

Μεταπτυχιακή εργασία  
Οκτώβριος 2004

Υπολογισμός του ακουστικού πεδίου σε  
ρηχό θαλάσσιο κυματοδηγό  
πάνω από ελαστικό πυθμένα

Μαρία Καρινιωτάκη

Διατμηματικό πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών  
των τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης στην  
κατεύθυνση "Μαθηματική Προσομοίωση και Τεχνικές  
υπολογισμού"

Η μεταπτυχιακή εργασία κατατέθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Οκτώβριο 2004. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Μιχάλης Ταρουδάκης. Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι : Μ. Ταρουδάκης, Γ.Μακράκης και ο Γ. Κοσιώρης.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε περιβάλλον με ελαστικό πυθμένα</b>	<b>7</b>
2.1	Ακουστικά κύματα στο νερό . . . . .	8
2.2	Ακουστικά και διατμητικά κύματα στον πυθμένα . . . . .	9
2.3	Οριακές συνθήκες και συντελεστής ανάκλασης . . . . .	10
2.4	Διατύπωση του προβλήματος με τη συνθήκη προσαρμογής . . . . .	13
2.4.1	Το πρόβλημα βάθους . . . . .	14
2.4.2	Υπολογισμός της συνάρτησης προσαρμογής και των ιδιοτιμών . . . . .	15
2.4.3	Αναπαράσταση της λύσης σε σειρά . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Η μέθοδος του ενεργού βάθους για το υπολογισμό των ιδιοτιμών</b>	<b>19</b>
3.1	Η έννοια του ενεργού βάθους . . . . .	20
3.2	Υπολογισμός των ιδιοτιμών στο πρόβλημα με το ενεργό βάθος .	21
3.3	Το μιγαδικό ενεργό βάθος . . . . .	23
3.4	Αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοτιμών . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Εφαρμογές</b>	<b>27</b>
4.1	Διαδικασία υπολογισμού του ακουστικού πεδίου . . . . .	28
4.2	Περιγραφή κυματοδηγού . . . . .	28
4.3	Δεδομένα . . . . .	28
4.4	Σύγκλιση επαναληπτικού σχήματος υπολογισμού ιδιοτιμών . . .	29
4.5	Υπολογισμός των ιδιοτιμών και της απώλειας διάδοσης . . . . .	30
4.5.1	Μελέτη ρευστού πυθμένα ( $c_s = 0m/sec$ ) . . . . .	30
4.5.2	Μελέτη ελαστικού πυθμένα ( $c_s = 250m/sec$ ) . . . . .	32
4.5.3	Μελέτη ελαστικού πυθμένα ( $c_s = 1100m/sec$ ) . . . . .	34

4.5.4	Μελέτη ελαστικού πυθμένα ( $c_s = 1450m/sec$ ) . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>38</b>
5.1	Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου του ενεργού βάρους : . . . . .	39
<b>A'</b>	<b>Αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης μέσω συναρτήσεων <i>Green</i></b>	<b>41</b>
<b>B'</b>	<b>Σύγκριση μεθόδων</b>	<b>45</b>
B'.1	Ισοδυναμία του ενεργού βάρους με την ανάπτυξη της λύσης μέσω των συναρτήσεων <i>Green</i> . . . . .	45
B'.2	Ισοδυναμία των συντελεστών ανάκλασης . . . . .	47

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Το ενδιαφέρον για το θαλάσσιο περιβάλλον είχε ξεκινήσει μόλις από την αρχαιότητα με τον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) ο οποίος παρατήρησε ότι στην θάλασσα διαδίδεται ο ήχος.

Αργότερα η παρατήρηση και η μελέτη του θαλάσσιου βυθού και των ιδιοτήτων του εντάθηκε. Η ανάγκη για αμυντικές εφαρμογές, επικοινωνία και καθορισμό της πορείας των υποβρυχίων είναι αφορμή για συστηματική έρευνα. Τις τελευταίες δεκαετίες η ανησυχία των επιστημόνων για τη μεταβολή του κλίματος, τη σεισμικότητα, την αύξηση των βροχοπτώσεων, τη ρύπανση στο θαλάσσιο περιβάλλον ολοένα και μεγαλώνει με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται τρόποι συλλογής πληροφοριών για το θαλάσσιο περιβάλλον που σε μεγάλο βαθμό καθορίζει όλα αυτά τα φαινόμενα. Στην προσπάθεια αυτή η εκπομπή ηχητικών κυμάτων στη θάλασσα αποδεικνύεται χρήσιμη, αφού τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν διαδίδονται στο νερό. Η χρήση του ήχου στη θάλασσα συνδέεται με πολλές εφαρμογές και με τη διατύπωση ευθέων και αντίστροφων προβλημάτων κυματικής (ακουστικής) διάδοσης. Για παράδειγμα ένα αντίστροφο πρόβλημα είναι η αναγνώριση της σύστασης του πυθμένα, με χρήση ανακλάσεων του ήχου από τον πυθμένα. Ένα παράδειγμα για ένα ευθύ πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της ακουστικής πίεσης όταν μια πηγή εκπέμπει ηχητικό σήμα με δεδομένα τις πυκνότητες και τις ταχύτητες του ήχου στο νερό και τον πυθμένα. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται τόσο στα ευθέα όσο και στα αντίστροφα προβλήματα είναι εν γένει περίπλοκες και απαιτείται λεπτομερής, θεωρητική και πειραματική μελέτη των μοντέλων που χρησιμοποιούνται για τη διεξαγωγή του πειράματος και την ανάλυση των μετρήσεων. Συμπέρασμα των παραπάνω είναι το γεγονός η υποβρύχια ακουστική είναι ένας ενδιαφέρον κλάδος με ποικίλες εφαρμογές που χρησιμοποιεί μαθηματικά εργαλεία σε θέματα φυσικής, βιολογίας, γεωλογίας κτλ.

Το πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε στην παρούσα εργασία είναι ο υπολογισμός της ακουστικής πίεσης σε ηχητικές μεταδόσεις στη θάλασσα στο

πεδίο των συχνοτήτων για μια ρηχή θάλασσα πάνω από ελαστικό πυθμένα.

Αρχικά θα γίνει μια σύντομη αναφορά στις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης. Αναφερόμενοι στο πεδίο των συχνοτήτων θα ασχοληθούμε με την επίλυση της εξίσωσης *Helmholtz* με τη μέθοδο ανάπτυξης της λύσης σε σειρά ιδιομορφών. Άλλη μέθοδος που έχει εφαρμοστεί στο παρελθόν είναι η μέθοδος της ολοκληρωτικής αναπαράστασης που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα *OASES* [19]. Για τον υπολογισμό των ιδιομορφών-ιδιοσυναρτήσεων απαιτείται η επίλυση μιας χαρακτηριστικής εξίσωσης που θα μας δώσει τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου προβλήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Στην περίπτωση του ρευτού πυθμένα το πρόβλημα έχει επαρκώς μελετηθεί τόσο για σταθερή ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό, όσο και για ταχύτητα που μεταβάλλεται με το βάθος. Στην περίπτωση αυτή έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές. Όταν όμως ο πυθμένας είναι ελαστικός, η διάδοση των διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα περιπλέκει το πρόβλημα, οι ιδιοτιμές σε αυτή την περίπτωση είναι μιγαδικές και ο εντοπισμός των ιδιοτιμών σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο απαιτεί χρονοβόρα διαδικασία. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε βασικά προγράμματα-μοντέλα υπολογισμού των ιδιοτιμών όπως το *ORCA* [17], το *KRAKEN – C* [1] και το *OASES* [19]. Στην εργασία θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στο υπολογισμό των ιδιοτιμών με τη μέθοδο του "ενεργού βάρους", η οποία ορίζει έναν αλγόριθμο για κανονικές ιδιομορφές πάνω από ελαστικό πυθμένα ή σε αποσβεννόμενο ρευστό σε περιβάλλον ρηχού κυματοδηγού αποφεύγοντας αριθμητικές μεθόδους. Θεωρώντας την αλλαγή φάσης ενός επίπεδου κύματος που ανακλάται στον πυθμένα, πρώτος ο *Weston* [7] εισήγαγε την ιδέα του ενεργού βάρους υποστηρίζοντας ότι τα αποτελέσματα της ανάκλασης στον πραγματικό πυθμένα είναι ισοδύναμα με τα αποτελέσματα σε ένα φανταστικό βάθος πλήρους ανάκλασης κάτω από τον πραγματικό πυθμένα. Η μέθοδος κατά επέκταση επιτρέπει την απώλεια ενέργειας στην ανάκλαση σε ελαστικούς κυματοδηγούς με χαμηλές ταχύτητες διατμητικών κυμάτων είτε σε κυματοδηγούς με απόσβεση. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η μέθοδος του ενεργού βάρους για σταθερές ταχύτητες σε θαλάσσιο περιβάλλον με ρευτό και ελαστικό πυθμένα. Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία των μεθόδων και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους με άλλες μεθόδους.

Μετά τον υπολογισμό των ιδιοτιμών θα ακολουθήσει ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων και η αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος με σκοπό τον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης συναρτήσει του βάρους και της απόστασης χρησιμοποιώντας κατάλληλο πρόγραμμα. Τέλος, θα ακολουθήσουν συμπεράσματα για τα αποτελέσματα της λύσης για τις διάφορες ταχύτητες των διατμητικών κυμάτων και γραφικές παραστάσεις που τα αποδεικνύουν.

Η διάρθρωση της εργασίας έχει ως εξής:

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε το πλαίσιο που θα ακολουθήσουμε στην παρούσα εργασία. Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε θαλάσσιο κυματοδηγό πάνω από ελαστικό ημιάπειρο πυθμένα με σταθερή ταχύτητα ακουστικών κυμάτων στο νερό.

Αρχικά θα μελετήσουμε τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον τα οποία ικανοποιούν την ακουστική εξίσωση και με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών θα καταλήξουμε στην εξίσωση *Helmholtz*. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα ακουστικά και τα διατμητικά κύματα στον πυθμένα με τις αντίστοιχες ιδιότητες τους. Στην εξίσωση *Helmholtz* χρησιμοποιούμε αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων και καταλήγουμε στο πρόβλημα βάρους με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες και σε μια συνήθης διαφορική εξίσωση τύπου *Bessel* ως προς την απόσταση. Αναφέρουμε ότι το πρόβλημα βάρους είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων και με χρήση της συνθήκης προσαρμογής στη διεπιφάνεια παίρνουμε μια χαρακτηριστική εξίσωση υπολογισμού των ιδιοτιμών του προβλήματος. Ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας με τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος βάρους επιλύοντας ένα σύστημα ως προς τους συντελεστές της αναπαράστασης.

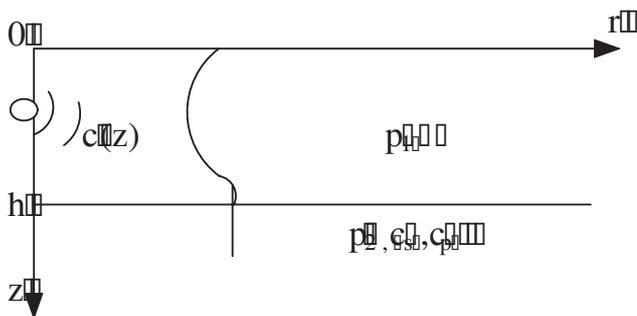
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια μέθοδο υπολογισμού των ιδιοτιμών του προβλήματος βάρους. Χρησιμοποιούμε την έννοια του πραγματικού ενεργού βάρους στην περίπτωση του ρευστού πυθμένα και έπειτα επεκτείνουμε τη μελέτη στην μέθοδο του μιγαδικού ενεργού βάρους συμπεριλαμβάνοντας την περίπτωση του ελαστικού πυθμένα. Με εφαρμογή της μεθόδου καταλήγουμε σε έναν αλγόριθμο υπολογισμού των ιδιοτιμών.

Θα ακολουθήσει η εφαρμογή της μεθόδου του ενεργού βάρους για χαρακτηριστικές τιμές ενός ρηχού κυματοδηγού μεταβάλλοντας την ταχύτητα των διατμητικών κυμάτων. Θα παραθέσουμε πίνακες ιδιοτιμών όπως υπολογίστηκαν με τη μέθοδο του ενεργού βάρους και με άλλες μεθόδους και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε γραφικές παραστάσεις της απώλειας διάδοσης με βάση τις ιδιοτιμές των διαφόρων μεθόδων και καταλήγουμε σε διάφορα συμπεράσματα. Γενικά, παρουσιάζουμε μια ολοκληρωμένη μελέτη υπολογισμού της ακουστικής πίεσης σε περιβάλλον ρηχού κυματοδηγού σταθερών παραμέτρων με ελαστικό πυθμένα.

## Κεφάλαιο 2

### Το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε περιβάλλον με ελαστικό πυθμένα

Στην εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της διάδοσης του ήχου σε ένα θαλάσσιο περιβάλλον που ορίζεται από την επίπεδη οριζόντια επιφάνεια της θάλασσας σε βάθος  $z = 0$  (κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων) και έναν ημιάπειρο ελαστικό πυθμένα που χωρίζεται από την θάλασσα με οριζόντιο και επίπεδο σύνορο σε βάθος  $z = h$ . Το μοντέλο που περιγράφουμε χαρακτηρίζεται από αξονική συμμετρία και φαίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Μοντέλο ρευστού-ελαστικού μέσου με το προφίλ ταχύτητας

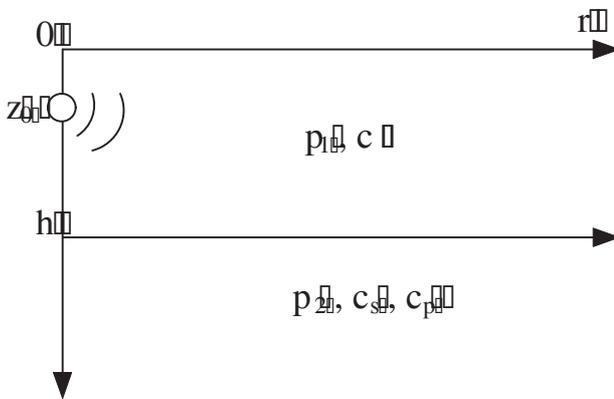
Θα θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα μελετάται για μια σημειακή αρμονική πηγή που τοποθετείται σε απόσταση  $r_0 = 0$  και βάθος  $z_0$ . Το θαλάσσιο μέσο χαρακτηρίζεται από ταχύτητα ήχου  $c(z)$ , με προφίλ ταχύτητας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 και πυκνότητα  $\rho_1$ . Ο ομογενής ελαστικός πυθμένας χαρακτηρίζεται από πυκνότητα  $\rho_2$ , ταχύτητα ακουστικών κυμάτων  $c_p$  και ταχύτητα

διατμητικών κυμάτων  $c_s$ . Επίσης, στον πυθμένα μπορούμε να θεωρήσουμε συντελεστές απορρόφησης  $\alpha_2$  και  $\alpha_s$  οι οποίοι εκφράζουν την ενέργεια που χάνεται σε ενεργειακή μορφή διαφορετική από την κυματική. Στο πρόβλημα μας θα θεωρήσουμε ότι οι ταχύτητες των κυμάτων και οι πυκνότητες παραμένουν σταθερές και στα δύο μέσα, ενώ οι συντελεστές απορρόφησης είναι μηδέν.

## 2.1 Ακουστικά κύματα στο νερό

Τα ακουστικά κύματα είναι διαταραχές της πίεσης σε ένα μέσο που διαδίδονται με χαρακτηριστική ταχύτητα. Το ακουστικό μέσο περιγράφεται από τα χαρακτηριστικά μεγέθη που είναι η πίεση  $P$ , η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου  $u$  και η πυκνότητα  $\rho_1$  που είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου. Η ακουστική εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των ρευστών που διέπουν τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών, δηλαδή

- την εξίσωση της συνέχειας
- την εξίσωση του *Euler*
- την καταστατική εξίσωση



Σχήμα 2.2: Μοντέλο ρευστού-ελαστικού μέσου

Η ακουστική εξίσωση με πηγή που διέπει το πρόβλημα στο νερό σύμφωνα με διατύπωση του *M.Porter* [1] είναι

$$\nabla \left( \frac{1}{\rho_1} \nabla P^1 \right) - \frac{1}{\rho_1 c^2} P_{tt}^1 = -s(t) \frac{\delta(z - z_0) \delta(r)}{2\pi r} \quad (2.1)$$

όπου  $P^1(r, z, t)$  είναι η ακουστική πίεση σαν συνάρτηση του βάθους  $z$ , της απόστασης  $r$  και του χρόνου  $t$  (κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων). Επίπλε-

ον, η σημειακή ισοτροπική πηγή χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση  $s(t)$ . Αν υποθέσουμε ότι η πηγή είναι μονοχρωματική τότε  $s(t) = e^{-i\omega t}$  και κάνοντας την αντικατάσταση

$$P^1(r, z, t) = P(r, z)e^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

στην σχέση 2.1, παίρνουμε την εξίσωση *Helmholtz*

$$\rho_1 \nabla \left( \frac{1}{\rho_1} \nabla P \right) + \frac{\omega^2}{c^2} P = -\frac{\delta(z - z_0)\delta(r)}{2\pi r} \quad (2.3)$$

Στη συνέχεια το πλήρες πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης στο νερό θα συμπληρωθεί με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες.

## 2.2 Ακουστικά και διατμητικά κύματα στον πυθμένα

Στον πυθμένα έχουμε δύο συστήματα κυματισμών, τα διατμητικά και τα ακουστικά κύματα σε αντίθεση με το ρευστό στρώμα. Ακολουθώντας τους *Tolshoy, Clay* [16] θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια των δυναμικών μετατόπισης για λόγους που σχετίζονται με την ευκολία διατύπωσης των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη που υπεισέρχονται σε ένα κυματικό πρόβλημα σε ελαστικό χώρο εκφράζονται μέσω της πραγματικής συνάρτησης του δυναμικού μετατόπισης  $d$  και συνδέονται με την μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων ως εξής,

$$\vec{d} = \nabla \Phi + \text{curl} \Psi \quad (2.4)$$

Το δυναμικό μετατόπισης των ακουστικών κυμάτων  $\Phi$  είναι βαθμωτό μέγεθος, ενώ το δυναμικό των διατμητικών κυμάτων  $\Psi$  είναι διανυσματικό. Η μεταβολή της πίεσης του στοιχειωδούς σωματιδίου ενός μέσου συνδέεται με την μετατόπιση μέσω του νόμου του *Hooke* :  $P = -\lambda_1 \nabla \cdot \vec{d}$  όπου  $\lambda_1$  είναι το μέτρο διόγκωσης. Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε την σχέση που συνδέει την πίεση και το δυναμικό,

$$P = -\lambda_1 \nabla^2 \Phi \quad (2.5)$$

Το δυναμικό μετατόπισης το οποίο είναι συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου υπόκειται επίσης στην κυματική εξίσωση :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

ενώ για το μέτρο διόγκωσης ισχύει :  $\lambda_1 = \rho_2 c^2$  και η πίεση γράφεται στην μορφή

$$P = -\rho_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Ένα ελαστικό σώμα διαθέτει επαρκή ακαμψία για να διαδώσει διατμητικά κύματα. Επομένως, σε ένα κυματικό πρόβλημα θα πρέπει να περιλάβουμε και την μελέτη των διατμητικών κυμάτων καθώς και την αλληλεπίδραση τους με τα ακουστικά κύματα. Έτσι, για ομογενή και ιστροπικά ελαστικά μέσα όπως ο πυθμένας της θάλασσας, οι εξισώσεις μικρών μεταβολών οδηγούν στην διατύπωση δύο κυματικών εξισώσεων που ισχύουν ταυτόχρονα και αφορούν τα δυναμικά μετατόπισης ακουστικών και διατμητικών κυμάτων  $\Phi, \Psi$ , αντίστοιχα. Οι κυματικές εξισώσεις είναι :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

οπού  $c_p, c_s$  είναι οι ταχύτητες διάδοσης των ακουστικών και διατμητικών κυμάτων, αντίστοιχα και συνδέονται με τις σταθερές *Lame* της μηχανικής (μέτρο διόγκωσης  $\lambda_1$  και μέτρο ελαστικότητας  $\mu$ ) μέσω των σχέσεων,

$$c_p^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu}{\rho_2}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho_2}$$

## 2.3 Οριακές συνθήκες και συντελεστής ανάκλασης

Για να έχουμε ένα καλώς τεθημένο πρόβλημα χρειαζόμαστε την διατύπωση των οριακών συνθηκών. Οι συνθήκες θα οριστούν στην επιφάνεια της θάλασσας, στη διαχωριστική επιφάνεια νερού πυθμένα και στο άπειρο. Θεωρούμε την επιφάνεια της θάλασσας  $z = 0$  να είναι ελεύθερη πιέσεων, που σημαίνει ότι δεν μεταδίδεται ήχος από το νερό στον αέρα. Η αντίστοιχη οριακή συνθήκη είναι

$$P(\cdot, 0) = 0 \quad (2.10)$$

Θα θεωρήσουμε μια συνθήκη ακτινοβολίας για  $r \rightarrow \infty$ , η οποία θα μας εξασφαλίσει αποκλείοντες κυματισμούς. Για  $z \rightarrow \infty$ , η συνθήκη που τίθεται για διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις είναι να μηδενίζονται τα πεδία τόσο του διατμητικού όσο και του ακουστικού κυματισμού. Ακόμα απομένει η διατύπωση των συνθηκών στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-πυθμένα.

Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι επιθυμητό να αναλυθεί η ακουστική διαταραχή σε επίπεδα κύματα που χαρακτηρίζονται από δεδομένη γωνία πρόσπτωσης  $\varphi$  και αντίστοιχο οριζόντιο αριθμό κύματος  $\lambda$ . Τμήμα της ακουστικής ενέργειας θα ανακλαστεί και θα επιστρέψει στο ρευστό και τμήμα θα διαδοθεί

στο ελαστικό μέσο αλλά με την μορφή δύο κυματισμών διαφορετικού είδους: διαμήκης (ακουστικό) και διατμητικό. Όσον αφορά τα επίπεδα κύματα που προκύπτουν, χαρακτηρίζονται από τα δυναμικά που προσπίπτοντος, του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου ακουστικού κύματος  $\Phi_{1i}, \Phi_{1r}, \Phi_2$ , αντίστοιχα και το δυναμικό διαδιδόμενου διατμητικού κύματος  $\Psi_2$ . Θεωρώντας το μέτρο του προσπίπτοντος κυματισμού μονάδα, τα δυναμικά δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις<sup>2</sup>

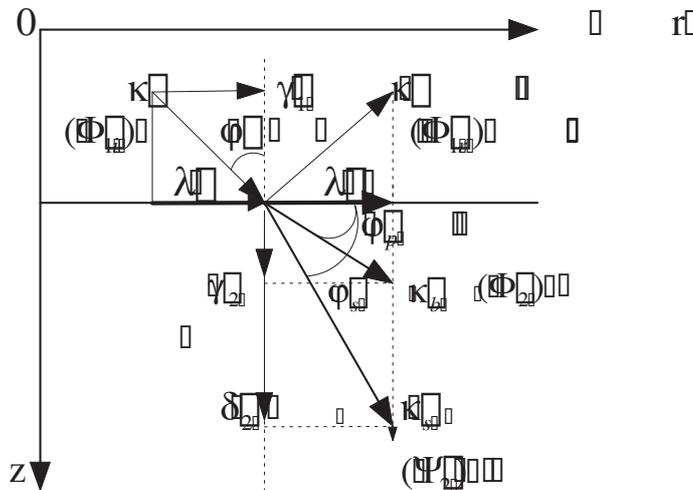
$$\Phi_{1i} = e^{i(\lambda x + \gamma_1 z - \omega t)} \quad (2.11)$$

$$\Phi_{1r} = R e^{i(\lambda x - \gamma_1 z - \omega t)} \quad (2.12)$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(\lambda x + \gamma_2 z - \omega t)} \quad (2.13)$$

$$\Psi_2 = T_s e^{i(\lambda x + \delta_2 z - \omega t)} \quad (2.14)$$

όπου  $T_p$  και  $T_s$  είναι συντελεστές διάδοσης των ακουστικών και διατμητικών κυμάτων.



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση των δυναμικών και των αριθμών κύματος

Επίσης, οι αριθμοί κύματος  $k, k_s, k_b$  που φαίνονται στο σχήμα 2.3 (ως διανυσματικά μεγέθη) έχουν σταθερό μέτρο, ενώ η διεύθυνση τους καθορίζεται από τις αντίστοιχες γωνίες πρόσπτωσης και διάδοσης. Ο συντελεστής  $R$  που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση είναι γνωστός ως 'συντελεστής ανάκλασης', αναφέρεται στο επίπεδο κύμα και η συνολική πίεση προκύπτει από την

επαλληλία της συνεισφοράς όλων των κυματισμών. Για το υπολογισμό του συντελεστή θα χρησιμοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες που χαρακτηρίζουν την φυσική του προβλήματος. Προηγουμένως, όμως να αναφέρουμε ότι τα μεγεθη που υπεισέρχονται στο ρευστό μέσο είναι η πίεση  $P$  και η μετατόπιση  $d$ , ενώ στο ελαστικό μέσο έχουμε την μετατόπιση και τον ταυιστή τάσεων, όπου  $\sigma_{2zz}$  είναι η τάση κάθετη στην διεπιφάνεια και  $\sigma_{2zx}$  είναι η συνιστώσα πάνω στο επίπεδο της διεπιφάνειας. Οι σχέσεις που συνδέουν τα δυναμικά των ακουστικών και των διατμητικών κυμάτων με τις συνιστώσες των τάσεων είναι :

$$\sigma_{2zz} = \lambda_1 \nabla^2 \Phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{2zx} = \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.16)$$

Στο πρόβλημα που μελετάμε απαιτούμε τα δύο μέσα να βρίσκονται σε επαφή και να μην υπάρχει υπερβάλλουσα πίεση από την μία ή την άλλη πλευρά της διεπιφάνειας, γεγονός που εκφράζεται με τη συνέχεια κάθετης τάσης και της κάθετης μετατόπισης στην διεπιφάνεια.

$$P_1 = \sigma_{2zz} \quad (2.17)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.18)$$

Επίσης, δεν υπάρχει διατμητική τάση στο ρευστό, άρα  $\sigma_{2zx} = 0$ . Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων στις δύο διαστάσεις στις οριακές συνθήκες και συνδιάζοντας τις με τις εκφράσεις των δυναμικών παίρνουμε τον συντελεστή ανάκλασης [2]

$$R = \frac{4\gamma_2 \delta_2 \lambda^2 + (\delta_2^2 - \lambda^2)^2 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) \left(\frac{\omega^4}{c_s^4}\right)}{4\gamma_2 \delta_2 \lambda^2 + (\delta_2^2 - \lambda^2)^2 + \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) \left(\frac{\omega^4}{c_s^4}\right)} \quad (2.19)$$

όπου  $\gamma_2, \delta_2$  είναι οι κατακόρυφοι αριθμοί κύματος για τα ακουστικά και διατμητικά κύματα στο ελαστικό μέσο, αντίστοιχα,  $\gamma_1$  είναι ο κατακόρυφος αριθμός κύματος στο ρευστό μέσο και  $\lambda$  είναι ο οριζόντιος αριθμός κύματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3 και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις,

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2} \quad (2.20)$$

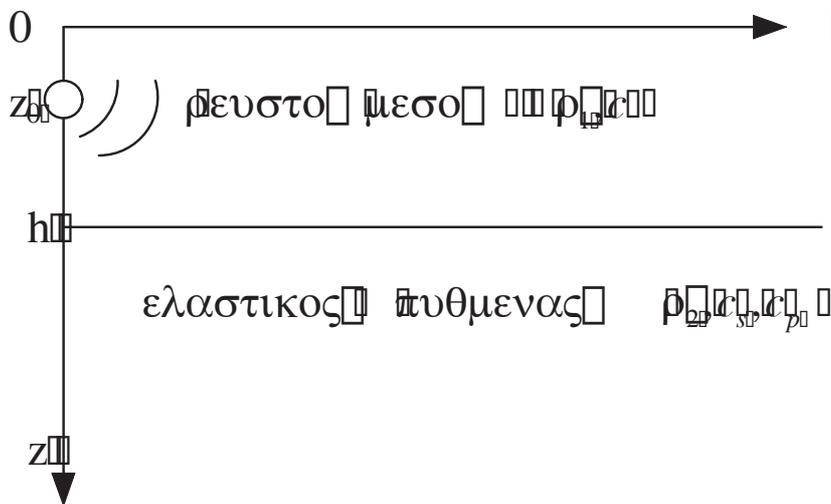
$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_p^2} - \lambda^2} \quad (2.21)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \lambda^2} \quad (2.22)$$

Ο συντελεστής ανάκλασης παίρνει και διαφορετική μορφή που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

## 2.4 Διατύπωση του προβλήματος με τη συνθήκη προσαρμογής

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το περιβάλλον με το οποίο θα ασχοληθούμε στο οποίο θεωρούμε ένα ρηχό θαλάσσιο περιβάλλον με σταθερή ταχύτητα διάδοσης του ήχου και έναν ελαστικό πυθμένα σταθερών παραμέτρων.



Σχήμα 2.4: Μοντέλο ρευστού-ελαστικού μέσου

Η μελέτη του προβλήματος θα περιοριστεί στο ρευστό στρώμα και με μια κατάλληλη συνθήκη προσαρμογής (*impedance condition*) θα πάρουμε πληροφορίες για την δομή του πυθμένα. Η εξίσωση *Helmholtz* με πηγή για την πίεση στο νερό δεδομένου ότι θεωρούμε σταθερή πυκνότητα, δίνεται από την έκφραση,

$$\nabla^2 P + \kappa^2 P = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (2.23)$$

όπου  $\kappa = \frac{\omega}{c}$  ο αριθμός κύματος, με συνθήκες

$$P(r, 0) = 0, \quad (2.24)$$

$$P(r, h) = f\left(\frac{\partial P}{\partial z}(r, h)\right) \quad (2.25)$$

και μια συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld*, καθώς  $r \rightarrow \infty$  που εκφράζει ότι το άπειρο δεν επανακτινοβολεί ενέργεια. Η  $f$  είναι μια συνάρτηση ως

προς την πρώτη παράγωγο της πίεσης στην διεπιφάνεια την οποία θα ορίσουμε παρακάτω. Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων και ορίζεται σε ένα ημιάπειρο χωρίο.

### 2.4.1 Το πρόβλημα βάθους

Θα υιοθετήσουμε την μέθοδο αναπαράστασης της πίεσης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων για να λύσουμε το πρόβλημα που διατυπώσαμε ανωτέρω. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων ως προς την μεταβλητή  $z$  που θα ορίζει τις ιδιοτιμές της λύσης. Για να διατυπωθεί το κατάλληλο πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων θα ξεκινήσουμε από την εξίσωση *Helmholtz* χωρίς την πηγή, θα εφαρμόσουμε τον τελεστή *Laplace*  $\nabla^2$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες και θα πάρουμε τελικά,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \kappa^2 P = 0 \quad (2.26)$$

Η γεωμετρία του μοντέλου είναι τέτοια ώστε να υπάρχει αξονική συμμετρία, συνεπώς δεν υπάρχει εξάρτηση από την γωνία. Άρα η σχέση 2.26 γίνεται

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \kappa^2 P = 0 \quad (2.27)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση  $P(r, z) = U(z)R(r)$  στην σχέση 2.27 και εφαρμόζοντας την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών με σταθερά  $-\lambda^2$  παίρνουμε το πρόβλημα βάθους στο νερό:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (k^2 - \lambda^2)U = 0, \quad 0 \leq z \leq h \quad (2.28)$$

όπου  $k = \frac{\omega}{c}$ , ενώ οι οριακές συνθήκες που προκύπτουν από τις σχέσεις 2.24 και 2.25 έχουν ως εξής:

$$U(0) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{dU}{dz}(h) = \frac{U(h)}{I(\lambda)} \quad (2.30)$$

όπου  $U$  είναι ιδιοσυνάρτηση,  $\lambda$  η ιδιοτιμή του προβλήματος βάθους και  $I(\lambda)$  είναι η συνάρτηση προσαρμογής, η οποία δίνει πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά του πυθμένα. Η μελέτη του προβλήματος θα περιοριστεί μόνο στο στρώμα του νερού, έτσι οι πληροφορίες για τη δομή του πυθμένα προέρχονται μέσω της συνάρτησης προσαρμογής.

Το πρόβλημα βάθους στο νερό με τις οριακές συνθήκες όπως παρουσιάσαμε (2.28-2.30) ορίζει ένα μη κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών *Sturm – Liouville*

διότι η συνθήκη 2.30 δεν συνδέει με γραμμικό τρόπο την ιδιοσυνάρτηση με την παράγωγο της. Το πρόβλημα αυτό έχει λύσεις ιδιοσυναρτήσεις  $U_n$  που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές  $\lambda_n$  οι οποίες προκύπτουν από μια χαρακτηριστική εξίσωση που δίνεται από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος όπως θα υπολογίσουμε στην επόμενη ενότητα. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε την κατάλληλη έκφραση για τη συνάρτηση προσαρμογής.

## 2.4.2 Υπολογισμός της συνάρτησης προσαρμογής και των ιδιοτιμών

Σύμφωνα με το κεφάλαιο 2.4.1 οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος βάθους είναι της μορφής  $U_n(z) = A_n e^{i\gamma_{1n}z} + B_n e^{-i\gamma_{1n}z}$  εξαιτίας της μορφής του προβλήματος βάθους 2.28-2.30. Κοντά στην διεπιφάνεια  $z = h$  η ιδιοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$U_n(z) = C_n [e^{i\gamma_{1n}(z-h)} + R_n e^{-i\gamma_{1n}(z-h)}]$$

όπου τα εκθετικά  $e^{i\gamma_{1n}(z-h)}$ ,  $e^{-i\gamma_{1n}(z-h)}$  αντιπροσωπεύουν κύματα που κινούνται προς και από την διεπιφάνεια, αντίστοιχα και  $R_n$  είναι ο συντελεστής ανάκλασης που δίνεται από την σχέση 2.19 για την αντίστοιχη γωνία πρόσπτωσης που ορίζεται, ενώ  $\gamma_{1n}$  είναι ο 'επιτρεπτός' κατακόρυφος αριθμός κύματος που με τη σειρά του εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του προβλήματος (σχήμα 3). Σύμφωνα με την μορφή της συνάρτησης προσαρμογής που δώσαμε στο πρόβλημα βάθους και τις παραπάνω μορφές των ιδιοσυναρτήσεων,

$$U_n(h) = C_n(1 + R_n)$$

$$U_n'(h) = i\gamma_{1n}C_n(1 - R_n)$$

έχουμε

$$I(\lambda_n) = \frac{1 + R_n}{i\gamma_{1n}(1 - R_n)} \quad (2.31)$$

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του προβλήματος προχωράμε ως εξής:

Αρχικά θα βρούμε τη μορφή της λύσης  $U_n(z)$  του προβλήματος βάθους στο νερό. Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε αριθμό κύματος είναι της μορφής

$$U_n(z) = A_n e^{i\gamma_{1n}z} + B_n e^{-i\gamma_{1n}z}, \quad 0 \leq z \leq h$$

όπου  $\gamma_{1n} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_n^2}$  και  $\lambda_n$  είναι η ιδιοτιμή του προβλήματος. Από την συνθήκη 2.29 έχουμε,

$$A_n + B_n = 0 \Rightarrow A_n = -B_n$$

και τελικά παίρνουμε λύση της μορφής

$$U_n(z) = A_n \sin \gamma_{1n} z \quad (2.32)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω λύση  $U_n(z)$  στη σχέση 2.30 και την έκφραση της  $I(\lambda)$  από την 2.31 καταλήγουμε εύκολα στην εξίσωση,

$$\tan(\gamma_{1n} h) = \frac{1 + R_n}{i(1 - R_n)} \quad (2.33)$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο 2.19 του συντελεστή ανάκλασης για επίπεδο κύμα στην περίπτωση του ελαστικού πυθμένα στην 2.33, προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση η οποία είναι μια μη γραμμική μιγαδική εξίσωση. Η μορφή της γίνεται,

$$\tan\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_n^2} h\right) = \frac{4\gamma_{2n}\delta_{2n}\lambda^2 + (\delta_{2n}^2 - \lambda_n^2)^2}{i\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\gamma_{2n}}{\gamma_{1n}}\right)\left(\frac{\omega^4}{c_s^4}\right)} \quad (2.34)$$

Άρα, με την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης 2.34 βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του προβλήματος βάρους, που εν γένει είναι μιγαδικές και στη συνέχεια αυτό που απομένει είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές των ιδιοσυναρτήσεων της σχέσης 2.32, που προκύπτουν λύνοντας ένα σύστημα το οποίο θα αναφέρουμε παρακάτω. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δοθεί η αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης μέσω των ιδιοσυναρτήσεων που ορίστηκαν από το πρόβλημα βάρους.

### 2.4.3 Αναπαράσταση της λύσης σε σειρά

Το θεώρημα αναπαράστασης θα μας δώσει την λύση για την πίεση το οποίο αναφέρει: αν μια συνάρτηση με τμηματικά συνεχή παράγωγο είναι ορισμένη στο διάστημα  $[0, +\infty)$  και υπόκειται στις οριακές συνθήκες ενός μη κανονικού προβλήματος  $S - L$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ως εξής:

$$P(r, z) = \sum_{n=1}^N R_n(r) U_n(z, \lambda_n) + \int_S b(\lambda) \Phi(z, \lambda) dz \quad (2.35)$$

όπου  $\Phi(z, \lambda)$  είναι μη κανονική ιδιοσυνάρτηση και ορίζεται στο συνεχές φάσμα των ιδιοτιμών  $S$ . Έτσι η αναπαράσταση της λύσης πρέπει να γίνει πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις τόσο του διακριτού φάσματος όσο και του συνεχούς. Όμως για μεγάλες αποστάσεις η συνεισφορά των ιδιοσυναρτήσεων του συνεχούς φάσματος στην λύση είναι μικρή [15] δεδομένου ότι αντιπροσωπεί κύματα που

εξασθενούν γρήγορα μακριά από την πηγή. Η παρατήρηση αυτή αναφέρεται βέβαια σε ρευστό πυθμένα δεν έχουμε όμως λόγους να θεωρήσουμε ότι αλλάζει κάτι στην περίπτωση του ελαστικού πυθμένα. Άρα η προσεγγιστική λύση για την ακουστική πίεση γράφεται

$$P(r, z) = \sum_{n=1}^N R_n(r) U_n(z, \lambda_n) \quad (2.36)$$

και η απώλεια διάδοσης είναι

$$TL(r, z) = -20 \log \frac{|P(r, z)|}{|P_0|} \quad (2.37)$$

όπου  $P_0 = \frac{e^{i\kappa r}}{4\pi}$  είναι η πίεση αναφοράς και ορίζεται ως η πίεση του κύματος σε απόσταση ενός μέτρου από την πηγή.

Αντικαθιστώντας την πίεση με την μορφή σειράς στην εξίσωση πίεσης 2.27 με πηγή:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \kappa^2 P = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0)$$

έχουμε ,

$$\sum_{n=1}^N U_n(z, \lambda_n) \frac{d^2 R_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N U_n \frac{dR_n}{dr} + \sum_{n=1}^N R_n \frac{d^2 U_n}{dz^2} + \kappa^2 \sum_{n=1}^N U_n R_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (2.38)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\int_0^h \cdot U_m(z) dz$  στην παραπάνω εξίσωση και στα δύο μέλη έχουμε,

$$\sum_{n=1}^N \left( \frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \lambda_n^2 R_n \right) \int_0^h U_n U_m dz = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) U_m(z_0) \quad (2.39)$$

Αν θέσουμε  $\int_0^h U_n U_m dz = B_{nm}$ , τότε η παραπάνω σχέση μας δίνει δύο εκφράσεις μια ως προς την ακτινική εξάρτηση και μια ως προς το βάθος, σύμφωνα με την εργασία του Γ.Κρόκου [3]

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \lambda_n^2 R_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (2.40)$$

$$\sum_{n=1}^N B_{nm} = U_m(z_0, \lambda_m) \quad (2.41)$$

Η πρώτη εξίσωση είναι μια μη ομογενής εξίσωση *Bessel* της οποίας η λύση εκφράζεται μέσω της συνάρτησης *Hankel* και ισούται με  $R_n(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\lambda_n r)$

[2]. Ενώ η δεύτερη έκφραση μας δίνει τους συντελεστές  $A_n$  των ιδιοσυναρτήσεων οι οποίοι είναι της μορφής  $U_n = A_n \sin \gamma_{1n} z$  όπως προαναφέραμε. Από την δεύτερη σχέση παίρνουμε,

$$\sum_{n=1}^N A_n b_{nm} = \sin \gamma_{1m} z_0, \text{ με } b_{nm} = \int_0^h \sin \gamma_{1n} z \cdot \sin \gamma_{1m} z dz \quad (2.42)$$

Η παράπάνω σχέση αποτελεί ένα μιγαδικό, γραμμικό, συμμετρικό σύστημα ως προς τους άγνωστους συντελεστές  $A_n$  των ιδιοσυναρτήσεων. Με τον υπολογισμό των συντελεστών  $A_n$  και της ακτινικής συνάρτησης ολοκληρώνουμε τον υπολογισμό της ακουστική πίεσης στο νερό με την προϋπόθεση του υπολογισμού των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναφέρουμε μια μέθοδο υπολογισμού των ιδιοτιμών ώστε να έχουμε μια ολοκληρωμένη λύση του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης.

## Κεφάλαιο 3

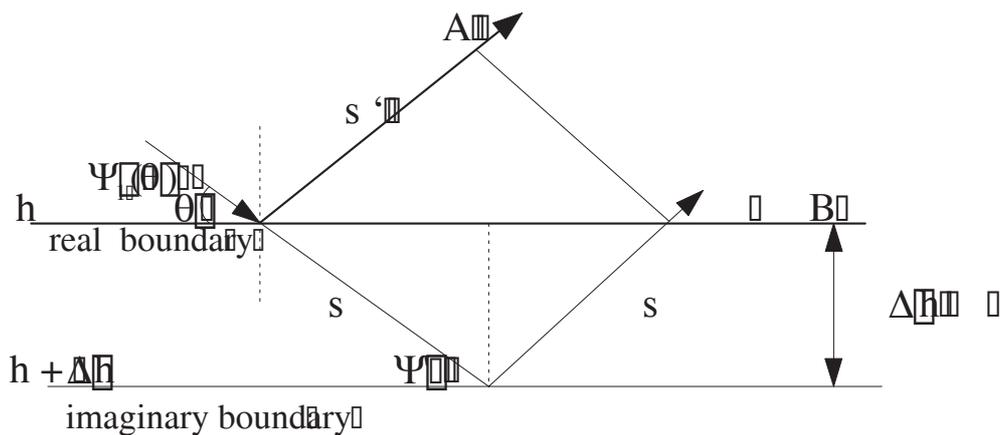
# Η μέθοδος του ενεργού βάθους για το υπολογισμό των ιδιοτιμών

Το μοντέλο των ιδιομορφών έχει αποδειχθεί ένα χρήσιμο εργαλείο στην υποβρύχια ακουστική και δίδει λύσεις σε ευρεία περιοχή προβλημάτων [1] [5]. Ένα κρίσιμο βήμα στην λύση κανονικών ιδιομορφών είναι η εύρεση των ιδιοτιμών μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η αναζήτηση αυτή είναι άμεση σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει απορρόφηση και απώλεια ενέργειας στον πυθμένα, εξαιτίας των διατμητικών κυματισμών. Η απλούστερη περίπτωση αφορά έναν απλό κυματοδηγό με οριακές συνθήκες *Dirichlet* ή *Neumann* σε ένα πεπερασμένο σύνορο, όπου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι μια απλή αναλυτική έκφραση απ' όπου προκύπτουν άμεσα οι ιδιοτιμές [12]. Στην περίπτωση του περιβάλλοντος *Pekeris*, όπου το θαλάσσιο μέσο σταθερής ταχύτητας φράσσεται από ημιάπειρο ρευστό πυθμένα οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την επίλυση μιας μη γραμμικής εξίσωσης στον πραγματικό χώρο. Αριθμητικές μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί σε περίπτωση ρευστού πυθμένα με το προφίλ ταχύτητας να μεταβάλλεται με το βάθος. Στα περισσότερα πραγματικά προβλήματα, όμως οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές λόγω των οριακών συνθηκών που από φυσικής πλευράς λαμβάνουν υπόψη τους τη μεταφορά ενέργειας από τα ακουστικά κύματα σε άλλες μορφές. Αυτή είναι η περίπτωση του κυματοδηγού με ελαστικό πυθμένα. Οι ιδιοτιμές κανονικών ιδιομορφών είναι πολύ δυσκολότερο να υπολογιστούν καθώς η αναζήτηση τους γίνεται στις δύο διαστάσεις πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Μια μέθοδος υπολογισμού των ιδιοτιμών που έχει ήδη εφαρμοστεί από τον Χ.Κασσέτα [6] βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του μέτρου της χαρακτηριστικής συνάρτησης που προκύπτει από την 2.34 μετά από συστηματική 'αναζήτηση' σε προκαθορισμένο πεδίο τιμών. Παρόλο που τα αποτελέσματα της μεθόδου αυτής είναι ικανοποιητικά, υπάρχουν μειονεκτήματα όπως το γεγονός ότι το αρχικό διάστημα αναζήτησης της ιδιοτιμής στο μιγαδικό επίπεδο

προκύπτει από την υπόθεση ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Στην παρούσα εργασία θα υιοθετήσουμε μια εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού των ιδιοτιμών και αυτή είναι η μέθοδος του 'ενεργού βάθους' (*effective depth*). Η ιδέα είχε εισαχθεί από τον *Weston* [7] και στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε από τους *Buckingham* [8], *Chapman – Ward* [9] και *Zhang – Tindle* [10]. Στα περισσότερα θαλάσσια περιβάλλοντα ρηχού κυματοδηγού με τα οποία θα ασχοληθούμε και εμείς, η ταχύτητα των διατμητικών κυμάτων είναι μικρότερη της ταχύτητας του ήχου στο νερό ( $c_s < c_w$ ) και σ' αυτή την περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές. Η περίπτωση του σκληρού πυθμένα ( $c_s > c_w$ ) έχει συζητηθεί σε άλλες δημοσιεύσεις π.χ. *Brekhovskikh* [11] και οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης σ' αυτή την περίπτωση είναι και πραγματικές και αντιστοιχούν σε παγιδευμένες ιδιομορφές (*trapped modes*).

### 3.1 Η έννοια του ενεργού βάθους

Ο *Weston* [7] πρώτος έδειξε ότι η ανάκλαση των επίπεδων ακουστικών κυμάτων σε ομογενές ρευστό πυθμένα είναι προσεγγιστικά ισοδύναμη με την ανάκλαση σε ελεύθερη επιφάνεια σε κατάλληλη απόσταση κάτω από τον πραγματικό πυθμένα. Θεωρούμε μια ακτίνα η οποία προσπίπτει στη διεπιφάνεια με γωνία ως προς την οριζόντιο  $\theta$  και ανακλάται με αλλαγή φάσης  $\Psi_1(\theta)$ . Καθώς, η ακτίνα αναπαριστά ένα επίπεδο κύμα, το ανακλώμενο μέτωπο κύματος AB, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1 μπορεί να αναπαραχθεί θεωρώντας ένα σύνορο πλήρους ανάκλασης μετατοπισμένο κατά  $\Delta h$  κάτω από το πραγματικό βάθος.



Σχήμα 3.1: Γεωμετρία ενός επίπεδου κύματος και του ενεργού βάθους

Η νέα αλλαγή φάσης  $\Psi'$  μετά την μετατόπιση είναι ίση με  $-\pi$ , εφόσον το

επίπεδο κύμα συνεχίζει την πορεία του και προσπίπτει στη συνέχεια στο νέο φανταστικό βάθος. Αυτό προκύπτει αν εξισώσουμε τις ιδιομορφές πριν και μετά την προσθήκη του ενεργού βάθους,  
 $U_n = A_n(e^{i\gamma_{1n}z} - e^{-i\gamma_{1n}z})$  και  $U_n = A_n(e^{i\gamma_{1n}z} + R_n e^{-i\gamma_{1n}z})$ . Τότε, πρέπει να ισχύει

$$R_n = -1 \Rightarrow |R_n| e^{i\Psi'} = e^{-i\pi}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό του ενεργού βάθους  $|R_n| = 1$ , καταλήγουμε ότι  $\Psi' = -\pi$ .

Από το σχήμα 3.1, τα ακτινικά τμήματα δίνονται από τις σχέσεις,

$$s = \frac{\Delta h}{\sin\theta} \text{ και } s' = \frac{2\Delta h \cos^2\theta}{\sin\theta} \quad (3.1)$$

Η φάση του ανακλώμενου επίπεδου κύματος στα σημεία A και B είναι

$$\varphi_A = ks' + \psi_1(\theta) \text{ και } \varphi_B = 2ks + \psi' \quad (3.2)$$

όπου  $k = \frac{\omega}{c}$ . Εφόσον ζητάμε τα A και B να βρίσκονται στο ίδιο μέτωπο κύματος από την σχέση  $\varphi_A = \varphi_B$  βρίσκουμε τελικά το τύπο του ' ενεργού βάθους ' που δίνεται από την σχέση

$$\Delta h(\theta) = \frac{\Psi_1(\theta) - \Psi'}{2k \sin\theta} \quad (3.3)$$

Γενικά, το ενεργό βάθος εξαρτάται από την γωνία  $\theta$ , όμως η ιδέα θα χρησιμοποιηθεί εάν δείξουμε ότι αυτή η εξάρτηση είναι τόσο ασθενής, ώστε να προσεγγίζουμε το βάθος αυτό με μια σταθερή τιμή.

## 3.2 Υπολογισμός των ιδιοτιμών στο πρόβλημα με το ενεργό βάθος

Το ρευστό μέσο χαρακτηρίζεται από ταχύτητα ήχου  $c$  και πυκνότητα  $\rho_1$ , ενώ ο ελαστικός πυθμένας έχει ταχύτητα κυμάτων συμπιεστότητας  $c_p$  και ταχύτητα διατμητικών  $c_s$ . Ένα τυχαίο κύμα ταξιδεύοντας στο ρευστό μέσο με γωνία  $\theta$  διαδίδεται αφού ανακλαστεί στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων σε διατμητικά κύματα γωνίας  $\theta_s$  και κύματα συμπιεστότητας (ακουστικά) γωνίας  $\theta_p$  που σχετίζονται από το νόμο του Snell ως εξής,

$$\frac{c}{\cos\theta} = \frac{c_p}{\cos\theta_p} = \frac{c_s}{\cos\theta_s} \quad (3.4)$$

Για να δοθεί η δυνατότητα άμεσης έκφρασης του συντελεστή ανάκλασης  $R = R(\theta)$  μέσω της γωνίας ως προς την οριζόντιο  $\theta$ , μια άλλη μορφή του συντελεστή ανάκλασης σ' αυτή την περίπτωση δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$R(\theta) = \frac{Z_p \cos^2 2\theta_s + Z_s \sin^2 2\theta_s - Z}{Z_p \cos^2 2\theta_s + Z_s \sin^2 2\theta_s + Z} \quad (3.5)$$

όπου  $Z = \frac{\rho_1 c}{\sin \theta}$ ,  $Z_p = \frac{\rho_2 c_p}{\sin \theta_p}$ ,  $Z_s = \frac{\rho_2 c_s}{\sin \theta_s}$ . Η παραπάνω εναλλακτική μορφή του συντελεστή ανάκλασης είναι ισοδύναμη με τη μορφή του συντελεστή της σχέσης 2.19 όπως θα αποδείξουμε στο παράρτημα Β. Ο συντελεστής ανάκλασης είναι ισοδύναμος και με τον παρακάτω τύπο βάσει τους *Chapman και Ward* [9],

$$R(\theta) = \frac{ga(\theta)\sin\theta - i[1 - gb(\theta)\sin\theta]s(\theta)}{ga(\theta)\sin\theta + i[1 - gb(\theta)\sin\theta]s(\theta)} \quad (3.6)$$

όπου  $g = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ,  $a(\theta) = [1 - 2\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 \cos^2 \theta]^2$ ,

$b(\theta) = 4\left(\frac{c_s}{c}\right)^3 \cos^2 \theta \sqrt{1 - \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 \cos^2 \theta}$ ,

$s(\theta) = \sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta}$ ,  $\theta_c = \arccos\left(\frac{c}{c_p}\right)$ . Η μιγαδική συνάρτηση  $R(\theta)$  μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο πλάτους και του παράγοντα φάσης :

$$R(\theta) = |R(\theta)|e^{i\Psi_1(\theta)} \quad (3.7)$$

,όπου

$$\Psi_1(\theta) = \arctan\left[\frac{2agssin\theta}{\left(1 - b^2g^2sin^2\theta\right)s^2 - a^2g^2sin^2\theta}\right] \quad (3.8)$$

με  $0 \leq \theta \leq \theta_c$  και  $-\pi \leq \Psi_1(\theta) \leq 0$ . Στην περίπτωση μας υπολογίζουμε το ενεργό βάθος σαν συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  υπολογίζοντας την αλλαγή φάσης από τη σχέση 3.8 και αντικαθιστώντας στη συνέχεια στην 3.3 με  $\Psi' = -\pi$ . Έτσι έχουμε μια άλλη έκφραση για το ενεργό βάθος,

$$\Delta h(\theta) = \frac{[\Psi_1(\theta) + \pi]c}{2\omega \sin \theta} \quad (3.9)$$

Η μεταβολή του  $\Delta h(\theta)$  είναι μικρή για χαμηλές γωνίες  $\theta$  (*grazing angles*). Εμείς ενδιαφερόμαστε κυρίως γι' αυτές τις γωνίες καθώς αντιστοιχούν σε μικρής τάξης κανονικές ιδιομορφές, που επιτρέπουν την μικρότερη δυνατή απορρόφηση και έτσι κυριαρχούν στο ακουστικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις. Το πραγματικό ενεργό βάθος όπως ορίζεται από την σχέση 3.9 αναπαράγει μόνο την φάση του ανακλώμενου μέτωπου κύματος, όχι όμως και το πλάτος

όταν υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά την ανάκλαση. Προκειμένου να πάρουμε μια γενικότερη έκφραση του ενεργού βάρους που να συμπεριλαμβάνει και την αλλαγή του πλάτους του συντελεστή ανάκλασης θα θεωρήσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο προσέγγισης του ενεργού βάρους βασισμένο στη μελέτη των *Chapman – Ward*[9].

### 3.3 Το μιγαδικό ενεργό βάρος

Ο *Buchingham* [8] υιοθέτησε την ιδέα του 'ενεργού βάρους' για να υπολογίσει τις προσεγγιστικές κανονικές ιδιομορφές σε κυματοδηγό ρευστού πυθμένα με απορρόφηση. Στις παραπάνω μελέτες η απώλεια ενέργειας που εμφανίζεται στον πυθμένα κατά την ανάκλαση αγνοήθηκε και τα χαρακτηριστικά του ενεργού βάρους ορίστηκαν από την φάση του συντελεστή ανάκλασης. Όμως, οι *Zhang – Tindle* [10] επέκτειναν την μελέτη του ενεργού βάρους επιτρέποντας απώλειες ενέργειας στην ανάκλαση, θεωρώντας των πλήρη συντελεστή ανάκλασης. Στον νέο περιβάλλον, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1 ο πραγματικός πυθμένας μετατοπίζεται κατά  $\Delta h$  και το νέο βάρος είναι πλέον μιγαδικό, διότι συμπεριλαμβάνουμε την απώλεια διάδοσης στην ανάκλαση. Έτσι, με την μέθοδο αυτή υπολογίζουμε τη λύση των κανονικών ιδιομορφών λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις διαδιδόμενες όσο και τις αποσβενύμενες ιδιομορφές που δημιουργούνται στο ακουστικό πεδίο. Επίσης, το ηχητικό πεδίο που προκύπτει έχει ισοδύναμες ιδιότητες με το προηγούμενο και οι ιδιοτιμές τους είναι ίδιες.

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος βάρους σε ρηχό κυματοδηγό βάρους  $h$ , μέσω της συνθήκης προσαρμογής (σχέση 2.33) είναι ισοδύναμες με την παρακάτω σχέση, όπως θα δείξουμε στο παράρτημα Α,

$$\left[1 + R(\lambda)e^{2i\gamma_1 h}\right] = 0 \quad (3.10)$$

για κάθε επιτρεπτό οριζόντιο αριθμό κύματος ( $\lambda = \lambda_n$ ). Ο συντελεστής ανάκλασης  $R = R(\lambda)$  δίνεται από τη σχέση 2.19 με  $\lambda = \frac{\omega}{c} \sin\theta$  και το  $\gamma_1$  δίνεται από τη σχέση 2.20 ενώ ο συντελεστής ανάκλασης είναι ισοδύναμος και με τη σχέση 3.5 όπου  $R = R(\theta)$ .

Ορίζουμε μια μιγαδική συνάρτηση :

$$\Psi_2(\lambda) = -i \ln[R(\lambda)] \quad (3.11)$$

όπου το πραγματικό μέρος του εκφράζει τη φάση του συντελεστή ανάκλασης και το φανταστικό μέρος σχετίζεται με την απώλεια ενέργειας κατά την ανάκλαση. Το μιγαδικό μέρος του  $\Psi_2(\lambda)$  μηδενίζεται όταν υπάρχει ολική ανάκλαση και σε αυτή τη περίπτωση  $|R(\lambda)| = 1$ . Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν

από τις σχέσεις 3.7 και 3.11, οπότε

$$\Psi_2(\lambda) = \Psi_1(\theta) - i \ln |R(\lambda)| \quad (3.12)$$

Η σχέση 3.10 γράφεται ως

$$R(\lambda)e^{2i\gamma_1 h} = e^{i(2n\pi - \pi)} \quad (3.13)$$

όπου έχουμε γράψει τον όρο 1 ως  $-e^{i(2n\pi - \pi)}$ . Παίρνουμε τους λογάριθμους των δύο μερών της σχέσης 3.13 και έχουμε

$$\ln R(\lambda) + 2i\gamma_1 h = 2in\pi - i\pi \quad (3.14)$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζοντας στην παραπάνω σχέση με  $-i$ , έχουμε τελικά,

$$\Psi_2(\lambda) + 2\gamma_1 h - \pi = 2(n-1)\pi \quad (3.15)$$

Στην περίπτωση του ελαστικού πυθμένα, ο όρος  $\Psi_2(\lambda)$  είναι εν γένει μιγαδικός και επομένως αναφερόμαστε σ' ένα μιγαδικό βάθος, γεγονός που φαίνεται περίεργο, όμως είναι απαραίτητο για να επιτρέψει απώλειες ενέργειας στον πραγματικό πυθμένα. Το μιγαδικό βάθος ορίζεται τώρα ως [10],

$$\Delta h(\lambda) = \frac{\Psi_2(\lambda) + \pi}{2\gamma_1} \quad (3.16)$$

Αντικαθιστώντας το  $\Psi_2(\lambda)$  από τη σχέση 3.15 στην 3.16 έχουμε

$$\gamma_1 = \frac{n\pi}{\Delta h(\lambda) + h} \quad (3.17)$$

Ο ορισμός του  $\Delta h(\lambda)$  της σχέσης 3.16 είναι ισοδύναμος με τον προηγούμενο της σχέσης 3.9 με την διαφορά ότι τώρα επιτρέπει μιγαδικό όρο  $\Psi_2(\lambda)$ .

Δείξαμε λοιπόν ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος βάθους που προκύπτουν με εφαρμογή της συνθήκης προσαρμογής (σχέση 3.10) με τον ελαστικό πυθμένα μπορούν να εκφραστούν μέσω του ενεργού βάθους όπως αυτό ορίστηκε στο κεφάλαιο 3.1 .

### Παρατηρήσεις

1) Για να προσθέσουμε όρους απόσβεσης στο μοντέλο, αρχει να κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις στο επαναληπτικό σχήμα:

$$\frac{\omega}{c_2} \rightarrow \frac{\omega}{c_2} + i\alpha_2 \text{ και } \frac{\omega}{c_s} \rightarrow \frac{\omega}{c_s} + i\alpha_s$$

, όπου  $\alpha_2, \alpha_s$  είναι οι συντελεστές απόσβεσης για τα κύματα συμπίεσότητας και τα διατμητικά.

- 2) Ο όρος  $\Delta h$  είναι αναγκαστικά μιγαδικός προκειμένου να επιτρέπει απώλειες ενέργειας κατά την ανάκλαση σε πραγματικούς πυθμένες.
- 3) Η μέθοδος του ενεργού βάθους εφαρμόζεται όχι μόνο για σταθερό προφίλ ταχύτητας, αλλά και σε μεταβαλλόμενο.
- 4) Σε μαλακούς πυθμένες  $c_s < c_w$  όλες οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές και η διάκριση μεταξύ των αποσβενύμενων (*leaky modes*) και παγιδευομένων (διαδιδόμενων-*trapped modes*) ιδιομορφών χάνεται.

### 3.4 Αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοτιμών

Η μέθοδος του ενεργού φανταστικού βάθους οδηγεί σε ένα επαναληπτικό αλγόριθμο υπολογισμού των ιδιοτιμών κανονικών ιδιομορφών αποφεύγοντας αριθμητικές μεθόδους αναζητώντας τις ρίζες μιας μιγαδικής συνάρτησης. Ο αλγόριθμος αυτός πιο αναλυτικά περιγράφεται ως εξής :

Θεωρούμε μια αρχική τιμή του  $\lambda_n$  και χρησιμοποιούμε την εξίσωση 3.16 που την γράφουμε στη μορφή,

$$\Delta h(\lambda_n) = \frac{\Psi_2(\lambda_n) + \pi}{2\gamma_{1n}}$$

για να βρούμε το  $\Delta h$ . Στη συνέχεια από την εξίσωση 3.17 που την γράφουμε στη μορφή

$$\gamma_{1n} = \frac{n\pi}{\Delta h(\lambda_n) + h} \quad (3.18)$$

υπολογίζουμε το  $\gamma_{1n}$  και τελικά από την σχέση

$$\lambda_n = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_{1n}^2 \right)^{1/2}$$

υπολογίζουμε μια βελτιωμένη τιμή του  $\lambda_n$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι η ακολουθία των ιδιοτιμών  $\lambda_n$  να συγκλίνει. Η επιλογή της αρχικής τιμής του  $\lambda_n$  θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να αντιστοιχεί σε μηδενική γωνία (*grazing angle*) π.χ.  $\theta = 0.001$ . Καθώς ο συντελεστής ανάκλασης δεν είναι μονάδα, η διαδικασία συγκλίνει σε μια τιμή πολύ κοντά στην πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_n$ . Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι γρήγορη στην ακριβή τιμή, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Η επόμενη ιδιοτιμή θα προκύψει αν στη σχέση 3.18 θέσουμε την τιμή  $n = 2$  και συνεχίσουμε. Στόχος του αλγορίθμου είναι να υπολογίσει τους επιτρεπτούς οριζόντιους αριθμούς κύματος  $\lambda_n$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του προβλήματος βάθους. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να υπολογιστεί ο μέγιστος αριθμός ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων που

θεωρούνται σημαντικές για το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης. Στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν το μέγιστο  $n$  επελέγει με βάση γνωστής λύσης από γνωστές μεθόδους.

## Κεφάλαιο 4

### Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του ενεργού βάρους για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 και θα την συγκρίνουμε με τις υπόλοιπες μεθόδους. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα χαρακτηριστικό περιβάλλον ρηχού κυματοδηγού και θα μεταβάλουμε την ταχύτητα των διατμητικών κυμάτων ώστε να πάρουμε ένα αντιπροσωπευτικό φάσμα ταχυτήτων μαλακού πυθμένα. Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές για τις διάφορες ταχύτητες διατμητικών κυμάτων, χρησιμοποιώντας το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου του ενεργού βάρους και θα παραθέσουμε πίνακες ιδιοτιμών όπως αυτές προκύπτουν με τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Χ.Κασσέτας [6] στην διπλωματική του εργασία και τις μεθόδους των προγραμμάτων *Orca* [17] και *Kraken* [1] που είναι γνωστές στη διεθνή βιβλιογραφία. Η μέθοδος υπολογισμού των ιδιοτιμών που χρησιμοποιεί ο Χ.Κασσέτας βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της σχέσης 2.34 ανά διαστήματα, ξεκινώντας από τις πραγματικές ιδιοτιμές του ρευστού πυθμένα και στη συνέχεια αυξάνοντας το πεδίο έρευνας των ιδιοτιμών στο μιγαδικό επίπεδο. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί το *Orca* υπολογίζει τις ιδιοτιμές από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\phi(\lambda_n) = n\pi \quad (4.1)$$

όπου  $\phi(\lambda_n) = \gamma_{1n}h - \frac{i}{2}\ln R(\lambda_n) + \pi$  είναι η φασική συνάρτηση [13]. Οι ιδιοτιμές προκύπτουν από τα σημεία τομής των καμπυλών που αντιστοιχούν σε πραγματική και πολλαπλάσια του  $\pi$  φασική συνάρτηση. Τέλος, το πρόγραμμα *Kraken* υπολογίζει τις ιδιοτιμές χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικές μεθόδους [18] στο πρόβλημα βάρους. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε διαγράμματα της απώλειας διάδοσης σε βάθος  $z = 50m$  και θα αναφέρουμε διάφορα συμπεράσματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *Pekeris* το οποίο υλοποιήθηκε από τον Γ.Κρόκο [3] τα πλαίσια της διπλωματικής του εργασίας. Το πρόγραμμα *Pekeris* έχει ελεγχεί για την αξιοπιστία του μέσα από

συγκρίσεις των αποτελεσμάτων του με τα υπόλοιπα προγράμματα *Orea* και *Kraken*.

## 4.1 Διαδικασία υπολογισμού του ακουστικού πεδίου

Η διαδικασία που ακολουθούμε στην παρούσα εργασία ξεκινάει με τον υπολογισμό των ιδιοτιμών με τη μέθοδο του ενεργού βάρους. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε μια ακολουθία ιδιοτιμών που αναφέραμε στο κεφάλαιο 3.4 η οποία συγκλίνει στην ακριβή ιδιοτιμή με μικρό αριθμό επαναλήψεων όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα. Στη συνέχεια αφού έχουμε χρησιμοποιήσει την κατάλληλη αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης της σχέσης 2.36, επιλύουμε ένα πρόβλημα βάρους για κάθε ιδιοτιμή και υπολογίζουμε την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Από την μορφή της λύσης υπολογίζουμε ακόμα την ακτινική συνάρτηση  $R_n(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\lambda_n r)$  για κάθε ιδιοτιμή και τους συντελεστές των ιδιοσυναρτήσεων επιλύοντας το σύστημα της σχέσης 2.42. Τέλος υπολογίζουμε την απώλεια διάδοσης χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.37 για να έχουμε μια εικόνα του ηχητικού πεδίου.

## 4.2 Περιγραφή κυματοδηγού

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο υπολογισμού της ακουστικής πίεσης στο νερό όπως περιγράψαμε ανωτέρω σε ένα χαρακτηριστικό περιβάλλον. Στο πειραματικό μέρος της μελέτης μας ασχοληθήκαμε με ένα περιβάλλον με ημιάπειρο ελαστικό πυθμένα σταθερής πυκνότητας και ταχύτητας όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Το θαλάσσιο μέσο χαρακτηρίζεται επίσης από σταθερή πυκνότητα και ταχύτητα διάδοσης του ήχου, ενώ μια σημειακή αρμονική πηγή έχει τοποθετηθεί σε βάθος  $z_0$  στέλνοντας κύματα στο κυματοδηγό βάθους  $h$ .

## 4.3 Δεδομένα

Συχνότητα πηγής  $\rightarrow \omega = 20 \text{ Hz}$

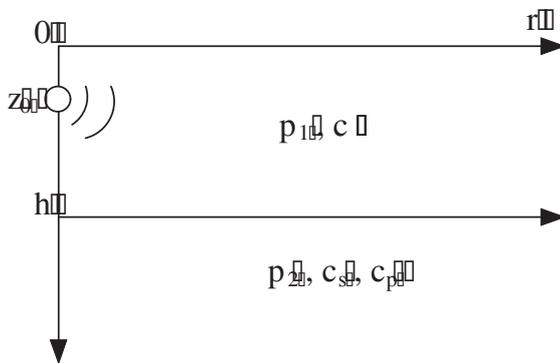
Πυκνότητα στο νερό  $\rightarrow \rho_1 = 1000 \text{ Kg/m}^3$

Πυκνότητα στον πυθμένα  $\rightarrow \rho_2 = 2060 \text{ Kg/m}^3$

Ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό  $\rightarrow c = 1460 \text{ m/sec}$

Ταχύτητα διάδοσης κυμάτων συμπιεστότητας  $\rightarrow c_p = 5500 \text{ m/sec}$

Ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων  $\rightarrow c_s = 0, 250, 1100, 1450 \text{ m/sec}$



Σχήμα 4.1: Μοντέλο ρευστού-ελαστικού μέσου

#### 4.4 Σύγκλιση επαναληπτικού σχήματος υπολογισμού ιδιοτιμών

Για τις διάφορες ταχύτητες διάδοσης των διατμητικών κυμάτων υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές χρησιμοποιώντας την μέθοδο ενεργού βάθους το οποίο είναι τοποθετημένο σε βάθος  $h + \Delta h$ . Ξεκινώντας από μια αρχική ιδιοτιμή όπως αυτή που αντιστοιχεί σε μηδενική γωνία κατασκευάζουμε μια ακολουθία βελτιωμένων ιδιοτιμών όπως περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3. Η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας φαίνεται στον πίνακα 4.1, ο οποίος δείχνει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της ιδιοτιμής της κανονικής ιδιομορφής μετά από κάθε επανάληψη για  $c_s = 250 \text{ m/sec}$ .

Αριθ. ιδιομορφής		
1	3	5
(8.4110703E-2,1.0920423E-5)	(6.59096473E-2,5.7856246E-5)	(8.9937075E-6,3.673784E-2)
(8.4099166E-2,9.0467250E-6)	(6.55217212E-2,2.1254302E-5)	(3.3189962E-3,3.830598E-2)
(8.4099104E-2,9.0262333E-6)	(6.55126414E-2,1.9694747E-5)	(3.7064487E-3,3.835891E-2)
(8.4099103E-2,9.0260659E-6)	(6.55124322E-2,1.9642527E-5)	(3.7489849E-3,3.835154E-2)
-	(6.55124274E-2,1.9640945E-5)	(3.7532277E-3,3.834933E-2)
-	(6.55124273E-2,1.9640899E-5)	(3.7536015E-3,3.834896E-2)
-	-	(3.7536283E-3,3.834891E-2)
-	-	(3.7536294E-3,3.834890E-2)

Πίνακας 4.1: Ακολουθία ιδιοτιμών με τη μέθοδο του ενεργού βάθους για  $c_s = 250 \text{ m/sec}$

Ο πίνακας 4.1 δείχνει ότι ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για την σύγκλιση εξαρτάται από την τάξη της ιδιομορφής. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της 3ης και της 5ης ιδιοτιμής είναι αργή και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ιδιοτιμές βρίσκονται κοντά στην κλαδική τομή στο μιγαδικό επίπεδο [10]. Φυσικά ο αριθμός των επαναλήψεων που χρειάζονται για την σύγκλιση της μεθόδου εξαρτάται από την ακρίβεια που επιθυμούμε. Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε ιδιομορφές χαμηλής τάξης συγκλίνουν γρηγορότερα διότι η αρχική εκτίμηση μικρής γωνίας ως προς την οριζόντιο είναι καλύτερη και επίσης γιατί οι ιδιοτιμές είναι μακριά από το σημείο κλαδικής τομής.

## 4.5 Υπολογισμός των ιδιοτιμών και της απώλειας διάδοσης

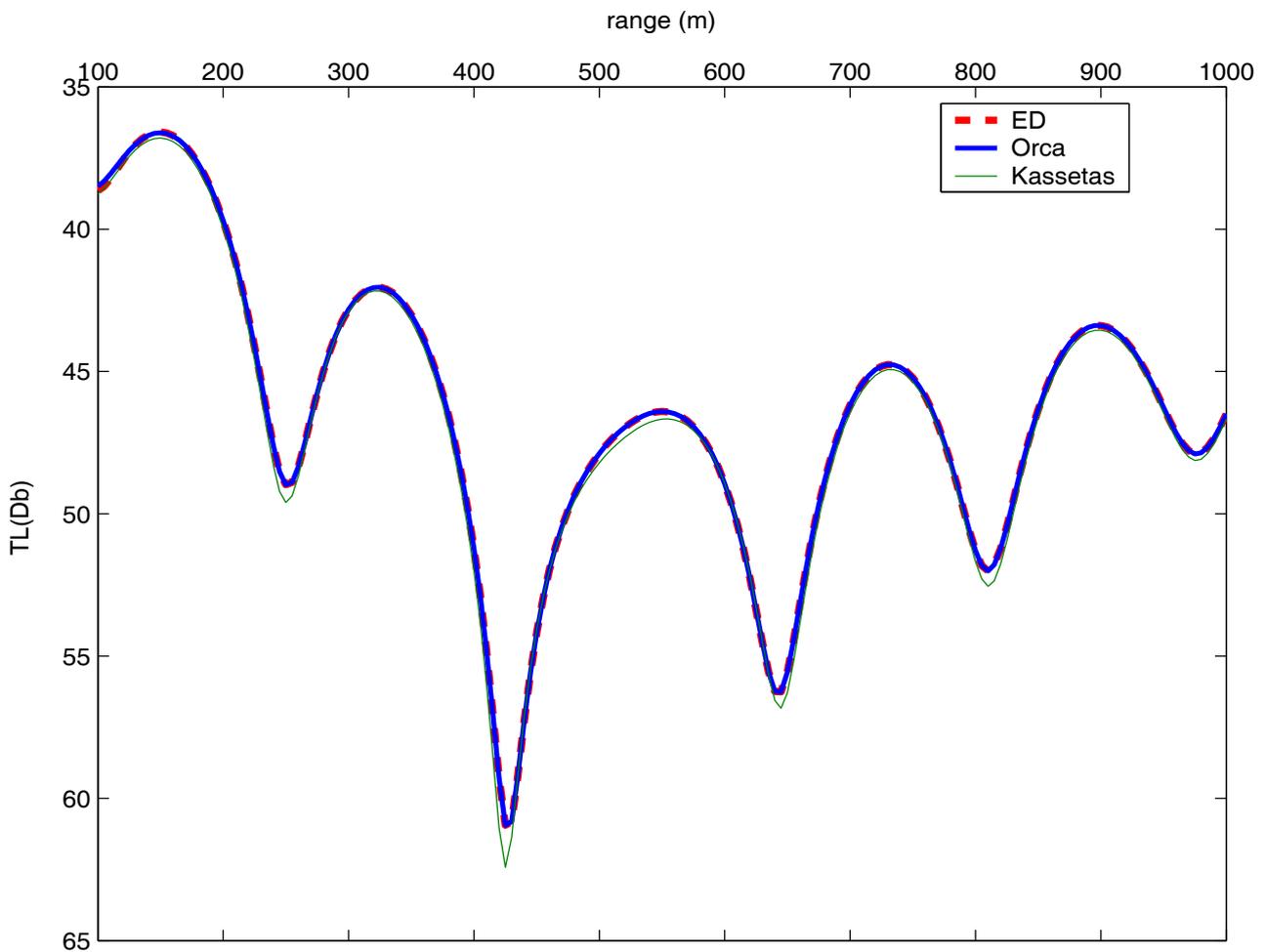
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις ιδιοτιμές χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του ενεργού βάρους, τις ιδιοτιμές όπως προκύπτουν από τα προγράμματα *ORCA*, *KRAKEN* και με τη μέθοδο που χρησιμοποιεί ο Χ.Κασσέτα για τις διάφορες ταχύτητες διατμητικών κυμάτων. Για κάθε ταχύτητα παραθέτουμε και ένα διάγραμμα της απώλειας διάδοσης σε βάθος  $z = 50m$  και σε απόσταση  $r$  από  $100m$  έως  $1000m$ , χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *PEKERIS* με τις παραπάνω ιδιοτιμές.

### 4.5.1 Μελέτη ρευστού πυθμένα ( $c_s = 0m/sec$ )

Στον πίνακα 4.2 φαίνονται οι ιδιοτιμές όπως υπολογίστηκαν με την μέθοδο του ενεργού βάρους (*ED*) καθώς και οι ιδιοτιμές του *ORCA* και του Χ.Κασσέτα. Παρατηρούμε ότι είναι ταυτόσημες με ακρίβεια στο πραγματικό μέρος μέχρι το 6ο δεκαδικό ψηφίο, ενώ το φανταστικό μέρος είναι ταυτοτικά μηδέν.

$C_s = 0m/sec$		
<i>ED</i>	<i>ORCA</i>	ΚΑΣΣΕΤΑΣ
8.41524730E-02,-1.75129671E-20	8.41524733E-02,5.43580910E-21	8.41523900E-02
7.78969857E-02,1.51855013E-19	7.78969858E-02,-1.74002910E-19	7.78969700E-02
6.56643158E-02,3.58317728E-20	6.56643151E-02,-1.86652590E-19	6.56644200E-02
4.25318994E-02,-1.36978979E-19	4.25319019E-02,-2.97298410E-19	4.25330800E-02

Πίνακας 4.2: Ιδιοτιμές με τις διάφορες μεθόδους



Σχήμα 4.2: Απώλεια διάδοσης με ταχύτητα διατμητικών κυμάτων  $c_s = 0m/sec$

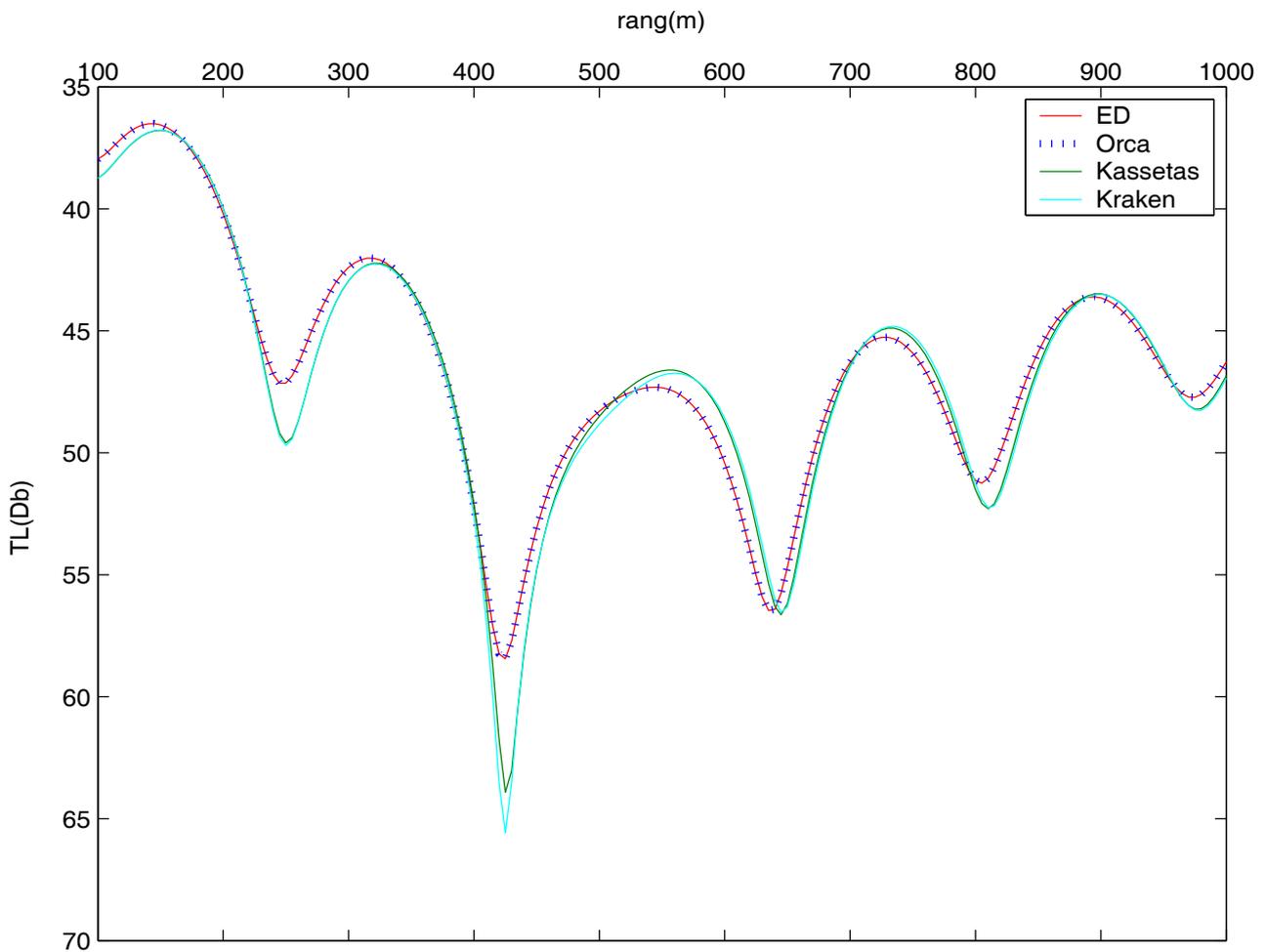
Στο σχήμα 4.2 φαίνεται η απώλεια διάδοσης σε βάθος  $50m$  και σε απόσταση από  $100m$  έως  $1000m$  όπως υπολογίστηκε με το πρόγραμμα *PEKERIS*. Οι γραφικές παραστάσεις με τις διάφορες μεθόδους συμπίπτουν, γεγονός που δικαιολογείται εφόσον και οι ιδιοτιμές είναι ίδιες. Τα αποτελέσματα της γραφικής παράστασης είναι επίσης ενθαρυντικά, διότι η μελέτη του ρευστού πυθμένα έγινε σαν προσέγγιση του ελαστικού με μηδενική ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων. Έτσι η μέθοδος του ενεργού βάθους έρχεται να καλύψει και την υποπερίπτωση του ρευστού πυθμένα και να δώσει σωστά αποτελέσματα.

#### 4.5.2 Μελέτη ελαστικού πυθμένα ( $c_s = 250m/sec$ )

Για μικρές ταχύτητες διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα και συγκεκριμένα για  $c_s = 250m/sec$  η προσεγγιστική μέθοδος του ενεργού βάρους υπολογίζει ιδιοτιμές ταυτόσημες με το *ORCA* ενώ έχει υπολογίσει επιπλέον τις δύο τελευταίες ιδιοτιμές σε σχέση με τις ιδιοτιμές που έχουν υπολογιστεί στο [6]. Οι ιδιοτιμές σ' αυτή την περίπτωση φαίνονται στον πίνακα 4.3,

$C_s = 250m/sec$	
<i>ED</i>	<i>ORCA</i>
-	5.58057133E-01,3.83446630E-07
-	2.75196659E-01,9.95620190E-02
8.40991041E-02,9.02623349E-06	8.40991041E-02,9.02606870E-06
7.77584797E-02,2.17958829E-05	7.77584792E-02,2.17956070E-05
6.55124275E-02,1.96409450E-05	6.55124275E-02,1.96408990E-05
4.24637721E-02,4.97990396E-06	4.24637744E-02,4.97981120E-06
3.75362829E-03,3.83489115E-02	3.75350161E-03,3.83493920E-02
3.23649820E-03,7.65452278E-02	3.23649590E-03,7.65454030E-02
ΚΑΣΣΕΤΑΣ	<i>KRAKEN</i>
8.41676070E-02,8.93329980E-06	8.40991034E-02,9.02606870E-06
7.78341520E-02,2.19998990E-05	7.77584758E-02,2.17960353E-05
6.55005720E-02,1.66666000E-05	6.55126555E-02,1.96434454E-05
4.25001080E-02,5.33329980E-06	4.24665675E-02,4.97479981E-06
-	3.22289914E-02,7.63135842E-04
-	1.16086455E-02,7.97077299E-05

Πίνακας 4.3: Ιδιοτιμές με τις διάφορες μεθόδους



Σχήμα 4.3: Απώλεια διάδοσης με ταχύτητα διατμητικών κυμάτων  $c_s = 250m/sec$

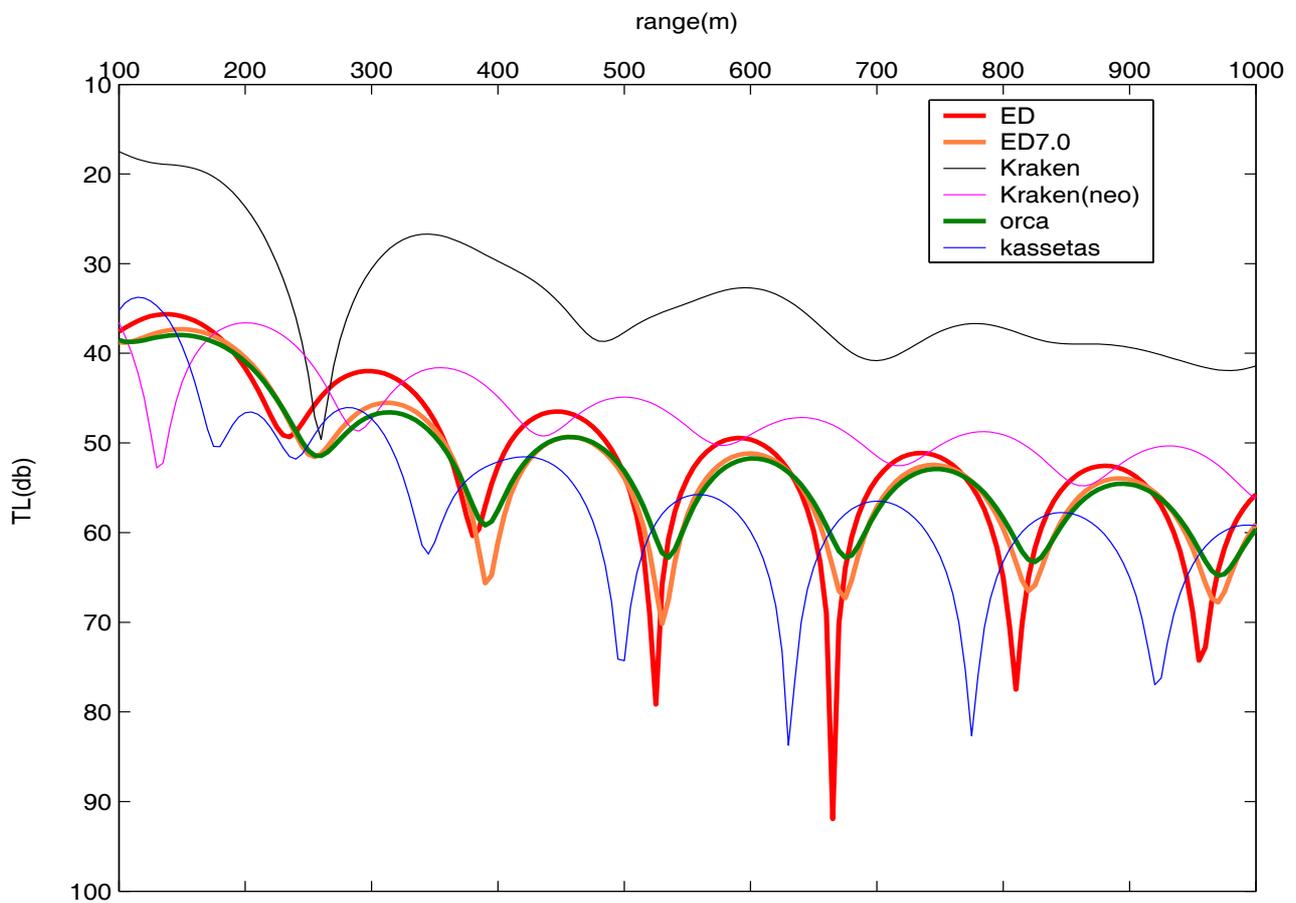
Ωστόσο και η μέθοδος του ενεργού βάθους δεν υπολογίζει τις δύο αρχικές ιδιοτιμές που υπολογίζει το *ORCA*, όμως η συνεισφορά τους δεν επιρρεάζει την λύση όπως θα δούμε από το σχήμα 4.3 της απώλειας διάδοσης αφού η λύση που δίνει το *ORCA* είναι πολύ κοντά στη λύση με τη μέθοδο του ενεργού βάθους. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται η μικρή απόκλιση της απώλειας διάδοσης, όπως υπολογίστηκε με το πρόγραμμα *Pekeris* για τις ιδιοτιμές του *Kraken*, γεγονός που οφείλεται στη διαφοροποίηση των τελευταίων ιδιοτιμών.

### 4.5.3 Μελέτη ελαστικού πυθμένα ( $c_s = 1100m/sec$ )

Στον παρακάτω πίνακα 4.4 παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές μεταξύ των μεθόδων βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους με απόκλιση  $10^{-6}$  τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος τους. Ωστόσο η τρίτη ιδιοτιμή χάνεται κατά τον υπολογισμό με το ενεργό βάθος, γεγονός που φαίνεται στο διάγραμμα της απώλειας διάδοσης καθώς και η τέταρτη ιδιοτιμή έχει απόκλιση από την ιδιοτιμή του *Orca* στο 4ο δεκαδικό ψηφίο.

$C_s = 1100m/sec$	
<i>ED</i>	<i>ORCA</i>
8.38041418E-02,9.25287259E-04	8.38041451E-02,9.25288760E-04
7.78314340E-02,4.07191042E-03	7.78317298E-02,4.07197120E-03
-	7.02977948E-02,1.06583130E-02
6.33138282E-02,1.20286857E-02	6.29122788E-02,6.24316660E-03
4.08842151E-02,8.10337883E-04	4.08842112E-02,8.10351900E-04
2.89069828E-03,3.84595146E-02	2.89050973E-03,3.84600020E-02
1.62903968E-03,7.65821672E-02	1.62901460E-03,7.65823020E-02
<i>ΚΑΣΣΕΤΑΣ</i>	<i>KRAKEN</i>
8.39195920E-02,9.50000020E-04	8.38041398E-02,9.25292073E-04
7.78729790E-02,4.05000010E-03	7.78321444E-02,4.07237122E-03
7.02897130E-03,1.06500000E-02	-
6.28931070E-02,6.25000010E-03	6.29130099E-02,6.24578101E-03
4.08866390E-02,7.99999980E-04	4.08867834E-02,8.08491310E-04
-	4.04764252E-02,2.48379548E-02
-	1.29280637E-02,4.03696760E-03

Πίνακας 4.4: Ιδιοτιμές με τις διάφορες μεθόδους



Σχήμα 4.4: Απώλεια διάδοσης με ταχύτητα διατμητικών κυμάτων  $c_s = 1100m/sec$

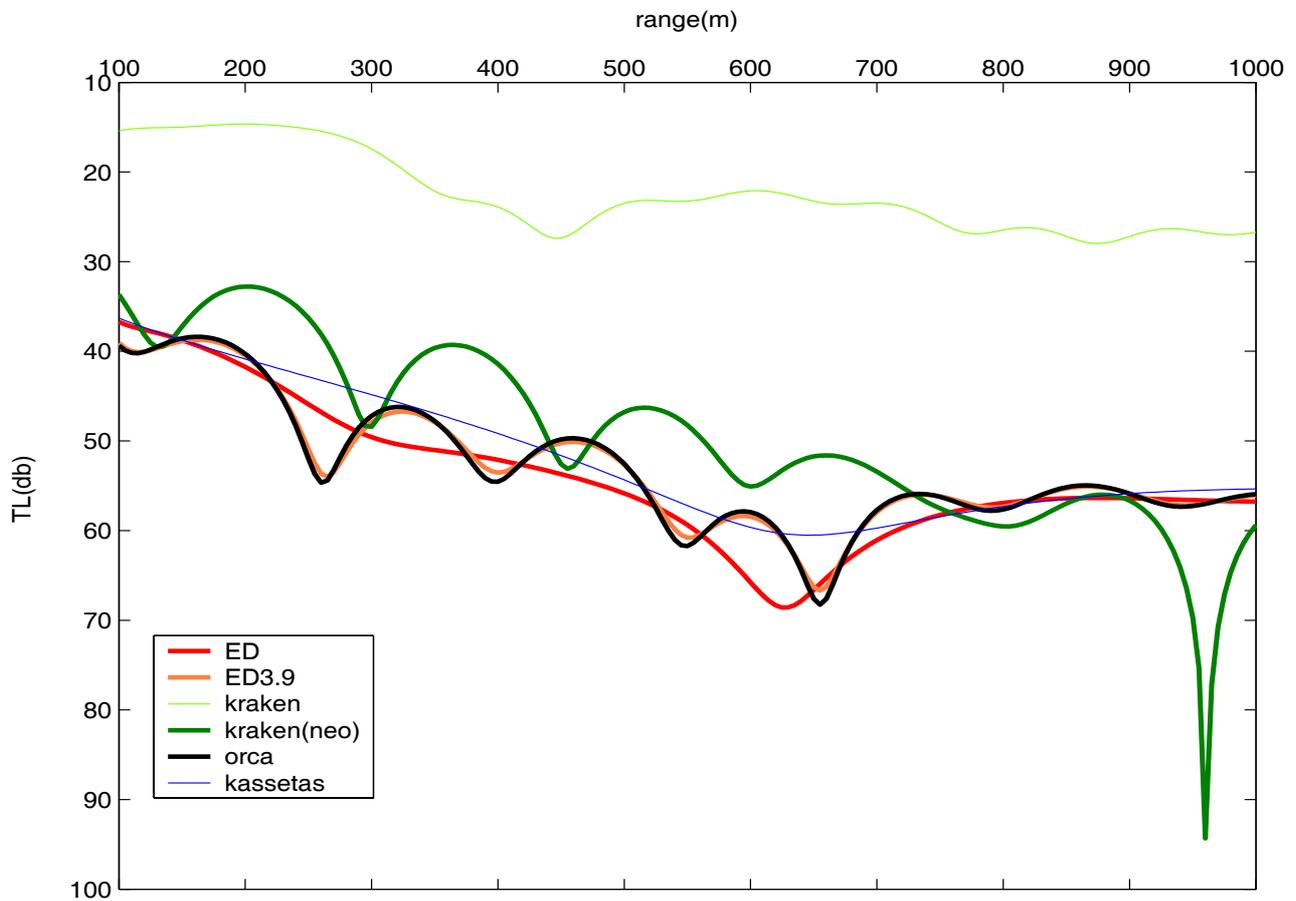
Για τον λόγο αυτό έχουμε παραθέσει ένα επιπλέον συγκριτικό διάγραμμα της απώλειας διάδοσης, προσθέτοντας στις ιδιοτιμές που υπολογίζει η μέθοδος του ενεργού βάθους την τρίτη ιδιοτιμή. Τα αποτελέσματα όπως φαίνονται στο διάγραμμα είναι θεαματικά. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, την επίδραση της συγκεκριμένης ιδιοτιμής η οποία έχει μάλιστα ισχυρό μιγαδικό μέρος. Επίσης, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της απώλειας διάδοσης χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές του *Kraken* έχει μεγάλη απόκλιση από τις υπόλοιπες και αυτό οφείλεται στη διαφοροποίηση της τελευταίας ιδιοτιμής. Γι' αυτό παραθέτουμε άλλη μια γραφική παράσταση (*kraken(neo)*) της απώλειας διάδοσης για τις ιδιοτιμές του *Kraken* εκτός την τελευταία ιδιοτιμή, η οποία διαφέρει ως προς την τάξη από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές των υπολοίπων προγραμμάτων. Η νέα γραφική αυτή παράσταση διαφοροποιείται από την προηγούμενη της και τείνει προς τις υπόλοιπες.

#### 4.5.4 Μελέτη ελαστικού πυθμένα ( $c_s = 1450m/sec$ )

Σ' αυτή την περίπτωση που η ταχύτητα των διατμητικών κυμάτων πλησιάζει την ταχύτητα διάδοσης του ήχου, η μέθοδος του ενεργού βάθους υπολογίζει για άλλη μια φορά ιδιοτιμές που τείνουν να συμπίσουν στις ιδιοτιμές του *ORCA* τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος εκτός από μια. Στον πίνακα 4.5 είναι εμφανές ότι το ενεργό βάθος υπολογίζει περισσότερες ιδιοτιμές από ότι υπολογίζονται με τη μέθοδο που χρησιμοποιεί ο Χ.Κασσέτας. Όσον αφορά τις ιδιοτιμές του *Kraken*, περιλαμβάνεται η ιδιοτιμή που δεν υπολογίζει η μέθοδος του ενεργού βάθους, ενώ οι τελευταίες ιδιοτιμές με τη μέθοδο μας δεν διαφοροποιούνται με τις ιδιοτιμές του προγράμματος *ORCA*.

$C_s = 1100m/sec$	
<i>ED</i>	<i>ORCA</i>
8.420394436E-02,4.275919071E-04	8.420394580E-02,4.275927800E-04
7.885665320E-02,1.837354440E-03	7.885664910E-02,1.837350100E-03
6.815416971E-02,2.789914182E-03	6.815415920E-02,2.789918200E-03
5.060891068E-02,7.818123207E-03	4.954240960E-02,8.718837100E-03
-	3.923885050E-02,2.781153900E-03
2.534475770E-03,3.847320137E-02	2.534310960E-03,3.847362900E-02
1.248718148E-03,7.657594134E-02	1.248716940E-03,7.657594200E-02
ΚΑΣΣΕΤΑΣ	<i>KRAKEN</i>
8.420000200E-02,4.266687900E-04	8.420394534E-02,4.275933747E-04
7.884000200E-02,1.840009200E-03	7.885668748E-02,1.837359101E-03
-	6.815452486E-02,2.789759182E-03
-	4.953526416E-02,8.727195301E-03
-	3.924589622E-02,2.770809905E-03
-	2.393269909E-02,2.471305910E-04

Πίνακας 4.5: Ιδιοτιμές με τις διάφορες μεθόδους



Σχήμα 4.5: Απώλεια διάδοσης με ταχύτητα διατμητικών κυμάτων  $c_s = 1450m/sec$

Στο διάγραμμα απεικονίζεται η απώλεια διάδοσης συναρτήσει της απόστασης και πάλι φαίνεται η επίδραση της απουσίας της πέμπτης ιδιοτιμής του σχήματος 4.5. Η προσθήκη αυτής της ιδιοτιμής βελτιώνει αισθητά την απώλεια διάδοσης όπως αυτό φαίνεται στο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η γραφική παράσταση της απώλειας διάδοσης για τις ιδιοτιμές του *Kraken* διαφέρει κατά πολύ σε σχέση με τις υπόλοιπες, γι' αυτό παραθέτουμε την γραφική παράσταση (*kraken(neo)*) χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές του *Kraken* εκτός την τελευταία ιδιοτιμή. Βλέπουμε ότι αυτή η γραφική παράσταση πλησιάζει τις υπόλοιπες.

## Κεφάλαιο 5

### Συμπεράσματα

Στην εργασία ασχοληθήκαμε με τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου στο νερό πάνω από ελαστικό ημιάπειρο πυθμένα, αναπτύσσοντας της πίεση σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων. Αφού εφαρμόσαμε την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών καταλήξαμε σε ένα πρόβλημα βάρους με τις κατάλληλες συνθήκες στην επιφάνεια του νερού και στην διεπιφάνεια νερού πυθμένα. Το πρόβλημα βάρους είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων και για να επιλυθεί θα πρέπει να διατυπωθεί κατάλληλη χαρακτηριστική εξίσωση. Στην περίπτωση μας η εξίσωση προκύπτει από τη συνθήκη προσαρμογής στην διεπιφάνεια νερού-πυθμένα η οποία μεταφέρει όλη τη διαθέσιμη πληροφορία για τη δομή του πυθμένα.

Η αναζήτηση των ιδιοτιμών γίνεται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο αναζητώντας τις ρίζες μιας χαρακτηριστικής συνάρτησης. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε έναν αποδοτικό τρόπο υπολογισμού των ιδιοτιμών που βασίζεται στη προσεγγιστική μέθοδο του ενεργού βάρους. Η μέθοδος βασίζεται στην μετατόπιση του πραγματικού βάρους του κυματοδηγού σε ένα κατάλληλο φανταστικό βάθος ώστε ο νέος κυματοδηγός να έχει ένα πλήρως ανακλόντα πυθμένα. Το νέο μιγαδικό βάθος του κυματοδηγού επιτρέπει την απώλεια ενέργειας και την απορρόφηση κατά την ανάκλαση εξαιτίας της παρουσίας των διατμητικών κυματισμών στον ελαστικό πυθμένα. Η μέθοδος του ενεργού βάρους κατασκευάζει μια επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού των ιδιοτιμών, θεωρώντας μια αρχική ιδιοτιμή που αντιστοιχεί σε πολύ μικρή γωνία πρόσπτωσης. Στη συνέχεια υπολογίζουμε της ιδιοσυναρτήσεις, οι οποίες είναι ημιτονοειδούς μορφής και επιλύουμε ένα σύστημα για τον υπολογισμό των συντελεστών τους. Η μελέτη του ακουστικού πεδίου ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης σε ένα συγκεκριμένο βάθος. Τέλος, για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών μέσω του ενεργού βάρους υλοποιήσαμε έναν κώδικα (*ED*) σε γλώσσα προγραμματισμού *Fortran* και στη συνέχεια υπολογίσαμε την πίεση και την απώλεια διάδοσης μέσα από τον πρόγραμμα *PEKERIS* του Γ.Κρόκου.

## 5.1 Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου του ενεργού βάρους :

Η μέθοδος του μιγαδικού ενεργού βάρους αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία που συγκλίνει και με την οποία γίνεται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών σε ρηχό κυματοδηγό σταθερής ταχύτητας πάνω από ελαστικό πυθμένα ή πάνω από ρευστό με απορρόφηση. Έτσι αποφεύγονται οι περίπλοκοι μέθοδοι υπολογισμού των ριζών μιας μιγαδικής συνάρτησης.

Η σχετικά αυτόνομη διαδικασία σε σχέση με άλλες μεθόδους που έχουν προταθεί π.χ. του προγράμματος *Orea* και βέβαια έναντι της μεθόδου αναζήτησης ριζών σε όλο (ή σε ένα μέρος) του μιγαδικού επιπέδου καθιστά τη μέθοδο εύκολη στην υλοποίηση της. Ακόμα, το επαναληπτικό σχήμα υπολογίζει όσες ιδιοτιμές του ορίσουμε, παρόλο που κάποιες από αυτές συνεισφέρουν ελάχιστα στο άθροισμα της ακουστικής πίεσης (σχέση 2.36), όμως αυξάνεται κατά πολύ την ακρίβεια της μεθόδου.

Η μέθοδος του ενεργού βάρους υπολογίζει ιδιοτιμές με μεγάλη ακρίβεια (μέχρι το 6ο δεκαδικό ψηφίο) τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό τους μέρος σε σχέση με το πρόγραμμα *Orea*. Να παρατηρήσουμε ότι για μικρές ταχύτητες διατμητικών κυμάτων οι ιδιοτιμές όπως υπολογίζονται με το ενεργό βάρος και με το πρόγραμμα *Orea* είναι ταυτόσημες, ενώ για μεγάλες ταχύτητες υπάρχει διαφορά κατά μια τιμή. Σε σχέση με τη μέθοδο αναζήτησης υπάρχουν διαφορές λόγω του ότι το πρόβλημα ενεργού βάρους υπολογίζει περισσότερες ιδιοτιμές και αυτό γιατί η μέθοδος αναζήτησης περιορίζεται σε χωρίο που επιλέγει ο χρήστης.

Το γεγονός ότι η μέθοδος του ενεργού βάρους υπολογίζει ακριβείς ιδιοτιμές έχει σαν αποτέλεσμα την ακρίβεια και στον υπολογισμό της πίεσης και κατά επέκταση της απώλειας διάδοσης.

Η ακουστική πίεση είναι ένα ολοκλήρωμα (παράρτημα Α) πάνω στο μιγαδικό επίπεδο που συμπεριλαμβάνει την κλαδική τομή (η οποία αμελείται) και υπολογίζεται στο σύνολο των ιδιοτιμών που αντιστοιχούν στις διαδιδόμενες και αποσβεννόμενες ιδιομορφές. Το πλεονέκτημα της μεθόδου του ενεργού βάρους είναι το γεγονός ότι η λύση της πίεσης περιλαμβάνει την συνεισφορά και των δύο ιδιομορφών, διότι η διάκριση μεταξύ τους χάνεται.

Τέλος, η μέθοδος του μιγαδικού βάρους εφαρμόζεται για κάθε είδος πυθμένα και μπορεί να περιλάβει και το φαινόμενο της απόσβεσης της ενέργειας.

Το γεγονός ότι κάποιες ιδιοτιμές δεν υπολογίζονται με τη μέθοδο του ενεργού βάρους μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο για περαιτέρω μελέτη στο μέλλον. Έτσι, μπορεί να γίνει μια πλήρης διερεύνηση των ιδιομορφών που επηρεάζουν πραγματικά το ηχητικό πεδίο για διαφορετικές ταχύτητες διάδοσης διατμητικών κυμάτων. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις μεγάλες

ταχύτητες διατμητικών κυμάτων για τις οποίες παρατηρούνται μεγάλες διαφορές στις υπολογιζόμενες ιδιοτιμές με τα διάφορα προγράμματα. Επίσης, η διαδικασία του ενεργού βάθους μπορεί να επεκταθεί και να αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε περιπτώσεις κυματοδηγών με μεταβλητή ταχύτητα ακουστικών κυμάτων στο θαλάσσιο περιβάλλον. Έτσι, παρουσιάζουμε μια εναλλακτική ολοκληρωτική μελέτη του ηχητικού πεδίου σε ένα περιβάλλον ρηχού κυματοδηγού σταθερής ταχύτητας πάνω από ελαστικό ημιάπειρο μαλακό πυθμένα.

## Παράρτημα Α'

### Αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης μέσω συναρτήσεων *Green*

Η διατύπωση του προβλήματος της ακουστικής πίεσης στο νερό μέσω συναρτήσεων *Green* μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά της μεθόδου που αναπτύξαμε μέσω κανονικών ιδιομορφών στην ενότητα 2.4.3. Και οι δύο προσεγγίσεις δίνουν τα ίδια αποτελέσματα με βάση τους *D.Ellis – D.Chapman* [4]. Όπως είχαμε αναφέρει στο κεφάλαιο 2.4 κάνοντας την αντικατάσταση  $P(r, z) = U(z)R(r)$  στην εξίσωση *Helmholtz* καταλήξαμε στην εξίσωση *Bessel* της σχέσης 2.40 ως προς την απόσταση  $r$

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \lambda_n^2 R_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (A'.1)$$

και στην εξίσωση 2.28 ως προς το βάθος  $z$ ,

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (k^2 - \lambda^2)U = -\delta(z - z_0) \quad (A'.2)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση *Green*  $G_1$  που εξαρτάται από την απόσταση και ικανοποιεί την εξίσωση,

$$\frac{d^2 G_1(\lambda, r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1(\lambda, r)}{dr} + \lambda^2 G_1(\lambda, r) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (A'.3)$$

και την συνάρτηση *Green*  $G_2$  η οποία εξαρτάται από το βάθος  $z$  και είναι πλήρως ορισμένη από τις ιδιότητες του θαλάσσιου μέσου και του συντελεστή ανάκλασης στα σύνορα, ικανοποιώντας την εξίσωση,

$$\frac{d^2 G_2(\lambda, z, z_0)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2\right) G_2(\lambda, z, z_0) = -\delta(z - z_0) \quad (A'.4)$$

Στην περίπτωση του κυματοδηγού που έχουμε περιγράψει, η συνάρτηση  $G_2$  γράφεται ως εξής [4],

$$G_2(\lambda, z, z_0) = \begin{cases} -\frac{1}{D(\lambda)}(e^{i\gamma_1 z_0} + e^{2i\gamma_1 h} R e^{-i\gamma_1 z_0}) \sin \gamma_1 z, & \text{αν } 0 < z \leq z_0 \\ -\frac{1}{D(\lambda)}(e^{i\gamma_1 z} + e^{2i\gamma_1 h} R e^{-i\gamma_1 z}) \sin \gamma_1 z_0, & \text{αν } z_0 \leq z \leq h \end{cases} \quad (\text{A'.5})$$

όπου

$$D(\lambda) = \gamma_1(1 + R e^{2i\gamma_1 h}) \quad (\text{A'.6})$$

και  $R$  είναι ο συντελεστής ανάκλασης στην διεπιφάνεια  $z = h$ . Η ακουστική πίεση στο νερό χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *Green*  $G_1, G_2$  που προκύπτει δίνεται από τη σχέση [12] ,

$$P(r, z, z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1(\lambda, r) G_2(z, z_0, \lambda) d\lambda \quad (\text{A'.7})$$

όπου  $C_\lambda$  είναι η κατάλληλη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο που περικλύει τα ιδιόμορφα σημεία των συναρτήσεων  $G_1, G_2$ . Από την εξίσωση (A'3) η λύση της συνάρτησης  $G_1$  είναι μια συνάρτηση *Hankel* και επομένως η λύση για την πίεση παίρνει τη μορφή,

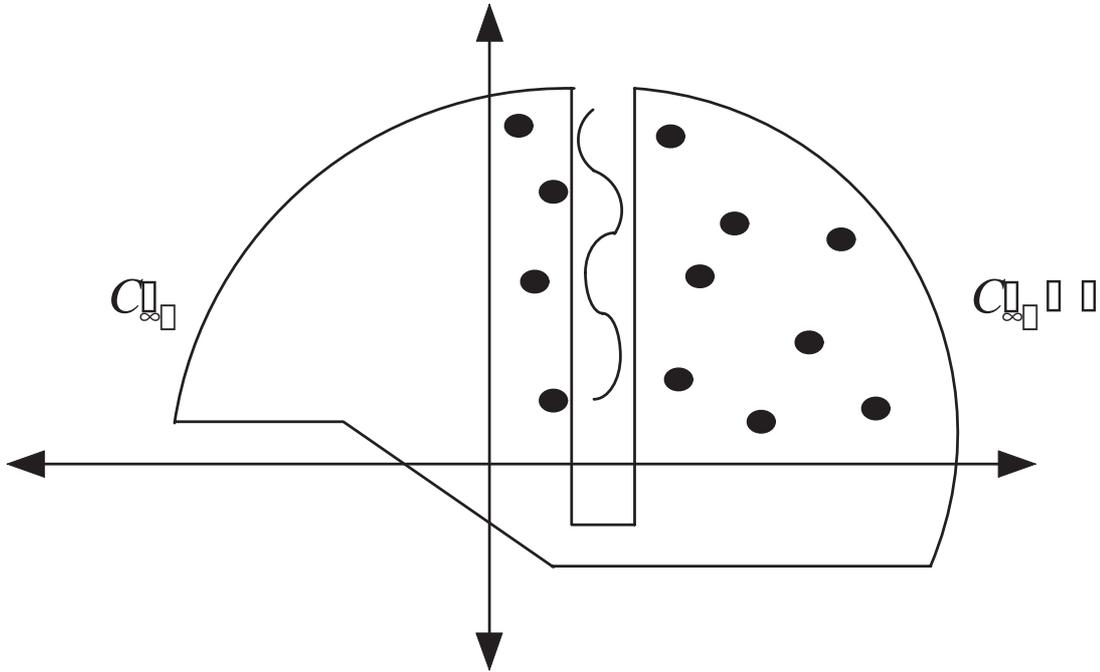
$$P(r, z, z_0) = \frac{1}{2} \int_{C_\lambda} \lambda G_2(\lambda, z, z_0) H_0^{(1)}(\lambda r) d\lambda \quad (\text{A'.8})$$

Επομένως, ο υπολογισμός της πίεσης επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας πάνω στην καμπύλη  $C_\lambda$  , προσεγγίζοντας την από την ευθεία των πραγματικών αριθμών, την καμπύλη  $C_\infty$  και την κατάλληλη κλαδική τομή όπως φαίνεται στο σχήμα A'1 πάνω στα ιδιόμορφα σημεία της συνάρτησης  $G_2$ .

Από το θεώρημα υπολοίπων του *Cauchy* έχουμε,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda G_2(\lambda, z, z_0) H_0^{(1)}(\lambda r) dk + \int_{C_\infty} + \int_{C_{EJP}} = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \text{res}(\lambda_n) \quad (\text{A'.9})$$

όπου  $\text{res}(\lambda_n)$  είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του  $n$  πόλου που περιέχεται στην καμπύλη όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πόλοι αυτοί δηλώνονται στο σχήμα με τους μαύρους κύκλους. Ανάλογα με το πρόβλημα και την επιλογή της κλαδικής τομής, ο αριθμός των υπολοίπων είναι μηδέν, άπειρος ή πεπερασμένος. Επίσης, καθώς η ακτίνα του ημικυκλίου  $C_\infty$  πάει στο άπειρο , η κατανομή σ' αυτή την καμπύλη τείνει στο μηδέν, διότι η συνάρτηση *Hankel* μειώνεται εκθετικά όσο η ακτίνα μεγαλώνει. Αν υποθέσουμε ότι το ενδιαφέρον επικεντρώνεται μακριά από την πηγή, το ολοκλήρωμα της κλαδικής τομής γίνεται λιγότερο



Σχήμα Α'1: Ιδιοτιμές στο μιγαδικό επίπεδο (κλαδική τομή)

σημαντικό [14] και η λύση εξαρτάται κυρίως από το άθροισμα, συνεπώς η πίεση που προκύπτει είναι [4],

$$P(r, z, z_0) = \pi i \sum_n N_n^2 \sin(\gamma_{1n} z_0) \sin(\gamma_{1n} z) H_0^{(1)}(\lambda_n r) \quad (A'.10)$$

όπου  $N_n$  είναι ένας όρος κανονικοποίησης και προκύπτει με αντικατάσταση στη σχέση (Α'5) του συντελεστή ανάκλασης από την έκφραση του μέσω των ιδιοτιμών του προβλήματος. Η έκφραση αυτή είναι

$$N_n^{-2} = \frac{h}{2} \left[ 1 - \frac{\sin(2\gamma_{1n} h)}{2\gamma_{1n} h} + i \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\sin^2(\gamma_{1n} h)}{\gamma_{2n} h} \frac{(1 - 2\lambda_n^2/k_s^2)^2}{P^2(\lambda_n)} \times \right. \\ \left. \left( 1 - \frac{8\gamma_{2n}^2}{k_s^2(1 - 2\lambda_n^2/k_s^2)} + 4 \frac{\gamma_{2n}^3(2 - 3\lambda_n^2/k_s^2)}{\delta_{2n}/k_s^2(1 - 2\lambda_n^2/k_s^2)^2} \right) \right]$$

όπου  $P(\lambda_n) = (1 - 2\lambda_n^2/k_s^2)^2 + 4\gamma_{2n}\delta_{2n}\lambda_n^2/k_s^4$

Βάση την μορφή της συνάρτησης *Green* από την σχέση (Α'6) οι πόλοι εμφανίζονται στα σημεία μηδενισμού του όρου  $D(\lambda)$ . Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει μέσω των συναρτήσεων *Green* είναι,

$$1 + Re^{2i\gamma_1 h} = 0 \quad (A'.11)$$

που όπως θα δείξουμε στην συνέχεια η σχέση (A'11) είναι ισοδύναμη με τη χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει χρησιμοποιώντας τη συνθήκη προσαρμογής.

## Πρόταση

Η χαρακτηριστική εξίσωση μέσω των συναρτήσεων *Green* της σχέσης (A'11) είναι ισοδύναμη με την χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει μέσω της συνθήκης προσαρμογής  $\tan(\gamma_1 h) = \frac{1+R}{i\gamma_1(1-R)}$ .

## Απόδειξη

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη του προβλήματος βάθους της σχέσης 2.30 την μορφή της ιδιοσυνάρτησης,  $U_n = A_n \sin \gamma_1 n z$  και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση προσαρμογής της σχέσης 2.31 παίρνουμε,

$$\frac{1+R}{i(1-R)} = \frac{\sin \gamma_1 h}{\cos \gamma_1 h}$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς  $R$ , έχουμε

$$R = \frac{-(i \cos \gamma_1 h - i \sin \gamma_1 h)}{\cos \gamma_1 h + i \sin \gamma_1 h}$$

και τελικά παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει μέσω των συναρτήσεων *Green*,

$$R = -\frac{e^{-i\gamma_1 h}}{e^{i\gamma_1 h}} \Rightarrow 1 + R e^{2i\gamma_1 h} = 0$$

# Παράρτημα Β΄

## Σύγκριση μεθόδων

Αφού έχουμε περιγράψει την μέθοδο του ενεργού βάθους και έχουμε αναφέρει την μέθοδο ελαχιστοποίησης της χαρακτηριστικής εξίσωσης που χρησιμοποιεί ο Χ.Κασσέτας μέσω της συνθήκης προσαρμογής για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών πάνω σε ελαστικό πυθμένα, θα αποδείξουμε στο κεφάλαιο αυτό την ισοδυναμία αυτών των μεθόδων. Τέλος, η ισότητα των τύπων του συντελεστή ανάκλαση στις δύο περιπτώσεις θα ολοκληρώσει το κεφάλαιο αυτό.

### Β΄.1 Ισοδυναμία του ενεργού βάθους με την ανάπτυξη της λύσης μέσω των συναρτήσεων *Green*

Το σχήμα Β΄1(β) δείχνει την κατάσταση στην οποία καταλήγουμε εάν η ιδέα του μιγαδικού ενεργού βάθους στην γενική περίπτωση εφαρμοστεί στο σχήμα Β΄1(α).

Τα σύνορα του σχήμα Β΄1(α) αντικαθιστούνται από τέλεια ανακλόμενα σύνορα μετατοπισμένα κατά  $\Delta h_1$  και  $\Delta h_2$  με συντελεστές ανάκλασης  $R_1$  και  $R_2$ , αντίστοιχα [13]

$$\Delta h_l = \frac{-iln(R_l) + \pi}{2\gamma_l} \quad (\text{B}'1)$$

όπου το  $l$  παίρνει τις τιμές 1 ή 2. Οι ιδιοτιμές των κανονικών ιδιομορφών στην περίπτωση που δείχνει το σχήμα Β΄1(β) προκύπτουν εύκολα διότι ο κυματοδηγός βάθους  $h + \Delta h_1 + \Delta h_2$  έχει σταθερή ταχύτητα και σύνορα ελεύθερων πιέσεων. Οι ιδιοσυναρτήσεις σ' αυτό τον κυματοδηγό είναι της μορφής  $\sin(\gamma_{1n}z)$  όπου  $\gamma_{1n}$  είναι ο κατακόρυφος αριθμός κύματος της ιδιομορφής στο νερό. Η κανονική ιδιομορφή πρέπει να μηδενίζεται στην επιφάνεια και τον πυθμένα, εφόσον έχουμε πλήρη ανακλόμενα σύνορα, και έτσι η εξίσωση ιδιοτιμών



Σχήμα Β'.1: Κυματοδηγός πριν και μετά τα ενεργή βάρη

γίνεται,

$$\gamma_{1n}(h + \Delta h_1 + \Delta h_2) = n\pi \quad (\text{B'.2})$$

Αντικαθιστώντας την (Β'1) στην (Β'2) οδηγούμαστε στην εξίσωση υπολογισμού των ιδιοτιμών με τη μέθοδο του ενεργού βάθους,

$$\gamma_{1n}h - \frac{i}{2}\ln R_1 - \frac{i}{2}\ln R_2 + \pi = n\pi \quad (\text{B'.3})$$

Στην περίπτωση του κυματοδηγού που έχουμε περιγράψει (σχήμα 2) το πάνω σύνορο είναι η επιφάνεια της θάλασσας και εκεί έχουμε ολική ανάκλαση, με μεταβολή φάσης  $-\pi$  και ισχύει  $R_1 = e^{-i\pi}$ . Άρα η σχέση (Β'3) γίνεται,

$$\gamma_{1n}h - \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}\ln R_2 + \pi = n\pi$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με  $2i$  και στη συνέχεια λύνοντας ως προς  $R_2$  έχουμε,

$$2i\gamma_{1n}h + i\pi + \ln R_2 = 2in\pi \Rightarrow R_2 = e^{i(2n\pi - \pi - 2\gamma_{1n}h)}$$

Αν θέσουμε  $R = R_2$ , παίρνουμε τελικά τη σχέση,

$$1 + Re^{2i\gamma_{1n}h} = 0$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι η μέθοδος του ενεργού βάθους έχει την ίδια θεωρητική βάση με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $D(\lambda) = 0$ , η οποία προκύπτει χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης μέσω των συναρτήσεων *Green* όπως αναφέραμε στο παράρτημα Α.

## B'.2 Ισοδυναμία των συντελεστών ανάκλασης

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει στον πυθμένα με γωνία  $\varphi$  ως προς την κατακόρυφο (σχήμα 2.3) και ένα μέρος της ενέργειας διαδίδεται στον πυθμένα. Αν με  $\gamma_2, \delta_2$  συμβολίσουμε τους κατακόρυφους αριθμούς κύματος για τα ακουστικά και τα διατμητικά κύματα στον πυθμένα και με  $\lambda$  τον οριζόντιο αριθμό κύματος, τότε η έκφραση του συντελεστή ανάκλασης όπως δίδεται στην σχέση 2.19 είναι η ακόλουθη :

$$R = \frac{4\gamma_2\delta_2\lambda^2 + (\delta_2^2 - \lambda^2)^2 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^4}{4\gamma_2\delta_2\lambda^2 + (\delta_2^2 - \lambda^2)^2 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^4} = \frac{A}{B} \quad (B'.4)$$

όπου οι αριθμοί  $\gamma_2, \delta_2, \gamma_1$  δίνονται από τις σχέσεις 2.20-2.22 και  $\lambda$  είναι η ιδιοτιμή του προβλήματος βάρους.

Μια δεύτερη εξίσωση για τον συντελεστή ανάκλασης που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο 3 με τη μέθοδο του ενεργού βάρους είναι η σχέση 3.5. Εάν αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις  $Z, Z_p, Z_s$  στον τύπο του συντελεστή ανάκλασης της σχέσης 3.5 παίρνουμε την παρακάτω σχέση με γωνίες των ακουστικών κυμάτων στο ρευστό και το ελαστικό μέσο και των διατμητικών κυμάτων  $\theta, \theta_p, \theta_s$  ως προς τον οριζόντιο άξονα, αντίστοιχα,

$$R = \frac{\frac{\rho_2 c_p}{\sin\theta_p} \cos^2 2\theta_s + \frac{\rho_2 c_s}{\sin\theta_s} \sin^2 2\theta_s - \frac{\rho_1 c}{\sin\theta}}{\frac{\rho_2 c_p}{\sin\theta_p} \cos^2 2\theta_s + \frac{\rho_2 c_s}{\sin\theta_s} \sin^2 2\theta_s + \frac{\rho_1 c}{\sin\theta}} \quad (B'.5)$$

Για να δείξουμε ότι οι συντελεστές ανάκλασης είναι ίδιοι δείχνουμε τις επιμέρους ισότητες :

$$\begin{aligned} \rightarrow 4\gamma_2\delta_2\lambda^2 &= 4\frac{\omega}{c_p} \cos\varphi_p \frac{\omega}{c_s} \cos\varphi_s \frac{\omega^2}{c_s^2} \sin^2\varphi_s = \frac{\omega^4}{c_s^4} \frac{\sin^2 2\varphi_s}{\cos\varphi_s} \cos\varphi_p \frac{c_s}{c_p} \\ \rightarrow (\delta_2^2 - \lambda^2)^2 &= \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} \cos^2\varphi_s - \frac{\omega^2}{c_s^2} \sin^2\varphi_s\right)^2 = \frac{\omega^4}{c_s^4} \cos^2 2\varphi_s \\ &\rightarrow \frac{\rho_1 \gamma_2 \omega^4}{\rho_2 \gamma_1 c_s^4} = \frac{\rho_1 \omega \cos\varphi_p c \omega^4}{\rho_2 c_p \omega \cos\varphi c_s^4} \end{aligned}$$

Τότε αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην σχέση (B'4) παίρνουμε την σχέση,

$$A = \frac{\omega^4 \cos\varphi_p}{c_s^4 \rho_2 c_p} \left[ \frac{\rho_2 c_s}{\cos\varphi_s} \sin^2 2\varphi_s + \frac{\rho_2 c_p}{\cos\varphi_p} \cos^2 2\varphi_p - \frac{\rho_1 c}{\cos\varphi} \right]$$

$$B = \frac{\omega^4 \cos \varphi_p}{c_s^4 \rho_2 c_p} \left[ \frac{\rho_2 c_s}{\cos \varphi_s} \sin^2 2\varphi_s + \frac{\rho_2 c_p}{\cos \varphi_p} \cos^2 2\varphi_p + \frac{\rho_1 c}{\cos \varphi} \right]$$

Μετατρέποντας τις προσπίπτουσες γωνίες  $\varphi, \varphi_p, \varphi_s$  σε γωνίες ως προς την οριζόντιο (*grazing angle*)  $\theta, \theta_p, \theta_s$  καταλήγουμε στην σχέση (B'5).

# Βιβλιογραφία

- [1] *M.B.Porter*, The Kraken Normal mode Program, User's Guide, 2001.
- [2] *M.Ταρουδάκης*, Εισαγωγή στην ακουστική ωκεανογραφία, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα μαθηματικών, 2002.
- [3] *Γ.Κρόκος*, Υπολογισμός του ακουστικού πεδίου σε ρηχό κυματοδηγό πάνω από ελαστικό πυθμένα, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα φυσικής, 2003.
- [4] *D.D.Ellis, D.M.F.Chapman*, A Simple shallow water propagation model including shear wave effects, *Acoust. Soc. Am.*, 1985.
- [5] *F.B.Jensen, C.M.Ferla*, Numerical solution of range-dependent benchmark problems in ocean acoustics, *Acoust. Soc. Am.*, 1990.
- [6] *Χ.Κασσέτας*, Υπολογισμός ιδιοτιμών του προβλήματος βάθους πάνω από ελαστικό πυθμένα, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μαθηματικό τμήμα, 2002.
- [7] *D.E.Weston*, A Moire Fringe analog of sound propagation in shallow water, *Acoust. Soc. Am.*, 1960.
- [8] *M.J.Buckingham*, Array gain of a broadside vertical line array in shallow water, *Acoust. Soc. Am.*, 1979.
- [9] *D.M.F.Chapman, P.D.Ward, D.M.F.Ellis*, The effective depth of a Pekeris ocean waveguide, including shear wave effects, *Acoust. Soc. Am.*, 1988.
- [10] *Z.Y.Zhang, C.T.Tindle*, Complex effective depth of ocean bottom, *Acoust. Soc. Am.*, 1992.
- [11] *L.M.Brekhovskikh*, Waves in layered media, Academ, New York, 1980.

- [12] *M.Ταρουδάκης*, Προβλήματα ακουστικής διάδοσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα μαθηματικών, 2000.
- [13] *C.T. Tindle, N.R. Chapman*, A phase function for finding normal mode eigenvalues over a layered elastic bottom, *Acoust. Soc. Am.*, 1994.
- [14] *E.K. Westwood, C.T. Tindle, N.R. Chapman*, A normal mode model for acoustic-elastic ocean environments, *Acoust. Soc. Am.*, 1996.
- [15] *F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, and H. Schmidt*, *Computational Ocean Acoustics*, American Institute of Physics, New York, 1994.
- [16] *I. Tolstoy, C.S. Clay*, *Ocean Acoustics*, New York, 1960.
- [17] *Evan K. Westwood*, *Orca version 1.0, User's Guide*, 1996.
- [18] *P. Cristini*, A short guide to KrakenZ, 1998.
- [19] *H. Schmidt and F.B. Jensen*, Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environments, *Comp. and Maths. with Appls.* 11:699–715, 1985.