μετασχηματισμό .

Μία μεγάλη κλάση προβλημάτων ακουστικής είναι και εκείνα που ασχολούνται με τη μελέτη της ακουστικής διάδοσης σε σφηνοειδή περιβάλλοντα .Πρωταρχικής σημασίας μελέτη έγινε από τον *Buckingham* [20] ο όποίος μελέτησε το πρόβλημα της αναπαράστασης του ακουστικού πεδίου , το οποίο δημιουργείται γύρω από ένα κωνικό βουνό . Η γεωμετρία του περιβάλλοντος με το οποίο ασχολήθηκε ήταν τέτοιο ώστε η κορυφή της κωνικής ανύψωσης εφάπτονταν της επιφάνειας της θάλασσας.Η έκφραση για το δυναμικό ταχύτητας ,έχοντας απομονώσει την εξάρτηση από το χρόνο ,δίνεται ως ένα άθροισμα κανονικών ιδιομορφών με συντελεστές που περιέχουν τη συνάρτηση *Hankel* αλλά και ένα ολοκληρωτικό παράγοντα ως προς τη γωνία και ο οποιός υπολογίστηκε από τον *Buckingham* το 1986 [21]. Αναλυτικές λύσεις έχουν βρεθεί και σε περιπτώσεις περιβάλλοντος που ορίζεται από μία σημειακή πηγή με γεωμετρία πολύπλευρη ή σφηνοειδή. Καθοριστική πρόοδος σημειώθηκε,τέλος, απο τον *Williams* ,ο οποίος συνγκέντρωσε και δημοσίευσε στα 1970 όλες τις μέχρι τότε πληροφορίες για τη μέθοδο των κανονικών ιδιομορφών.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μεθόδους επίλυσης του προβλήματος της κυματικής διάδοσης σε τρεις διαστάσεις χρησιμοποιώντας κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων και αξιοποιώντας τη μέθοδο των ιδιομορφών. Η μέθοδος δίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν εφαρμοστεί σε περιβάλλοντα στα οποία οι παράμετροι παραμένουν αμετάβλητοι ως προς την οριζόντια απόσταση (*range independet*). Παρόλα αυτά με τη βοήθεια μιας μεταβολικής αρχής η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί και να βρεθεί η λύση σε προβλήματα όπου οι παράμετροι μεταβάλλονται και με την απόσταση.Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό είναι να χωριστεί ο άξονας της απόστασης σε ένα πλήθος τμημάτων και έπειτα να προσεγγιστεί το χωρίο με τμήματα στα οποία οι παράμετροι παραμένουν αμετάβλητοι με την απόσταση.Η λύση κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τη λύση της βασικής μεθόδου των κανονικών ιδιομορφών και κατάλληλων συνθηκών στις διεπιφάνειες (συνέχειας της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας).Αυτή η προσέγγιση συζευγμένων ιδιομορφών είναι άμεση αλλά καταλήγει υπολογιστικά σε χρονοβόρα μοντέλα .Αγνοώντας τους επιστρέφοντες κυματισμούς και τη σύζευξη μεταξύ των ιδιομορφών διαφορετικής τάξης στις διεπιφάνειες ,καταλήγουμε σε μία προσέγγιση,την αδιαβατική,στην οποία τόσο ο υπολογιστικός χρόνος όσο και η ασφάλεια της μεθόδου είναι ικανοποιητική.Παρουσιάζονται όμως προβλήματα όταν η σύζευξη των ιδιομορφών είναι απαραίτητη ,όπως στην περίπτωση απότομης κλίσης του πυθμένα,καθώς και στο γενικό τρισδιάστατο περιβάλλον με ραγδαία μεταβολή ως προς το αζιμούθιο.

Η αντιμετώπιση του ακουστικού προβλήματος στις τρείς διαστάσεις είναι αρκετά δύσκολη σε περιβάλλοντα τυχαίων γεωμετριών όμως και στις δύο διαστάσεις δεν είναι πάντοτε εφικτή λόγω της βασικής παραδοχής να παραμένει η ηχητική ακτίνα στο ίδιο κάθετο επίπεδο.Ένας τρόπος παράκαμψης της δυσκολίας αυτής δίνουν τα $N \times 2D$ μοντέλα.Στην πραγματικότητα είναι $2D$ μοντέλα που υπολογίζουν το ακουστικό πεδίο ως προς το βάθος και την απόσταση ,αλλά εφαρμόζονται για ένα μεγάλο αριθμό ,N το πλήθος ,γωνιών.Με τον τρόπο αυτό λαμβάνονται υπόψιν οι μεταβολές της βαθυμετρίας και της ταχύτητας του ήχου ως προς τη γωνία έχοντας όμως υποθέσει ότι η ηχητική ακτίνα καμπυλώνεται ελάχιστα ως προς την οριζόντιο.

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης στο τρισδιάστατο περιβάλλον γύρω όμως από ανομοιογένειες με απλή γεωμετρία όπως ενός κωνικού βουνού ή ένός κυλινδρικού νησιού. Μέχρι και σήμερα το πρόβλημα δεν έχει αντιμετωπιστεί στην ολότητά του σε περιβάλλοντα τριών διαστάσεων με τυχαία γεωμετρία.

3.1.1 Μια μεταβολική αρχή για την ακουστική διάδοση σε θαλάσσιο περιβάλλον στις τρεις διαστάσεις

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε ένα $3D$ περιβάλλον με εντοπισμένη ανομοιγένεια του πυθμένα.Για ένα περιβάλλον αυτής της μορφής έχει διατυπωθεί από τον Ταρουδάκη ένα θεώρημα βασισμένο σε μία μεταβολική αρχή (*variation principle*) που μπορεί να δώσει λύση στις τρείς διαστάσεις με κατάλληλη επεξεργασία . Η μεταβολική αρχή διατυπώνεται αποδεικνύοντας ότι η εξίσωση $Euler - Lagrange$ ενός κατάλληλου συναρτησοειδούς συμπίπτει με την πεδιακή εξίσωση η οποία έχει τις ίδιες συνθήκες στο σύνορο και στις διεπιφάνειες με εκείνες του πλήρως ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών. Μια μέθοδος για την αντιμετώπιση του ακουστικού προβλήματος βασιζόμενη στην μεταβολική αρχή είναι η υβριδική μέθοδος [11].Σύμφωνα με τη μέθοδο η πίεση αναπτύσσεται σε μία σειρά ιδιομορφών στο οριζόντια στρωματοποιημένο πεδίο και μια κατάλληλη αναπαράσταση στο πεδίο των μεταβαλλόμενων με την απόσταση παραμέτρων.

Η μέθοδος εφαρμόζεται σε κάθε περιβάλλον όπου η μεταβολή της βαθυμετρίας και των παραμέτρων του περιορίζονται σε ένα χωρίο πεπερασμένης έκτασης.Έξω από αυτό θεωρούμε το περιβάλλον οριζόντια στρωματοποιημένο. Ένα τέτοιο περιβάλλον φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 8. Γεωμετρική αναπαράσταση ενός $range - dependent$ περιβάλλοντος αξονικής συμμετρίας με επάλληλα στρώματα

Αποτελείται από ένα στρώμα νερού και ένα πολυστρωματικό πυθμένα που καταλήγει σε άκαμπτο υπόστρωμα.Τα σημεία επαφής των στρωμάτων συμβολίζονται ως: $J_l = \{r, h, \phi : r \geq 0, h = h_l(r, \phi), 0 \leq \theta \leq 2\pi\} l = 1, 2, ...L$ και μπορεί να έχουν ανομοιομορφία τυχαίου σχήματος.Για $l = 1$ θεωρούμε το στρώμα του νερού και για $l = L$ το στρώμα που είναι δίπλα στο άκαμπτο υπόστρωμα.Μια αρμονική σημειακή πηγή έχει τοποθετηθεί στο στρώμα του νερού και σε βάθος z_0.

Σύμφωνα με τη μεταβολική αρχή όταν το πεδίο παρουσιάζει μια ανομοιογένεια πεπερασμένης έκτασης μια ικανοποιητική τεχνική αντιμετώπισης της δυσκολίας αποτελεί η διαίρεση του πεδίου σε υποπεριοχές μία εκ των οποίων θα περιέχει την ανομοιομορφία. Επομένως χωρίζουμε το περιβάλλον σε τρείς υποπεριοχές:
a)Στην περιοχή κοντά στην ανομειογένεια($near\ field$) μέχρι την απόσταση $r = r^N$
b)Στην περιοχή μακρυά από την ανομειογένεια ($far\ field$) από την απόσταση $r = r^F$
c)Στην περιοχή ανάμεσα στο $r = r^N$ και στο $r = r^F$($intermediate\ field$) η οποία χαρακτηρίζεται από τυχαία μεταβολή της βαθυμετρίας και του προφίλ ταχύτητας $c = c(r, z, \phi)$.

Οι παράμετροι του περιβάλλοντος στην περιοχή τόσο κοντά στην ανομοιογένεια όσο και μακρυά θεωρούμε οτι είναι ανεξάρτητοι της απόστασης και το προφίλ ταχύτητας εξαρτάται μόνο από το βάθος z ενώ η ενδιάμεση υποπεριοχή περιέχει το πεδίο της ανομοιογένειας. Η πεδιακή εξίσωση που περιγράφει την ακουστική διάδοση που οφείλεται στη σημειακή αρμονική πηγή είναι η μηομογενης $Helmholtz$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z}+k^2(r,z,\phi)P = -\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\phi) \tag{3.1}$$

όπου $k(r, z, \phi)$ ο αριθμός κύματος.

Επιπλέον ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες στο σύνορο και στις διεπιφάνειες:

$$P_l = 0\ \sigma\tau o J_0 \tag{3.2}$$
$$P_l = P_{l+1}\ \sigma\tau o J_l \tag{3.3}$$
$$\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial P_l}{\partial \mathbf{n}_l} = -\frac{1}{\rho_{l+1}}\frac{\partial P_{l+1}}{\partial \mathbf{n}_l}\ \sigma\tau o J_l \tag{3.4}$$
$$\frac{\partial P_L}{\partial \mathbf{n}_L} = 0\ \sigma\tau o J_L \tag{3.5}$$

και μια συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ η οποία εκφράζει το γεγονός ότι οι κυματισμοί διαδίδονται προς το άπειρο. Η $P_l(r, z, \phi)$ εκφράζει την πίεση στο l-ιοστό στρώμα,$\mathbf{n}_l$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και ρ_l η πυκνότητα,η οποία θεωρείται σταθερή σε κάθε στρώμα.

Αν και το παραπάνω πρόβλημα είναι γραμμικό δεν αντιμετωπίζεται με ευκολία λόγω του γεγονότος ότι ο αριθμός κύματος δεν είναι σταθερος και οι διεπιφάνειες δεν είναι οριζόντιες.Έτσι ακολουθώντας τη συνήθη τακτική διάσπασης του πεδίου ,ορίζουμε ένα πρόβλημα για το πεδίο περίθλασης ($diffraction\ field$) και ένα για το πεδίο ακτινοβολίας ($radiation\ field$) .Η συνολική πίεση δίνεται ως άθροισμα των πιέσεων στα δύο παραπάνω πεδία:

$$P(r,z,\phi) = P_{rd}(r,z) + P_d(r,z,\phi) \tag{3.6}$$

Το πρόβλημα ακτινοβολίας αναφέρεται σε ένα αξονοσυμμετρικό περιβάλλον που ικανοποιείται η μη-ομογενής $Helmholtz$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z} + k^2(r,z)P = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r-r_0)\delta(z-z_0) \tag{3.7}$$

με ομογενής συνθήκες στις διεπιφάνειες και στο σύνορο κατα μήκος των οριζόντιων διαχωριστικών διεπιφανειών και μια συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld.$ Η αναλυτική λύση του προβλήματος έχει τη μορφή που γνωρίζουμε από την αναπαράσταση σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων σε περιβάλλον σταθερών παραμέτρων:

$$P_{rd} = \frac{1}{4\rho_l}\sum_{m=1}^{\infty} u_m(z_0)u_m(z)H_0^{(1)}(k_m r) \tag{3.8}$$

όπου $H_0^{(1)}(k_m r)$ η εξίσωση $Hankel$ πρώτου είδους μηδενικής τάξης και k_m και u_m οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχα του προβλήματος βάθους:

$$\rho(z)\frac{d}{dz}\Big[\frac{1}{\rho(z)}\frac{du_m(z)}{dz}\Big] + \{k^2(z) - k_m^2\}u_m(z) = 0 \tag{3.9}$$

Η απαίτηση ενός απολύτως άκαμπτου πυθμένα εξασφαλίζει ότι το φάσμα των ιδιοτιμών του προβλήματος βάθους είναι διακριτό και οι ιδιοσυναρτήσεις $u_m(z)$ είναι συνεχείς με τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο και αποτελούν ένα πλήρες σύστημα.

Το πρόβλημα περίθλασης ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 P_{d,l}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{d,l}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P_{d,l}}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P_{d,l}}{\partial z} + \frac{\partial P_{d,l}^2}{\partial z^2} + k_l^2 P_{d,l} = 0 \tag{3.10}$$

και τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$P_{d,l} = 0 \quad \sigma\tau o J_0 \tag{3.11}$$

$$P_{d,l} = P_{d,l+1} \quad \sigma\tau o J_l \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial(P_{d,l}+P_{rd})}{\partial \mathbf{n}_l} = -\frac{1}{\rho_{l+1}}\frac{\partial(P_{d,l+1}+P_{rd})}{\partial \mathbf{n}_l} \quad \sigma\tau o\ J_l \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial P_{d,L}}{\partial \mathbf{n_l}} = 0 \ \sigma\tau o\ J_L \tag{3.14}$$

Επιπλέον , απαιτούμε το πεδίο περίθλασης να είναι φραγμένο στον άξονα r , να ικανοποιεί τη συνθήκη $Sommerfeld$ στο άπειρο και να εξασφαλίζεται η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης παραγώγου αυτής στις κατακόρυφες διεπιφάνειες $J^*_{u,l}$ με $* \in \{N, F\}$.

Το βασικό πρόβλημα είναι ο τρόπος αναπαράστασης της πίεσης περίθλασης σε κάθε υποπεριοχή,πρόβλημα το οποίο λύνεται με τη βοήθεια της μεταβολικής αρχής που παρουσιάζεται στο παρακάτω θεώρημα [11].

θεώρημα 1 *Έστω ότι* $P^N_{d,l}$ *και* $P^F_{d,l}$, $l = 1, ..., L$ *το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν την (3.10) και τις συνθήκες (3.11)-(3.14) στις υποπεριοχές* D^N *και* D^F *αντίστοιχα.Υποθέτουμε επιπλέον ότι η* $P^N_{d,l}$ *είναι φραφμένη στο* $r = 0$ *και η* $P^F_{d,l}$ *ικανοποιεί συνθήκη ακτινοβολίας της μορφής* $\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\Big(\frac{\partial P^F_{d,l}}{\partial r} - ik_r P^F_{d,l}\Big) = 0$. *Τότε το σύνολο των συναρτήσεων* $\{P^N_{d,l}, P^F_{d,l}, P^I_{d,l}, l = 1, ..., L\}$ *είναι λύση του προβλήματος περίθλασης αν και μόνο αν αποτελούν σημεία τοπικού ακροτάτου για το συναρτησοειδές*

$$F\{P^N_{d,l}\mid_{l=1}^{L}, P^I_{d,l}\mid_{l=1}^{L}, P^F_{d,l}\mid_{l=1}^{L}\} = \sum_{l=1}^{L}\Big[\int_{D^I_l}\frac{1}{2}\frac{1}{\rho_l}\{(\nabla P^I_{d,l})^2 - (k^I_l)^2(P^I_{d,l})^2\}du + \frac{1}{\rho_l}\int_{J^N_{v,l}}(P^I_{d,l} - \frac{1}{2}P^N_{d,l})\frac{\partial P^N_{d,l}}{\partial n^N_l}ds + \frac{1}{\rho_l}\int_{J^F_{v,l}}(P^I_{d,l} - \frac{1}{2}P^F_{d,l})\frac{\partial P^F_{d,l}}{\partial n^F_l}ds\Big] + \sum_{i=1}^{L-1}\int_{J^I_l}\Big(\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial P_{rd}}{\partial n^I_l} + \frac{1}{\rho_{l+1}}\frac{\partial P_{rd}}{\partial n^I_{l+1}}\Big)P^I_{d,l}ds$$

Η ισχύς της μεταβολικής αρχής είναι η δυνατότητα εναλλακτικών αναπαραστάσεων των πιέσεων περίθλασης και η μη απαίτηση επιπλέον συνθηκών στις τεχνητές κάθετες διεπιφάνειες.Για το πρόβλημα που μελετάμε ικανοποιητικές αναπαραστάσεις των πιέσεων περίθλασης στα D^N και D^F αντίστοιχα αποτελούν οι:

$$P^N_{d,l}(r, z, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} A^N_{m\lambda} J_\lambda(k_m r)\cos(\lambda\phi)u_{l,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} B^N_{m,l} J_\lambda(k_m r)\sin(\lambda\phi)u_{l,m}(z) \tag{3.15}$$

και

$$P^F_{d,l}(r, z, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} A^F_{m\lambda} H^{(1)}_\lambda(k_m r)\cos(\lambda\phi)u_{l,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} B^F_{m,l} H^{(1)}_\lambda(k_m r)\sin(\lambda\phi)u_{l,m}(z) \tag{3.16}$$

όπου $J_\lambda(k_m r)$ η συνάρτηση $Bessel$ τάξεως λ και $H_\lambda^{(1)}(k_m r)$ η συνάρτηση $Hankel$ πρώτου είδους λ τάξης. Η εμφάνιση της εξίσωσης $Bessel$ οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο είναι φραγμένο για $r = 0$ ενώ δεν υπάρχει η συνάρτηση $Hankel$ δευτέρου είδους λόγω της συνθήκης ακτινοβολίας .

Το κύριο πρόβλημα για την αριθμητική λύση του προβλήματος περίθλασης είναι η εκτίμηση της πίεσης στο ενδιάμεσο χωρίο D_I. Εφόσον η μεταβολική αρχή δεν απαιτεί *a priori* συνθήκες για την πίεση $P_{d,l}^I$ μπορούμε να επιλέξουμε μια κατάλληλη αναπαράσταση της μορφής:

$$P_{d,l}^I = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{njk}^I \Phi_{njk}^I(r,z,\phi) \tag{3.17}$$

όπου Φ_{njk}^I κατάλληλες συναρτήσεις βάσης.

Για τον υπολογισμό των άγνωστων συντελεστών λαμβάνουμε υπ όψιν όλες τις οριακές συνθήκες , την ορθοκανονικότητα των ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος βάθους καθώς και τους τύποι των συντελεστών σύζευξης και καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο επιλύεται εύκολα στον υπολογιστή.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η μεταβολική αρχή έχει χρησιμοποιηθεί σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας με παραμέτρους μεταβαλλόμενες με την απόσταση με ικανοποιητικά αποτελέσματα.Η περιοχή της ανομοιομορφίας διακριτοποιείται σε κάθετους κυλινδρικούς δακτυλίους [12] σε κάθε ένα από τους οποίους οι παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται σταθερές με την απόσταση και καταλήγουμε με τον τρόπο αυτό σε ένα σχήμα σύζευξης ιδιομορφών παρόμοιο με αυτό που προτάθηκε από τους $Evans$ και $Pierce$.Η ακουστική πίεση αναπαριστάται από σειρά ιδιοσυναρτήσεων του τοπικού προβλήματος βάθους . Τα αριθμητικά μοντέλα που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη ενός περιβάλλοντος ρηχής θάλασσας με σταθερές παραμέτρους και ρηχής θάλασσας με ισοταχές στρώμα νερού και μία τυχαία ανύψωση στον πυθμένα [11] δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Η προσέγγιση που παρουσιάστηκε παραπάνω ,στην οποία έχουμε θεωρήσει συγκεκριμένες αναπαραστάσεις της πίεσης στην περιοχή κοντά και μακρυά από την ανομειογένεια και κανένα περιορισμό στην αναπαράσταση της πίεσης στην περιοχή της ανομοιομορφίας, διατηρεί τη σύζευξη των ιδιομορφών στη λύση. Επιτρέπει οποιαδήποτε τρόπο διακριτοποίησης του πεδίο της ανομειογένειας ενώ η αναπαράσταση της πίεσης μπορεί να γίνει είτε με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων είτε με αυτή της φασματικής αναπαράστασης. Ικανοποιητικά αποτελέσματα παρουσιάζει σε ρηχά θαλάσσια περιβάλλοντα και συχνότητες μικρές έως μεσαίες.Σε βαθειές θάλασσες και υψηλές συχνότητες η μέθοδος δεν είναι πρακτική αφού απαιτείται ο υπολογισμός ένας μεγάλος αριθμός ιδιομορφών που διαδίδονται στο περιβάλλον και συνεισφέρουν σημαντικά στο ακουστικό πεδίο.

3.1.2 Αντιμετώπιση του ακουστικού προβλήματος γύρω από ένα κωνικό νησί

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε δύο ειδικές περιπτώσεις περιβαλλόντων τα οποία έχουν μελετηθεί ικανοποιητικά.Το πρώτο έιναι ένα θαλάσσιο περιβάλλον με τοπική ανομοιογένεια κωνικού σχήματος και το δεύτερο ενός κυλινδρικού νησιού.

Ο υπολογισμός του ακουστικού πεδίου που οφείλεται σε μία αρμονική σημειακή πηγή γύρω από ένα εμπόδιο κωνικού σχήματος,το οποίο μπορεί να είναι ένα βουνό ή σε κάποια ακραία περίπτωση ένα νησί που αναδύεται έξω από την επιφάνεια του νερού ,αποτελεί σημαντικό αντικείμενο μελέτης στην υποβρύχια ακουστική .Το κωνικό σχήμα θεωρείται ως μια ειδική περίπτωση ρεαλιστικών εμποδίων τυχαίου σχήματος και ο κύριος λόγος μελέτης τους είναι το γεγονός ότι τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αποτελούν χαρακτηριστικές λύσεις για την αντιμετώπιση πιο πολύπλοκων τρισδιάστατων περιβάλλοντων.

Σχετικά προβλήματα με διάδοση σε πεδία με εμπόδια χαρακτηριστικών γεωμετρικών σχημάτων αναφέρονται από τον *Buckingham* και τον *Harrison* . Αναλυτικότερα ,μελέτη για την ακουστική διάδοση γύρω από ένα άκαμπτο κωνικό βουνό με ακλόνητο σύνορο έχει πραγματοποιήσει ο *Buckingham* [21] όπου σύμφωνα με την προσέγγιση του η ακουστική πίεση εκφράζεται σε όρους από πολυώνυμα *Legendre*. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το πρόβλημα γύρω από ένα διαπερατό κωνικό βουνό.

Το περιβάλλον το οποίο θα μελετήσουμε φαίνεται στο σχήμα 9.

Σχήμα 9. Το περιβάλλον

Αποτελείται από ένα στρώμα ρηχής θάλασσας με ένα κωνικού σχήματος βουνό με ακτίνα βάσης r_I.Το προφίλ ταχύτητας μεταβάλλεται τόσο με το βάθος όσο και με την απόσταση. Η γεωμετρία του πυθμένα θεωρείται οριζόντια και οι παράμετροι του περιβάλλοντος έξω από την κωνική ανύψωση λαμβάνονται σταθεροί με την απόσταση. Για απλοποίηση κατα τη μελέτη θα θεωρήσουμε μοναδικό ιζηματογενές στρώμα που καταλήγει σε ένα άκαμπτο επίπεδο πυθμένα σε βάθος $z = h$. Θα εργαστούμε στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων παίρνοντας τον άξονα των z να περνάει από την κορυφή του κώνου προς τα κάτω. Μια αρμονική σημειακή πηγή έχει τοποθετηθεί σε απόσταση r_0,βάθοςz_0 και γωνία $\phi_0 = 0$ ως προς την οριζόντιο.Οι παράμετροι του χωρίου έξω από την ανομειογένεια δε μεταβάλονται με την απόσταση πράγμα που φανερώνει ότι η ανομειογένεια είναι τοπική.

Το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης ,λόγω της σημειακής αρμονικής πηγής, διέπεται από τη μη ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ η οποία για την ακουστική πίεση $P(r, z, \phi)$γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z} + k^2(r, z)P \\ = -\frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(z - z_0)\delta(\phi) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα η οποία θεωρείται ως συνάρτηση μονάχα του z και σταθερή σε κάθε στρώμα και k ο αριθμός κύματος. Για απλοποίηση θεωρούμε ότι η πυκνότητα παραμένει σταθερή στα διάφορα στρώματα και θα συμβολίζουμε ρ_1 και ρ_2 την πυκνότητα στο νερό και στον πυθμένα αντίστοιχα.

Οι οριακές συνθήκες που απαιτούμε για την πίεση είναι να μηδενίζεται στην επιφάνεια του νερού, να είναι συνεχής στο όριο νερού-πυθμένα , η κάθετη παράγωγός της να παρουσιάζει πεπερασμένη ασυνέχεια στο ίδιο όριο και τέλος η κάθετη παράγωγος της να είναι μηδέν στο τελευταίο σύνορο($Neumann$ $boundary\ condition$).Μαθηματικά όλες οι παραπάνω απαιτήσεις περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}P^{(1)}(r, 0, \phi) &= 0 && (3.19)\\ P^{(1)} &= P^{(2)}\ \sigma\tau o\ S_b && (3.20)\\ \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P^{(2)}}{\partial \mathbf{n}}\ \sigma\tau o\ S_b && (3.21)\\ \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z}(r, h, \phi) &= 0 && (3.22)\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια νερού-ιζήματος S_b και ρ_1 ,ρ_2 οι πυκνότητες στο νερό και το ίζημα αντίστοιχα. Επιπλέον πρέπει να ικανοποιείται μια συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ που θα καθορίζει τη συμπεριφορά της λύσης στο άπειρο.

Για την καλύτερη αντιμετώπιση του προβλήματος χωρίζουμε το πεδίο σε δύο υποπεριοχές,όπως φαίνεται στο σχήμα 10, την εσωτερική όπου $0 \leq r \leq r_I$ και την εξωτερική για $r \geq r_I$ [22]. Ο υπολογισμός των πιέσεων στις δύο υποπεριοχές θα μας δώσει την έκφραση για τη συνολική πίεση του περιβάλλοντος.

Σχήμα 10. Η διάσπαση του χωρίου

Για το εσωτερικό χωρίο,δηλαδή αυτό που περιέχει την κωνική ανομειογένεια,η ακουστική πίεση P^I θα ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ εφόσον δεν περιέχει την πηγή

$$\frac{\partial^2 P^I}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P^I}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P^I}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P^I}{\partial z} + [k^I(r,z)]^2 P^I = 0 \tag{3.23}$$

και τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} P^{I,(1)}(r,0,\phi) &= 0 && (3.24)\\ P^{I,(1)} &= P^{I,(2)} \quad \sigma\tau o S_{bm} && (3.25)\\ \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P^{I,(1)}}{\partial n} &= \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P^{I,(2)}}{\partial n} \quad \sigma\tau o S_{bm} && (3.26) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P^{I,(2)}}{\partial z}(r,h,\phi) \;=\; 0 \tag{3.27}$$

όπου S_{bm} είναι το σύνορο του βουνού.

Το βουνό διακριτοποιείται ακόμα περισσότερο παίρνοντας τεχνητές κυλινδρικές διεπιφάνειες όπως φαίνεται στο σχήμα 11.

Σχήμα 11.Διακριτοποίηση του εσωτερικού χωρίου

Η νέα γεωμετρία προσομοιάζει περισσότερο στην πραγματική ανομοιομορφία.Σε κάθε δακτύλιο ο πυθμένας είναι οριζόντιος και βρίσκεται σε βάθος h_i,το προφίλ ταχύτητας είναι συνάρτηση μονάχα του βάθους και η ακουστική πίεση σε κάθε δακτύλιο ικανοποιεί πάλι την ομογενή εξίσωση *Helmholtz* (σχήμα 12).

Ακολουθώντας τυπικές προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων όπου η πίεση είναι μια συνάρτηση του βάθους ,της απόστασης και της γωνίας αναπτύσσουμε τη λύση σε ένα άθροισμα χρησιμοποιώντας πλήρη συστήματα για τη γωνία και το βάθος.

Γράφουμε με αυτό τον τρόπο την πίεση ως:

$$P_i^I(r,z,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} F_{mn}^{I,i}(r)\, u_{i,n}^I(z)\, \psi_m(\phi) \tag{3.28}$$

όπου $u_{i,n}^{I}(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος βάθους:

$$\rho(z)\frac{d}{dz}\Big[\frac{1}{\rho(z)}\frac{du_{i,n}^{I}}{dz}\Big] + \{[k_i^I(z)]^2 - (k_{i,n}^{I})^2\}u_{i,n}^{I} = 0 \tag{3.29}$$

όπου επιπλέον θεωρούμε :

$$u_{i,n}^{I}(z) = \begin{cases} u_{i,n}^{I,(1)}(z), & \text{αν } 0 \le z \le h_i\cdot \\ u_{i,n}^{I,(2)}(z), & \text{αν } h_i \le z \le h \end{cases} \tag{3.30}$$

και $k_{i,n}^{I}$είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές τάξεως n με συνοριακές συνθήκες :

$$u_{i,n}^{I,(1)}(0) = 0 \tag{3.31}$$

$$u_{i,n}^{I,(1)}(h_i) = u_{i,n}^{I,(2)}(h_i) \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{du_{i,n}^{I,(1)}}{dz}(h_i) = \frac{1}{\rho_2}\frac{du_{i,n}^{I,(2)}}{dz}(h_i) \tag{3.33}$$

$$\frac{du_{i,n}^{I,(2)}}{dz}(h) = 0 \tag{3.34}$$

και $\psi_m(\phi)$ συναρτήσεις που ικανοποιούν το πρόβλημα γωνίας και οι οποίες λόγω της συμμετρίας ως προς τη γωνία $\phi = 0$ μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας ως συναρτήσεις βάσης συνημιτόνα:

$$\psi_m(\phi) = e_m \cos(m\phi) \tag{3.35}$$

$m = 0, 1, ...$ όπου τα e_m ορίζονται ως εξής,

$$e_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & m = 0\cdot \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & m \neq 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Σχήμα 12.Το εσωτερικό τμήμα i

Τέλος,χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των $u_{i,n}^I$και των $\psi_m(\phi)$ προκύπτει ότι τα $F_{\mu,\nu}^{I,i}(r)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση $Bessel$ μ τάξεως και επομένως η λύση μπορεί να αναπαρασταθεί από εξισώσεις $Hankel$ ως εξής:

$$F_{\mu\nu}^{I,i}(r) = A_{\mu\nu}^{I,i} H_\mu^{(1)}(k_{i,\nu}^I r) + B_{\mu\nu}^{I,i} H_\mu^{(2)}(k_{i,\nu}^I r) \tag{3.37}$$

όπου $H_\mu^{(1)}(.)$ και$H_\mu^{(2)}(.)$είναι οι συναρτήσεις $Hankel$ τάξεως μ πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα και $A_{\mu\nu}^{I,i}$,$B_{\mu\nu}^{I,i}$ συντελεστές που θα καθοριστούν παρακάτω.Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει για κάθε κύλινδρο εκτός από τον πρώτο στον οποία ισχύει

$$F_{\mu\nu}^{I,1}(r) = A_{\mu\nu}^I J_\mu(k_{1,\nu}^I r) \tag{3.38}$$

όπου $J_\mu(.)$ η συνάρτηση $Bessel$ μ τάξεως, λόγω του φράγματος της λύσης στο σύνορο.

Το εξωτερικό χωρίο,λόγω της ύπαρξης της πηγής,ικανοποιεί τη μη ομογενή $Helmholtz$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P^E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P^E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P^E}{\partial \phi^2} + \frac{\partial P^E}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P^E}{\partial z} + [k^E(z)]^2 P^E \\ = -\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\phi)\end{aligned} \tag{3.39}$$

με οριακές συνθήκες:

$$P^{E,(1)}(r,0,\phi) = 0 \tag{3.40}$$

$$P^{E,(1)}(r,h_E,\phi) = P^{E,(2)}(r,h_E,\phi) \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P^{E,(1)}}{\partial z}(r,h_E,\phi) = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P^{E,(2)}}{\partial z}(r,h_E,\phi) \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial P^{E,(2)}}{\partial z}(r,h,\phi) = 0 \tag{3.43}$$

Όπως και προηγουμένως η πίεση γράφεται στη μορφή:

$$P^E(r,z,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} F_{mn}^E(r) u_n^E(z)\psi_m(\phi) \tag{3.44}$$

όπου $u_n^E(z)$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος βάθους και $\psi_m(\phi)$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος γωνίας όπως ορίστηκαν προηγουμένως.

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των παραπάνω συναρτήσεων καταλήγουμε σε μία δευτέρας τάξεως συνήθη διαφορική εξίσωση ορισμένη σε ένα ημιάπειρο χωρίο με μία πηγή τοποθετημένη σε απόστασηr_0 που ικανοποιεί η συνάρτηση $F_{mn}^{E}(r)$ και είναι η :

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{F_{\mu\nu}^{E}(r)}{\psi_m(0)u_\nu^E(z_0)}\right] + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{F_{\mu\nu}^{E}(r)}{\psi_m(0)u_\nu^E(z_0)}\right] + \left[(k_\nu^E)^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right]\left[\frac{F_{\mu\nu}^{E}(r)}{\psi_m(0)u_\nu^E(z_0)}\right] = -\frac{1}{r}\delta(r-r_0) \quad (3.45)$$

Για την καλύτερη αντιμετώπιση του εξωτερικού χωρίου το διαιρούμε σε δύο επιπλέον υποπεριοχές,την ενδιάμεση $(intermediate)$η οποία ορίζεται για (r_I, r_0)και την εξωτερική $(outer)$ η οποία ορίζεται για (r_0, ∞). Παρατηρούμε ότι έχουμε αποκλείσει τη θέση της πηγής και από τα δύο χωρία . Παίρνοντας όμως κατάλληλες συνθήκες για την πηγή θα απαιτήσουμε η λύση στα δύο χωρία να συμπίπτει στη θέση $r = r_0$.

Τόσο το ενδιάμεσο όσο και το εξωτερικό πεδίο ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση που προκύπτει από την (3.45),που είναι μια εξίσωση $Bessel$ μ τάξεως.Η λύση θα δίνεται ως άθροισμα συναρτήσεων $Hankel$ πρώτου και δευτέρου είδους τάξεως μ για την $R_{\mu\nu}^{E,T}$. Στην έκφραση για την $F_{\mu\nu}^{E,X}$ θα εμφανίζονται μονάχα πρώτου είδους συναρτήσεις $Hankel$ λόγω της συνθήκης ακτινοβολίας $Sommerfeld$ που αποκλείει από τη λύση ενέργεια από επιστρέφοντες κυματισμούς.

Επομένως οι τελικές εκφράσεις είναι:

$$F_{\mu\nu}^{E,T}(r) = \{A_{\mu\nu}^E(r)H_\mu^{(1)}(k_\nu^E r) + B_{\mu\nu}^E(r)H_\mu^{(2)}(k_\nu^E r)\}\psi_\mu(0)u_\nu^E(z_0) \quad (3.46)$$

$$F_{\mu\nu}^{E,X}(r) = C_{\mu\nu}^E(r)H_\mu^{(1)}(k_\nu^E r)\psi_\mu(0)u_\nu^E(z_0) \quad (3.47)$$

Για τον πλήρη καθορισμό των πιέσεων απαιτούμε συνθήκες στις τεχνητές διεπιφάνειες , που θα εξασφαλίζουν τη συνέχεια της πίεσης και της κάθετης παραγώγου και μια συνθήκη πηγής,η οποία εξασφαλίζει συνέχεια του ακουστικού πεδίου γύρω από την πηγή συμπεριλαμβανομένης και της θέσης r_0 και τη σωστή ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου σύμφωνα με τη συνάρτηση διέγερσης της πηγής στην εξίσωση(3.45).

Συνοψίζοντας οι συνθήκες που απαιτούνται είναι:

$$P_i^I(r_i, z, \phi) = P_{i+1}^I(r_i, z, \phi) \quad (3.48)$$

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial P_i^I}{\partial r}(r_i, z, \phi) = \frac{1}{\rho_{i+1}}\frac{\partial P_{i+1}^I}{\partial r}(r_i, z, \phi) \quad (3.49)$$

για κάθε διεπιφάνεια $r_i, i = 1, 2, ..., I-1$ και

$$P_I^I(r_I, z, \phi) = P^{E,T}(r_I, z, \phi) \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{\rho_I}\frac{\partial P_I^I}{\partial r}(r_I, z, \phi) = \frac{1}{\rho_E}\frac{\partial P^{E,T}}{\partial r}(r_I, z, \phi) \quad (3.51)$$

στο r_I.

Επιπλέον για την πηγή θα ισχύει:

$$\frac{F_{\mu\nu}^{E,Q}(r_0)}{\psi_\mu(0)u_\nu^E(z_0)} = \frac{F_{\mu\nu}^{E,T}(r_0)}{\psi_\mu(0)u_\nu^E(z_0)} \tag{3.52}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{F_{\mu\nu}^{E,X}(r_0)}{\psi_\mu(0)u_\nu^E(z_0)}\right] - \frac{d}{dr}\left[\frac{F_{\mu\nu}^{E,T}(r_0)}{\psi_\mu(0)u_\nu^E(z_0)}\right] = -\frac{1}{r_0} \tag{3.53}$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις παραπάνω συνθήκες καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα για τον υπολογισμό των άγνωστων συντελεστών το οποίο υλοποιείται στον υπολογιστή.

Η κωνική ανύψωση μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική περίπτωση ρεαλιστικού εμποδίου τυχαίου σχήματος και ο κύριος λόγος μελέτης του απότελεί το γεγονός ότι η έκφραση της ακουστικής πίεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την αντιμετώπιση πιο περίπλοκων τρισδιάστατων χωρίων.Το κωνικό σχήμα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα συμμετρικό τυχαίο σχήμα χωρίς να μεταβληθεί τίποτα κατά την παραπάνω μελέτη.Τα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε θαλάσσια περιβάλλοντα χαμηλών συχνοτήτων δείχνοντας ταυτόχρονα το μέγεθος της σπουδαιότητας του ύψους του κωνικού βουνού.

Προβλήματα εντούτις ανακύπτουν όταν η συχνότητα είναι μεγάλη λόγω της αργής σύγκλισης του αναπτύγματος σε σειρά της ακουστικής πίεσης.Ο υπολογισμός συναρτήσεων $Hankel$ πολύ μεγάλων τάξεων απότελεί ένα επιπρόσθετο πρόβλημα αφού απαιτείται ο υπολογισμός αρκετών τριγονομετρικών συναρτήσεων. Αναλυτικότερα,γνωρίζουμε ότι οι σχέσεις που συνδέουν τις συναρτήσεις $Hankel$ με τις συναρτήσεις $Bessel$ είναι

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + i\Psi_m(x) \tag{3.54}$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - i\Psi_m(x) \tag{3.55}$$

,όπου $\Psi_m(x)$ είναι η συνάρτηση $Neumann$. Εφόσον η συμπεριφορά των συναρτήσεων $Bessel$ εξαρτάται από την τάξη και το όρισμα υπολογιστικά προβλήματα προκύπτουν σε περιπτώσεις όπου η τάξη της συνάρτησης είναι πολύ μεγαλύτερη από το όρισμα,αφού τότε η $\Psi_m(x)$τείνει στο $-\infty$ αρκετά γρήγορα γεγονός που είναι έκδηλο σε μικρές αποστάσεις.Τέλος ,ενώ η σύγκλιση της σειράς θα σήμαινε μικρές τιμές των συντελεστών,ο υπολογισμός τους μπορεί πρακτικά να είναι ανέφικτος λόγω της ύπαρξης στοιχείων στους πίνακες με μεγάλη απόλυτη τιμή.

3.1.3 Αντιμετώπιση του ακουστικού προβλήματος γύρω από ένα κυλινδρικό νησί

Ένα άλλο πρόβλημα που έχει μελετηθεί με ικανοποιητικά αποτελέσματα είναι αυτό ενός μη-διαπερατού κυλινδρικού νησιού σε ρηχή θάλασσα.Η γεωμετρία του περιβάλλοντος που θα μελετήθεί φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Θεωρούμε ένα κύλινδρο ακτίνας a που περιβάλλεται από ένα στρώμα νερού σταθερού βάθους h.Ο κύλινδρος εκτείνεται από ένα άκαμπτο πυθμένα ∂D_B μέχρι την επιφάνεια της θάλασσας ∂D_F ,που την υποθέτουμε ελεύθερη πιέσεων.Το ακουστικό πεδίο δημιουργείται από μία σημειακή αρμονική πηγή, η οποία έχει τοποθετηθεί έξω από τον κύλινδρο στη θέση $(r_0, z_0, 0)$.Το περιβάλλον θεωρείται οριζόντια στρωματοποιημένο δηλαδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση μονάχα του βάθους και η πυκνότητα είναι σταθερή.

Σχήμα 13.Γεωμετρική αναπαράσταση

Η πεδιακή εξίσωση που περιγράφει το ακουστικό πεδίο είναι η μη-ομογενής $Helmholtz$:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+[k(r,z)]^2 P = -\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\phi) \quad (3.56)$$

όπου έχει αγνοηθεί η χρονική εξάρτηση της πίεσης και $k(r, z, \phi)$ είναι ο αριθμός κύματος.
Οι συνοριακές που πρέπει να ικανοποιεί η πίεση είναι :

$$P(r, h, \phi) = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(r, 0, \phi) = 0 \quad (3.58)$$

$$\alpha P(a, z, \phi) + \beta \frac{\partial P(a, z, \phi)}{\partial r} = q(r, z) \quad (3.59)$$

όπου $q(r,z)$ γνωστή συνάρτηση και μια κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ στο άπειρο ($r \to \infty$).

Η αναλυτική λύση του προβλήματος προκύπτει γράφοντας την πίεση σε μορφή σειράς:

$$P(r,z,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}(r)u_n(z)\psi_m(\phi) \tag{3.60}$$

όπου $u_n(z)$ οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος βάθους σε ένα οριζόντια στρωματοποιημένο αξονοσυμμετρικό μέσο έξω από τον κύλινδρο και $\psi_m(\phi)$ οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος γωνίας όπως καθορίστηκαν στην περίπτωση της κωνικής ανύψωσης. Ο καθορισμός των ιδιομορφών $F_{nm}(r)$ γίνεται αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην $Helmholtz$ και κάνοντας χρήση της ορθοκανονικότητας των $u_n(z)$ και $\psi_m(\phi)$.

Για την αναπαράσταση της ακουστικής εξίσωσης έχει αποδειχθέι το ακόλουθο θεώρημα [23]

θεώρημα 2 *Η ακουστική πίεση $P(r,z,\phi)$ ικανοποιεί τη μη-ομογενή $Helmholtz$, τις οριακές συνθήκες (3.57),(3.58) και μια συνθήκη ακτινοβολίας της μορφής $\frac{dF_{mn}(k_n r)}{dk_n r} - iF_{mn}(k_n r) = O((K_n r)^{-3/2})$ καθώς $k_n r \to \infty$ αν και μόνο αν αναπαρίσταται σε σειρά με την εξής μορφή*

$$P(r,z,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn}H_m^{(1)}(k_n r)u_n(z)\psi_m(\phi) + \tag{3.61}$$

$$\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e_m H_m^{(1)}(k_n r_>)u_n(z_s)H_m^{(2)}(k_n r_<)u_n(z)\cos(m\phi)$$

όπου $r_> = max(r,r_0)$,$r_< = min(r,r_0)$ και A_{mn} ' αυθαίρετες ' σταθερές.

Η παραπάνω αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης αποτελεί βασικό εργαλείο για τον καθορισμό αναλυτικών λύσεων σε διάφορα προβλήματα συνοριακών τιμών υπό την παρουσία ενός κυλινδρικού νησιού με άξονα στο $r = 0$ και ακτίνα a.Ο υπολογισμός των άγνωστων συντελεστών γίνεται με την απαίτηση μιας συνθήκης στο σύνορο της κυλινδρικής διεπιφάνειας.Για την ειδική περίπτωση μιας διεπιφάνειας διαπερατής ($soft\ cylindrical\ surface$) και μίας σκληρής ($hard\ cylindrical\ surface$) έχει αποδειχθεί από τους Αθανασσούλη και Προσπαθόπουλο [24] ότι η πίεση γράφεται στη μορφή:

$$P(r,z,\phi) = \frac{i}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_n r_>)u_n(z_0)\Big[H_m^{(2)}(k_n r_<) - \Lambda_m(k_n a)H_m^{(1)}(k_n r_<)\Big]u_n(0)\psi_m(\phi) \tag{3.62}$$

όπου $\Lambda_m^{soft} = \frac{H_m^{(2)}(k_n a)}{H_m^{(1)}(k_n a)}$, $\Lambda_m^{hard} = \frac{\Phi_m^{(2)}(k_n a)}{\Phi_m^{(1)}(k_n a)}$ και $\Phi_m^p(x) = \frac{dH_m^{(p)}(x)}{dx}$,$p = 1,2$

Ένα χαρακτηριστικό της παραπάνω λύσης είναι η παρουσία τριών αριθμών κύματος:
ι)k_0a στηριζόμενο στην ακτίνα a
ιι)k_0r_0 στηριζόμενο στην απόσταση της πηγής
ιιι)k_0r στηριζόμενο στην απόσταση του δέκτη r ($k_0r \geq k_0a$)

Επιπλέον στην ανάλυση των παραπάνω αριθμών κυμάτων δεν έχουμε επιβάλει περιορισμους, επομένως η παραπάνω λύση μπορεί να θεωρηθεί ως γενική λύση για οποιαδήποτε απόσταση δηλαδή στο $[0, \infty)$.Απο φυσικής απόψεως όμως υπάρχουν παριορισμοί στη σχέση των k_0a και k_0r που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της σχέσης (3.62)ενώ για τον αριθμό κύματος k_0r_0 δεν υπάρχουν αυστηροί περιρισμοί.Καθώς $k_0r_0 \to \infty$ το πρόβλημα περιορίζεται σε ένα πρόβλημα περίθλασης επίπεδων ακουστικών κυμάτων γύρω από ένα κυλινδρικό νησί, το οποίο είναι πιο εύκολα αντιμετωπίσισμο εφόσον μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ασυμπτωτική έκφραση της συνάρτησης *Hankel*.

Με τη βοήθεια μιας εκτεταμένης ασυμπτωτικής ανάλυσης έχει δειχθεί [24] ότι ένας ελάχιστος αριθμός αζιμουθιανών όρων που χρείαζονται για την επίτευξη της αριθμητικής σύγκλισης της σειράς (3.62)είναι $m_{cr} = \lambda_1 k_0 min\{r, r_0\}$ και στην ισοταχύ περίπτωση που μελετάμε παίρνει τη μορφή :

$$m_{cr} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2} \frac{2\pi f min\{r, r_0\}}{c_0} \tag{3.63}$$

όπου $f_0 = c_0/4h$ είναι η οριακή συχνότητα του κυματοδηγού.

Η μελέτη του προβλήματος διάδοσης γύρω από μία κυλινδρική ανύψωση όπως παρουσιάστηκε παραπάνω είναι ανάλογη με αυτή του κωνικού νησιού στο μοντέλο του Ταρουδάκη.Εκτενής σύγκριση των δύο μοντέλων θα γίνει στο πέμπτο καφάλαιο. Κατά την έκφραση των Αθανασσούλη και Προσπαθόπουλο παρουσιάζονται στη σχέση της πίεσης λόγοι των συναρτήσεων *Hankel* οι οποίοι είναι πιο εύκολα υπολογίσιμοι για μεγάλα ορίσματα σε σχέση με τον υπολογισμό των συναρτήσεων *Hankel*. Η αναλυτική λύση που παρουσιάστηκε παραπάνω μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα πρόβλημα αναφοράς στην προσπάθεια μοντελοποίησης του τρισδιάστατου υποβρύχιο ακουστικό προβλήματος .Αριθμητικές εφαρμογές που έχουν γίνει σε περιβάλλοντα ρηχών θαλασσών χαμηλής συχνότητας δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα τόσο για το ακουστικό πεδίο όσο και για την απώλεια διάδοσης γύρω από την κυλινδρική ανύψωση.Πρόσφατα αποτελέσματα για διάδοση με μεσαίες και υψηλές συχνότητες δείχνουν καλή συμπεριφορά του μοντέλου. Η μέθοδος μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε πιο ρεαλιστικά περιβάλλοντα χωρίς σημαντική επιπρόσθετη προσπάθεια.Η δομή της λύσης της ακουστικής πίεσης όπως δινεται στη σχέση (3.62) επιτρέπει ανεξάρτητη λύση του προβλήματος βάθους.Επιπλέον επεκτάσεις για το υλικό κατασκευής της κυλινδρικής ανύψωσης ,όπως ενός ελαστικού υλικού , είναι δυνατές και έχει ήδη ξεκινήσει προσπάθεια αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού.

Κεφάλαιο 4

Μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης στις τρείς διαστάσεις

4.1 Εισαγωγή

Σε ρεαλιστικά θαλάσσια περιβάλλοντα οι μεταβολές της τοπογραφίας του πυθμένα και του προφίλ ταχύτητας ως προς τις τρεις χωρικές μεταβλητές (απόσταση ,βάθος , αζιμούθιο) αποτελούν την κύρια αιτία των τρισδιάστατων επιδράσεων της ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα.Επιπλέον τα προβλήματα στην εφαρμογή της μεθόδου Κανονικών Ιδιομορφών σε περιβάλλοντα με συγκεκριμένη ανομοιογένεια του πυθμένα επιβάλουν την εισαγωγή μίας διαφορετικής αντιμετώπισης του ακουστικού προβλήματος .Η μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης απότελεί ένα ικανοποιητικό εργαλείο στην προσπάθεια αντιμετώπισης προβλημάτων σε πιο ρεαλιστικά θαλάσσια περιβάλλοντα. Οι υπολογιστικοί κώδικες για την παραβολική εξίσωση στις τρείς διαστάσεις εισήχθησαν και χρησιμοποιούνται στην υποβρύχια ακουστική τις τελευταίες δεκαετίες.Σημαντική συνεισφορά στη καθιέρωση της έχουν οι *Lee* και *Pierce* .Υπενθυμίζουμε ότι οι γνωστοί περιορισμοί της μικρής γωνίας διάδοσης έχουν σχεδόν εξαφανιστεί καθώς οι έρευνες έχουν επεκταθεί σε κώδικες που λειτουργούν και για υψηλές γωνίες και παλαιότερες αριθμητικές μεθόδοι έχουν αναθεωρηθεί για την αντιμετώπιση νέων παραβολικών εξισώσεων ευρύτερης γωνίας.Προσπάθειες έχουν γίνει και προς την κατεύθυνση επίλυσης του σφάλματος φάσης της παραβολικής μεθόδου για το οποίο είναι γνωστό ότι αυξάνεται με την απόσταση.

Οι πιο γνωστοί και ευρέως χρησιμοποιήσιμοι κώδικες είναι οι εξής:
a)Ο κώδικας *FOR3D* του *Lee* [25](1992) ,που αποτελεί και το πιο εξελιγμένο και ταυτόχρονα χρησιμοποιήσιμο πρόγραμμα για τους τρεισδιάστατους υπολογισμούς.Έχει αναθεωρηθεί αρκετά ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει ευρύτερες γωνίες διάδοσης , την ανάκλαση ,την ελαστικότητα του πυθμένα και να είναι

πιο σταθερός και υπολογιστικά αποδοτικός .
b)Ο κώδικας των $Collins$ και $Chin - Bing$ [26](1990) οι οποίοι κατασκεύασαν μια τρεισδιάστατη παραβολική εξίσωση που περιλαμβάνει την επίδραση ενός ανώμαλου συνόρου.Το μοντέλο όμως παρουσιάζει υπολογιστική ευαισθησία.Ικανοποιεί περιβάλλοντα με μεγάλες γωνίες ως προς το βάθος,μικρές γωνίες ως προς το αζιμούθιο και αυλακωτούς πυθμένες σε ρηχές θάλασσες.Βρέθηκε ότι η οριζόντια διάθλαση μπορεί να είναι σημαντική σε ορισμένα προβλήματα ακόμα και σε ρηχές θάλασσες.
c)Ο κώδικας του $Sturm$ [27][28](1990) ο οποίος κατασκεύασε μία παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας ως προς το βάθος και μικρή ως προς το αζιμούθιο. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα τόσο για την $3D$ όσο και για την $N \times 2D$ περίπτωση σε περιβάλλοντα σφηνοειδούς γεωμετρίας έχουν δώσει ικανοποιητικά ποτελέσματα .
d) Ο κώδικας του $Fawcett$ [29](1992) που εφαρμόζεται σε περιβάλλον που έχει μία διαπερατή σφηνοειδή γεωμετρία .Η εξίσωση του είναι ευρείας γωνίας ως προς το βάθος και στενής ως προς το αζιμούθιο.
e) Ο κώδικας $PECan$ [30]ο οποίος προσεγγίζει τον τελεστή γωνίας Y με δύο διαφορετικούς τρόπους , με ένα μετασχηματισμό $Fourier$ και με ένα σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών.Αριθμητικά αποτελέσματα του κώδικα έχουν συγκριθεί με αυτά του κώδικα του $Fawcett$ και παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες ως προς την απώλεια διάδοσης .

Άλλοι κώδικες , τους οποίους όμως δε θα μελετήσουμε , είναι ο κώδικας του $Orchard$ (1992)που ανέπτυξε την περίπτωση τόσο της μικρής όσο και της μεγάλης γωνίας διάδοσης για τον κώδικα $FOR3D$ στο πεδίο του χρόνου που κατασκευάστηκαν για τη μελέτη της απορρόφισης χημικών δειγμάτων.Η μελέτη της σταθερότητας του κώδικα συνεχίζεται και ελπίζεται η διεύρυνση της μεθόδου σε περισσότερες και πιο γενικές καταστάσεις στη φύση. Τέλος ο $Collins$(1993) κατασκεύασε ένα υβριδικό $3 - D$ κώδικα ο οποίος χρησιμοποιεί μια προσέγγιση της παραβολικής εξίσωσης στην ακτινική κατεύθυνση και και μια αδιαβατική μέθοδο κανονικών ιδιομορφών στην αζιμουθιανή κατεύθυνση.Το μοντέλο λειτουργεί ικανοποιητικά σε χαμηλές συχνότητες και είναι κατάλληλο για διάδοση μεγάλης αποστάσης.

4.2 Διατύπωση της παραβολικής εξίσωσης στις τρείς διαστάσεις

Θα παράγουμε την παραβολική προσέγγιση στις τρείς διαστάσεις ξεκινώντας από την τρισδιάστατη ομογενή εξίσωση $Helmholtz$ σταθερής πυκνότητας διατυπομένη στο κυλινδρικό σύστημα αναφοράς :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + k_0^2[n^2(r,z,\phi) - 1]P = 0 \tag{4.1}$$

όπου $k_0 = \frac{2\pi f}{c_0}$ ο αριθμός κύματος αναφοράς ,f η συχνότητα της πηγής και $n(r,z,\phi) = \frac{c_0}{c(r,z,\phi)}$ ο δέικτης διάθλασης.

Υπενθυμίζουμε ότι το πρόβλημα συμπληρώνεται με κατάλληλες οριακές συνθήκες στο σύνορο και στο άπειρο.

Σχήμα 14.Το πρόβλημα στις τρείς διαστάσεις

Θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση για την πίεση με τη μορφή [25] :

$$P(r,z,\phi) = \psi(r,z,\phi)u(r) \tag{4.2}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι η κύρια εξάρτηση ααπό την απόσταση εντοπίζεται στη συνάρτηση u. Αντικαθιστώντας την (4.2) στην εξίσωση $Helmholtz$

καταλήγουμε σε μία σχέση της οποίας η μορφή δίνεται ως :

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\psi+\Big[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}+\Big(\frac{1}{r}+\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\frac{\partial \psi}{\partial r}$$
$$+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}+k_0^2 n^2(r,z,\phi)\psi\Big]u=0 \qquad (4.3)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών με σταθερά χωρισμού k_0 προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τιςu και ψ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+k_0^2 u \;=\; 0 \qquad (4.4)$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}+\Big(\frac{1}{r}+\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}+k_0^2[n^2(r,z,\phi)-1]\psi \;=\; 0 \qquad (4.5)$$

Η εξίσωση (4.4) μπορεί να μελετηθεί ως μία δευτέρας τάξεως συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς την απόσταση r.Η λύση της θα περιέχει δύο εκθετικές ποσότητες μία που θα αναφέρεται στο εξερχόμενο κύμα μέσω της μηδενικής τάξεως συνάρτησης $Hankel$ πρώτου είδους και μία για τον εισερχόμενο κυματισμό μέσω της συνάρτησης $Hankel$ δευτέρου είδους μηδενικής τάξης .Αγνοώντας τον εισερχόμενο κυματισμό καταλήγουμε στη μορφή για την u:

$$u \simeq H_0^{(1)}(k_0 r) \qquad (4.6)$$

η οποία έπειτα από την απαίτηση ότι βρισκόμαστε μακριά από την ηχητική πηγή , $k_0 r \gg 1$, δίδει την ασυμπτωτική έκφραση για τη συνάρτηση $Hankel$:

$$u \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}e^{i(k_0 r-\frac{\pi}{4})} \qquad (4.7)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στην (4.5) ώστε να απλοποιηθούν οι συντελεστές του όρου $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ και παίρνουμε :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}+2ik_0\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}+k_0^2[n^2(r,z,\phi)-1]\psi=0 \qquad (4.8)$$

η οποία περιλαμβάνει τόσο τον εισερχόμενο όσο και τον εξερχόμενο κυματισμό παρά την αλποποίηση που έγινε. Εφόσον έχουμε θεωρήσει ότι ο παράγοντας ψ μεταβάλλεται πολύ αργά με την απόσταση σε σχέση με τη συνάρτηση $Hankel$ μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$ συγκρινόμενο με τον όρο $2ik_0\frac{\psi}{\partial r}$ και καταλήγουμε στην $standard$ παραβολική εξίσωση του $Tappert$ στις τρεις διαστάσεις :

$$2ik_0\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}+k_0^2[n^2(r,z,\phi)-1]\psi=0 \qquad (4.9)$$

Στην προσπάθεια καλύτερης κατανόησης και εξαγωγής εξισώσεων μεγάλυτερου εύρους γωνίας οι *Lee* και *McDaniel* χρησιμοποίησαν μία προσέγγιση παραγοντοποίησης μετασχηματίζοντας την (4.8)στην :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 - ik_0\sqrt{1+X+Y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 + ik_0\sqrt{1+X+Y}\Big)\psi$$
$$= ik_0\Big(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1+X+Y} - \sqrt{1+X+Y}\frac{\partial}{\partial r}\Big)\psi \qquad (4.10)$$

όπου

$$X = n^2(r,z,\phi) - 1 + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (4.11)$$

$$Y = \frac{1}{k_0^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \qquad (4.12)$$

Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial}{\partial z}$ και $\frac{\partial}{\partial r}$ αντιμετατίθενται τότε το δεξί μέλος της εξίσωσης (4.10) και στην περίπτωση αυτή η σχέση που εκφράζει τον εξερχόμενο κυματισμό δίδεται ως :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + \sqrt{1+X+Y}\Big)\psi \qquad (4.13)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί τη βάση για την παραγωγή προσεγγιστικών παραβολικών εξισώσεων οι οποίες ανάλογα με την εκτίμηση της υπόριζου ποσότητας θα δίδει διαδόσεις μικρής έως και πολύ μεγάλης γωνίας ως προς την ορζόντιο.

Οι παραδοχές που έχουν γίνει ώστε να προκύψει η (4.13)είναι ότι βρισκόμαστε στην περιοχή μακρυά από την ανομειογένεια , η ποσότητα $\sqrt{1+X+Y}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1+X+Y}\psi$ είναι αμελητέα και η επιστρεφόμενη ενέργεια είναι αμελητέα. Μάλιστα οι τελευταίες δύο απαιτήσεις οριοθετούν την ισχύ της εξίσωσης σε ’ ασθενή ’ εξάρτηση από την απόσταση.

Συνοψίζοντας,η εξίσωση μετατροπής (4.2) ,που χρησιμοποιήθηκε στην υποβρύχια ακουστική από τον *Tappert*, τροποποιεί την εξίσωση *Helmholtz* σε μία εξίσωση ελλειπτικού τύπου. Παίρνοντας την προσέγγιση για το πεδίο μακριά από την ανομοιογένεια $k_0 r \gg 1$ η εξίσωση (4.5) μετασχηματίζεται στην κυματική εξίσωση μακρινού πεδίου (4.8). Η αποκοπή του όρου $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ στην (4.8) πραγματοποιείται έπειτα από την παραδοχή ότι η διάθλαση μεταβάλλεται λίγο στο $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ κατά μήκος του αριθμού κύματος επομένως $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} < 2ik_0\frac{\psi}{\partial r}$. Η τελική εξίσωση (4.9)είναι γνωστή στην υποβρύχια ακουστική ως βασική (*standard*) παραβολική εξίσωση και έιναι μια διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου παρόμοια με αυτή της εξίσωσης *Schrödinger*.

4.3 Εναλλακτικές μορφές παραβολικής εξίσωσης στις τρείς διατάσεις

4.3.1 Ο κώδικας των *Siegmann-Kriegwmann-Lee*

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στους πιο γνωστούς κώδικες παραβολικής εξίσωσης που έχουν αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση του ακουστικού προβλήματος για ένα μεγάλο εύρος γωνιών διάδοσης .

Το γενικό θαλάσσιο περιβάλλον στο οποίο θεωρούμε την ακουστική διάδοση θα αποτελείται από ένα στρώμα νερού πυκνότητας ρ_w και ένα ή επάλληλα στρώματα ρευστού ιζήματος με πυκνότητα ρ_s που επικαλύπτουν ένα επίπεδο ημιάπειρο πυθμένα πυκνότητας ρ_b. Η διεπιφάνεια νερού -ιζήματος θα θεωρείται αυθαιρέτου σχήματος και θα ορίζεται από την επιφάνεια $z = f(r, \phi)$.Τέλος σε βάθος z_b θα θεωρούμε ότι βρίσκεται η (οριζόντια) διεπιφάνεια ιζήματος - πυθμένα στην οποία επιβάλλουμε συνθήκη ανάλογα με το μοντέλο.Οι παράμετροι του περιβάλλοντος θεωρούμε ότι μεταβάλλονται και ως προς τις τρείς διαστάσεις ενώ η πυκνότητα λαμβάνεται σταθερή σε κάθε στρώμα.

Η πεδιακή εξίσωση σε όλες τις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε είναι η ομογενής εξίσωση *Helmholtz*. Έπειτα από τις προσεγγίσεις και απλοποιήσεις της μεθόδου παραβολικής εξίσωσης η μελέτη μας θα περιοριστεί στην κυματική εξίσωση μίας κατεύθυνσης που δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + \sqrt{1 + X + Y}\Big)\psi \tag{4.14}$$

την οποία τη γράφουμε με τη μορφή τελεστών ως :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0(-1 + Q)\psi \tag{4.15}$$

όπου $Q = \sqrt{1 + X + Y}$ και X και Y όπως ορίστηκαν στις σχέσεις (4.11) και (4.12).Η παράπανω εξίσωση αποτελεί την κύρια σχέση οι προσεγγίσεις της οποίας θα δώσουν διαδόσεις μικρών ,ευρέων ή πολύ μεγάλων γωνιών ως προς την οριζόντιο.

Επειδή η βασική (*standard*) παραβολική εξίσωση είναι εξίσωση μικρής γωνίας ως προς την οριζόντιο είναι εύλογη η απαίτηση εύρεσης ισοδύναμων σχέσεων οι οποίες όμως θα λαμβάνουν υπ όψιν μεγάλυτερες γωνίες διάδοσης.Αυτό πραγματοποιείται μέσω της προσέγγισης του ριζικού Q από γραμμικές συναρτήσεις.

Μιά πρώτη προσέγγιση της υπόριζου ποσότητας διατυπώθηκε από τους *Siegmann-Kriegwmann-Lee* (*SKL*) [25] οι οποίοι χρησιμοποίησαν μία κλασματική έκφραση της μορφής :

$$\sqrt{1 + X + Y} \simeq \frac{1 + a_1 X + a_2 Y}{1 + b_1 X + b_2 Y} \tag{4.16}$$

όπου με κατάλληλή επιλογή των συντελεστών προκύπτουν παραβολικές εξισώσεις με διαφορετικό εύρος στη γωνία διάδοσης .

Εύκολα παρατηρούμε ότι επιλέγοντας του συντελεστές ως $a_1 = 0.5$,$a_2 = 0.5$,$b_1 = 0$ και $b_2 = 0$ προκύπτει η βασική (*standard*) παραβολική εξίσωση μικρής γωνίας του *Tappert* [25]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{ik_0}{2}[n^2(r,z,\phi) - 1]\psi + \frac{i}{2k_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{i}{2k_0 r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{4.17}$$

Οι *Siegmann-Kriegwmann-Lee* θεωρώντας συντελεστές $a_1 = a_2 = 3/4$, και $b_1 = b_2 = 1/4$ κατέληξαν σε μία παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας τόσο ως προς το βάθος όσο και ως προς το αζιμούθιο ,παρόμοια με την εξίσωση του *Claerbout* στις δύο διαστάσεις. Η τρισδιάστατη παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας των *Siegmann-Kriegwmann-Lee* δίδεται από τη σχέση

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = ik_0\left(-1 + \frac{\frac{3}{4}(n^2-1) + \frac{3}{4k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{3}{4k_0^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}{\frac{1}{4}(n^2-1) + \frac{1}{4k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4k_0^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}\right)\psi \tag{4.18}$$

Για τη αριθμητική αντιμετώπιση της παραπάνω εξίσωσης επεκτάθηκε η έμμεση μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών $Crank - Nicolson$ που είχε χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος στις δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα την αρχή ότι η *marching* διαδικασία επιλύει ένα σύστημα εξισώσεων σε κάθε βήμα .Λόγω της εμφάνισης επιδράσεων από τη σύζευξη ως προς το αζιμούθιο ο πίνακας που προκύπτει στο αριθμητικό σχήμα είναι ένας αραιός εφταδιαγώνιος πίνακας .Η παρουσία αυτού του πίνακα επιβάλει μία ιδιαίτερη αντιμετώπιση μία από τις οποίες είναι η τεχνική *precondition* [31].Η τεχνική αυτή είναι μία έμμεση μέθοδος που εισαγάγει ένα προ-σταθεροποιητή σε ένα σύστημα αραιών πινάκων μεγάλης διάστασης.Ένας ιδανικός προ-σταθεροποιητής είναι πολύ κοντά στον αντίστροφο του αραιού πίνακα. Η έλλειψη όμως κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητας του πίνακα (θετικά ορισμένος ή Ερμιτιανός) αποτελεί ένα μειονέκτημα της τεχνικής προ-σταθεροποιητή αφού είναι πολύ αργός υπολογιστικά αν και τα αποτελέσματά του είναι ακριβή.Μέχρι και σήμερα γίνονται προσπάθειες βελτίωσης της υπολογιστικής ταχύτητας της μεθόδου επιλέγοντας καταλληλότερους προ-σταθεροποιητές.Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω των ανώμαλων μη μηδενικών οριακών τιμών που μπορεί να λάβει η ακουστική πίεση και κατα επέκταση η συνάρτηση ψ αλλά και της τυχαίας γεωμετρίας που μπορεί να αντιμετωπίσει το μοντέλο (SKL) ο μετασχηματισμός $Fast\ fourier$ δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί.Τέλος , το μοντέλο είναι ανέφικτο για προβλήματα διάδοσης για μικρές ή μεσαίες αποστάσεις από την πηγή.

4.3.2 Αλγοριθμός του προγράμματος *FOR3D*

Όπως διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα το μοντέλο των *Siegmann-Kriegwmann-Lee* αν και δίδει παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας δεν υλοποιείται γρήγορα υπολογιστικά.Στην προσπάθεια εύρεσης πιο γρήγορων υπολογιστικών κωδίκων οι *Lee-Saad-Schultz* (*LSS*)[25] διατύπωσαν ένα εντελώς καινούριο μοντέλο.Το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε γενικά θαλάσσια περιβάλλοντα με τυχαία ανομοιομορφία του πυθμένα της μορφής $z = f(r, \phi)$ όπου η ταχύτητα διάδοσης δίνεται ως συνάρτηση και των τριών συντεταγμένων και να αντιμετωπίσει διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η μερική παράγωγος ως προς Y είναι μικρή αλλά όχι αμελητέα σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους προσέγγισαν την υπόριζο ποσότητα από ένα ανάπτυγμα δευτέρας τάξεως ως προς X και πρώτης ως προς Y. Η αρχική μελέτη των *Lee-Saad-Schultz* έγινε σε ένα περιβάλλον με σταθερή πυκνότητα επεκτάθηκε όμως στη συνέχεια ώστε να λαμβάνονται υπόψιν μεταβολές της πυκνότητας τόσο ως προς το βάθος όσο και ως προς την απόσταση.

Η προσέγγιση της υπόριζου ποσότητας στην κυματική εξίσωση μίας κατεύθυνσης απο τους *Lee-Saad-Schultz* ήταν τέτοια ώστε να προσαρμόζεται σε διαδόσεις ευρείας γωνίας ως προς το βάθος και μικρής ως προς το αζιμούθιο [25]

$$\sqrt{1+X+Y} \simeq 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2}Y \tag{4.19}$$

όπου ο τελεστής X λόγω της μεταβαλόμενης πυκνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$X = n^2(r, z, \phi) - 1 + \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big) \tag{4.20}$$

και η τελική έκφραση της εξίσωσης εξερχομένου κύματος είναι

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + (1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2) + \frac{1}{2}Y\Big)\psi \tag{4.21}$$

που αποτελεί την $Lee-Saad-Schultz$ $3D$ κυματική εξίσωση ευρείας γωνίας.

Αν η σύζευξη ενέργειας ως προς τη γωνία ϕ είναι αμελητέα ο τελεστής Y παραλείπεται και οδηγούμαστε σε πρόβλημα $N \times 2D$ όπου η εξίσωση (4.21)γράφεται ως

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + (1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2)\Big)\psi \tag{4.22}$$

Τέλος αν τόσο η σύζευξη όσο και η εξάρτηση από τη γωνία είναι αμελητέα καταλήγουμε στο πρόβλημα στο διδιάστατο περιβάλλον όπου

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + (1 + \frac{1}{2}\hat{X} - \frac{1}{8}\hat{X}^2)\Big)\psi \tag{4.23}$$

όπου $\hat{X} = n^2(r,z) - 1 + \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big)$.

Οι *Lee-Saad-Schultz* εξέφρασαν την τοπική αριθμητική λύση της παραπάνω εξίσωσης ως

$$\psi(r{+}\Delta r, z, \phi) \approx \exp\left(-ik_0\Delta r\right)\exp\Big(-ik_0\Delta r\Big(-1 + (1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2) + \frac{1}{2}Y\Big)\Big)\psi(r,z,\phi) \tag{4.24}$$

Οι εκθετικοί πίνακες προσεγγίζονται από κλασματικές συνάρτησεις.Έχει αποδειχθεί ότι οι τελεστές X και Y έχουν πραγματικές ιδιοτιμές και αυτό καθιστά τις κλασματικές προσεγγίσεις τους μοναδικές . Η *marching* λύση που παίρνουμε χρησιμοποιώντας ένα σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών είναι

$$\Big(1 + (\frac{1}{4} - \frac{\delta}{4})X\Big)\Big(1 - \frac{\delta}{4}\Big)\psi^{n+1} = \Big(1 + (\frac{1}{4} + \frac{\delta}{4})X\Big)\Big(1 + \frac{\delta}{4}\Big)\psi^{n} \tag{4.25}$$

όπου $\delta = -ik_0\Delta r$ και ψ^n η προσεγγιστική λύση της ψ στο διακριτό σημείο r^n.

Καταλήγουμε με τον τρόπο αυτό στην επίλυση δύο τριδιαγώνιων *block* πινάκων που είναι αρκετά πιο εύκολο από τον εφταδιαγώνιο πίνακα των *Siegmann-Kriegwmann-Lee*. Ο δείκτης διάθλασης μεταβάλεται με την οριζόντια απόσταση και αυτό συνεπάγεται και την εξάρτηση του τελεστή X από την απόσταση. Υπολογιστικά σε κάθε βήμα ο δείκτης διάθλασης υπολογίζεται σε ένα ενδιάμεσο σημείο.Η συγκεκριμένη αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος εξασφαλίζει ευστάθεια του σχήματος χωρίς κανένα περιορισμό.Το πλεονέκτημα του σχήματος είναι ότι επιτρέπει στη λύση να υπολογίζεται σε δύο μικρά βήματα. Για την επίτευξη της δύο-βημάτων λύσης οι *Lee-Saad-Schultz* χρησιμοποίησαν ένα έμμεσο σχήμα εναλλασόμενων κατευθύνσεων που υπολογιστικά υλοποιείται από τον κώδικα *FOR3D* [25].

Ο υπολογιστικός κώδικας *FOR3D* πήρε την ονομασία του από το γεγονός ότι εμπεριέχει λύσεις πεπερασμένων διαφορών (*Finite difference solution*) μία λύση συνήθους διαφορικής εξίσωσης (*Ordinary differential equation solution*) και κλασματικές προσεγγίσεις (*Rational arrpoximations*).Είναι ένα υπολογιστικό πρόγραμμα δύο βημάτων ,μίας αντικατάστασης και μίας επίλυσης ενός τριδιαγώνιου συστήματος.Το μοντέλο έχει τη δυνατότητα να αντιμετωπίσει τις ακόλουθες καταστάσεις :

- Διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις
- Διάδοση σε ρηχά ή και βαθειά θαλάσσια περιβάλλοντα
- Διάδοση σε ρηχη-προς - βαθεία ή και βαθειά -προς -ρηχή θάλασσα
- Περιβάλλοντα με παραμέτρους που μεταβάλλονται με την απόσταση
- Περιβάλλοντα με μεταβολές ως προς το αζιμούθιο
- Αυθαίρετα σύνορα του πυθμένα
- Συνθήκες στις διεπιφάνιες .

Στο μοντέλο *FOR3D* ο πυθμένας μπορεί να είναι ελεύθερος πιέσεων ,να αποτελείται από ένα απορροφητικό στρώμα ή να ικανοποιεί συνθήκες ορισμένες από τον χρήστη. Ένα χαρακτηριστικό του μοντέλου αποτελεί το γεγονός ότι για οποιδήποτε δεδομένο δεν υπάρχει εκ των προτέρων η γνώση αν υπάρχουν ή όχι τρισδιάστατες επιδράσεις .Ο χρήστης μπορεί να ’ ρωτήσει ’ τον κώδικα $FOR3D$ να εντοπίσει τις τρισδιάστατες επιδράσεις επιλέγοντας μικρές μεταβολές για τη διακριτοποίηση ως προς τη γωνία.

4.3.3 Το πρόγραμμα $IMP3D$

Το μοντέλο των $Lee-Saad-Schultz$ έχει μελετηθεί και από τους Δουγαλή ,Φλουρή ,Καμπάνη και Παπαδάκη [32] οι οποίοι εισήγαγαν μία συνθήκη προσαρμογής στον πυθμένα ώστε να μειωθεί το μέγεθος των υπολογισμών.Χρησιμοποίησαν την ίδια κλασματική αναπαράσταση για την απόσταση , τη μέθοδο εναλασσόμενων κατευθύνσεων (*alternating direction*) για το βάθος και κεντρικές διαφορές για το αζιμούθιο για τη διακριτοποίηση της (4.21) θεωρώντας συγχρόνως μία κατάλληλη συνθήκη προσαρμογής στον πυθμένα .

Στην περίπρωση ενός περιβάλλοντος αξονικής συμμετρίας ($2D$) οι επιδράσεις ενός ημιάπειρου στρώματος μοντελοποιούνται ικανοποιητικά από μία μητοπική συνθήκη προσαρμογής κατα μήκος της οριζόντιας διεπιφάνειας ιζήματος - πυθμένα θεωρώντας ότι ο πυθμένας είναι οριζόντιος . Για την επέκταση αυτής της ιδέας στις τρείς διαστάσεις θεωρείται ότι η σύζευξη ως προς το αζιμούθιο είναι υπαρκτή μονάχα στα στρώματα νερού και ιζήματος ενώ στο στρώμα του πυθμένα υπάρχει μόνο απλή εξάρτηση από το αζιμούθιο γεγονός που διαφοροποιείται από το απλό μοντέλο (LSS).Μαθηματικά σημαίνει ότι η σχέση (4.21) ισχύει μονάχα για τα στρώματα νερού και ιζήματος ενώ στον πυθμένα ο όρος $-\frac{X}{8}+\frac{Y}{2}$ αγνοείται. Στο εσωτερικό του πυθμένα η ακουστική διάδοση περιγράφεται ικανοποιητικά από την διδιάστατη εξίσωση (βάθος και απόσταση)που προκύπτει έπειτα από την αποκοπή των παραπάνω όρων με δείκτη ανάκλασης n_b που εξαρτάται από την αζιμουθιανή παράμετρο.Η σχέση που απαιτείται να ικανοποιεί η συνάρτηση ψ έπειτα από τις απλοποιήσεις είναι [32]:

$$\psi(r, z_b, \phi) = \int_0^r H(s, \phi)\psi_z(r, z_b, \phi) ds, 0 \leq r \quad, 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{4.26}$$

όπου $H(s, \phi)$ είναι πυρήνας της συνθήκης προσαρμογής πυθμένα [35].

Το πρόγραμμα $IMP3D$ κατά τα λοιπά χρησιμοποιεί το σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών του προγράμματος $FOR3D$. Υπάρχει όμως μία μικρή διαφορά ανάμεσα στην τροποποιημένη αριθμητική λύση του $IMP3D$ σε σχέση με τη λύση που δόθηκε από τον Lee .Η λύση του Lee δόθηκε σύμφωνα με με μία προσεγγιστική μέθοδο εναλλασόμενων κατευθύνσεων λύνοντας δύο τριδιαγώνια συστήματα εξισώσεων με έμμεσο τρόπο.Η τροποποιημένη λύση που δόθηκε από τον Δουγαλή λύνει το πρώτο τριδιαγώνιο σύστημα με τον ίδιο τρόπο αλλά για το δεύτερο χρησιμοποιεί μία μέθοδο διάσπασης LU εφόσον το σύστημα είναι συμμετρικό.

Η παραπάνω τεχνική εφαρμοζόμενη σε αρκετά προβλήμα έδωσε απότελέσματα αρκετά κοντινά με εκείνα του κώδικα για την *standard* παραβολική εξίσωση στις τρεις διαστάσεις .Αριθμητικές εφαρμογές έχουν πραγματοποιηθεί σε περιβάλλοντα με ημιτονοειδή πυθμένα,κωνική ανύψωση και ρήχωση (σφήνα).

4.3.4 Ο κώδικας των $Collins$ και $Chin-Bing$ ($3DPE$)

Για τα περισσότερα προβλήματα ακουστικής διάδοσης θεωρούμε ότι το θαλάσσιο περιβάλλον έχει λεία σύνορα και αν παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία γύρω από μία αρμονική σημειακή πηγή περιοριζόμαστε στο διδιάστατο πρόβλημα ακουστικής διάδοσης . Στην πραγματικότητα ,όμως ,η παρουσία ανώμαλων συνόρων επηρεάζει κατα πολύ την απώλεια διάδοσης και σε κάποιες περιπτώσεις οι επιδράσεις τους δεν μπορούν να αγνοηθούν.Στην γενικότητά η εύρεση ενός μοντέλου για την αντιμετώπιση ανωμάλων συνόρων είναι δύσκολη . Οι $Collins$ και $Chin-Bing$ [26] μελετώντας διαδόσεις κατά μικρές γωνίες ως προς την οριζόντιο ($grazing\ angles$) και λαμβάνοντας υπόψιν μονάχα τον εξερχόμενο κυματισμό κατασκεύασαν ένα απλό και ικανοποιητικό μοντέλο χειρισμού ανώμαλων συνόρων.Σύμφωνα με το μοντέλο η επίδραση στο πεδίο λόγω της ανωμαλίας προσεγγίζεται ως ένας συντελεστής ανάκλασης που εξαρτάται από την γωνία ως προς την οριζόντιο ($grazing\ angle$) .

Ο κώδικας των $Collins$ και $Chin-Bing$ δίδει μία παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας ως προς το βάθος και μικρής γωνίας ως προς το αζιμούθιο ενώ η παρουσία ανώμαλων συνόρων αντιμετωπίζεται αριθμητικά με τη μέθοδο των εναλασσόμενων διευθύνσεων. Η μέθοδος αυτή γνωστή ως ADI ($alternative\ direction\ implicit$) [31]χρησιμοποιείται στην αντιμετώπιση τρισδιάστατων προβλημάτων λύνοντας δύο συστήματα εξισώσεων εναλασσόμενων κατευθύνσεων με ένα έμμεσο σχήμα πεπερασμένων διαφορών.Η τεχνική αυτή εφαρμοζόμενη στον κώδικα των $Collins$ και $Chin-Bing$ λύνει το τρισδιάστατο πρόβλημα εναλλάσοντας τις κατευθύνσης βάθους και αζιμουθίου.Το τελικό σύστημα εξισώσεων είναι τριδιαγώνιο και η μέθοδος ADI έχει πολλά πλεονεκτήματα. Μία ομογενής συνοριακή συνθήκη λαμβάνεται υπόψιν στην επιφάνεια της θάλασσας για να προσεγγίζει τις επιδράσεις των ανώμαλων συνόρων και η οποία μπορεί να εξαρτάται τόσο από την απόσταση όσο και από το αζιμούθιο.Επιπλέον μία συνθήκη συνέχειας χρησιμοπιείται στην επίλυση της τρισδιάστατης παραβολικής εξίσωσης πάνω από όλο το φάσμα του αζιμουθίου.Το μοντέλο εφαρμόζεται ικανοποιητικά σε περιβάλλοντα ρηχών θαλασσών με ανώμαλα σύνορα .

Εργαζόμενοι στο κυλινδρικό σύστημα αναφοράς όπου έχουμε θεωρήσει μία αρμονική σημειακή πηγή γωνιακής συχνότητας ω στη θέση $\mathbf{r}_0 = (r_0, z_0, 0)$.Η ηχητική ταχύτητα και η πυκνότητα εξαρταρτόνται μονάχα από το z. Η εξίσωση που διέπει την ακουστική πίεση είναι :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + k_0^2[N^2(r,z,\phi) - 1]P = 0 \quad (4.27)$$

όπου $N(z) = n(z)[1 + i\alpha(z)]$ η μιγαδική έκφραση του δείκτη διάθλασης και $\alpha(z)$ έκφραση για το συντελεστή απορρόφησης.

Η κυματική εξίσωση μίας κατεύθυνσης δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + \sqrt{1 + X + Y}\Big)\psi \tag{4.28}$$

όπου $X = N^2(r, z, \phi) - 1 - \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ και $Y = \frac{1}{k_0^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$.

Σύμφωνα με την προσέγγιση των $Collins$ και $Chin - Bing$ η τετραγωνική ρίζα γράφεται ως [26]:

$$\sqrt{1 + X + Y} \simeq 1 + \frac{2X}{4 + X} + \frac{1}{2}Y \tag{4.29}$$

προκύπτοντας με τον τρόπο αυτό μία ευρείας γωνίας ως προς το βάθος και μικρής ως προς το αζιμούθιο παραβολική εξίσωση :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{2ik_0\Big(N^2 - 1 - \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)}{3 + N^2 - \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\psi + \frac{1}{k_0^2 r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \tag{4.30}$$

Για την επίλυση της (4.30) χρησιμοποιείται η μέθοδος εναλασσόμενων κατευθύνσεων και η παραπάνω εξίσωση λύνεται ως ένα σύστημα της μορφής :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{2ik_0\Big(N^2 - 1 - \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)}{3 + N^2 - \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\psi \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{k_0^2 r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \tag{4.32}$$

Η εξίσωση (4.31) είναι μία ευρείας γωνίας παραβολική εξίσωση στις δύο διαστάσεις η οποία έχει αντιμετωπιστεί αριθμητικά από τον $Collins$ σε άρθρο του στα 1988 [33].Η δεύτερη εξίσωση μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας ένα σχήμα ολοκλήρωσης $Crank - Nicolson$ ως προς r και ένα σχήμα κεντρικών διαφορών ως προς ϕ.

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων ακουστικής διάδοσης σε περιβάλλοντα με ανώμαλα σύνορα απαιτείται η εισαγωγή κατάλληλων αρχικών συνθηκών. Η γενική μορφή που απαιτούμε να έχει η οριακή συνθήκη είναι μία ομογενής έκφραση για $z = 0$ του παρακάτω τύπου [26]:

$$\alpha_1 P + \alpha_2\frac{\partial P}{\partial z} + \alpha_3\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\alpha_4 P + \alpha_5\frac{\partial P}{\partial z} + \alpha_6\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\Big) = 0 \tag{4.33}$$

η οποία χρησιμοποιείται ως αρχική συνθήκη κατά τη διαδικασία επίλυσης της (4.31).

Με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών προκύπτουν συνθήκες προσαρμογής με διαφορετικό εύρος γωνίας . Θεωρώντας για παράδειγμα $\alpha_j = 0$ για $j > 2$ οδηγούμαστε σε μία στενής γωνίας συνθήκη προσαρμογής της μορφής :

$$2k_0 P - i\beta_1 \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{4.34}$$

όπου β_1 γνωστός συντελεστής . Άλλες επιλογές δίνουν συνθήκες μεγάλης ή ακόμα και πολύ μεγάλης γωνίας .

Ο κώδικας των $Collins$ και $Chin - Bing$ έχει εφαρμοστεί σε περιβάλλον με ημιτονοειδή πυθμένα,με ρήχωση αλλά και σε περιβάλλοντα όπου εμφανίζεται κωνική ανύψωση του πυθμένα. Η ακρίβεια του κώδικα των $Collins$ και $Chin - Bing$ για το πλήρως τρισδιάστατο περιβάλλον έχει εξεταστεί και συγκριθεί με χαρακτηριστικά προβλήματα με ικανοποιητικά αποτελέσματα.Τα αποτελέσματα απεικονίζουν την ύπαρξη του ανώμαλου συνόρου και αποδεικνύουν την σπουδαιότητα της σύζευξης για ρηχά θαλάσσια περιβάλλοντα.Αριθμητικά αποτελέσματα του κώδικα $3DPE$ των $Collins$ και $Chin - Bing$ έχουν συγκριθεί με αντίστοιχα αποτελέσματα του μοντέλου $IMP3D$ σε ρηχή θάλασσα και χαμηλές έως μέτριες συχνότητες και έχουν δώσει παρόμοια αποτελέσματα.

4.3.5 Ο κώδικας *Fawcett*

Ιδιαίτερη αναφορά σε πρόβλημα ακουστικής διάδοσης στις τρείς διαστάσεις σε περιβάλλοντα διαπερατής σφήνας έγινε από τον *Fawcett*.Στα θαλάσσια περιβάλλοντα που μελέτησε θεώρησε ότι οι συνοριακές συνθήκες ανάμεσα στις διεπιφάνειες είναι ομογενής εκφράζοντας με τον τρόπο αυτό ότι οι επιφάνειες είναι ελέυθερες πιέσεων.

Σύμφωνα με τον *Fawcett* [29] η υπόριζος ποσότητα στην αναγμένη ελλειπτική εξίσωση προσεγγίζεται γραμμικά ως προς τον τελεστή Y και κλασματικά ως προς τον κάθετο τελεστή X.Αναλυτικότερα ισχύει:

$$\sqrt{1+X+Y} \simeq \sqrt{1+X} + \frac{1}{2}Y \tag{4.35}$$

$$\sqrt{1+X} = \frac{1+\frac{3}{4}X}{1+\frac{1}{4}X} \tag{4.36}$$

Η κυματική εξίσωση που προκύπτει έπειτα από αντικατάσταση των παραπάνω ποσοτήτων δίδεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1 + \frac{1+\frac{3}{4}X}{1+\frac{1}{4}X} + \frac{1}{2}Y\Big)\psi \tag{4.37}$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης ο *Fawcett* χρησιμοποίησε τη μέθοδο των εναλλασσόμενων κατευθύνσεων γράφοντας με τον τρόπο αυτό την εξίσωση ως :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,z,\phi) = ik_0\Big(-1 + \frac{1+\frac{3}{4}X}{1+\frac{1}{4}X}\Big)\psi(r,z,\phi) \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,z,\phi) = \frac{i}{2k_0 r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\theta \phi^2}(r,z,\phi) \tag{4.39}$$

Για την επίλυση της πρώτης εξίσωσης ο *Fawcett* χρησιμοποίησε ένα άμεσο σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών που είχε χρησιμοποιηθεί αρχικά από τον *Claerbout* [34] ενώ για τη δεύτερη χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο $fast{-}Fourier$ $transforms$ $(FFTs)$ σύμφωνα με τον οποίο η λύση για μικρή μετατόπιση Δr δίνεται από τη σχέση

$$\psi(r+\Delta r, z, \phi) = F_\phi^{-1}(\Phi_\phi F_\phi \psi(r,z,\phi) \tag{4.40}$$

όπου $\Phi_\phi \equiv \exp\Big(\frac{-im^2\Delta r}{2k_0 r(r+\Delta r)}\Big)$, F_ϕ είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* ως προς ϕ ,F_ϕ^{-1} είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός και m ο αριθμός κύματος ως προς το αζιμούθιο.

Ο $Fawcett$ σύγκρινε τα αποτελέσματα μεθόδων Παραβολικής Εξίσωσης τα οποία λάμβαναν υπόψιν αζιμουθιανή σύζευξη και άλλα στα οποία η σύζευξη αγνοούνταν σε ένα περιβάλλον διαπερατής σφήνας.Κατέληξε στο συμπέρασμαότι ένας $3D$ κώδικας μπορεί να προβλέψει σωστά φαινόμενα διάθλασης σε ένα περιβάλλον μεταβαλόμενων με την απόσταση παραμέτρων κάτι που τα $N \times 2D$ μοντέλα δεν μπορούν να κάνουν. Μειονέκτημα εντούτις αποτελεί το γεγονός ότι ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων $Fourier$ απαιτούνται ώστε η μέθοδος να μοντελοποιήσει σωστά την επίδραση της διάθλασης του κυματοδηγού και ο οποίος αριθμός αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με την απόσταση.

4.3.6 Ο κώδικας του $Sturm$

Τα μέχρι τώρα μοντέλα που έχουμε αναφέρει δίδουν παραβολικές προσεγγίσεις μικρής ή ευρείας γωνίας διάδοσης ως προς την οριζόντιο. Στην προσπάθεια έυρεσης μίας παραβολικής εξίσωσης πολύ μεγάλης γωνίας ο $Sturm$ προσέγγισε τον τελεστή X χρησιμοποιώντας σειρά $Padè$.Ο κώδικας του εφαρμόζεται σε περιβάλλοντα με τυχαία ανομοιογένεια του πυθμένα που μπορεί να αποτελείται από ένα ή περισσότερα ιζηματογενή στρώματα.Σε κάθε στρώμα η γεωμετρία των παραμέτρων θεωρείται τρισδιάστατη ενώ η πυκνότητα μεταβάλεται μονάχα ως προς το βάθος .Ο πυθμένας του θαλάσσιου περιβάλλοντος περατούται σε ένα άκαμπτο πυθμένα σε βάθος z_{max}.Η εξασφάλιση της ακαμπτότητας του πυθμένα γίνεται θεωρώντας ένα συντελεστή απορρόφησης στο κατώτερο στρώμα.Μπορούμε με τον τρόπο αυτό να έχουμε στο z_{max} επιφάνεια ελεύθερη πιέσεων ,$P(r, z_{max}, \phi) = 0$.

Εφόσον ο $Sturm$ μελέτησε το πρόβλημα ακουστικής με μεταβαλλόμενη πυκνότητα η πεδιακή εξίσωση για την ακουστική πίεση θα είναι η ομογενής εξίσωση $Helmholtz$ της μορφής

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho(z)}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial P}{\partial z} + k_0^2[n^2(r,z,\phi) - 1]P = 0 \quad (4.41)$$

η οποία έπειτα από τις βασικές προσεγγίσεις και απλοποιήσεις της παραβολικής θεώρησης δίδει την κυματική εξίσωση μίας κατεύθυνσης

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,z,\phi) = ik_0(\sqrt{1+X+Y} - 1)\psi(r,z,\phi) \quad (4.42)$$

Διαφορά στο μοντέλο του $Sturm$ έναντι όλων των προηγούμενων μοντέλων που αναφέραμε παρουσιάζεται και στην αρχική συνθήκη ($starting\ field$) την οποία θεωρούμε ότι μπορεί να μεταβάλεται ως προς το βάθος αλλά και τη γωνία.Στη γενικότητα του γνωρίζουμε ότι η αρχική συνθήκη δίδεται ως συνάρτηση του βάθους μονάχα.

Στην προσπάθεια ,λοιπόν,εύρεσης μιας εξίσωσης που θα μπορεί να ατιμετωπίζει προβλήματα ακουστικής διάδοσης σε πολύ μεγάλο εύρος γωνιών ως προς την οριζόντιο ο $Sturm$ [27] προσέγγισε τον τελεστή X ως μία μεγάλης τάξεως σειρά $Padè$ και τον τελεστή Y γραμμικά και κατέληξε στην πολύ μεγάλης γωνίας παραβολική εξίσωση ως προς το βάθος και μικρής ως προς το αζιμούθιο γνωστή ως $3DWAPE$.

Αναλυτικότερα , προσέγγισε την υπόριζο γραμμικά ως προς το αζιμούθιο ως

$$\sqrt{1+X+Y} \simeq \sqrt{1+X} + \frac{1}{2}Y \quad (4.43)$$

και έπειτα πήρε προσεγγίσεις *Padè* για τον τελεστή X της μορφής

$$\sqrt{1+X} = 1 + \sum_{m=1}^{n_p} \frac{a_{k,n_p} X}{1 + b_{k,n_p} X} \tag{4.44}$$

όπου $a_{k,n_p} = 2/(2n_p+1)\sin^2\Big(k\pi(2n_p+1)\Big)$ και $b_{k,n_p} = \cos^2\Big(k\pi(2n_p+1)\Big)$ για $1 \leq k \leq n_p$.

Το προσεγγιστικό μοντέλο στο οποίο καταλήγουμε έπειτα από τις παραπάνω προσεγγίσεις λύνεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας μία μέθοδο εναλασσόμενων κατευθύνσεων [28] ,ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήθηκε από τους *Collins* και *Chin−Bing*. Το πρώτο βήμα κατά τη διαδικασία επίλυσης είναι η διάσπαση της $3DWAPE$ σε ένα σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.43) και (4.44).

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,z,\phi) = ik_0 \Bigg(\sum_{m=1}^{n_p} \frac{a_{k,n_p} X}{1 + b_{k,n_p} X} \Bigg) \psi(r,z,\phi) \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,z,\phi) = \frac{i}{k_0 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\vartheta \phi^2}(r,z,\phi) \tag{4.46}$$

Κάθε μία από τις πραπάνω λύνεται ξεχωριστά σε κάθε διακριτό σημείο r. Η πρώτη εξίσωση λύνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο $Crank - Nicolson$ για την απόσταση και μία μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων/*Galerkin* για το βάθος. Η δεύτερη εξίσωση λύνεται με τη χρήση ενός σχήματος Πεπερασμένων Διαφορών για το αζιμούθιο και ένα σχήμα $Crank - Nicolson$ για τη διακριτοποίηση ως προς την απόσταση r.Μπορεί όμως να λυθεί και με τη χρήση μετασχηματισμών *Fourier* λόγω της 2π-περιοδικότητας του ακουστικού πεδίου ως προς το αζιμούθιο.

Αν και τα θαλάσσια περιβάλλοντα εφαρμογής του μοντέλου μπορεί να είναι γενικής μορφής εντούτις ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη βιβλιογραφία σε περιβάλλοντα με ρήχωση (σφήνες).Τέτοιου είδους περιβάλλοντα παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον διότι αν και γενικά η ισχύς της παραβολικής προσέγγισης περιορίζεται λόγω της μετατροπής της εξίσωσης *Helmholtz* σε μία εξίσωση ενός εξερχόμενου κυματισμού που δε λαμβάνει υπόψιν την ενέργεια που ανακλάται ή διαθλάται προς το εσωτερικό εντούτις στην περίπτωση της σφηνοειδούς γεωμέτριας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα αφού η παραπάνω ενέργεια χάνεται στον πυθμένα. Θεωρούμε επομένως ότι οι απλοποήσεις της μεθόδου παραβολικής εξίσωσης είναι ασφαλείς για ένα τρισδιάστατο περιβάλλον διαπερατής σφήνας .

4.3.7 Ο κώδικας $PECan$

Ο κώδικας $PECan$ αποτελεί ένα ραγδαίως αναπτυσσόμενο μοντέλο για την αντιμετώπιση του προβλήματος ακουστικής διάδοσης κατάλληλο να αντιμετωπίσει πραγματικά θαλάσσια περιβάλλοντα.Ονομάστηκε $PECan$ συντομογραφώντας το **Can**$adian$ **P**$arabolic$ **E**$quation$.Σύμφωνα με τον κώδικα ο κάθετος τελεστής X προσεγγίζεται από μία σειρά $Padé$ και ο τελεστής γωνίας Y είτε από ένα Διακριτό Μετασχηματισμό $Fourier$ είτε από ένα σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών $Crank-Nicolson$. Η βασική διαφορά του από όλους τους προηγούμενους κώδικες που αναφέραμε έως τώρα είναι η δυνατότητα χρήσης μίας αρχικής συνθήκης ($starting\ field$) πέρα από τις γνωστές συνθήκες $Gauss$,$Green$ ή γραμμικούς συνδιασμούς ιδιομορφών τη συνθήκη $self-starter$.

Ο κώδικας $PECan$ εφαρμόζεται σε περιβάλλοντα μεταβλητών με την απόσταση παραμέτρων.Η επιφάνεια του νερού θεωρείται όπως πάντα κατά την παραβολική προσέγγιση ελεύθερη πιέσεων,το προφίλ ταχύτητας μπορεί να αντιμετωπίσει διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή.

Το μοντέλο $PECan$ αντιμετωπίζει την μίας κατεύθυνσης κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = ik_0\Big(-1+\sqrt{1+X+Y}\Big)\psi \tag{4.47}$$

όπου $X = N^2(r,z,\phi) - 1 - \frac{1}{k_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ και $Y = \frac{1}{k_0^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$
έχοντας θεωρήσει ότι η πυκνότητα μεταβάλλεται ως προς το βάθος και όπου $N(z) = n(z)[1+i\alpha(z)]$ η μιγαδική έκφραση του δείκτη διάθλασης. Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα $Taylor$ η μορφή που παίρνει η τοπική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι :

$$\psi(r+\Delta r,z,\phi) = \exp -ik_0\Delta r\Big(-1+\sqrt{1+X+Y}\Big)\psi(r,z,\phi) \tag{4.48}$$

Σύμφωνα με τον κώδικα $PECan$ η παραπάνω λύση προσεγγίζεται ως [30]:

$$\psi(r+\Delta r,z,\phi) \approx \exp -ik_0\Delta r\Big(-1+\sqrt{1+Y}\Big)\exp -ik_0\Delta r\Big(-1+\sqrt{1+X}\Big)\psi(r,z,\phi) \tag{4.49}$$

έχοντας χρησιμοποιήσει μία ευρείας γωνίας διάσπαση κατα το διαχωρισμό των δύο τελεστών. Ο κώδικας $PECan$ αναπαριστά τον τελεστή X ως μία κλασματική σειρά $Padé$ της μορφής :

$$\sqrt{1+X} = 1 + \sum_{m=1}^{n_p}\frac{a_{k,n_p}X}{1+b_{k,n_p}X} \tag{4.50}$$

όπου $a_{k,n_p} = 2/(2n_p+1)\sin^2\Big(k\pi(2n_p+1)\Big)$ και $b_{k,n_p} = \cos^2\Big(k\pi(2n_p+1)\Big)$ για $1 \le k \le n_p$ ενώ τον τελεστή Y τον χειρίζεται με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

Ο ένας είναι η χρήση ενός Διακριτού Μετασχηματισμού *Fourier* που δίδει στην τοπική λύση τη μορφή [30] :

$$\psi(r+\Delta r, z, \phi) = F_\phi^{-1}\Big\{\exp\delta\Big(-1+\sqrt{1-\kappa^2}\Big)F_\phi\{\exp\delta\Big(\sum_{m=1}^{n_p}\frac{a_{k,n_p}X}{1+b_{k,n_p}X}\Big)\psi(r,z,\phi)\}\Big\} \tag{4.51}$$

όπου $k_0\kappa^2 = k_\phi^2[r(r+\Delta r)]^{-1}$,F_ϕ ο Διακριτός Μετασχηματισμός *Fourier* ως προς το αζιμούθιο και F_ϕ^{-1} ο αντίστροφος μετασχηματισμός .

Η δεύτερη προσέγγιση του τελεστή γωνίας δίνεται από ένα σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών και η έκφραση που δίνει την τοπική λύση είναι [30] :

$$\begin{aligned}\psi(r,z,\phi) &\approx \exp\frac{\frac{1}{2}\delta Y}{1+\frac{1}{4}\delta Y}\exp\delta\Big(\sum_{m=1}^{n_p}\frac{a_{k,n_p}X}{1+b_{k,n_p}X}\Big)\psi(r,z,\phi)\\ &\approx \frac{1+\frac{1}{4}(1+\delta)Y}{1+\frac{1}{4}(1-\delta)Y}\exp\delta\Big(\sum_{m=1}^{n_p}\frac{a_{k,n_p}X}{1+b_{k,n_p}X}\Big)\psi(r,z,\phi) \end{aligned}\tag{4.52}$$

Καταλήγουμε με τον τρόπο αυτό σε ένα έμμεσο σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών $Crank-Nicolson$ για τον υπολογισμό της συνάρτησης ψ το οποίο μπορει να λυθεί για διακριτό πλέγμα χρησιμοποιώντας γνωστές προσεγγίσεις Πεπερασμένων Διαφορών.

Όπως ήδη αναφέρθηκε μία διαφοροποίηση του μοντέλου αυτού αποτελεί η δυνατότητα χρήσης μίας καινούριας αρχικής συνθήκης του $self-starter$. Η αρχική αυτή συνθήκη υπολογίζεται ως λύση της εξίσωσης:

$$\sqrt{1+X}\psi(0,z) = -\frac{1}{2}\frac{i}{k_0}\delta(z-z_0) \tag{4.53}$$

όπου z_0 το βάθος της πηγής και $\psi(0,z)$ η αρχική συνθήκη για οριζόντια απόσταση 0. Και ενώ οι απλές αρχικές συνθήκες μοντελοποιούν το περιβάλλον ως ένα ομογενές ημιάπειρο μέσο η αρχική συνθήκη $self-starter$ περιέχει όλη την πληροφορία για το περιβάλλον γύρω από την πηγή.Οι διαφορετικές προσεγγίσεις της υπόριζου ποσότητας δίδει διαφορετικούς διατυπώσεις για τη σχέση (4.53).Το μοντέλο $PECan$ χρησιμοποιεί τη βασική παραβολική προσέγγιση $\sqrt{1+X} \simeq 1+\frac{X}{2}$ και η σχέση (4.53) γράφεται στην μορφή :

$$2+X\psi(0,z) = -\frac{i}{k_0}\delta(z-z_0) \tag{4.54}$$

η οποία λύνεται με τη χρήση ενός σχήματος Πεπερσμένων Διαφορών.Αυτή η αρχική συνθήκη είναι κατάλληλη στην περίπτωση που η πηγή είναι τοποθετημένη στον πυθμένα ή κοντά σε αυτόν.

Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες ο κώδικας παρέχει τη δυνατότητα χρήσης ενός απορροφητικού πυθμένα ή και μίας μη-τοπικής (*nonlocal*) συνοριακής συνθήκης.Με την εισαγωγή της συνθήκης αυτής το ημιάπειρο πρόβλημα Παραβολικής Εξίσωσης μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο σε πεπερασμένο χωρίο.Η χρήση της συνοριακής αυτής συνθήκης περιορίζει σημαντικά και το μέγεθος του υπολογιστικού χωριού δίδοντας γρηγορότερα αριθμητικές λύσεις.

Τα θαλάσσια περιβάλλοντα στα οποία ,μπορεί να εφαρμοστεί ο κώδικας μπορούν να παρουσιάζουν τυχαία γεωμετρία εντούτις ιδιαίτερη αναφορά γίνεται για περιβάλλοντα με ρήχωση.Αναλυτικότερα, ο κώδικας έχει υλοποιηθεί για ένα περιβάλον σφηνοειδούς γεωμετρίας ίδιο με εκείνο που μελετήθηκε από τον *Fawcett* τόσο για την πλήρως τρισδιάστατη περίπτωση όσο και για την $N \times 2D$.Τα αποτελέσματα για την απώλεια διάδοσης στην $3D$ και $N \times 2D$ διάδοση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα .

Σχήμα 15.Αποτελέσματα για την $N \times 2D$ (αριστερά) και τη $3D$ (δεξιά) απώλεια διάδοσης στο μοντέλο *PECan* σε περιβάλλον διαπερατής σφήνας (δέκτης στα 36 μ)

Παρατηρούμε ότι το τρισδιάστατο μοντέλο υπολογίζει τη διαθλόμενη ενέργεια για το πεδίο που βρίσκεται προς τα κάτω κατά την κατέυθυνση της απότομης κλίσης σε αντίθεση με το $N \times 2D$ μοντέλο ενώ φαίνεται ότι οι διαφορες στην απώλεια διάδοσης μειώνονται καθώς ο δέκτης απομακρύνεται από την κατέθυνση της απότομη κλίσης . Συγκρίσεις έχουν πραγματοπιηθεί και ανάμεσα στα μοντέλα $3D$ $PECan$ και $Fawcett$ για την απώλεια διάδοσης και έχει δειχθεί ότι τα αποτελέσματα τους είναι πολύ κοντινά όπως φαίνεται στο σχήμα 16.

Σχήμα 16.Απώλεια διάδοσεις για τα μοντέλα $3D$ $PECan$ και $Fawcett$ σε περιβάλλον διαπερατής σφήνας για $\phi = 90°$(δέκτης στα 36μ)

Τροποποιήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια προσδίδουν στον κώδικα τη δυνατότητα να αντιμετωπίσει ικανοποιητικά την επίδραση πολύπλοκων κυματοδηγών όπως τραχύ σύνορα ,ελαστικότητα καθώς και την επιστρεφόμενη ενέργεια από το δέκτη.

Κεφάλαιο 5

Σύγκριση των μεθόδων στις τρείς διαστάσεις

Αναφερθήκαμε εκτενώς στα προηγούμενα κεφάλαια στις δύο βασικές και πιο ευρέως εφαρμοζόμενες μεθόδους αντιμετώπισης του προβλήματος ακουστικής διάδοσης στην υποβρύχια ακουστική αυτών των Κανονικών Ιδιομορφών και της Παραβολικής Προσέγγισης.Καθέ μία από τις δύο αυτές μεθόδους παρουσιάζουν πλεονεκτήματα αλλά και περιορισμούς που προέρχονται από τη γεωμετρία του θαλάσσιου περιβάλλοντος ,τις οριακές συνθήκες που λαμβάνονται υπόψιν ,την γωνία κατα την οποία διαδίδεται η ηχητική ενέργεια αλλά και τον πρόπο με τον οποίο επιτρέπει κάθε μέθοδος να μεταβάλλονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη (ταχύτητα ήχου ,πυκνότητα κ.α.). Οι περιορισμοί που παρουσιάζονται τόσο στη Μέθοδο των Κανονικών Ιδιομορφών όσο και σε αυτή της Παραβολικής Εξίσωσης μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες .Το πρώτο είδος περιορισμών προέρχονται από τη μαθηματική μοντελοποίηση του ακουστικού προβλήματος που περιορίζει την αντιμετώπιση συγκεκριμένων φυσικών φαινομένων.Το δεύτερο είδος περιορισμών σχετίζονται με την υλοποίηση των μαθηματικών μοντέλων στον υπολογιστή και τη δυνατότητα αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος με γνωστά αριθμητικά σχήματα όπως μετασχηματισμούς $Fourier$, μεθόδους Πεπερασμένων Διαφορών και Πεπερασμένων Στοιχείων. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η σύγκριση των δύο μεθόδων η εύρεση τυχόν ομοιοτήτων αλλά και διαφορών τους.Επίσης θα συγκρίνουμε τις διαφορετικές μελέτες και προσεγγίσεις που έχουν πραγματοποιηθεί τόσο για τις Κανονικές Ιδιομορφές όσο και για τη μέθοδο της Παραβολική Εξίσωση.

Αρχικά θα αναφερθούμε στην ακρίβεια του προβλήματος που περιγράφεται σε κάθε μέθοδο από την άποψη της μαθηματικής προσομοίωσης. Τόσο η μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών όσο και αυτή της Παραβολικής Εξίσωσης χρησιμοποιούν ως πεδιακή εξίσωση την $Helmholtz$, μία εξίσωση ελλειπτικού τύπου της οποίας η επίλυση απαιτεί τον καθορισμό κατάλληλων συνοριακών συνθηκών.Παρ'ολα αυτά η μέθοδος των Κανονικών Ιδιομορφών αποτελεί ακριβές μοντέλο αφού έχει ως πεδιακή εξίσωση την $Helmholtz$, η οποία προκύπτει έπειτα από χρήση της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών στην κυματική εξίσωση χωρίς περιορισμούς και προσεγγίσεις, ορίζοντας ταυτόχρονα κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για τη συμπεριφορά της ακουστικής πίεσης στην επιφάνεια του νερού,στις διεπιφάνειες νερού-ιζήματος και ιζήματος -πυθμένα και στον πυθμένα ή στο μέγιστο βάθος το οποίο καθορίζουμε και εκεί απαιτούμε να περιορίζεται το πεδίο μας.Η δυσκολία όμως της αντιμετώπισης του ελλειπτικού προβλήματος προέρχεται εκτός από τη γεωμετρία των συνόρων και από την απαίτηση για καθορισμό της ακουστικής πίεσης στο κάθετο τελικό σύνορο ($far - end\ vertical\ wall\ boundary$) δηλαδή για αποστάσεις πολύ μακριά από την ηχητική πηγή.Τις περισσότερες φορές θεωρούμε ένα ημιάπειρο περιβάλλον ως προς την οριζόντια απόσταση και χρησιμοποιούμε μία συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ θεωρώντας ότι οι κυματισμοί αποκλείνουν από την πηγή και ενέργεια δεν επανακτινοβολείται από το άπειρο. Η μέθοδος της Παραβολικής Εξίσωσης αποτελεί προσεγγιστικό μοντέλο αφού μετασχηματίζει την εξίσωση $Helmholtz$ σε μία εξίσωση τύπου $Schrödinger$ μετατρέποντας ταυτόχρονα το ελλειπτικού τύπου πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ένα αντίστοιχο παραβολικού τύπου αρχικών-συνοριακών τιμών.Αποφεύγει με τον τρόπο αυτό το χειρισμό της συνθήκης μακριά από την πηγή ενώ ταυτόχρονα έχουμε βελτιστοποίηση του κόστους λύσης.Μειονέκτημα ωστόσο της Παραβολικής Εξίσωσης αποτελεί το γεγονός ότι δίδει κυματική εξίσωση μονάχα για τα αποκλίνοντα κύματα έπειτα από τις παραδοχές και απλοποιήσεις που έχουν συντελεστεί.Αυτό σημαίνει ότι μελετά κύματα τα οποία απομακρύνονται από την ηχητικά πηγή και αγνοεί την κυματική διάδοση προς την κατεύθυνση του δέκτη. Αποκλείεται από τη λύση η επίδραση του προς τα πίσω ακουστικού πεδίου ($backscattering\ field$) η οποία σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να είναι σημαντική όπως στην περίπτωση απότομης μεταβολής της βαθυμετρίας .Γίνονται ωστόσο μελέτες για την εξαγωγή Παραβολικών Εξισώσεων δύο κυμάτων(δύο κατευθύνσεων).Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων του $Collins$(1992) καθώς και και το Έμμεσο σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών των Zhu και $Bjorno$ (1995)βασισμένο σε μία κλασματική συνάρτηση που δίδει Παραβολική Εξίσωση ευρείας γωνίας.

Λόγω της προσεγγιστικής φύσης της η μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης δίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα για διάδοση ηχητικών κυμάτων υπό μικρή γωνία ως προς την οριζόντιο.Η βασική ($standard$) παραβολική εξίσωση του $Tappert$ είναι εξίσωση για μικρές γωνίες διάδοσης ως προς την οριζόντιο και αναπαριστά ' σωστά ' λύσεις που αντιστοιχούν σε κύματα με μικρή γωνία $(18 - 20^{\circ})$ διάδοση ως προς την οριζόντιο.Οι διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης του ριζικού τελεστή καθορίζουν το εύρος της διαδόμενης γωνίας που επιδρά στην ισχύ της Παραβολικής Εξίσωσης .Ερωτήματα όμως παραμένουν όσον αφορά στο ποιά παραβολική προσέγγιση αποτελεί καταλλήλότερη επιλογή για κάθε περιβάλλον ή αν η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα θαλάσσια περιβάλλοντα.Και ενώ η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι ότι δεν υπάρχει ικανό μοντέλο που να χρησιμοποιείται σε κάθε περιβάλλον αλλά εξετάζοντας τους περιορισμούς και τις ικανότητες κάθε μοντέλου μπορεί να βρεθεί το πιο κατάλληλο η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα δεν έχει δοθει έως και σήμερα.Επιπλεόν παραβολικές προσεγγίσεις μπορεί να γίνονται σε θεωρητικό επίπεδο χωρίς όμως να έχουν γίνει προσπάθειες επίλυσής τους . Στην αντίθετη πλευρά η μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών δεν έχει πολλούς περιορισμούς και αποτελεί κατάλληλο εργαλείο για την αντιμετώπιση της διάδοσης του ήχου σε πολλές κατηγορίες θαλάσσιων μέσων.Τέλος , λόγω των προσεγγίσεων που έχουν πραγματοποιηθεί για να εξαχθεί η μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης ,μπορεί να χρησιμοποιηθεί μονάχα για την περιγραφή του ακουστικού πεδίου μακριά από την πηγή.Αυτός ο περιορισμός οφείλεται στην αρχική προσέγγιση που έγινε ότι $k_0 r \geq 1$ που δεν επιτρέπει στην Παραβολική Προσέγγιση να ισχύει στο πεδίο κοντά στην πηγή.Σε αντίθεση η μέθοδος των Κανονικών Ιδιομορφών θεωρητικά μπορούν να εφαρμοστεί σε όλο το πεδίο χωρίς κανένα περιορισμό σε κάποια υποπεριοχή.

Ένα επιπλέον πρόβλημα που προκύπτει κατά τη χρήση της μεθόδου Παραβολικής εξίσωσης είναι σχετικά με την επιλογή του αριθμού κύματος αναφοράς k_0 , πρόβλημα το οποίο πρίν τα μέσα της δεκαετίας του 1980 οι μελετητές δεν λάμβαναν υπόψιν.Ωστόσο η εμφάνιση του k_0 τόσο κατά τη βασική προσέγγιση για το πεδίο μακριά από την πηγή $k_0 r \geq 1$ όσο και ως όρισμα στην εξίσωση $Hankel$ δείχνουν την ανάγκη για κατάλληλη επιλογή του αριθμού κύματος αναφοράς , επιλογή που δεν πρέπει να γίνεται τυχαία αφού είναι ένα μέγεθος με φυσική σημασία και οφείλει να ικανοποιεί κάποιους φυσικούς περιορισμούς. Είναι γνωστό ότι το k_0 εξαρτάται από την ταχύτητα αναφοράς c_0 σύμφωνα με τη σχέση $k_0 = \frac{2\pi f}{c_0}$.Επομένως η επιλογή κατάλληλου k_0 συνεπάγεται κατάλληλη επιλογή της ταχύτητας αναφοράς. Μια δυνατή επιλογή του c_0 είναι ο μέσος όρος της ταχύτητας διάδοσης που παρατηρείται στο πεδίο ενώ μία άλλη είναι η ταχύτητα που αντιστοιχεί στο βάθος της πηγής.Μία τρίτη επιλογή είναι εκείνη της μικρότερης ταχύτητας που παρουσιάζει το προφίλ ταχύτητας. Ο $Pierce$ [5] βασισμένος στη φυσική του προβλήματος ,παρουσίασε μία φυσική ερμηνεία του αριθμού κύματος αναφοράς που προέρχεται από την αρχή του $Rayleigh$ για κύματα διάδοσης και αναφέρει ότι τα ολοκληρώματα ως προς το βάθος της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι ίσα.Η τελική έκφραση στην οποία κατέληξε ο $Pierce$ για τον αριθμό κύματος ανφοράς είναι η

$$k_0^2 = \frac{\int (\frac{\omega}{c})^2 |\psi|^2 dz - \int |\psi_z|^2 dz}{\int |\psi|^2 dz}$$

η οποία αποδείχθηκε από τους $Pierce$ και Lee στα 1993 ότι αποτελεί ασφαλή επιλογή.Τέλος σε περιβάλλον αμετάβλητων με την απόσταση παραμέτρων και με την προυπόθεση ότι διαδίδεται μονάχα μία ιδιομορφή οι $McDaniel$ και $Fitzerald$ αναφέρου ότι η επιλογή του k_0 ως ο οριζόντιος αριθμός ιδιομορφής μετατρέπει την προσεγγιστική παραβολική εξίσωση ακριβώς στην $reduce$ κυματική εξίσωση.

Συνεχίζοντας τη σύγκριση των δύο μεθόδων θα αναφερθούμε στην αριθμητική υπολοποίηση κάθε μιας.Η μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών υλοποιείται εύκολα σε περιβάλλοντα όπου οι παράμετροι μεταβάλλονται μονάχα ως προς το βάθος και όχι ως προς την οριζόντια απόσταση .Δυσκολίες παρουσιάζονται σε περιβάλλοντα με μεταβολές ως προς την οριζόντια απόσταση και για τέτοιου είδους περιβάλλοντα η μέθοδος επεκτείνεται και προκύπτει η μέθοδος Συζευγμένων Ιδιομορφών .Αν και η νέα αυτή μέθοδος είναι άμεση επέκταση της μεθόδου για σταθερές παραμέτρους,αφού η λύση του προκύπτει διακριτοποιώντας την οριζόντια απόσταση σε ένα μεγάλο πλήθος διαστημάτων σε κάθε ένα από τα οποία θεωρούμε ότι οι παράμετροι δε μεταβάλλονται με την οριζόντια απόσταση , υπολογιστικά αποτελεί πολύ ευαίσθητη και χρονοβόρα διαδικασία αφού απαιτείται ο υπολογισμός συντελεστών σύζευξης πολλών ιδιομορφών. Στην προσπάθεια παράκαμψης υπολογισμού τόσο πολλών συζεύ ξεων προέκυψε η αδιαβατική μέθοδος , της οποίας η κύρια παραδοχή είναι ότι δε μεταφέρεται ενέργεια ανάμεσα στις ιδιομορφές διαφορετικής τάξης.Οι υπολογισμοί των συντελεστών σύζευξης έχουν ως αποτέλεσμα την απαίτηση πολλών υπολογιστικών πράξεων και κατα επέκταση αρκετό υπολογιστικό χρόνο γεγονός που καθιστά τη μέθοδο Κανονικών Ιδιομορφών μη αποτελεσματική για την αντιμετώπιση προβλημάτων διάδοσης σε υψηλές συχνότητες και μεγάλα βάθη.Σε αντίθεση η μέθοδος Παραβολικής Προσέγγισης υλοποιείται με ευκολία τόσο σε χωρία με μεταβολές των παραμέτρων και ως προς το βάθος και ως προς την οριζόντια απόσταση αφού απαιτεί πολύ λιγότερους υπολογισμούς γεγονός κάνοντάς την πιο ευέλικτη και χρησιμοποιήσιμη μέθοδο.στα περισσότερα υπολογιστικά μοντέλα της Παραβολικής Εξίσωσης το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται είναι αυτό των Πεπερασμένων Διαφορών.Καταλήγουμε με τον τρόπο αυτό στην επίλυση ενός τριδιαγώνιου $block$ συστήματος της μορφής $[A]\psi^{n+1} = [B]\psi^n$ που λύνεται εύκολα λόγω της μορφής και των ιδιοτήτων των πινάκων.

Περιορίζοντας τη σύγκρισή των μεθόδων σε προβλήματα ακουστικής διάδοσης στις τρείς διαστάσεις πρέπει να τονιστεί ότι η μέθοδος Κανονικών Ιδιομορφών έχει μελετήσει και υλοποιήσει προβλήματα σε συγκεκριμένα θαλάσσια περιβάλλοντα.Έχει εφαρμοστεί σε περιβάλλοντα με ειδικές γεωμετρίες όπως μίας κωνικής ανύψωσης ,ενός κυλινδρικού νησιού ή μίας τοπικής ανύψωσης τυχαίου σχήματος.Εν αντιθέση με τα παραπάνω η μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης μελετά ακουστικά προβλήματα σε περιβάλλοντα με τυχαία γεωμετρία του πυθμένα η υπολοίηση όμως και αυτής της μεθόδου έχει περιοριστεί σε συγκεκριμένα χωρία.

Τα θαλάσσια περιβάλλοντα εφαρμογής των δύο μεθόδων αποτελούν ένα ακόμη στοιχείο κατά τη σύγκριση των δύο μέθοδων. Ένα από τα θαλάσσια περιβάλλοντα στα οποία έχει υλοποιηθεί η μέθοδος Κανονικών ιδιομορφών είναι αυτό μιάς τοπικής τυχαίας ανύψωσης του πυθμένα. Το πρόβλημα όπως μελετήθηκε από τον Ταρουδάκη μπορεί να εκφράσει την ακουστική πίεση με τη βοήθεια μίας μεταβολικής αρχής που βασίζεται σε θεωρήματα αναπαραστάσεων.Η μεταβολική αρχή που διατυπώθηκε μοντελοποιεί το τρισδιάστατο περιβάλλον χωρίς ιδιαίτερους περιορισμούς σχετικά με τη γεωμετρία ή τον βαθμό μεταβλητότητας των παραμέτρων του πεδίου.Επιπλέον επιτρέπει οποιαδήποτε τρόπο διακριτοποίησης της ενδιάμεσης περιοχής όπου εμφανίζεται η ανομοιογένια. Ωστόσο πρέπει να εξειδικευτεί για την εφαρμογή της για κάθε περιβάλλον χωριστά. Η σύγκλιση της σειράς των ιδιομορφών επιτυγχάνεται με λιγότερους όρους στις χαμηλές παρά στις υψηλές συχνότητες γεγονός που επιτρέπει τον υπολογισμό των συναρτήσεων *Hankel* ή *Bessel* που εμφανίζονται στις αναπαραστάσεις χωρίς προβλήματα.Αυτό αποτελεί από την πλευρά του ένα περιορισμό της μεθόδου Κανονικών Ιδιομορφών αφού εφαρμόζονται με μεγάλη ακρίβεια μονάχα σε ρηχές θάλασσες με χαμηλές έως μέτριες συχνότητες οπότε έχουμε και μικρό αριθμό κανονικών ιδιομορφών. Μία ειδική περίπτωση τέτοιας ανομοιμορφίας αποτελεί ένα κωνικό βουνό που υψώνεται ως την επιφάνεια του νερού και ένα κυλιδρικό νησί .Αριθμητικά αποτελέσματα που έχουν δημοσιευθεί δείχνουν ότι υπάρχουν μικρές διαφορές στην υπολογισμένη απώλεια διάδοσης καθώς η Παραβολική Προσέγγιση δίδει χαμηλότερης απώλειες διάδοσης έναντι της μεθόδου των Κανονικών Ιδιομορφών.Η μέθοδος Παραβολικής Εξίσωσης εφαρμόζεται στην πλειονότητα της σε σφηνοειδή χωρία.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στις ομοιότητες και διαφορές που παρουσιάζουν οι δύο μεθόδοι.Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε σε κάθε μέθοδο ξεχωριστά και να μελετήσουμε τυχόν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στις μελέτες που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια για το τρισδιάστατο περιβάλλον.

Ξεκινώντας από τη μέθοδο των Κανονικών Ιδιομορφών θα αναφερθούμε στις διαφορετικές μελέτες που έχουμε παρουσιάσει για το ακουστικό πρόβλημα γύρω από μία ανύψωση του πυθμένα κωνικού σχήματος.Η κωνική ανύψωση μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική περίπτωση κυλινδρικού εμποδίου στη θάλσσα και αυτό επιτρέπει την σύγκριση μεταξύ των μελετών του Ταρουδάκη και Αθανασσούλη.Πρέπει βέβαια να αναφερθεί ότι το πρόβληγμα αντιμετώπησε πιο πριν ο *Buckingham* ο οποίος μοντελοποίησε θεωρητικά το ακουστικό πρόβλημα γύρω από μία κωνική ανύψωση που αγγίζει την επιφάνεια του νερού.Την ανύψωση τη θεώρησε ως αποτέλεσμα της περιστροφής μίας διδιάστατης σφήνας γύρω από τον άξονα της.Η ακουστική πίεση στη μελέτη του *Buckingham* αναπαρί σταται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα *Legendre*. Η μελέτη αυτή αποτελεί ωστόσο μία ειδικέ περίπτωση αφού η ταχύτητα θεωρείται σταθερή και ο πυθμένας ακλόνητος .Θα περιοριστούμε παρακάτω στη σύγκριση των μοντέλων του Ταρουδάκη και του Αθανασσούλη.Αναλυτικότερα η κωνική ανύψωση στη μελέτη του Ταρουδάκη θεωρείται διαπερατή επιτρέποντας στον κώνο να βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο νερό ή ακόμα και να διαπερνά την επιφάνεια της θάλασσας. Αντίθετα ο Αθανασσούλης μελέτησε ένα μη διαπερατό κύλινδρο του οποίου η κορυφή αγγίζει την επιφάνεια του νερού.Στη μελέτη του ο Ταρουδάκης θεώρησε ένα διαπεράτο πυθμένα σε αντίθεση με τον Αθανασσούλη ο οποίος τον θεώρησε άκαμπτο.Το περιβάλλον θεωρείται ρηχής θάλασσας αλλά ο Ταρουδάκης θεωρεί ότι στην περιοχή της ανομοιογένειας το προφίλ ταχύτητας ματαβάλλεται με την απόσταση ενώ έξω από την ανομοιομορφία το περιβάλλον θεωρείται σταθερών παραμέτρων.Ο Αθανασσούλης μελετά το περιβάλλον ως σταθερών παραμέτρων . Λόγω της διαπερατότητας της ανομοιογένεις η μέθοδος του Ταρουδάκη μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα μεταβαλλόμενων συναρτήσει της απόστασης παραμέτρων. Η αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης χρησιμοποιώντας ουσιαστικά τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών είναι κοινή και δίδει σειρά στην οποία εμφανίζονται οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος βάθους (κανονικές ιδιομορφές) και συνημιτονοειδής συναρτήσεις για την εξάρτηση από το αζιμούθιο. Στην τελική ωστόσο έκφραση της πίεσης η έκφραση που δίνεται από τον Αθανασσούλη πλεονεκτεί. Το πλεονέκτημα αυτό οφείλεται στις ασυμπτωτικές εκφράσεις των λόγων των συναρτήσεων $Hankel$ που δεν έχουν αριθμητικά προβλήματα υπολογισμού σε αντίθεση με τις συναρτήσεις $Hankel$ που παρουσιάζουν προβλήματα για μεγάλες τάξεις. Τέλος τα αριθμητικά αποτελέσματα που έχουν πραγματοποιηθεί δείχνουν ότι και οι δύο αναπαραστάσεις δίδουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για χαμηλες συχνότητες εκπομπής της πηγής.Για διάδοση σε υφηλές συχνότητες η μέθοδος του Ταρουδάκη απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο.Σε αντίθεση αριθμητικά αποτελέσματα της μελέτης του Αθανασσούλη έχουν δοθεί και στις περιπτώσεις μεσαιών ακόμα και υφηλών συχνοτήτων [24] [38] χωρίς μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Όσον αφορά την Παραβολική Προσέγγιση θα συγκρίνουμε τα διαφορετικά μοντέλα που έχουμε αναφέρει όσον αφορά τα περιβάλλοντα που μπορούν να αντιμετωπίσουν,το προφίλ ταχύτητας ,το χειρισμό του πυθμένα, τις αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούν ,τυχόν περιορισμούς στο βάθος της θάλασσας και τη συχνότητα εκπομπής της ηχητικής πηγής καθώς και τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση της εκάστοτε παραβολικής εξίσωσης.

Ξεκινώντας από τις ομοιότητες που παρουσιάζουν όλα τα μοντέλα που μελετήσαμε αναφέρουμε ότι όλες χειρίζονται την κυματική εξίσωση μίας κατευθύνσης.Όλα,λοιπόν,τα μοντέλα θεωρούν ότι η ενέργεια λόγω του επιστρεφόμενου κύματος ($backscattering\ field$) είναι αμελητέα και αγνοούν τη συνεισφορά του στο ακουστικό πεδίο.Επίσης όλοι οι κώδικες λαμβάνουν υπόψιν τη σύζευξη ενέργειας ως προς το αζιμούθιο εκτός από το τροποποιημένο μοντέλο των *Lee-Saad-Schultz* του Δουγαλή το οποίο θεωρεί ότι στο στρώμα του πυθμένα δεν υπάρχει σύζευξη ως προς το αζιμούθιο.

Ανάλογα με την προσέγγιση της υπόριζου ποσότητας που εμφανίζεται στην κυματική εξίσωση μίας κατεύθυνσης τα μοντέλα δίδουν παραβολικές εξισώσεις μικρής ,ευρείας ή πολύ μεγάλης γωνίας ως προς την οριζόντιο.Αναλυτικότερα το μοντέλο του $Tappert$,το πρώτο που μελετήθηκε στην υποβρύχια ακουστική,δίδει εξίσωση που αντιμετωπίζει διάδοση για μικρές γωνίες.Ο κώδικας των *Siegmann-Kriegwmann-Lee* (SKL) δίδει παραβολική εξίσωση ευρείας γωνίας τόσο ως προς το βάθος όσο και ως προς το αζιμούθιο.Οι *Lee-Saad-Schultz* προσεγγίζοντας κλασματικά την υπόριζο ποσότητα κατασκεύασαν εξίσωση ευρείας γωνίας για το βάθος και μικρής για το αζιμούθιο.Κλασματική συνάρτηση χρησιμοποίησαν και οι $Collins$ και $Chin-Bing$ των οποίων το μοντέλο είναι ευρείας γωνίας ως προς το βάθος και στενής ως προς το αζιμούθιο.Η προσέγγιση του τελεστή X από μία σειρά *Padè* στα μοντέλα των $Sturm$,$Fawcett$ και στο μοντέλο $PECan$ δίδει παραβολικές εξισώσεις πολύ μεγάλης γωνίας ως προς το βάθος ενώ ανάλογα με την προσέγγιση του τελεστή Y παίρνουμε αντίστοιχα μικρή ή ευρεία γωνία ως προς το αζιμούθιο.

Στα περισσότερα από τα μοντέλα το προφίλ ταχύτητας μεταβάλλεται τόσο ως προς το βάθος,την οριζόντια απόσταση και το αζιμούθιο υπάρχουν όμως και μοντέλα που περιορίζουν τη δυνατότητα μεταβολής μονάχα ως προς το βάθος .Αναλυτικότερα τα μοντέλα των *Siegmann-Kriegwmann-Lee* (SKL),*Lee-Saad-Schultz*, $Sturm$ και $Fawcett$ θεωρούν μεταβολή και ως προς τις τρείς διαστάσεις ενώ μονάχα ο κώδικας $PECan$ θεωρεί την ταχύτητα ως συνάρτηση του βάθους μονάχα. Ανάλογες μεταβολές παρουσιάζονται και στο δείκτη διάθλασης κάθε μοντέλου.

Αναφερόμενοι στις οριακές συνθήκες που καθορίζονται σε κάθε μοντέλο πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη επιφάνειας νερού παραμένει πάντοτε η ίδια. Απαιτούμε η επιφάνεια του νερού να είναι ελεύθερη πιέσεων δηλαδή να μη μεταφέρεται ενέργεια από τη θάλασσα στον αέρα.Επίσης οι γνωστές συνθήκες συνέχειας της ακουστικής πίεσης και της κάθετης παραγώγου αυτής σε κάθε διεπιφάνεια ισχύουν σε όλα τα μοντέλα.

Η αρχική συνθήκη που λαμβάνεται για απόσταση r_0 ως προς τον άξονα της οριζόντιας απόστασης για οποιοδήποτε βάθος z είναι στα περισσότερα μοντέλα συναρτήσεις που μεταβάλονται μόνο ως προς το βάθος.Ειδικότερα για τα μοντέλα των $Tappert$,*Siegmann-Kriegwmann-Lee*,*Lee-Saad-Schultz* και $Fawcett$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι γνωστές αρχικές συνθήκες όπως η $Gaussian$ η οποία αντιπροσωπεύει μία αρμονική πηγή που παράγει κύματα με μικρή γωνία διάδοσης ,η συνθήκη του $Green$ που είναι μία αρμονική πηγή που παράγει κύματα που διαδίδονται με μεγαλύτερη γωνία διάδοσης και είναι κατάλληλη για εξισώσεις ευρείας γωνίας καθώς και ένας γραμμικός συνδιασμός ιδιομορφών όπου το εύρος της γωνίας καθορίζεται από το πλήθος των ιδιομορφών.Στο μοντέλο ωστόσο του $Sturm$ η αρχική συνθήκη μπορεί να είναι συνάρτηση και αζιμούθιου.Τέλος, στο μοντέλο $PECan$ παρέχεται η δυνατότητα χρήσης μίας συνθήκης $self-starter$ που είναι πολύ σημαντική όταν η πηγή βρίσκεται στον πυθμένα.

Για το χειρισμό του πυθμένα υπάρχουν αρκετοί εναλλακτικοί τρόποι ανάλογα με το μοντέλο.Το μοντέλο *Siegmann-Kriegwmann-Lee* μεταχειρίζεται τον πυθμένα είτε ως ένα ελεύθερο πιέσεων στρώμα (συνθήκη $Dirichlet$)είτε ως ένα άκαμπτο στρώμα (συνθήκη $Neumann$) μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και μία συνθήκη *Robin*. Για τον κώδικα *FOR3D* των *Lee-Saad-Schultz* δίδεται ηδυνατότητα χρήσης ενός απορροφητικού πυθμένα ,ενός πυθμένα ελεύθερου πιέσεων παρέχεται όμως και η δυνατότητα στο χρήστη του προγράμματος να επιλέξει κατάλληλη συνθήκη ανάλογα με το περιβάλλον που μελετά. Για το μοντέλο των *Lee-Saad-Schultz* στον κώδικα *IMP3D* ο χειρισμός του πυθμένα γίνεται με χρήση συνθήκης προσαρμογής στη διαχωριστική επιφάνεια ιζήματος -πυθμένα.Κατα τα υπόλοιπα το μοντέλο που προτάθηκε από τον Δουγαλή είναι πανομοιότυπο με το (LSS). Πυθμένα ελεύθερο πιέσεων λαμβάνουν στα μοντέλα τους οι $Sturm$ και $Fawcett$ ενώ στον κώδικα $PECan$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε ένα απορροφητικό στρώμα είτε μία μη-τοπική συνθήκη.

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα των μοντέλων δεν παρουσιάζονται περιορισμοί που να αναφέρονται στο βάθος του θαλάσσιου περιβάλλοντος αν και τα περισσότερα έχουν εφαρμοστεί σε ρηχές θάλασσες.Η συχνότητα εκπομπής της ηχητικής πηγής είναι μικρή έως μεσαία ενώ αριθμητικά αποτελέσματα που έχουν πραγματοποιηθεί για μεγαλύτερες συχνότητες απαιτούν αρκετό υπολογιστικό χρόνο και σε τέτοιου είδους προβλήματα όπως έχει ήδη αναφερθεί καταλληλότερη είναι η μέθοδος των Ακτίνων.Τα θαλάσσια περιβάλλοντα εφαρμογής των μοντέλων επιτρέπουν μεταβολές των παραμέτρων ως προς την οριζόντια απόσταση.

Βασικό πλεονέκτημα της Παραβολικής Προσέγγισης όπως έχουμε αναφέρει είναι η δυνατότητα αντιμετώπισης περιβάλλόντων με τυχαία ανομοιογένεια στον πυθμένα.Όλα τα μοντέλα έχουν εφαρμογεί σε ένα μεγάλο εύρος θαλάσσιων περιβάλλοντων ενώ ιδιαίτερη αναφορά γίνεται σε παριβάλλον με ρήχωση (σφηνες) κατά τη μελέτη του $Fawcett$.

Τέλος αξίζει να αναφερθούμε και στις αριθμητικές μεθόδους που έχουν αναπτυψθεί για την επίλυση των παραβολικών εξισώσεων.Το μοντέλο των *Siegmann-Kriegwmann-Lee* αντιμετωπίστηκε με την τεχνική του προ-σταθεροποιητή μέθοδο αρκετά απαιτητική σε υπολογιστικό χρόνο.Οι *Lee-Saad-Schultz* χρησιμοποίησαν ένα έμμεσο σχήμα Πεπερασμένων Διαφορών που καταλήγει στην επίλυση ενός τριδιαγώνιου συστήματος και υπολογιστικά υλοποιείται από τον κώδικα *FOR3D*.Η μέθοδος εναλλασσόμενων κατευθύνσεων σε συνδιασμό με μεθόδους Πεπερασμένων Διαφορών και τον αλγόριθμο $Split-Step$ εφαρμόζεται στα μοντέλα των $Collins$ και $Chin-Bing$, $Sturm$ και $Fawcett$.Τέλος ανάλογα με τη προσέγγιση του τελεστή Y ο κώδικας $PECan$ μπορεί να λυθεί με Διακριτό μετασχηματισμό $Fourier$ ή με Πεπερασνένες Διαφορές. Στα 1983 ο $Kewley$[31] συγκρίνοντας τις μεθόδους Πεπερασμένων Διαφορών και $Split-Step$ σε ρηχά θαλάσσια περιβάλλοντα διαπίστωσε ότι η πρώτη μέθοδος πλεονεκτεί για ρηχές θάλασσες ενώ ο αλγόριθμος $Split-Step$ δίδει ικανοποιητικότερα αποτελέσματα σε βαθειά περιβάλλοντα.

Είναι πάντως γεγονός ότι η περιοχή της μοντελοποίησης της διάδοσης του ήχου στις τρείς διαστάσεις είναι ενεργή και αναμένονται νεότερα αποτελέσματα στο άμεσο μέλλον,που θα δίδουν τη δυνατότητα ακριβέστερων υπολογισμών σε μικρότερο χρόνο και για γενικές γεωμετρίες κυματοδηγών.

Βιβλιογραφία

[1] ΤΑΡΟΥΔΑΚΗΣ Ι.Μ., *Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία*,Διδακτικές Σημειώσεις Ηράκλειο (2000).

[2] JENSEN B.F.& KUPERMAN A.W. & PORTER B.M. & SCHMIDT H., *Computational Ocean Acoustic* , (1993).

[3] SOMMERFELD *A partial differential equations in physics*,Academic Press New York (1967).

[4] ΤΑΡΟΥΔΑΚΗΣ Ι.Μ., *Ακουστική Διάδοση* ,Διδακτικές Σημειώσεις Ηράκλειο (2000).

[5] TOLSTOY A., *3-D Propagation issues and Models* , Journal of Computational Acoustics ,Vol.**4** No.3(1996) 243-271.

[6] PEKERIS L.C., *Theory of propagation of explosive sound in shallow water*,Geol.Soc.am.Mem.27 (1948).

[7] ΜΕΝΟΥΝΟΥ Π., *Συμβολή στη μελέτη του ηχητικού πεδίου στη θάλασα γύρω από κυλινδρική συμμετρική ανύψωση του πυθμένα*,Ε.Μ.Π. Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών ,Διπλωματική Εργασία (1993).

[8] BOYCE E.W. & DIPRIMA C.R. *Στοιχειώδης Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών* (1997).

[9] EVANS B.R., *Acoupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom*,J.Acoust.Soc.Am. **74** 188-195 (1983).

[10] TAROUDAKIS I.M.,*Study of the acoustic propagation in shallow water with arbitary shaped bottom boundaries*,PhD thesis , Deparment of Naval Architecture and Marine Engineers ,N.T.U.A.Athens,Greece (1988).

[11] TAROUDAKIS I.M. & ATHANASSOULIS A.G. & IOANNIDIS P.J.,*A variation principle for underwater acoustic propagation in a three-dimensional ocean acoustic* , J.Acoust.Soc.Am **88** 1515-1522 (1990).

[12] TAROUDAKIS I.M. & ATHANASSOULIS A.G. & IOANNIDIS P.J., *A hybrid solution of the Helmholtz equation in shallow water on a Variation Principle*, Laboratoire De Mecanique Et D Acoustique (1991).

[13] TAPPERT D.F., *The parabolic approximation method* chapter 4 224-287.

[14] HARDIN H.R. & TAPPERT D.F., *Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations* , SIAM Rev.15 423 (1973).

[15] LEE.D. & mC DANIEL T.S., *Ocean acoustic propagation by finite difference methods* ,Comput.Math.Appl. v.14(1987),No.5 .

[16] THOMSON J.D & CHAPMAN R.N., *A wide -angle split-step algorithm for the parabolic equation* , J.Acoust.Soc.Am.**74**, 1848-1854 (1983).

[17] PAPADAKIS S.J. & TAROUDAKIS I.M. & PAPADAKIS J.P., *A new method for a realistic treatment of the sea bottom in the parabolic approximation* , J.Acoust.Soc.Am.**92**, 2030-2038 (1992).

[18] EVANS B.R., *Three dimensonal acoustic scattering from a cylindrical inclusion in a wave guide* in Computational Acoustics ,edited by Lee.A.Cacmak and R.Vichnevetsky (North-Holland Amsterdam,Vol.**2** 123-132 (1990).

[19] HARRISON H.C., *Wave solutions in three-dimensional ocean enviroment*,J.Acoust.Soc.Am.**93** 1826-1840 (1993).

[20] BUCKINGHAM J.M., J.Acoust.Soc.Am.*Stationary phase evaluation of the integral for the acoustic field around a conical seamount*,**80** 278-281 (1986).

[21] BUCKINGHAM J.M.,*Theory of acoustic propagation around a conical seamount* J.Acoust.Soc.Am.**80** 265-277 (1986).

[22] TAROUDAKIS I.M., *A coupled-mode formulation for a solution of the Helmholtz equation in water in the presence of a conical seamount*, Journal of Computational Acoustics Vol.**4**,No.1 (1996) 101-121.

[23] ATHANASSOULIS A.G. & PROSPATHOPOULOS M.A. & BELIBASSAKIS A.K. *A normal-mode solution for 3D acoustic scattering from a cylidrical island* , 3rd Europian Conference on Underwater Acoustics 273-278 (1996).

[24] ATHANASSOULIS A.G. & PROSPATHOPOULOS M.A. *Three-dimensional acoustic scattering of a source-generated field from a cylindrical island* , J.Acoust.Soc.Am.**100** 206-218 (1996)

[25] LEE D., *Numerical Ocean Acoustic in Three Dimensions* chapters 2-7 11-153 .

[26] COLLINS D.M. & CHIN-BING A.S., *A three-dimensional parabolic equation model that includes the effect of rough boundaries* J.Acoust.Soc.Am.**87**(3)1103-1109 (1990).

[27] STURM B.F., *Numerical simulation of broadband signal dispersion in a 3-D shallow water waveguide* , 6th Europian Conference on Underwater Acoustics ECUA (2002).

[28] STURM B.F., *3-D parabolic equation modeling using higher-order finite difference schemes in azimuthal*, 5th Europian Conference on Underwater Acoustics ECUA (2000).

[29] FAWCETT A.J., *Modeling three-dimensional propagation in an ocean wedge using equation methods* J.Acoust.Soc.Am. **93** 2627-2633 (1993).

[30] BROOKE.H.G. & THOMSON.J.D. & EBBESON R.C., *PECan:A Canadian Parabolic Equation model for underwater sound propagation* (2000).

[31] LEE.D. & PIERCE.D.A. & SHANG.E. ,*Parabolic equation development in the twentieth century* Journal of Computational Acoustics Vol.**8**,No.**4** 527-637 (2000).

[32] DOUGALIS A.V. & FLOURI.T.E. & KAMPANIS A.N. & PAPADAKIS S.J., *A 3D parabolic equation model with an impedance bottom boundary condition* , 3th Europian Conference on Underwater Acoustics ECUA (1996).

[33] COLLINS D.M., *The time-domain solution of the wide-angle parabolic equation including the effects of sediment dispersion* J.Acoust.Soc.Am.**84** 2114-2125 (1988).

[34] CLAERBOUT.F.J., *Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous medis with application to delineation of complicated seismic structure* Geophysics ,**35**,407-318 (1970).

[35] PAPADAKIS S.J. ,*Exact nonreflecting boundary conditions for parabolic -type approximations in underwater acoustics* , Journal of Computational Acoustics **2** 83-89 (1994).

[36] Mc DANIEL T.S., *Propagation of a normal mode in the parabolic approximation*, J.Acoust.Soc.Am.**57**(2)307-311 (1975).

[37] PAPADAKIS S.J. & DOUGALIS A.V. & KAMPANIS A.N. & FLOURI T.E. & PELLONI.B & PLAISANT A. & NOUTARY E. & BJORNO L. & NIELSEN P.& ZHU D. *Ocean acoustic models for low frequency propagation in 2D and 3D enviroments* , ACOUSTICA-Acta Acustica (1997).

[38] ATHANASSOULIS A.G. & BELIBASSAKIS A.K., *All-frequency normal-mode solution of the 3D acoustic scattering field around a cylindrical obstacle in a waveguide*,Dept.of Naval Archit.and Marine Eng.,National Technical University of Athens ,to appear (1996).