Πανεπιστημιο Κρητης

Σχολη Θετικων Επιστημων

Διατμηματικο Μεταπτυχιακο Προγραμμα
«Μαθηματικα και Εφαρμογες τους»

Μεταπτυχιακη Εργασια

Κατηγορηματα Ευκλειδειου Διαγραμματος Voronoi Ευθυγραμμων Τμηματων τα οποια ειναι Παραλληλα η υπο Γωνια 45° με τους Αξονες

Καμαριανάκης Εμμανουήλ, Νικολάου

Επιβλέπων Καθηγητής: Καραβέλας Μενέλαος

Ηράκλειο, Ιούλιος 2011

University of Crete

School of Sciences

Inter-Departmental Graduate Program
"Mathematics and its Applications"

Master of Science Thesis

Predicates for the Euclidean Voronoi diagram of axis-aligned and ortho-45° line segments

Kamarianakis Emmanuel, Nikolaos

Thesis Adviser: Karavelas Menelaos

Heraklion, July 2011

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά Θεμέλια Πληροφορικής και Εφαρμογές» και κατατέθηκε τον Ιούλιο του 2011.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.:

- Μ. Λάμπρου, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
- Α. Φειδάς, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
- Μ. Καραβέλας (Επιβλέπων Καθηγητής), Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους οι οποίοι με τον τρόπο τους βοήθησαν προκειμένου να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία. Αρχικά, την οικογένειά μου Νίκο, Χρυσή, Σταμάτη και Μαρία και την πολυαγαπημένη μου γιαγιά, Αλέκα. Είναι οι άνθρωποι που μου έδωσαν τις αρχές και τις αξίες που χρειάστηκα για να φτάσω έως εδώ και οι οποίες θα με ακολουθούν σε κάθε βήμα της ζωής μου.

Δε θα μπορούσα να μην αναφέρω τους καθηγητές μου στο πανεπιστήμιο, αρκετοί από τους οποίους μου προσέφεραν, εκτός από γνώση, κατανόηση και συμπαράσταση· στήριξη η οποία μου επιτρέπει, εκτός από δασκάλους μου, να τους θεωρώ και φίλους. Τον κ. Φειδά, ο οποίος χρόνια τώρα προσπαθεί να με πείσει να συνεχίσω την πορεία μου στον εξωτερικό αλλά παρά το ότι είμαι ξεροκέφαλος, στηρίζει όλες μου τις επιλογές. Την κα. Παπαδοπούλου της οποίας η πόρτα δεν ήταν ποτέ κλειστή και πάντα άκουγε τους προβληματισμούς μου, δίνοντας μου συμβουλές για ότι με απασχολούσε. Τον κ. Λάμπρου και τον κ. Τζανάκη, οι οποίοι είναι τα πρότυπά μου σε θέματα διδασκαλίας αλλά και σε θέματα γνώσεων και αρχών.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κ. Μενέλαο Καραβέλα, επιβλέπων αυτής της εργασίας, ο οποίος με στήριξε σαν καθηγητής αλλά πάνω από όλα σαν άνθρωπος και σαν φίλος, σε δύσκολες στιγμές. «Σε ευχαριστώ που πίστεψες σε μένα.»

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους φίλους μου και ειδικότερα στους Ξανθίππη, Αντώνη, Ιωάννη, Θοδωρή, και Αλέξανδρο, χωρίς τους οποίους δεν θα είχα καταφέρει να φτάσω ως εδώ. Ένα τελευταίο ευχαριστώ στην κοπέλα μου, Ευτυχία, που μου συμπαραστάθηκε και με εμψύχωνε σχεδόν σε όλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής.

Αφιερώνω την εργασία αυτή στην μητέρα μου Χρυσή,
της οποίας οι φωνές με έκαναν ένα σωστό άνθρωπο.

«Ελπίζω τώρα που έγινα, να σταματήσεις να φωνάζεις!»

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάμε το πιο απαιτητικό κατηγόρημα που απαιτείται για τον υπολογισμό του Ευκλείδειου Διαγράμματος Voronoi Ευθυγράμμων Τμημάτων τα οποία είναι παράλληλα ή υπό γωνία 45° με τους άξονες, το λεγόμενο Incircle predicate. Ο κύριος στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον μέγιστο αλγεβρικό βαθμό.

Στην ανάλυση του κατηγορήματος για την περίπτωση όπου τα τμήματα είναι παράλληλα με τους άξονες δείχνουμε ότι το κατηγόρημα Incircle μπορεί να απαντηθεί υπολογίζοντας αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν μέγιστο βαθμό 6, σε αντίθεση με τις μέχρι τώρα μεθόδους οι οποίες απαιτούσαν τον διπλάσιο βαθμό. Για να το καταφέρουμε αυτό, ανάγουμε το κατηγόρημα στην σύγκριση δύο αποστάσεων (σε αντίθεση με την σύγκριση τετραγώνων δύο αποστάσεων σε άλλες μεθόδους) και επιπλέον ανάγουμε την σύγκριση αυτή στον υπολογισμό του προσήμου ενός (γραμμικού ή δευτεροβάθμιου) πολυωνύμου (ως προς μια μεταβλητή) σε μία συγκεκριμένη ρίζα ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου (πάλι ως προς μία μεταβλητή).

Αντίστοιχα, δείχνουμε ότι για τον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle για την περίπτωση ευθυγράμμων τμημάτων παράλληλα ή υπό γωνία 45° με τους άξονες μπορεί να απαντηθεί υπολογίζοντας αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν μέγιστο βαθμό 12. Αυτός είναι και ο καλύτερος βαθμός που μπορεί να επιτευχθεί όταν υπάρχουν τμήματα τα οποία δεν είναι παράλληλα ή κάθετα μεταξύ τους.

Λέξεις Κλειδιά: Υπολογιστική Γεωμετρία, κατηγόρημα Incircle, Ευκλείδειο διάγραμμα Voronoi, ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα με τους άξονες, υπό γωνία 45° με τους άξονες.

Summary

In this thesis we study the most-demanding predicate for computing the Euclidean Voronoi diagram of axes-aligned and ortho-45° line segments, namely the Incircle predicate. Our primary goal is to minimize its algebraic degree.

In our predicate analysis we show that the Incircle predicate for axis-aligned segments can be answered by evaluating the signs of algebraic expressions of degree at most 6; this is half the algebraic degree we get when we evaluate the Incircle predicate using the current state-of-the-art approach. To achieve this, we reformulate the predicate as a problem of comparing two distances (as opposed to squares of distances in previous approaches) and reduce the problem of comparing these distances to the problem of computing the sign of the value of a (linear or quadratic) polynomial (in one variable), when evaluated at a known specific root of a quadratic polynomial (again in one variable).

Respectively, we show that the Incircle predicate for axis-aligned and/or ortho-45° segments can be answered by evaluating the signs of algebraic expressions of degree at most 12. This is the best degree one can achieve when there exist segments that are neither parallel nor perpendicular to each other.

Keywords: Computational Geometry, Incircle predicate, Euclidean Voronoi diagram, line segments; axes-aligned, ortho-45.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το Ευκλείδειο διάγραμμα Voronoi ευθυγράμμων τμημάτων είναι μία από τις πιο μελετημένες δομές στην Υπολογιστική Γεωμετρία. Υπάρχει μεγάλο πλήθος αλγορίθμων για την κατασκευή του [DL78, Kir79, Lee82, Yap87, For87, BDS+92, KMM93]. Ανάμεσα σε αυτούς υπάρχουν βέλτιστοι, ως προς τη χειρότερη δυνατή πολυπλοκότητα, αλγόριθμοι οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικές αλγοριθμικές προσεγγίσεις, όπως η μέθοδος διαίρει-και-βασίλευε (divide-and-conquer) [Yap87] ή η μέθοδος με γραμμή σάρωσης (sweepline) [For87]. Επίσης η πιθανοθεωρητική αυξητική μέθοδος (randomized incremental) έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και αποτελεσματική και εφαρμόζεται σε πληθώρα αλγορίθμων [BDS+92, KMM93]. Όσον αφορά την μέθοδο υλοποίησης, υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι υποθέτουν ότι οι υπολογιστικές πράξεις γίνονται επακριβώς [See, Kar04] , δηλαδή ακολουθούν την μέθοδο EGC (Exact Geometrical Computation), ενώ υπάρχουν και αλγόριθμοι οι οποίοι χρησιμοποιούν αριθμητική κινητής υποδιαστολής [Ima96, SIII00, Hel01] . Οι τελευταίοι αν και δεν εγγυώνται ακρίβεια, δίδουν αποτελέσματα τα οποία είναι σωστά τοπολογικά, δηλαδή η έξοδος του αλγορίθμου έχει την σωστή τοπολογία ενός διαγράμματος Voronoi. Όσον αφορά τις εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi, αυτές περιλαμβάνουν γραφικά υπολογιστών, αναγνώριση προτύπων, παραγωγή πλεγμάτων, ψηφιακό έλεγχο και συστήματα γεωγραφικών πληροφοριών (GIS)- βλέπε [Kir79, Lee82, Hel01, BY98, Gol10] και τις αναφορές αυτών.

Ο αποτελεσματικός και ακριβής υπολογισμός των κατηγορημάτων στους γεωμετρικούς αλγορίθμους είναι υψίστης σημασίας. Χρειάζεται να είναι γρήγορος προκειμένου να είναι αποτελεσματικός, αλλά πρέπει να είναι και ολοκληρωμένος με την έννοια του να καλύπτει διάφορες ιδιάζουσες περιπτώσεις οι οποίες αν και είναι ιδιάζουσες όσον αφορά τη θεωρητική ανάλυσή τους, εμφανίζονται πολύ συχνά ως είσοδοι του αλγορίθμου. Στη μέθοδο EGC η ακρίβεια είναι το ελάχιστο που απαιτείται προκειμένου η έξοδος του αλγορίθμου να είναι σωστή. Η αποτελεσματικότητα των αλγορίθμων υπολογισμού των κατηγορημάτων συνήθως μετριέται με βάση το μέγιστο αλγεβρικό βαθμό των παραστάσεων (σε σχέση με τα δεδομένα εισόδου) που πρέπει να ελεγχθούν για τον υπολογισμό του κατηγορήματος, ενώ λαμβάνονται υπόψιν και το πλήθος (και ενδεχομένως τον τύπο) των πράξεων που απαιτεί ο υπολογισμός. Ο σκοπός λοιπόν δεν είναι να ελαχιστοποιήσουμε απλά το πλήθος των πράξεων αλλά και τον αλγεβρικό βαθμό των κατηγορημάτων εφόσον αυτός είναι που καθορίζει την ακρίβεια που απαιτείται για τις ακριβείς πράξεις. Οι αλγόριθμοι οι οποίοι αναφέρονται είτε στον υπολογισμό συγκεκριμένων κατηγορημάτων είτε στο σύνολο του αλγορίθμου και επικεντρώνονται στην ελαχιστοποίηση των αλγεβρικών βαθμών έχουν γίνει ένα από τα κεντρικά ζητήματα της σχεδίασης αλγορίθμων τα τελευταία χρόνια [Bur96, LPT99, BP00, DFMT02, KE03, EK06, MS10].

Στην παρούσα εργασία επικεντρωνόμαστε στο ποιο απαιτητικό κατηγόρημα του Ευκλείδειου Voronoi διαγράμματος ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία είναι είτε παράλληλα είτε υπό γωνία 45° με τους άξονες. Ευθύγραμμα τμήματα αυτής της μορφής αποτελούν τυπική είσοδο για διάφορες εφαρμογές, όπως το πρότυπο VLSI [Pap01, GP08] . Παρά το γεγονός ότι τα κατηγορήματα για το Ευκλείδειο Voronoi διάγραμμα ευθυγράμμων τμημάτων έχει ήδη μελετηθεί, τα κατηγορήματα με είσοδο τμήματα της μορφής που μόλις αναφέραμε δεν έχουν μελετηθεί σε λεπτομέρεια. Στις ενότητες που ακολουθούν μελετάμε το κατηγόρημα Incircle με αυτά τα στοιχεία: δεδομένου τριών αντικειμένων S_1, S_2 και S_3, τέτοια ώστε να ορίζεται ο Voronoi κύκλος $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$, και ενός αντικειμένου Q, θέλουμε να αποφανθούμε εάν το Q τέμνει τον δίσκο D που οριοθετεί ο $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$, εφάπτεται σε αυτόν ή είναι ξένο με το D. Στην συγκεκριμένη εργασία κάθε ένα από τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3 και Q μπορεί να είναι είτε σημείο είτε (ανοιχτό) ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο ή υπό γωνία 45° με κάποιον άξονα. Ο σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον μέγιστο αλγεβρικό βαθμό που εμφανίζεται στον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle. Αποδεικνύουμε ότι ο υπολογισμός του κατηγορήματος Incircle που περιλαμβάνει μόνο ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα σε κάποιον άξονα απαιτεί υπολογισμούς παραστάσεων με αλγεβρικό βαθμό το πολύ 6, ενώ ο αντίστοιχος υπολογισμός για τμήματα τα οποία μπορούν επιπλέον να σχηματίζουν γωνία 45° με κάποιον άξονα είναι 12. Οι βαθμοί σε κάθε περίπτωση που μελετήσαμε πρέπει να συγκριθούν: (1) με τον ανώτατο βαθμό που προκύπτει εάν δεν υπάρχουν περιορισμοί στον προσανατολισμό των ευθυγράμμων τμημάτων το οποίο είναι 40, και (2) με τις ειδικούς/απλουστευμένους βαθμούς που προκύπτουν από το [Bur96], εάν θεωρήσουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς για τους προσανατολισμούς των ευθυγράμμων τμημάτων που μελετάμε. Αναφορικά με την δεύτερη περίπτωση, όταν τα τμήματα είναι παράλληλα στους άξονες, οι αλγεβρικοί βαθμοί της εργασίας αυτής δεν είναι ποτέ μεγαλύτεροι ενώ στην πιο απαιτητική περίπτωση έχουμε μειώσει τον βαθμό κατά 2.

Η δομή της εργασίας αυτής είναι η ακόλουθη:

- Στο Κεφάλαιο 2 κάνουμε μια γενική αναφορά στα διαγράμματα Voronoi και στον αλγόριθμο κατασκευής του αντίστοιχου Ευκλείδειου Διαγράμματος Voronoi ευθυγράμμων τμημάτων.

- Στο Κεφάλαιο 3 αναφέρουμε διάφορα χρήσιμα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο κατασκευής, ενώ αναφέρουμε τα βασικά κατηγορήματα Incircle και

Orientation. Αναφερόμαστε επίσης αναλυτικά στον τρόπο υπολογισμού προσήμων πολυωνύμων σε ρίζες άλλων πολυωνύμων με χρήση απαλοίφουσας ή ακολουθιών Sturm.

- Στο Κεφάλαιο 4 αναφερόμαστε στην απόσταση αντικειμένων όπως θα την χρησιμοποιήσουμε στα πλαίσια της εργασίας αυτής, ενώ αναπτύσουμε αναλυτικά το κατηγόρημα SideOfOrientedBisector το οποίο αποφαίνεται σε ποια πλευρά της διχοτόμου δύο αντικειμένων βρίσκεται ένα σημείο.

- Στα Κεφάλαια 5 και 6 αναπτύσουμε το κατηγόρημα Incircle, βασικό εργαλείο για τον αλγόριθμο κατασκευής ενός διαγράμματος Voronoi. Συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε τις περιπτώσεις όπου τα ορίσματα του κατηγορήματος είναι είτε σημεία είτε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα σε κάποιον άξονα. Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε την περίπτωση όπου τα ορίσματα μπορεί να είναι είτε της μορφής του κεφαλαίου 5 είτε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα ή κάθετα στην ευθεία $y = x$. Η ανάλυση που γίνεται στα κεφάλαια αυτά, έχει ως κεντρικό στόχο την ελαχιστοποίηση του μέγιστου αλγεβρικού βαθμού που απαιτείται για τον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle, σε κάθε περίπτωση.

- Στο Κεφάλαιο 7 παραθέτουμε τα τελικά αποτελέσματα της εργασίας αυτής, καθώς επίσης και προβλήματα τα οποία μένουν ανοιχτά προς μελλοντική επίλυση.

Κεφάλαιο 2

Διάγραμμα Voronoi

Πριν αναφέρουμε τους μαθηματικούς ορισμούς που διέπουν ένα διάγραμμα Voronoi, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ένα απλό παράδειγμα για να κατανοήσουμε καλύτερα την ουσία και την χρηστικότητά του. Ας υποθέσουμε ότι ζείτε σε μία πόλη και θέλετε να αποστείλετε ή να λάβετε αλληλογραφία. Αν και στην πόλη υπάρχουν πολλά ταχυδρομεία, θα ήταν λογικό να εξυπηρετηθείτε από το πλησιέστερο σε εσάς για εξοικονόμηση χρόνου. Γενικότερα, εφόσον την ίδια σκέψη θα έκανε κάθε κάτοικος της πόλης αυτής, θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να οριοθετήσουμε ποιες περιοχές εξυπηρετούνται «καλύτερα» από κάθε ταχυδρομείο. Με τον τρόπο αυτό, ελέγχοντας σε ποια περιοχή ανήκετε, θα μπορούσατε επιτόπου να εντοπίσετε το πιο κοντινό ταχυδρομείο. Επιπλέον, έχοντας ήδη οριοθετήσει τις περιοχές, ο οποιοσδήποτε θα μπορούσε να κάνει τον ίδιο έλεγχο με εσάς, χωρίς επιπλέον κόστος.

Η διαμέριση της πόλης σε περιοχές αποτελεί ένα διάγραμμα Voronoi. Τα ταχυδρομεία αντιστοιχούν στους γεννήτορες Voronoi, ενώ κάθε περιοχή του διαγράμματος καλείτε κελί Voronoi. Προφανώς, σε κάθε κελί αντιστοιχεί ένας γεννήτορας, και κάθε κελί αποτελείτε από τα σημεία τα οποία βρίσκονται πιο κοντά στον γεννήτορά του από οπουδήποτε άλλον.

Η εφαρμογές των διαγραμμάτων Voronoi είναι αναρίθμητες, με πιο σημαντικές αυτές της γεωγραφίας, όπως αυτή που μόλις αναφέραμε, της αστρονομίας, της κρυσταλλογραφίας, της γεωλογίας, της ρομποτικής, της υπολογιστικής αναπαράστασης 3D αντικειμένων κ.ά.

Αν και στο παράδειγμα που μόλις αναφέραμε κάθε ένα από τους γεννήτορες είναι σημείο του επιπέδου, γεννήτορας μπορεί επίσης να είναι κάποιο ευθύγραμμο τμήμα ή ευθεία ή πολύγωνο ή τμήμα κύκλου κτλ. Άλλωστε, για να κατασκευαστεί ένα αντίστοιχο διάγραμμα Voronoi αρκεί να ορίσουμε μία μετρική στο χώρο η οποία να δέχεται ως όρισμα τα αντίστοιχα αντικείμενα.

Στην εργασία αυτή θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου οι γεννήτορες Voronoi είναι σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είτε είναι παράλληλα με τους άξονες, είτε σχηματίζουν γωνία $45°$ με αυτούς.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό του αφηρημένου διαγράμματος Voronoi και στην συνέχεια θα αναφερθούμε στο Ευκλείδειο διάγραμμα Voronoi ευθυγράμμων τμημάτων. Τέλος, θα δούμε διάφορους τρόπους κατασκευής διαγραμμάτων Voronoi.

2.1 Αφηρημένο Διάγραμμα Voronoi

Έστω $\mathbb{K}$ ένας μετρικός χώρος και $d : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{R}$ μια μετρική σχέση στο $\mathbb{K}$. Ας θεωρήσουμε επίσης το σύνολο $S = \{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n\}$ n αντικειμένων του χώρου $\mathbb{K}$, τα οποία θα είναι οι αντίστοιχοι γεννήτορες Voronoi. Για $i \neq j$, ορίζουμε την διχοτόμο $\text{Bis}(S_i, S_j)$ των αντικειμένων S_i, S_j ως το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από αυτά, $\text{Bis}(S_i, S_j) := \{p \in \mathbb{K} | d(p, S_i) = d(p, S_j)\}$. Η διχοτόμος $\text{Bis}(S_i, S_j)$ χωρίζει τον $\mathbb{K}$ σε δύο χωρία και έστω $h(S_i, S_j)$ το χωρίο το οποίο αντιστοιχεί στο αντικείμενο S_i, δηλαδή περιέχει τα σημεία που είναι πλησιέστεστερα στο S_i.

Ορισμός *Κελί Voronoi* του αντικειμένου S_i, το οποίο θα συμβολίζουμε $C(S_i)$, ορίζεται ως το σύνολο των σημείων το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στο S_i από οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο S_j, δηλαδή

$$C(S_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(S_i, S_j)$$

Ορισμός *Σκελετός Voronoi* του $\mathbb{K}$ με γεννήτορες τα αντικείμενα S_i, για $1 \leq i \leq n$, ορίζεται το

$$Vor(S) = \bigcup_{S_i \in S} \partial C(S_i)$$

Ορισμός *Διάγραμμα Voronoi* του $\mathbb{K}$ με γεννήτορες τα αντικείμενα S_i καλείται η διαμέριση του χώρου $\mathbb{K}$ στο σκελετό Voronoi και στα επιμέρους ανοιχτά κελιά $C(S_i)$.

2.2 Ευκλείδειο Διάγραμμα Voronoi Σημείων

Θα εξειδικεύσουμε τον ορισμό του αφηρημένου διαγράμματος Voronoi για την περίπτωση όπου:

- $\mathbb{K}$ είναι το Ευκλείδειο επίπεδο ,
- τα $S_i = (x_i, y_i)$ είναι σημεία του $\mathbb{R}^2$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και
- $d(S_i, S_j) = \delta(S_i, S_j)$ είναι η ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων, δηλαδή

$$\delta(S_i, S_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Κάθε μία από τις διχοτόμους $\text{Bis}(S_i, S_j)$ είναι η μεσοκάθετος των σημείων S_i και S_j οπότε το κελί $Vor(S_i)$ είναι η τομή $n-1$ ανοιχτών ημιεπιπέδων. Αυτό σημαίνει ότι το $Vor(S_i)$ είναι ένα (ενδεχομένως άπειρο) ανοιχτό κυρτό πολυγωνικό χωρίο το οποίο φράσεται το πολύ από $n-1$ κορυφές και $n-1$ ακμές.

Πώς δείχνει όμως ένα ολοκληρωμένο διάγραμμα Voronoi n σημείων; Εφόσον κάθε ένα από τα κελιά αποτελεί τομή ημιεπιπέδων του χώρου, το διάγραμμα Voronoi είναι μια διαμέριση του χώρου της οποίας οι ακμές θα είναι ευθύγραμμα τμήματα ή ευθείες ή ημιευθείες. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. *Έστω S το σύνολο n σημείων του επιπέδου. Εάν όλα τα σημεία είναι συγγραμικά τότε το $Vor(S)$ αποτελείται από $n-1$ παράλληλες γραμμές και n κελιά. Ειδάλλως, το διάγραμμα Voronoi είναι συνεκτικό και οι ακμές του είναι είτε ευθύγραμμα τμήματα είτε ημιευθείες.*

Το κοινό σύνορο δύο περιοχών Voronoi, το οποίο περιέχει ακριβώς δύο κέντρα Voronoi ονομάζεται ακμή Voronoi, ενώ εάν περιέχει περισσότερα από δύο, ονομάζεται κορυφή Voronoi. Αναφορικά με πλήθος των ακμών και των κορυφών Voronoi σε ένα διάγραμμα Voronoi n σημείων ισχύει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *Το πλήθος των κορυφών Voronoi σε ένα διάγραμμα $n \geq 3$ σημείων του επιπέδου είναι το πολύ $2n-5$ ενώ το πλήθος των ακμών είναι το πολύ $3n-6$.*

Επιπλέον, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ο μέσος αριθμός ακμών που βρίσκονται στο σύνορο ενός κελιού Voronoi είναι μικρότερος του 6.

Επίσης χρήσιμη ιδιότητα του διαγράμματος Voronoi σημείων είναι ότι, ένα σημείο S_i βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής θήκης του S εάν και μόνο εάν το $C(S_i)$ είναι φραγμένο.

Τριγωνοποίηση Delaunay Μια εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα του διαγράμματος Voronoi βρίσκεται στο δυϊκό του γράφημα· *δυϊκό* ενός επιπέδου γραφήματος G είναι το γράφημα το οποίο έχει ένα σημείο για κάθε χωρίο του G, και μία ακμή για κάθε ακμή του G που ενώνει δύο γειτονικά χωρία.

Εάν δεν υπάρχουν τετράδες σημείων (αντίστοιχα τριάδες σημείων) στο S που να είναι ομοκυκλικά (αντίστοιχα συγγραμικά), τότε το δυϊκό γράφημα του διαγράμματος Voronoi είναι μια τριγωνοποίηση του S η οποία ονομάζεται τριγωνοποίηση Delaunay. Στην τριγωνοποίηση αυτή, δύο σημεία του S ενώνονται εάν και μόνο εάν τα αντίστοιχα κελιά Voronoi είναι γειτονικά. Η τριγωνοποίηση Delaunay έχει κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

1. Είναι το δυϊκό γράφημα του Voronoi διαγράμματος, οπότε εάν υπολογίσεις το ένα, έχεις αυτόματα υπολογίσει το άλλο.

2. Είναι επίπεδο γράφημα οπότε σύμφωνα με τον τύπο του Euler έχει το πολύ $3n-6$ ακμές και το πολύ $2n-5$ τρίγωνα. Η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά χρήσιμη, αφού μας επιτρέπει να επιλύσουμε προβλήματα τα οποία απαιτούν αλγεβρικό βαθμό 2, π.χ. το πρόβλημα του κοντινότερου ζεύγους (closest pair), χρησιμοποιώντας τεχνικές και κατηγορήματα τα οποία απαιτούν μικρότερο βαθμό και τα οποία στηρίζονται στην συγκεκριμένη τριγωνοποίηση.

3. Κάθε σημείο του S ενώνεται με το πιο κοντινό του με μία ακμή.

4. Ο ανοιχτός περιγεγραμμένος κύκλος οποιουδήποτε τριγώνου της τριγωνοποίησης Delaunay δεν περιέχει κανένα σημείο του S. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως The Empty Circle Property.

5. Μεγιστοποιεί τις ελάχιστες γωνίες των εμφανιζόμενων τριγώνων σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη τριγωνοποίηση του συνόλου S. Συγκεκριμένα, εάν καταγράψουμε της εμφανιζόμενες γωνίες σε αύξουσα σειρά της τριγωνοποίησης Delaunay και μιας οποιαδήποτε άλλης τριγωνοποίησης, η πρώτη 'λίστα' θα είναι λεξικογραφικά μικρότερη.

2.3 Ευκλείδειο Διάγραμμα Voronoi Ευθυγράμμων Τμημάτων

Εάν το σύνολο S των κέντρων Voronoi περιέχει, εκτός από σημεία, και ευθύγραμμα τμήματα, τότε αναφερόμαστε σε διάγραμμα Voronoi ευθυγράμμων τμημάτων (Line Segment Voronoi Diagram).

Στο συγκεκριμένο είδος διαγράμματος Voronoi, θεωρούμε ότι δύο διαφορετικά τμήματα του S δεν μπορούν να τέμνονται στο εσωτερικό τους, αλλά μπορούν να έχουν ένα κοινό άκρο. Επίσης σημαντική λεπτομέρεια είναι ότι θεωρούμε το εσωτερικό του τμήματος και τα άκρα του ως διαφορετικά αντικείμενα του συνόλου S. Η σκοπιμότητα της θεώρησης αυτής θα φανεί παρακάτω, όταν θα κατασκευάζουμε το διάγραμμα Voronoi, οπότε είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε ένα νέο σύνολο $\tilde{S}$ το οποίο περιέχει όλα τα σημεία του συνόλου S και επιπλέον περιέχει τα άκρα και τα ανοιχτά τμήματα όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που εμφανίζονται στο S. Έχοντας ορίσει το *τροποποιημένο* σύνολο S, παραθέτουμε στην συνέχεια τον αλγόριθμο κατασκευής του διαγράμματος Voronoi ευθυγράμμων τμημάτων ενός συνόλου $\tilde{S}$, αναφέροντας χωρίς υπερβολικές λεπτομέρειες τα κατηγορήματα και τον τρόπο με τον οποίο αυτά συμβάλλουν στην δημιουργία του σκελετού του εν λόγω Voronoi διαγράμματος.

Αλγόριθμος Κατασκευής

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε, ο οποίος έχει μελετηθεί αναλυτικά στην δημοσίευση [Kar04], εμπίπτει στην κατηγορία των πιθανοθεωρητικών αυξητικών αλγορίθμων. Με τον όρο «αυξητικός» εννοούμε ότι τα αντικείμενα του συνόλου $\tilde{S}$ του οποίου θέλουμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα Voronoi δεν λαμβάνονται υπόψιν όλα μαζί κατά την διαδικασία της κατασκευής του διαγράμματος. Αντιθέτως, επιλέγουμε αρχικά τρία αντικείμενα s_1, s_2, s_3 από το σύνολο S, και στην συνέχεια κατασκευάζουμε το διάγραμμα Voronoi, $\mathsf{Vor}(S^3)$, για το αρχικό αυτό σύνολο $S^3 = \{s_1, s_2, s_3\} \subset \tilde{S}$. Στην συνέχεια επιλέγουμε ένα αντικείμενο s_4 του συνόλου $S \backslash S^3$, το οποίο ελέγχουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτό επηρεάζει το διάγραμμα $\mathsf{Vor}(S^3)$, είτε καταστρέφοντας κάποιες κορυφές Voronoi, είτε δημιουργώντας νέες ακμές και ενδεχομένως κορυφές. Από την διαδικασία αυτή, την οποία θα περιγράψουμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω, προκύπτει το διάγραμμα Voronoi του συνόλου $S^4 = S^3 \cup \{s_4\}$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα Voronoi του συνόλου $\tilde{S}$,κατασκευάζοντας διαδοχικά τα διαγράμματα $\{\mathsf{Vor}(S^i)\}_{i=3}^n$, όπου $n = |\tilde{S}|$ και $S^3 \subset S^4 \subset \cdots S^n = \tilde{S}$.

Θα αναφέρουμε στο σημείο αυτό κάποιες σημαντικές λεπτομέρειες του αλγορίθμου. Ο λόγος για τον οποίο τροποποιήσαμε το σύνολο S βασίζεται στο γεγονός ότι κατά την διαδικασία επιλογής των αντικειμένων s_i, εάν επιλέξουμε να προσθέσουμε ένα ανοιχτό τμήμα, προσθέτουμε πρώτα τα άκρα του και στην συνέχεια αυτό. Με τον τρόπο αυτό, αφ᾽ ενός μεν το διάγραμμα Voronoi είναι ένα αφηρημένο διάγραμμα Voronoi (στην αντίθετη περίπτωση θα μπορούσαμε να έχουμε διδιάστατες διχοτόμους), ενώ επίσης κατά την εισαγωγή του εσωτερικού του ευθυγράμμου τμήματος δε χρειάζεται να βρούμε, όπως θα δούμε παρακάτω, τον κοντινότερό του γείτονα.

Αυτό όμως το οποίο χρήζει ιδιαίτερης μελέτης είναι ο τρόπος με τον οποίο η εισαγωγή ενός αντικειμένου s_i επηρεάζει το υπάρχον γράφημα $\mathsf{Vor}(S^{i-1})$, και πώς τελικά υπολογίζουμε το νέο γράφημα $\mathsf{Vor}(S^i)$ με βάση το παλαιό. Υπενθυμίζουμε ότι το δυϊκό γράφημα του διαγράμματος Voronoi καλείται, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, τριγωνοποίηση Delaunay. Θα συμβολίσουμε με $\mathsf{D}(S^k)$ το δυϊκό γράφημα που αντιστοιχεί στο Voronoi διάγραμμα $\mathsf{Vor}(S^k)$, ενώ υπενθυμίζουμε ότι κάθε ακμή (αντίστοιχα κάθε κέντρο) του $\mathsf{D}(S^k)$ αντιστοιχεί σε κάποιο κέντρο Voronoi (αντίστοιχα ακμή Voronoi) του $\mathsf{Vor}(S^k)$.

Έστω λοιπόν ότι εισάγουμε το αντικείμενο s_i το οποίο εντοπίζουμε σε ποιο κελί Voronoi ανήκει με κατάλληλη χρήση του κατηγορήματος SideOfOrientedBisector, το οποίο αναπτύσουμε αναλυτικά στην Ενότητα 4.2. Με βάση την ανάλυση της εργασίας [Bur96] υπάρχουν δύο πιθανά σενάρια όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο θα επηρεαστεί το γράφημα $\mathsf{Vor}(S^{i-1})$ κατά την εισαγωγή του αντικειμένου s_i· είτε τουλάχιστον μία από τις κορυφές του κελιού στο οποίο βρίσκεται το s_i είτε ακριβώς ένα τμήμα από κάποια ακμή θα πάψει να υπάρχει στο νέο γράφημα.

Ο έλεγχος που αφορά τον τρόπο με τον οποίο επηρρεάζεται το υπάρχον διάγραμμα Voronoi γίνεται βάσει ενός κατηγορήματος το οποίο δεν αναπτύσσουμε στα πλαίσια της εργασίας αυτής. Αν και δεν θα αναφέρουμε ακριβώς μέσω ποιου ελέγχου αποφαίνεται το συγκεκριμένο κατηγόρημα εάν κάποια ακμή ή κέντρο Voronoi εξαλείφεται μέσω της εισαγωγής ενός νέου αντικειμένου, αξίζει να σημειώσουμε την διαδικασία που ακολουθεί ο αλγόριθμος μας για τα διάφορα συμπεράσματα του κατηγορήματος.

Εάν κανένα από τα αρχικά κέντρα Voronoi δεν εξαλείφεται τότε ελέγχουμε μία-μία της ακμές του κελιού στο οποίο βρίσκεται το s_i και ελέγχουμε ποία από αυτές και ποιο τμήμα της θα αντικατασταθεί με δύο ακμές. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή τουλάχιστον ένα από τα κέντρα Voronoi (κορυφή του κελιού στο οποίο βρίσκεται το s_i) εξαλείφεται, χρειάζεται να ελέγξουμε τις γειτονικές κορυφές του κέντρου αυτού· εάν εξαλείφεται κάποια τις γειτονικές κορυφές, τότε χρειάζεται να ελέγξουμε εάν η ενδιάμεση ακμή εξαλείφεται πλήρως ή όχι με χρήση του ίδιου κατηγορήματος. Μέσω αυτής της διαδικασίας, φτάσουμε κάποια στιγμή στο σημείο όπου πλέον δεν υπάρχουν άλλα κέντρα Voronoi τα οποία να εξαλείφονται, ενώ γνωρίζουμε εάν οι ενδιάμεσες ακμές εξακολουθούν να υφίστανται ή όχι. Τότε σχηματίζουμε την καμπύλη που περιβάλει την εξωτερική περίμετρο των τριγώνων του δυϊκού γραφήματος $\mathsf{D}(S^{i-1})$ τα οποία έχουν ως κέντρα τις κορυφές οι οποίες εξαλείφονται και διαγράφουμε από το δυϊκό γράφημα όλες τις ενδιάμεσες ακμές εκτός αυτές που αντιστοιχούν σε τμήματα ακμών τα οποία έχει αποφανθεί το κατηγόρημα ότι δεν εξαλείφονται. Στην συνέχεια, ενώνουμε στο γράφημα $\mathsf{D}(S^{i-1})$ την κορυφή που αντιστοιχεί στο νέο αντικείμενο s_i με όλα τα άκρα της περιβάλλουσας αυτής καμπύλης, σχηματίζοντας έτσι το δυικό γράφημα $\mathsf{D}(S^i)$. Έχοντας υπολογίσει το δυϊκό του γράφημα, μπορούμε να υπολογίσουμε το νέο διάγραμμα Voronoi $\mathsf{Vor}(S^i)$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. Όσον αφορά το κόστος του κατηγορήματος το οποίο χρησιμοποιείται, ο αλγεβρικός βαθμός των παραστάσεων που απαιτείται να υπολογιστούν είναι πάντοτε μικρότερος από τον αντίστοιχο βαθμό που απαιτείται για το κατηγόρημα Incircle. Τελικά, ο συνολικά μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτεί ο αλγόριθμος είναι πάντοτε αυτός που απαιτείται για το κατηγόρημα Incircle.

Κεφάλαιο 3

Εργαλεία

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε διάφορα εργαλεία (κατηγορήματα) που θα χρησιμοποιήσουμε. Στο πρώτο μέρος, κάνουμε αναφορά σε βασικά εργαλεία και ορισμούς ενώ στο δεύτερο σκέλος αναπτύσσουμε τρόπους υπολογισμού πολυωνύμων σε τιμές που μας ενδιαφέρουν. Ειδικότερα, το δεύτερο σκέλος αφορά τρόπους υπολογισμού του πρόσημου ενός τριωνύμου ή πολυωνύμου τετάρτου βαθμού στη ρίζα ενός άλλου τριωνύμου χρησιμοποιώντας απαλλοίφουσες και στατικές ακολουθίες Sturm. Οι σχετικές τεχνικές έχουν μελετηθεί αναλυτικά στις εργασίες [KE03] και [EK06].

3.1 Τα Κατηγορήματα Orientation και Incircle για σημεία

Σημαντικό εργαλείο είναι το γνωστό κατηγόρημα Orientation predicate, με το οποίο μπορούμε να ελέγχουμε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που ορίζει ένα προσανατολισμένο τμήμα ανήκει ένα σημείο του χώρου.

Θεώρημα 3.1. *Το σημείο C επιπέδου βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο που ορίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εάν και μόνο εάν η ορίζουσα*

$$\mathit{Orientation}(A, B, C) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

είναι γνησίως θετική. Αντίστοιχα το σημείο C βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο εάν και μόνο εάν η παραπάνω ορίζουσα είναι γνησίως αρνητική. Τέλος, το σημείο C είναι συγγραμικό με τα σημεία A και B εάν η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδέν.

Κεντρικό θέση στα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε καταλαμβάνει το κατηγόρημα Incircle, το οποίο και ελέγχει εάν ένα σημείο βρίσκεται εντός του κύκλου που ορίζουν

3 άλλα σημεία. Προτού αναφέρουμε το πώς γίνεται αυτός ο έλεγχος, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στην έννοια του κύκλου Voronoi.

Ορισμός Κύκλος Voronoi τριών αντικειμένων A,B,C, όπου κάθε ένα από αυτά τα αντικείμενα μπορεί να είναι είτε σημείο είτε ευθύγραμμο τμήμα, ορίζεται ώς ο κύκλος ο οποίος εφάπτεται και στα τρία αντικείμενα (αντίστοιχα διέρχεται από αυτά, εάν αναφερόμαστε σε σημεία). Εάν τα αντικείμενα A, B, C εμφανίζονται με την συγκεκριμένη σειρά εάν κινηθώ επί του Voronoi κύκλου κατά την CCW φορά (αντίθετη με αυτήν του ρολογιού), τότε ο κύκλος Voronoi θα λεγεται **προσανατολισμένος** (oriented) και θα τον συμβολίζουμε $\mathcal{V}(A, B, C)$. Κέντρο του κύκλου Voronoi είναι το σημείο το οποίο ισαπέχει από τα τρία αντικείμενα.

Για λόγους χρηστικούς, όταν αναφερόμαστε σε κύκλο Voronoi τριών αντικειμένων A, B, C, θα εννοούμε ότι είναι προσανατολισμένος, και θα τον συμβολίζουμε $\mathcal{V}(A, B, C)$. Η κυκλική εναλλαγή των τριών σημείων στο παραπάνω συμβολισμό, δεν τον επηρεάζει. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρακάτω διαπίστωση.

Λήμμα 3.2. *Εάν αναφερόμαστε σε Voronoi κύκλο τριών σημείων (A, B, C), τότε ο $\mathcal{V}(A, B, C)$ ορίζεται εάν και μόνο εάν Orientation$(A, B, C) \geq 0$.*
Αντίστοιχα, εάν ισχύει Orientation$(A, B, C) < 0$, τότε ορίζεται ο $\mathcal{V}(B, A, C)$.

Η χρήση λοιπόν του Orientation βοηθάει να ελέγξουμε εάν όντως τα 3 σημεία εμφανίζονται CCW στην σειρά αυτή στον κύκλο που ορίζουν προκειμένου να έχει νόημα να μιλάμε για προσανατολισμένο κύκλο.

Έχοντας ορίσει τον κύκλο Voronoi, προχωράμε στην παρουσίαση του IncircleTest ή απλά Incircle.

Θεώρημα 3.3. *Δεδομένων σημείων A,B,C, τα οποία δεν είναι συνευθειακά, το σημείο Q βρίσκεται εκτός του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, C)$ εάν και μόνο εάν η ορίζουσα*

$$\mathsf{Incircle}(A, B, C, Q) = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix}$$

είναι γνησίως θετική. Αντίστοιχα, το Q βρίσκεται εντός του $\mathcal{V}(A, B, C)$ εάν και μόνο εάν η παραπάνω ορίζουσα είναι γνησίως αρνητική. Τέλος, η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδέν εάν και μόνο εάν τα σημεία A, B, C, Q είναι ομοκυκλικά.

Λήμμα 3.4. *Η κυκλική εναλλαγή των 3 πρώτων ορισμάτων του Incircle δεν επηρεάζει το πρόσημο του και άρα το τι αποφαίνεται.*

Μελέτη πρόσημου τριωνύμου σε ρίζα άλλου τριωνύμου

Στα παρακάτω κεφάλαια, θα μας απασχολήσει η ανάγκη εξεύρεσης του πρόσημου ενός πολυωνύμου Q στα σημεία που μηδενίζεται ένα πολυώνυμο P. Αν και τα πολυώνυμα που εμφανίζονται είναι το πολύ δευτέρου βαθμού και οι ρίζες του P, μπορούν να υπολογιστούν και να αναπαρασταθούν αλγεβρικά, η εύρεση μέσω αντικατάστασης τις τελικής τιμής «κοστίζει ακριβά», εφόσον εμείς ενδιαφερόμαστε μόνο για το πρόσημο και όχι την ακριβή τιμή. Για το λόγο αυτό, παραθέτουμε 2 πολύ χρήσιμα εργαλεία τα οποία έχουν αναπτυχθεί ιδιαίτερα στην εργασία [KE03].

3.2 Η Μέθοδος της Απαλοίφουσας

Η απαλοίφουσα (Resultant) δύο πολυωνύμων είναι ένα αλγεβρικό εργαλείο το οποίο μας επιτρέπει να ελέγχουμε εάν δύο πολυώνυμα έχουν κοινή ρίζα. Με μια έξυπνη χρήση του εργαλείου αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές ενός πολυωνύμου στις ρίζες ενός άλλου πολυωνύμου. Πριν δούμε πώς υπολογίζουμε την απαλοίφουσα, πρέπει να κάνουμε αναφορά στον πίνακα Sylvester.

Ορισμός Ο πίνακας Sylvester των πολυωνύμων $P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_j x^j$, είναι ο $(m+n) \times (m+n)$ τετραγωνικός πίνακας ο οποίος:

- η πρώτη του γραμμή είναι η $\begin{pmatrix} p_m \ p_{m-1} \ \cdots p_1 \ p_0 \ 0 \ \cdots 0 \end{pmatrix}$
- η επόμενη γραμμή είναι η πρώτη γραμμή, με όλα τα στοιχεία μετατοπισμένα κατά μια θέση δεξιά και αρχικό στοιχείο 0,
- οι επόμενες $n-2$ γραμμές προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο, πάντοτε προσθέτοντας 0 στο αρχικό στοιχείο,
- η $(n+1)$ γραμμή είναι η $\begin{pmatrix} q_n \ q_{n-1} \ \cdots q_1 \ q_0 \ 0 \ \cdots 0 \end{pmatrix}$
- οι υπόλοιπες γραμμές προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως.

Για παράδειγμα ο τελικός πίνακας για $n = 2, \ m = 2$ είναι ο εξής

$$Sylvester(P, Q) = \begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & q_2 & q_1 & q_0 \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Έχοντας ορίσει τον πίνακα Sylvester, ορίζουμε την απαλοίφουσα των πολυωνύμων P, Q ως την ορίζουσά του, δηλαδή

$$Resultant(P, Q) = det(Sylvester(P, Q)) \tag{3.2}$$

Η απαλοίφουσα είναι ένα πολύ ενδιαφέρον εργαλείο με πληθώρα αλγεβρικών ιδιοτήτων, με πιο χρήσιμη για εμάς την εξής.

Λήμμα 3.5. *Η απαλοίφουσα των πολυωνύμων P, Q είναι μηδέν εάν και μόνο εάν τα πολυώνυμα έχουν τουλάχιστον μια κοινή ρίζα.*

Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος προκύπτει από το γεγονός ότι εάν τα πολυώνυμα P, Q έχουν μεγιστοβάθμιους συντελεστές p_m, q_n αντίστοιχα, τότε

$$Resultant(P, Q) = p_m^m \cdot q_n^n \prod_{(r,s):P(r)=0,Q(s)=0} (r - s), \tag{3.3}$$

όπου $m = deg(P)$ και $n = deg(Q)$.

Θα αξιοποιήσουμε αυτήν την σημαντική ιδιότητα, κάνοντας την εξής έξυπνη παρατήρηση.

Λήμμα 3.6. *Τα x-πολυώνυμα $P(x), Q(x)-y$ έχουν κοινή ρίζα εάν και μόνο εάν $y = Q(r)$ για κάποια ρίζα r του $P(x)$.*

Απόδειξη. Έστω r_i οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$, $i \in I$. Για να έχουν τα $P(x)$ και $\tilde{Q}(x) = Q(x) - y$ κοινή ρίζα θα πρέπει $\tilde{Q}(r_i) = 0$, δηλαδή $y = Q(r_i)$ για κάποιο $i \in I$. Αντίστροφα, εάν $y = Q(r_i)$ για κάποιο $i \in I$, τότε η r_i είναι κοινή ρίζα των $P(x)$ και $\tilde{Q}(x)$, εφόσον $\tilde{Q}(r_i) = Q(r_i) - y = 0$. □

Αυτό συνεπάγεται ότι για $\tilde{Q}(x) = Q(x) - y$, $Resultant(P, \tilde{Q}) = 0$ εάν και μόνο εάν $y = P(r)$ με $P(r) = 0$. Επιπλέον, η απαλοίφουσα των πολυωνύμων P, Q' είναι μια αλγεβρική έκφραση που περιλαμβάνει μόνο την μεταβλητή y και όχι την μεταβλητή x, δηλαδή είναι πολυώνυμο του y. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$R(P, Q)(y) = Resultant(P(x), Q(x) - y) \tag{3.4}$$

αποτελούν τις αποτιμήσεις του $Q(x)$, στις ρίζες του $P(x)$.

Στις περιπτώσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε αργότερα όπου και τα δύο πολυώνυμα μας είναι δευτέρου βαθμού, δηλαδή $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$ και $Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$, τότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
R(P,Q)(y) &= \begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_2 & q_1 & q_0 - y & 0 \\ 0 & q_2 & q_1 & q_0 - y \end{vmatrix} \\
&= R_2 y^2 + R_1 y + R_0
\end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς y, με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $R_2 > 0$, R_1 παράσταση αλγεβρικού βαθμού 3 και σταθερό όρο R_0 αλγεβρικού βαθμού 4. Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}
R_2 &= p_2^2 \\
R_1 &= 2p_2 J + p_1 K \\
R_0 &= J^2 - KL
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
J &= q_2 p_0 - q_0 p_2 \\
K &= q_1 p_2 - q_2 p_1 \\
L &= q_0 p_1 - q_1 p_0
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι τα πολυώνυμα P που μελετάμε έχουν δύο διακριτές πραγματικές ρίζες r_1, r_2, το πολυώνυμο $R(P,Q)(y)$ έχει και αυτό δυο (όχι απαραίτητα διακριτές) πραγματικές ρίζες ρίζες τις $y_1 = Q(r_1)$ και $y_2 = Q(r_2)$.

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι ενδιαφερόμαστε μονάχα για το πρόσημο της παράστασης $Q(r)$ και όχι για την τιμή την ίδια. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο δεν κάνουμε την αντικατάσταση $r = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2 p_0}}{2p_2}$ απευθείας στο $Q(x)$, αφού με τον τρόπο αυτό θα πάρουμε «άχρηστη πληροφορία» με επιπλέον αλγεβρικό κόστος. Με την προσέγγιση όμως της απαλοίφουσας, μπορούμε να αποφανθούμε για τα πρόσημα των y_1, y_2, με βάση τους τύπους *Vieta*, δηλαδή ελέγχοντας το πρόσημο των παραστάσεων R_1 και R_0!

Ένα σημαντικό ζήτημα που προκύπτει στην μέθοδο αυτή είναι ότι δεν μπορούμε, με την πρώτη ματιά, να αποφανθούμε εάν $y_1 \Diamond y_2$, όπου $\Diamond \in \{\leq, \geq\}$, δεδομένου ότι $r_1 \leq r_2$. Για να προσπεράσουμε αυτό το εμπόδιο, αντικαθιστούμε την ακριβή τιμή των r_i στην παράσταση $y_2 - y_1 = Q(r_2) - Q(r_1)$, οπότε και έχουμε

$$y_2 - y_1 = \frac{\sqrt{p_1^2 - 4p_2 p_0} \cdot (q_1 p_2 - q_2 p_1)}{p_2^2} \tag{3.5}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι $sign(y_2 - y_1) = sign(q_1p_2 - q_2p_1)$, οπότε ελέγχοντας το πρόσημο της παράστασης στο δεξιό μέλος, γνωρίζουμε πιο από τα y_i είναι η μεγαλύτερη και πιο η μικρότερη ρίζα του $R(P,Q)(y)$.

Θεώρημα 3.7. *Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, όπου $m, m+1, m+2$ ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων p_2, p_1, p_0 αντίστοιχα, και το πολυώνυμο $Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$, όπου $n, n+1, n+2$ ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων q_2, q_1, q_0. Ο υπολογισμός του προσήμου $sign(Q(x_i))$, όπου το x_i είναι ρίζα του $P(x)$, με χρήση της μεθόδου της Απαλοίφουσας, ανάγεται στον υπολογισμό του προσήμου ποσοτήτων αλγεβρικού βαθμού το πολύ $2(m+n+2)$.*

Απόδειξη. Για τα συγκεκριμένα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, προκύπτει ότι οι ποσότητες J, K, L έχουν αλγεβρικό βαθμό $m+n+2, m+n+1, m+n+3$ αντίστοιχα. Συνεπώς, οι ποσότητες R_1, R_0 είναι παραστάσεις αλγεβρικού βαθμού $2m+n+2, 2m+2n+4$ αντίστοιχα, ενώ η παράσταση $q_1p_2 - q_2p_1$ έχει βαθμό $m+n+1$ και άρα για να βρούμε το πρόσημο $sign(Q(x_i))$, η παράσταση με το μεγαλύτερο αλγεβρικό βαθμό είναι η R_0, με αλγεβρικό βαθμό $2(m+n+2)$. □

Επίσης χρήσιμη περίπτωση που πρέπει να μελετήσουμε είναι η περίπτωση όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού και το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι τετάρτου βαθμού. Συμβολίζουμε $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, $Q(x) = q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$, και θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι οι αλγεβρικοί βαθμοί των ποσοτήτων p_2, p_1, p_0 και q_4, q_3, q_2, q_1, q_0 είναι $m, m+1, m+2$ και $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ αντίστοιχα. Υπολογίζουμε τώρα την απαλοίφουσα

$$R(P,Q)(y) = \begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_4 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 - y & 0 \\ 0 & q_4 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 - y \end{vmatrix}$$

η οποία είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς την μεταβλητή y και συγκεκριμένα

$$R(P,Q)(y) = R_2y^2 + R_1y + R_0$$

όπου

$$
\begin{aligned}
R_2 &= p_2^4 \\
R_1 &= -\begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 \\ q_4 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_0 \\ 0 & q_4 & q_3 & q_2 & q_0 \end{vmatrix} \\
R_0 &= \begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_4 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & q_4 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Εφόσον $R_2 > 0$ γνωρίζουμε ότι, εάν $y_1 = Q(x_1)$ και $y_2 = Q(x_2)$ όπου $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$, ισχύει $y_1 + y_2 = -\frac{R_1}{R_2}$ και $y_1 y_2 = \frac{R_0}{R_2}$, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta. Από αυτό συνεπάγεται ότι $sign(y_1)sign(y_2) = sign(R_0)$ και $sign(y_1 + y_2) = -sign(R_1)$, οπότε γνωρίζοντας τα πρόσημα των ποσοτήτων R_1, R_0 μπορούμε να συμπεράνουμε τα πρόσημα των y_1, y_2 με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε ποια είναι η σχέση των y_1, y_2.

Για να ελέγξουμε εάν $y_1 < y_2$ ή $y_1 > y_2$, παρατηρούμε ότι εάν αντικαταστήσουμε $x_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2}}{2p_0}$, $x_2 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2}}{2p_0}$ στην παράσταση

$$y_2 - y_1 = Q(x_2) - Q(x_1) = q_4x_2^4 + q_3x_2^3 + q_2x_2^2 + q_1x_2 + q_0 - (q_4x_1^4 + q_3x_1^3 + q_2x_1^2 + q_1x_1 + q_0)$$

αυτή παίρνει την μορφή

$$y_2 - y_1 = \frac{\sqrt{p_1^2 - 4p_0p_2}}{p_2^4}(q_3p_2p_1^2 - q_2p_2^2p_1 - q_4p_1^3 + 2q_4p_1p_0p_2 - q_3p_2^2p_0 + q_1p_2^3)$$

δηλαδή

$$sign(y_2 - y_1) = sign(q_3p_2p_1^2 - q_2p_2^2p_1 - q_4p_1^3 + 2q_4p_1p_0p_2 - q_3p_2^2p_0 + q_1p_2^3)$$

Ελέγχοντας λοιπόν το πρόσημο της ποσότητας στο δεξί μέλος, μπορούμε να αποφανθούμε εάν $y_2 > y_1$ ή $y_1 < y_2$, δηλαδή υπολογίσαμε την σχέση των y_1, y_2 που θέλαμε.

Θεώρημα 3.8. *Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, όπου $m, m+1, m+2$ ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων p_2, p_1, p_0 αντίστοιχα, και το πολυώνυμο $Q(x) = q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$, όπου $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ ο αλγεβρικός βαθμός των* *ποσοτήτων q_4, q_3, q_2, q_1, q_0. Ο υπολογισμός του προσήμου $sign(Q(x_i))$, όπου το x_i είναι ρίζα του $P(x)$, με χρήση της μεθόδου της Απαλοίφουσας, ανάγεται στον υπολογισμό του προσήμου ποσοτήτων αλγεβρικού βαθμού το πολύ $4m + 2n + 8$.*

Απόδειξη. Για τα συγκεκριμένα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, προκύπτει ότι οι ποσότητες R_1, R_0 έχουν αλγεβρικό βαθμό $4m + n + 4, 4m + 2n + 8$ αντίστοιχα, ενώ η παράσταση $q_3p_2p_1^2 - q_2p_2^2p_1 - q_4p_1^3 + 2q_4p_1p_0p_2 - q_3p_2^2p_0 + q_1p_2^3$ έχει βαθμό $3m + n + 3$ και άρα για να βρούμε το πρόσημο $sign(Q(x_i))$, η παράσταση με το μεγαλύτερο αλγεβρικό βαθμό είναι η R_0, με αλγεβρικό βαθμό $4m + 2n + 8$. □

Τέλος, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε την περίπτωση όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού και το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι πρώτου βαθμού. Συμβολίζουμε $P(x) = p_2x^2+p_1x+p_0, Q(x) = q_1x+q_0$, και θα θεωρήσουμε ότι οι αλγεβρικοί βαθμοί των ποσοτήτων p_2, p_1, p_0 και q_1, q_0 είναι $m, m + 1, m + 2$ και $n, n + 1$ αντίστοιχα. Εάν υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες $x_1 \leq x_2$, τότε ένας απλός και ευθύς τρόπος υπολογισμού του προσήμου της ποσότητας $Q(x_i)$ είναι η αντικατάσταση στο γραμμικό πολυώνυμο $q_1x + q_0$ της ακριβής τιμής του x_i η οποία είναι

$$x_i = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2p_0}}{2p_2}.$$

Τελικά, η ποσότητα $Q(x_i)$ είναι ίση με την

$$Q(x_i) = \frac{1}{2p_2}\left(2p_2q_0 - p_1q_1 \pm q_1\sqrt{\Delta}\right),$$

όπου $\Delta = p_1^2 - 4p_2p_0$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $sign(Q(x_i)) = sign(p_2)sign(2p_2q_0 - p_1q_1 \pm q_1\sqrt{\Delta})$, ενώ το πρόσημο της τελευταίας ποσότητας είναι ισοδύναμο με αυτό της παράστασης $(2p_2q_0 - p_1q_1)^2 - q_1^2\Delta$. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το πρόσημο της τελευταίας παράστασης είναι αυτός που κυριαρχεί και άρα με τον τρόπο αυτό χρειαζόμαστε $2m + 2n + 2$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του προσήμου του $Q(x_i) = q_1x_i+q_0$ προκύπτει εάν παρατηρήσουμε ότι η ανισότητα $Q(x_i) > 0$ (αντίστοιχα $Q(x_i) \leq 0$) μπορεί να γραφεί ως $x_i < -\frac{q_0}{q_1}$ (αντίστοιχα $x_i \geq -\frac{q_0}{q_1}$). Συνεπώς ανάγουμε τον υπολογισμό του προσήμου του $Q(x_i)$ στον έλεγχο της σχετικής θέσης της ποσότητας $\delta = -\frac{q_0}{q_1}$ ως προς την ρίζα x_i. Ο έλεγχος αυτός είναι εφικτός μέσω του υπολογισμού των προσήμων των ποσοτήτων $P(\delta)$ και $P'(\delta)$, δεδομένου του προσήμου $sign(p_2) \neq 0$. Πράγματι εάν $sign(P(\delta)) = -sign(p_2)$ τότε αυτόματα προκύπτει ότι $x_1 < \delta < x_2$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την σχετική θέση του $x_i \in \{x_1, x_2\}$ και του δ. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή ισχύει ότι $sign(P(\delta)) = sign(p_2)$ (αντίστοιχα $sign(P(\delta)) = 0$), χρειάζεται επιπλέον να ελέγξουμε την ποσότητα $P'(\delta)$· εάν $sign(P'(\delta)) = -sign(p_2)$, τότε $\delta < x_1$ (αντίστοιχα $\delta = x_1$) και συνεπώς $\delta < x_2$ (αντίστοιχα $\delta < x_2$). Αντίστοιχα, εάν $sign(P'(\delta)) = sign(p_2)$, τότε $\delta > x_2$

(αντίστοιχα $\delta = x_2$) και συνεπώς $\delta > x_1$ (αντίστοιχα $\delta > x_1$).

Τα πρόσημα των ποσοτήτων $P(\delta)$ και $P'(\delta)$ υπολογίζονται με βάση τις σχέσεις

$$\begin{aligned} sign(P(\delta)) &= sign\left(\frac{1}{q_1^2}\right) sign(p_2 q_0^2 - p_1 q_0 q_1 + p_0 q_1^2) \\ &= sign(p_2 q_0^2 - p_1 q_0 q_1 + p_0 q_1^2), \\ sign(P'(\delta)) &= sign\left(\frac{1}{q_0}\right) sign(-2p_2 q_0 + p_1 q_1). \end{aligned}$$

Τελικά για το πρόσημο της ποσότητας $P(\delta)$ απαιτείται αλγεβρικός βαθμός $m + 2n + 2$, ενώ στην περίπτωση που χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της ποσότητας $P'(\delta)$ απαιτείται αλγεβρικός βαθμός $m+n+1$. Παρατηρούμε ότι ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται, $m + 2n + 2$, είναι μικρότερος (ή ίσος εάν $m = 0$) από τον αλγεβρικό βαθμό που απαιτείται εάν προσπαθήσουμε να κάνουμε άμεσο υπολογισμό της ποσότητας $Q(x_i)$ όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο (αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται στην περίπτωση αυτή είναι $2m + 2n + 2$). Συνοψίζουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.9. *Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, όπου $m, m+1, m+2$ ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων p_2, p_1, p_0 αντίστοιχα, και το πολυώνυμο $Q(x) = q_1x + q_0$, όπου $n, n+1$ ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων q_1, q_0. Ο υπολογισμός του προσήμου $sign(Q(x_i))$, όπου το x_i είναι ρίζα του $P(x)$, απαιτεί υπολογισμό του προσήμου ποσοτήτων αλγεβρικού βαθμού το πολύ $m + 2n + 2$.*

3.3 Ακολουθίες Sturm

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του πρόσημου ενός πολυωνύμου $Q(x)$ σε κάποια ρίζα r_i ενός πολυωνύμου $P(x)$, είναι με χρήση των ακολουθιών Sturm.

Ορισμός Ακολουθία Sturm είναι μια πεπερασμένη ακολουθία πολυωνύμων $S_1, S_2, \cdots S_m$, τα οποία έχουν τις εξής ιδιότητες:

- το $S_0 = S$ είναι πολυώνυμο ελεύθερο τετραγώνων (square-free)
- εάν $S(\xi) = 0$ τότε $sign(S_1(\xi)) = sign(S'(\xi))$
- εάν $S_i(\xi) = 0$ για $0 < i < m$, τότε $sign(S_{i-1}(\xi)) = -sign(S_{i+1}(\xi))$
- το S_m έχει σταθερό πρόσημο.

Ο πιο εύκολος τρόπος να αποκτήσουμε την ακολουθία Sturm ενός πολυωνύμου S, είναι να πάρουμε τα διαδοχικά αποτελέσματα τις διαίρεσης του $S_0 = S$, με την παράγωγό του

$S_1 = S'$, με αλλαγμένα πρόσημα, δηλαδή

$$\begin{aligned} S_2 &= -rem(S_0, S_1) = S_1(x)r_0(x) - S_0(x) \\ S_3 &= -rem(S_1, S_2) = S_2(x)r_1(x) - S_1(x) \\ &\vdots \\ 0 &= -rem(S_{m-1}, S_m) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μια συγκεκριμένης τέτοια ακολουθία S, και δεδομένου πραγματικού αριθμού ξ, ορίζουμε ως $\sigma(\xi)$ το πλήθος εναλλαγών προσήμων στην ακολουθία $S_0(\xi), S_1(\xi), \cdots, S_m(\xi)$, αγνοώντας τυχόν μηδενικές τιμές. Παραθέτουμε τώρα ένα θεώρημα το οποίο καθιστά τις ακολουθίες αυτές τόσο σημαντικές.

Θεώρημα 3.10. *Έστω S η ακολουθία Sturm ενός πολυωνύμου s ελεύθερου τετραγώνων, και πραγματικοί αριθμοί $a < b$. Τότε το πλήθος των διακριτών ριζών του πολυωνύμου $s(x)$, στο ημι-ανοιχτό διάστημα $(a, b]$, είναι $\sigma(a) - \sigma(b)$.*

Στην συνέχεια, και βασιζόμενοι στον αρχικό ορισμό, παραθέτουμε τον «κατασκευαστικό» ορισμό που αφοράει δύο πολυώνυμα.

Ορισμός Δεδομένου δύο πολυωνύμων $S_0, S_1 \in \mathbb{R}[x]$, όπου το S_0 είναι ελεύθερο τετραγώνων, τότε ακολουθία Sturm των S_0, S_1 είναι οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία (ψευδο-υπολοίπων) S τέτοια ώστε $aS_{i-1} = K_iS_i + bS_{i+1}$, $i = 1, \cdots, m-1$, για κάποιο $K_i \in \mathbb{R}[x], a, b \in \mathbb{R}$, και $ab < 0$.

Θεώρημα 3.11. *Για σχετικά πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, όπου το P είναι ελεύθερο τετραγώνων, έστω S μια ακολουθία Sturm των πολυωνύμων $P, P'Q$. Τότε για κάθε $a < b$ τα οποία δεν είναι ρίζες του Q ισχύει ότι*

$$\sigma(a) - \sigma(b) = \sum_{P(r)=0, a<r<b} sign(Q(r))$$

Μια τέτοια ακολουθία S μπορεί να είναι η $(P, P'Q, -P, \cdots)$. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση όπου τα πολυώνυμα P, Q είναι δευτέρου βαθμού, και υποθέτοντας ότι έχουν διακριτές, μη κοινές ρίζες, μια έγκυρη ακολουθία Sturm είναι η εξής:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= P(x) \\ S_1(x) &= P'(x)Q(x) \\ S_2(x) &= -P(x) \\ S_3(x) &= -p_2\left[(p_2M + q_2\Delta_p)x + (p_2L - p_0K)\right] \\ S_4(x) &= -p_2\Delta_p\left(p_2M + q_2\Delta_p\right)^2\left(J^2 - KL\right) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} M &= 2q_2p_0 + 2p_2q_0 - q_1p_1 \\ \Delta_p &= p_1^2 - 4p_0p_2 \end{aligned}$$

Έχοντας την παραπάνω ακολουθία, και βασιζόμενοι στο τελευταίο θεώρημα, μπορούμε να υπολογίσουμε το $sign(Q(r_i))$, επιλέγοντας κατάλληλα a, b, τέτοια ώστε μόνο η ρίζα r_i του $P(x)$ να βρίσκεται σε αυτό το διάστημα. Επειδή όμως το $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού, γνωρίζουμε ότι, εάν $r_1 < r_2$, τότε

$$-\infty < r_1 < -\frac{p_1}{2p_2} < r_2 < \infty$$

δηλαδή, για $a = -\infty, b = -\frac{p_1}{2p_2}$, θα πάρουμε το πρόσημο του $Q(r_1)$, και για $a = -\frac{p_1}{2p_2}, b = \infty$ το πρόσημο του $Q(r_2)$.

Αναφορικά με τα πρόσημα τις ακολουθίας S, για τις τιμές $a = -\frac{p_1}{2p_2}, \infty, -\infty$, παραθέτουμε τους παρακάτω πίνακες προσήμων.

$\text{sign}(S_i(a))$		
i	υποθέτοντας $\Delta_p, \Delta_q > 0$	υποθέτοντας $\Delta_p, \Delta_q, p_2, q_2 > 0$
0	$-\text{sign}(p_2)$	$-$
1	0	0
2	$\text{sign}(p_2)$	$+$
3	$-\text{sign}(K)$	$-\text{sign}(K)$
4	$\text{sign}(p_2)\ \text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p)^2)\ \text{sign}(KL - J^2)$	$\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p)^2)\ \text{sign}(KL - J^2)$

$\text{sign}(S_i(\infty))$		
i	υποθέτοντας $\Delta_p, \Delta_q > 0$	υποθέτοντας $\Delta_p, \Delta_q, p_2, q_2 > 0$
0	$\text{sign}(p_2)$	$+$
1	$\text{sign}(p_2)\text{sign}(q_2)$	$+$
2	$-\text{sign}(p_2)$	$-$
3	$-\text{sign}(p_2)\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p))$	$-\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p))$
4	$\text{sign}(p_2)\ \text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p)^2)\ \text{sign}(KL - J^2)$	$\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p)^2)\ \text{sign}(KL - J^2)$

$\text{sign}(S_i(-\infty))$		
i	υποθέτοντας $\Delta_p, \Delta_q > 0$	υποθέτοντας $\Delta_p, \Delta_q, p_2, q_2 > 0$
0	$\text{sign}(p_2)$	$+$
1	$\text{sign}(p_2)\text{sign}(q_2)$	$+$
2	$-\text{sign}(p_2)$	$-$
3	$\text{sign}(p_2)\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p))$	$\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p))$
4	$\text{sign}(p_2)\ \text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p)^2)\ \text{sign}(KL - J^2)$	$\text{sign}((p_2M + q_2\Delta_p)^2)\ \text{sign}(KL - J^2)$

Θεώρημα 3.12. *Θεωρούμε το πολυώνυμο* $P(x) = p_2x^2+p_1x+p_0$*, όπου* $m, m+1, m+2$ *ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων* p_2, p_1, p_0 *αντίστοιχα, και το πολυώνυμο* $Q(x) = q_2x^2 + q_1x+q_0$*, όπου* $n, n+1, n+2$ *ο αλγεβρικός βαθμός των ποσοτήτων* q_2, q_1, q_0*. Ο υπολογισμός του προσήμου* $sign(Q(x_i))$*, όπου το* x_i *είναι ρίζα του* $P(x)$*, με χρήση των ακολουθιών Sturm, ανάγεται στον υπολογισμό του προσήμου ποσοτήτων αλγεβρικού βαθμού το πολύ* $2(m+n+2)$*.*

Απόδειξη. Για τα συγκεκριμένα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, προκύπτει ότι οι ποσότητες J, K, L έχουν αλγεβρικό βαθμό $m+n+2, m+n+1, m+n+3$ αντίστοιχα. Συνεπώς, η παράσταση με το μεγαλύτερο αλγεβρικό βαθμό της οποίας το πρόσημο πρέπει να υπολογιστεί, όπως προκύπτει και από τους παραπάνω πίνακες, είναι η $KL - J^2$ με αλγεβρικό βαθμό $2(m+n+2)$. □

Κεφάλαιο 4

Αποστάσεις

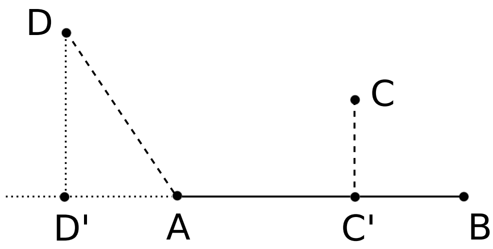
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τον τρόπο υπολογισμού αποστάσεων μεταξύ δύο αντικειμένων και τον τρόπο με το οποίο αυτό επηρρεάζει την μορφή της διχοτόμου ευθείας. Επιπλέον αναπτύσσουμε το κατηγόρημα SoOB (από τα αρχικά του πλήρους ονόματός του: SideofOrientedBisector) το οποίο μας επιτρέπει να ελέγξουμε σε ποια πλευρά της διχοτόμου ευθείας βρίσκεται ένα σημειακό αντικείμενο.

Συγκεκριμένα στην πρώτη υποενότητα μελετάμε τον τρόπο υπολογισμού της απόστασης μεταξύ αντικειμένων κάθε ένα από τα οποία είναι είτε σημείο είτε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο ή υπό γωνία $45°$ με κάποιον άξονα. Παραθέτουμε επίσης τους μετασχηματισμούς $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ του επιπέδου, οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτη την απόσταση μεταξύ δύο αντικειμένων και τους οποίους χρησιμοποιούμε κατ΄ εξακολούθηση στην επόμενη υποενότητα.

Στην δεύτερη υποενότητα αναφερόμαστε στο κατηγόρημα SoOB και στον τρόπο υπολογισμού του. Το κατηγόρημα αυτό δέχεται ως ορίσματα δύο αντικείμενα και ένα σημείο και αποφαίνεται εάν το σημείο βρίσκεται πλησιέστερα στο πρώτο ή στο δεύτερο αντικείμενο. Με άλλα λόγια, το κατηγόρημα αποφαίνεται σε ποια πλευρά της διχοτόμου ευθείας των δύο αντικειμένων βρίσκεται το σημείο, κάτι το οποίο δικαιολογεί και τα αρχικά του κατηγορήματος. Το predicate αυτό είναι ένα από τα βασικά κατηγορήματα τα οποία χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος υπολογισμού του Voronoi διαγράμματος. Η χρησιμότητά του έγκειται στην εύρεση του πλησιέστερου γείτονα (closest neighbor) ενός νέου σημείου ή τμήματος σε ένα διάγραμμα Voronoi, δηλαδή το κέντρο Voronoi το οποίο είναι πιο κοντά στο νέο αντικείμενο από οποιοδήποτε άλλο κέντρο.

4.1 Έννοια της Απόστασης και χρήσιμοι μετασχηματισμοί

Έχοντας υπόψιν τις υπολογιστικές προεκτάσεις τις εργασίας αυτής και προκειμένου να είναι εύκολος ο υπολογισμός των αλγεβρικών βαθμών των παραστάσεων που εμφανίζονται,



Σχήμα 4.1: Η απόσταση του σημείου C από το τμήμα AB ορίζεται ως σημείου από ευθεία, ενώ η απόσταση του D από το AB ορίζεται ως απόσταση σημείου από σημείο.

δεν θα κάνουμε χρήση της Ευκλείδειας απόστασης των αντικειμένων, λόγω της ύπαρξης μιας ή περισσοτέρων τετραγωνικών ριζών.

Για να έχουμε λοιπόν πιο απλούς υπολογισμούς, θα χρησιμοποιήσουμε (με ελάχιστες εξαιρέσεις) το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης των σημείων $A = (x_A, y_A)$ και $B = (x_B, y_B)$, δηλαδή

$$d^2(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2. \tag{4.1}$$

Για τον ορισμό της απόστασης του σημείου C από το ευθύγραμμο τμήμα AB, αρχικά θεωρούμε την προβολή C' του C στην ευθεία που ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα. Η απόσταση $d^2(C, AB)$ ορίζεται διαφορετικά, ανάλογα με το εάν το C' ανήκει ή όχι στο ευθύγραμμο τμήμα AB (βλ. Σχήμα 4.1):

$$d^2(C, AB) = \begin{cases} d^2(C, C') & \text{εάν } C' \in AB, \\ \min\left\{d^2(C, A), d^2(C, B)\right\} & \text{εάν } C' \notin AB. \end{cases} \tag{4.2}$$

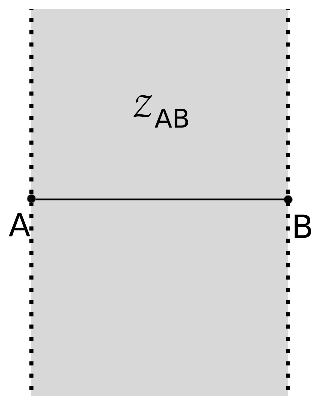
Προκύπτει, από τον παραπάνω ορισμό, η ανάγκη να ορίσουμε την έννοια της *ζώνης* ενός ευθύγραμμου τμήματος AB.

Ορισμός Ζώνη ενός ευθύγραμμου τμήματος AB, η οποία θα συμβολίζεται με $\mathcal{Z}_{AB}$, είναι η άπειρη λωρίδα που καθορίζεται από τις κάθετες ευθείες στο AB στα σημεία A και B αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 4.2).

Σύμφωνα με τον ορισμό της ζώνης του AB, $C \in \mathcal{Z}_{AB}$ εάν και μόνο εάν $C' \in AB$, οπότε έχουμε έχουμε έναν ισοδύναμο και πιο πρακτικό ορισμό της απόστασης σημείου και ευθύγραμμου τμήματος

$$d^2(C, AB) = \begin{cases} d^2(C, C') & \text{εάν } C \in \mathcal{Z}_{AB}, \\ \min\left\{d^2(C, A), d^2(C, B)\right\} & \text{εάν } C \notin \mathcal{Z}_{AB}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Στην συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες κάποιων μετασχηματισμών οι οποίοι θα μας φανούν χρήσιμοι στην επόμενη ενότητα.



Σχήμα 4.2: Ζώνη του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Έστω $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στην ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = x$. Η εικόνα του σημείου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μέσω της απεικόνισης είναι το σημείο $(y, x) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον η εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathcal{R}(AB)$ με άκρα τα σημεία $\mathcal{R}(A)$ και $\mathcal{R}(B)$.

Σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού αυτού είναι ότι η εικόνα ενός τμήματος παράλληλου στον άξονα $x'x$ είναι ένα τμήμα παράλληλο στον άξονα $y'y$ και αντίστροφα. Ομοίως η εικόνα ενός τμήματος που σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$ είναι ένα τμήμα που σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $y'y$.

Επιπλέον, ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ αντικειμένων της μορφής αυτής (σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα), ως προς την απόσταση που χρησιμοποιούμε.

Πράγματι, στην περίπτωση απόστασης σημείου C από ευθύγραμμο τμήμα AB, το C ανήκει στην ζώνη $\mathcal{Z}_{AB}$ εάν και μόνο εάν $\mathcal{R}(C)$ ανήκει στην ζώνη $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}(AB)}$. Εάν $C \in \mathcal{Z}_{AB}$ τότε προκύπτει ότι

$$d^2(C, AB) = d^2(C, C') = d^2(\mathcal{R}(C), \mathcal{R}(C'))) = d^2(\mathcal{R}(C), \mathcal{R}(C)') = d^2(\mathcal{R}(C), \mathcal{R}(AB))$$

όπου $\mathcal{R}(C)'$ είναι η προβολή του σημείου $\mathcal{R}(C)$ στο τμήμα $\mathcal{R}(AB)$. Εάν $C \notin \mathcal{Z}_{AB}$ τότε

$$\begin{aligned} d^2(C, AB) &= \min\left\{d^2(C, A), d^2(C, B)\right\} \\ &= \min\left\{d^2(\mathcal{R}(C), \mathcal{R}(A)), d^2(\mathcal{R}(C), \mathcal{R}(B))\right\} \\ &= d^2(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(AB)) \end{aligned}$$

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που αντιστοιχεί στην ανάκλαση ως προς τον άξονα $y'y$. Η εικόνα του σημείου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μέσω της απεικόνισης είναι το σημείο $(-x, y) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον η εικόνα ενός ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathcal{S}(AB)$ με άκρα τα σημεία $\mathcal{S}(A)$ και $\mathcal{S}(B)$.

Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού $\mathcal{S}$ προκύπτει αρχικά από το γεγονός ότι διατηρεί αναλλοίωτη την απόσταση δύο αντικειμένων S_1 και S_2 (σημείων, ευθειών ή ευθυγράμμων τμημάτων), δηλαδή $d(S_1, S_2) = d(\mathcal{S}(S_1), \mathcal{S}(S_2))$. Επιπλέον, εάν το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι παράλληλο σε κάποιον άξονα τότε το τμήμα $\mathcal{S}(AB)$ βρίσκεται στον ίδιο φορέα με το AB, ενώ εάν το τμήμα AB σχηματίζει γωνία $45°$ με κάποιον άξονα, π.χ. τον πραγματικό, τότε το $\mathcal{S}(AB)$ σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άλλο άξονα, π.χ. το φανταστικό.

Τέλος, θεωρούμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο οποίος αντιστοιχεί στην ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = y_Q$. Η εικόνα του σημείου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μέσω της απεικόνισης είναι το σημείο $(x, 2y_Q - y) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον η εικόνα ενός ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το τμήμα $\mathcal{I}(AB)$ με άκρα τα σημεία $\mathcal{I}(A)$ και $\mathcal{I}(B)$.

Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού αυτού βασίζεται στο γεγονός ότι διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις μεταξύ δύο αντικειμένων και επιπλέον εάν το τμήμα AB είναι παράλληλο στην ευθεία $y = -x$, τότε το $\mathcal{I}(AB)$ είναι παράλληλο με την ευθεία $y = x$ (και αντίστροφα). Τέλος, εάν το τμήμα AB είναι παράλληλο σε κάποιον άξονα, τότε το τμήμα $\mathcal{I}(AB)$ είναι παράλληλο στον ίδιο άξονα, ενώ επίσης παρατηρούμε ότι το σημείο Q παραμένει αναλλοίωτο μέσω του μετασχηματισμού αυτού, δηλαδή $\mathcal{I}(Q) \equiv Q$.

4.2 Κατηγόρημα SideOfOrientedBisector

Στην ενότητα αυτή, μελετάμε το κατηγόρημα SideOfOrientedBisector. Το κατηγόρημα αυτό δέχεται ως όρισμα δύο αντικείμενα S_1, S_2 και ένα σημείο Q και επιστρέφει το αντικείμενο στο οποίο βρίσκεται πλησιέστερα το Q. Με άλλα λόγια, ελέγχει σε ποια μεριά της διχοτόμου $\mathrm{Bis}(S_1, S_2)$ βρίσκεται το σημείο Q. Υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με $\mathrm{Bis}(S_i, S_j)$ την διχοτόμο των αντικειμένων S_i και S_j, δηλαδή $\mathrm{Bis}(S_i, S_j) := \{p \in \mathbb{R}^2 | d^2(p, S_i) = d^2(p, S_j)\}$.

Ορισμός Για Q σημείο του επιπέδου και S_1, S_2 αντικείμενα του επιπέδου, θα λέμε ότι η βαθμωτή συνάρτηση $f(S_1, S_2, Q)$ είναι έγκυρη συνάρτηση SideOfOrientedBisector, εν συντομία SoOB, εάν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- $f(S_1, S_2, Q) < 0$ εάνν το σημείο Q είναι πιο κοντά στο αντικείμενο S_1,
- $f(S_1, S_2, Q) = 0$ εάνν το σημείο Q ισαπέχει των αντικειμένων S_1 και S_2,
- $f(S_1, S_2, Q) > 0$ εάνν το σημείο Q είναι πιο κοντά στο αντικείμενο S_2.

Θα συμβολίζουμε τότε $f = \mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό της, η συνάρτηση SoOB δεν είναι μοναδική, ενώ μια προφανής συνάρτηση SoOB είναι η

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = d^2(Q, S_1) - d^2(Q, S_2) \tag{4.4}$$

Λήμμα 4.1. *Έστω S_1, S_2 αντικείμενα του επιπέδου, σημείο Q και $f = \mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$. Τότε $-f = \mathsf{SoOB}(S_2, S_1, Q)$.*

Λήμμα 4.2. *Έστω S_1, S_2 αντικείμενα του επιπέδου, σημείο Q και $f = \mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$. Εάν $c > 0$, τότε $cf = \mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$.*

Η διχοτόμος των αντικειμένων S_1 και S_2 είναι ουσιαστικά το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από αυτά, δηλαδή

$$\mathrm{Bis}(S_1, S_2) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = 0\}.$$

Κάθε ένα από τα αντικείμενα S_1, S_2 μπορεί να έχει την μορφή που έχουν οι γεννήτορες Voronoi, δηλαδή μπορεί να είναι

- σημείο,
- ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον πραγματικό άξονα,
- ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον πραγματικό άξονα,
- ευθύγραμμο τμήμα σε γωνία 45^o με τον πραγματικό άξονα
- ευθύγραμμο τμήμα σε γωνία 135^o με τον πραγματικό άξονα.

Αν και οι δυνατοί συνδυασμοί για τα αντικείμενα δείχνουν να είναι 25, στην πραγματικότητα μόλις 8 χρήζουν μελέτης, καθώς όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις ανάγονται σε αυτές, με χρήση των Λημμάτων 4.1 και 4.2 και των μετασχηματισμών $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ και $\mathcal{I}$.

Στην ξεχωριστή μελέτη για κάθε μία από τις 8 αυτές περιπτώσεις που ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης, και την απόσταση σημείου από τμήμα, όπως αυτή ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις όμως, όπου όλες οι αντίστοιχες Ευκλείδειες αποστάσεις δεν εμπεριέχουν ριζικά, θα επιλέγουμε αυτές, καθώς δίνουν 'ισοδύναμο' αποτέλεσμα αλλά με το μισό αλγεβρικό βαθμό.

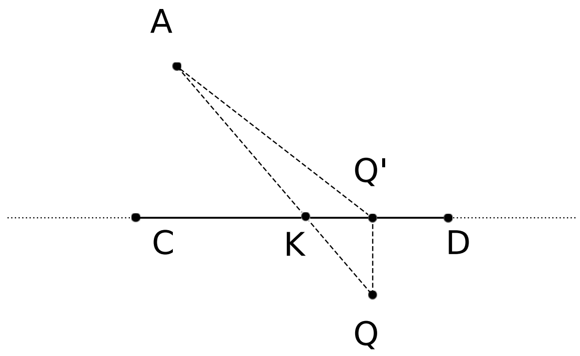
Στις παρακάτω υποενότητες, θα συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου T με (x_T, y_T), ενώ με ℓ_{AB} θα συμβολίζουμε την ευθεία η οποία είναι φορέας του τμήματος AB.

4.2.1 Απόσταση από Δύο Σημεία

Στην περίπτωση όπου τα αντικείμενα S_1 και S_2 είναι και τα δύο σημεία, π.χ. $S_1 \equiv A$ και $S_2 \equiv B$, η συνάρτηση SoOB υπολογίζεται εύκολα από την σχέση

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 - (x_Q - x_B)^2 - (y_Q - y_B)^2.$$

Στην περίπτωση αυτή, η διχοτόμος $\mathrm{Bis}(S_1, S_2)$ είναι ουσιαστικά η μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία S_1 και S_2. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης SoOB στην περίπτωση αυτή είναι 2.



Σχήμα 4.3: Στην περίπτωση όπου $Q \in \mathcal{Z}_{CD}$ και τα σημεία Q και A βρίσκονται εκατέρωθεν της ℓ_{CD}, έχουμε αυτόματα ότι $\mathsf{SoOB}(A, CD, Q) > 0$.

4.2.2 Απόσταση από Σημείο και Ευθύγραμμο Τμήμα Παράλληλο στους Άξονες

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το αντικείμενο S_1 είναι σημείο, π.χ. $S_1 = A$, και το αντικείμενο S_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα CD, παράλληλο σε κάποιον από τους δύο άξονες. Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου το CD είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, και θα ανάγουμε σε αυτήν, την αντίστοιχη περίπτωση παραλληλίας με τον άξονα $y'y$. Να σημειωθεί ότι δεν επιτρέπουμε στο σημείο A να ανήκει στο τμήμα CD.

Υποθέτουμε ότι για τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος CD ισχύει $x_C > x_D$. Για τον υπολογισμό της απόστασης $d(Q, CD)$, αρχικά υπολογίζουμε την προβολή του σημείου $Q = (x_Q, y_Q)$ στην ευθεία $\ell_{CD} : y = y_C$ που ορίζει το τμήμα μας, έστω Q'. Εύκολα προκύπτει ότι $Q' = (x_Q, y_C)$. Έπειτα μελετάμε εάν το σημείο Q' ανήκει ή όχι στο τμήμα CD, γεγονός το οποίο ουσιαστικά διαφοροποιεί τον τρόπο υπολογισμού της $d(Q, CD)$, όπως προκύπτει από τον ορισμό απόστασης σημείου από ευθύγραμμο τμήμα.

Έπειτα, δεδομένου ότι το σημείο Q' ανήκει στο τμήμα CD, θα ελέγξουμε εάν τα σημεία Q και A βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ℓ_{CD}, ή ισοδύναμα $(y_Q - y_C)(y_A - y_C) < 0$, εκμεταλλεύοντας την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.3. *Εάν τα σημεία Q και A βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ℓ_{CD} και επιπλέον το σημείο Q' βρίσκεται εντός του τμήματος CD, τότε ισχύει $d(Q, A) > d(Q, CD)$, δηλαδή $\mathsf{SoOB}(A, CD, Q) > 0$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι σε ένα τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία. Σχηματίζουμε το τρίγωνο AQQ' και έστω K το σημείο τομής του τμήματος AQ και της ευθείας ℓ_{CD} (βλ. Σχήμα 4.3). Παρατηρούμε ότι $\widehat{AQ'Q} = \widehat{QQ'K} + \widehat{KQ'A} = 90° + \widehat{KQ'A} > 90°$ δηλαδή η γωνία $\widehat{AQ'Q}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου AQQ'. Συμπεραίνουμε ότι $|AQ| > |QQ'|$, δηλαδή $d(Q, A) > d(Q, CD)$. □

Εάν τα σημεία Q και A δεν βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ℓ_{CD}, όταν δηλαδή

$(y_Q - y_C)(y_A - y_C) \geq 0$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_{CD}$, δηλαδή $x_C \leq x_Q \leq x_D$, τότε γνωρίζουμε ότι $d^2(Q, CD) = d^2(Q, Q') = (y_Q - y_C)^2$. Η απόσταση μεταξύ των σημείων Q και A είναι $d^2(Q, A) = (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2$ και άρα μία έγκυρη συνάρτηση SoOB είναι η

$$\begin{aligned}\mathsf{SoOB}(A, CD, Q) &= d(Q, A) - d(Q, CD)\\ &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 - (y_Q - y_C)^2\end{aligned}$$

2. Εάν το σημείο Q δεν ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_{CD}$, δηλαδή ισχύει $x_Q < x_C$ ή $x_Q > x_D$, τότε υπολογίζουμε αρχικά την απόσταση $d^2(Q, CD)$. Εάν $x_Q < x_C$ (αντίστοιχα $x_Q > x_D$) τότε $\min\left(d^2(Q, C), d^2(Q, D)\right) = d^2(Q, C)$ (αντίστοιχα $d^2(Q, D)$), οπότε προκύπτει ότι

$$d^2(Q, CD) = \begin{cases} d^2(Q, C) & \text{εάν } x_Q < x_C,\\ d^2(Q, D) & \text{εάν } x_Q > x_D \end{cases}$$

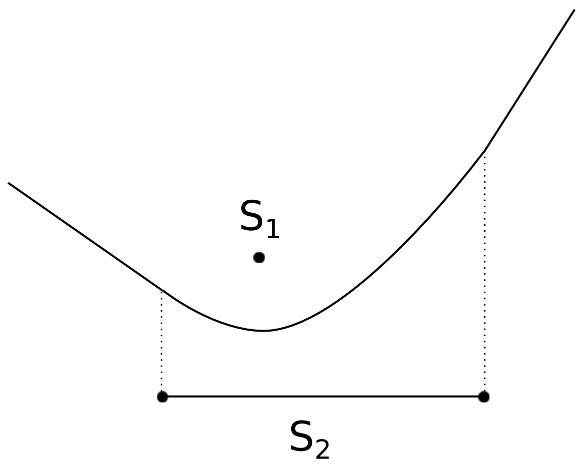
Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην συνάρτηση SoOB, προκύπτει τελικά

$$\begin{aligned}\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) &= d^2(Q, A) - d^2(Q, CD)\\ &= \begin{cases} (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 - (x_Q - x_C)^2 - (y_Q - y_C)^2 & \text{εάν } x_Q < x_C,\\ (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 - (x_Q - x_D)^2 - (y_Q - y_D)^2 & \text{εάν } x_Q > x_D.\end{cases}\end{aligned}$$

Ο μέγιστος απαιτούμενος αλγεβρικός βαθμός για τον υπολογισμό της συνάρτησης SoOB για την περίπτωση που μελετάμε είναι 2.

Ενδιαφέρον έχει να δούμε την γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω εξισώσεων. Για κάθε σημείο Q που βρίσκεται εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_{CD}$, η διχοτόμος $\mathrm{Bis}(A, CD) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \,|\, d^2(Q, A) = d^2(Q, CD)\}$ είναι ουσιαστικά ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από το σημείο A και την ευθεία ℓ_{CD}, δηλαδή έχει την μορφή παραβολής. Για τα σημεία Q τα οποία βρίσκονται εκτός της ζώνης, η διχοτόμος $\mathrm{Bis}(A, CD)$ εκφράζει τα σημεία που ισαπέχουν από τα σημεία A και C (εάν το Q βρίσκεται δεξιά της $x = x_C$) ή A και D (εάν το Q βρίσκεται αριστερά της $x = x_D$), δηλαδή είναι ημιευθείες με φορέα την μεσοκάθετη των αντίστοιχων σημείων (βλ. Σχήμα 4.4).

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, μελετώντας την περίπτωση όπου το το τμήμα S_2 είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$ που αναφέραμε στην προηγούμενη υποενότητα οπότε προκύπτει ότι



Σχήμα 4.4: Η μεσοκάθετος του σημείο A και του ευθυγράμμου τμήματος CD.

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(Q))$$

όπου το τμήμα $\mathcal{R}(S_2)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$. Λόγω της ευκολία υπολογισμού των συντεταγμένων του $\mathcal{R}(I)$, όπου I κάποιο σημείο, ο μέγιστος απαιτούμενος αλγεβρικός βαθμός για τον υπολογισμό του κατηγορήματος παραμένει 2.

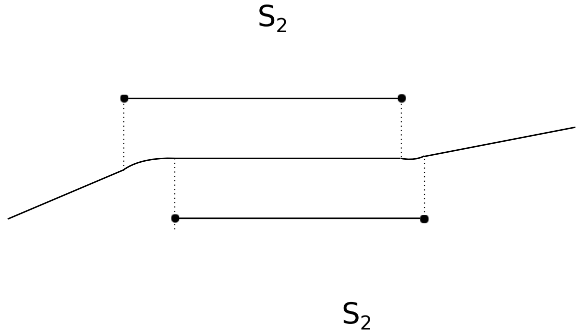
4.2.3 Απόσταση από δύο παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα στους άξονες

Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα $S_1 = AB$ και $S_2 = CD$ τα οποία είναι παράλληλα είτε με τον άξονα $x'x$, είτε με τον άξονα $y'y$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$.

Ας υποθέσουμε ότι και τα δύο τμήματα είναι παράλληλα στον πραγματικό άξονα (βλ. Σχήμα 4.5), και επιπλέον ότι $x_A < x_B$ και $x_C < x_D$, και επιπλέον $y_A < y_C$ (θα μελετήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση όπου $y_A = y_C$, ενώ η περίπτωση $y_A > y_C$ είναι ισοδύναμη με αυτήν που θα μελετήσουμε λόγω του Λήμματος 4.1).

Στην περίπτωση όπου $y_A \neq y_C$, τα τμήματα S_1 και S_2 δεν είναι συνευθειακά. Θα εξετάσουμε πως αλλάζουν οι αποστάσεις $d^2(Q, AB)$ και $d^2(Q, CD)$, ανάλογα με το εάν το σημείο Q, βρίσκεται εντός ή εκτός των ζωνών $\mathcal{Z}_{AB}$ και $\mathcal{Z}_{CD}$ αντίστοιχα. Ο έλεγχος αυτός γίνεται εύκολα λόγω της μορφής των ευθυγράμμων τμημάτων, και συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{Z}_{AB} &\quad \text{εάν και μόνο εάν} \quad x_A \leq x_Q \leq x_B \\ Q \in \mathcal{Z}_{CD} &\quad \text{εάν και μόνο εάν} \quad x_C \leq x_Q \leq x_D \end{aligned}$$



Σχήμα 4.5: Η μεσοκάθετος των ευθυγράμμων τμημάτων S_1 και S_2 στην περίπτωση όπου αυτά είναι παράλληλα στον πραγματικό άξονα.

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η προβολή του σημείου Q στις ευθείες $\ell_{AB} : y = y_A$ και $\ell_{CD} : y = y_C$ είναι $Q'_{AB} = (x_Q, y_A)$ και $Q'_{CD} = (x_Q, y_C)$ αντίστοιχα, υπολογίζουμε τις αποστάσεις $d^2(Q, S_i)$, για $i \in \{1, 2\}$:

$$d^2(Q,S_1) = \begin{cases} (y_Q - y_A)^2 & \text{εάν } x_A \leq x_Q \leq x_B, \\ (x_Q - x_A)^2 - (y_Q - y_A)^2 & \text{εάν } x_Q < x_A, \\ (x_Q - x_B)^2 - (y_Q - y_B)^2 & \text{εάν } x_Q > x_B \end{cases}$$
$$d^2(Q,S_2) = \begin{cases} (y_Q - y_C)^2 & \text{εάν } x_C \leq x_Q \leq x_D, \\ (x_Q - x_C)^2 - (y_Q - y_C)^2 & \text{εάν } x_Q < x_C, \\ (x_Q - x_D)^2 - (y_Q - y_D)^2 & \text{εάν } x_Q > x_D. \end{cases}$$

Έχοντας βρει τις αποστάσεις $d^2(Q, AB)$ και $d^2(Q, CD)$, υπολογίζουμε τελικά την συνάρτηση

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = d^2(Q, S_1) - d^2(Q, S_2).$$

Αξίζει να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι ο αλγεβρικός βαθμός της συνάρτησης SoOB είναι 2, σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός από την περίπτωση όπου $Q \in \mathcal{Z}_{S_1} \cap \mathcal{Z}_{S_2}$. Στην ειδική αυτή περίπτωση, αρκεί να μελετήσουμε σε ποιο από τα δύο ημιεπίπεδα που δημιουργεί η μεσοπαράλληλη των ευθειών $\ell_{AB} : y = y_A$ και $\ell_{S_2} : y = y_C$, ανήκει το σημείο Q για να αποφανθούμε σε ποιο τμήμα βρίσκεται πλησιέστερα. Η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας είναι $y = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$, και οπότε για την συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = 2y_Q - y_A - y_C$$

Μελετάμε τώρα την ειδική περίπτωση όπου $y_A = y_C$, δηλαδή τα τμήματα $S_1 = AB$ και $S_2 = CD$ είναι συνευθειακά. Εφόσον δεν επιτρέπουμε στα τμήματά μας να τέμνονται, το τμήμα AB μπορεί να βρίσκεται είτε δεξιά (οπότε $x_B < x_C$) είτε αριστερά (οπότε $x_D <$

x_A) από το τμήμα CD. Σε κάθε περίπτωση, αρκεί να ταξινομίσουμε τις συντεταγμένες x_A, x_B, x_C, x_D και x_Q, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1. Τελικά, δεδομένου ότι το σημείο Q δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα στην ζώνη $\mathcal{Z}_{AB}$ και στην ζώνη $\mathcal{Z}_{CD}$, προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. Εάν $Q \in \mathcal{Z}_{AB}$, δηλαδή $x_A \leq x_Q \leq x_B$ τότε το σημείο βρίσκεται πλησιέστερα στο τμήμα AB οπότε $\mathsf{SoOB}(AB, CD, Q) < 0$.

2. Εάν $Q \in \mathcal{Z}_{CD}$, δηλαδή $x_C \leq x_Q \leq x_D$ τότε το σημείο βρίσκεται πλησιέστερα στο τμήμα CD οπότε $\mathsf{SoOB}(AB, CD, Q) > 0$.

3. Τέλος, εάν $Q \notin \mathcal{Z}_{AB}$ και $Q \notin \mathcal{Z}_{CD}$, τότε εάν $x_B < x_C$ προκύπτει ότι $\mathsf{SoOB}(AB, CD, Q) = 2x_Q - x_B - x_C$, ειδάλλως ($x_D < x_A$) προκύπτει ότι $\mathsf{SoOB}(AB, CD, Q) = 2x_Q - x_A - x_D$.

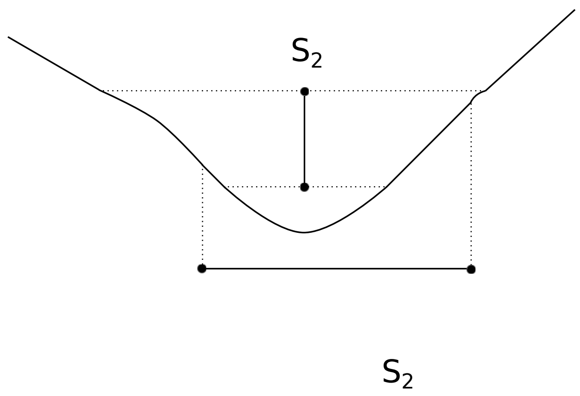
Παρατηρούμε ότι ο μέγιστος εμφανιζόμενος αλγεβρικός βαθμός για τον υπολογισμό του κατηγορήματος SoOB στην περίπτωση που μελετάμε είναι 1.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, κάνοντας μια αναφορά στην περίπτωση όπου τα ευθύγραμμα τμήματα S_1 και S_2 είναι παράλληλα μεταξύ τους και με τον άξονα $y'y$. Με χρήση του μετασχηματισμού $\mathcal{R}$ προκύπτει ότι $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(Q))$. Όμως τα τμήματα $\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2)$ είναι παράλληλα στον άξονα $x'x$ και άρα ο υπολογισμός της $\mathsf{SoOB}(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(Q))$ μπορεί να γίνει όπως δείξαμε παραπάνω. Και σε αυτήν την περίπτωση, ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι 2.

4.2.4 Απόσταση από δύο ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα στους άξονες και κάθετα μεταξύ τους

Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα $S_1 = AB$ και $S_2 = CD$ και το σημείο Q το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε εάν είναι πλησιέστερα στο S_1 ή στο S_2 (βλ. Σχήμα 4.6). Ας υποθέσουμε ότι το AB είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ και το S_2 είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ και επιπλέον ότι $x_A < x_B$ και $y_C < y_D$.

Θα ακολουθήσουμε στρατηγική μελέτης ανάλογη με αυτήν που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη υποενότητα, δηλαδή αρχικά θα εξετάσουμε εάν $Q \in \mathcal{Z}_{S_1}$ και $Q \in \mathcal{Z}_{S_2}$, και έπειτα θα αποφανθούμε ποια είναι η συνάρτηση SoOB βασιζόμενοι στις αποστάσεις $d^2(Q, S_1)$ και $d^2(Q, S_2)$.



Σχήμα 4.6: Η μεσοκάθετος των ευθυγράμμων τμημάτων S_1 και S_2 στην περίπτωση όπου S_1 είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το S_2 είναι κάθετο σε αυτό.

Όσων αφορά τις αποστάσεις του Q από τα τμήματα S_1 και S_2 ισχύει ότι

$$d^2(Q,S_1) = \begin{cases} (y_Q - y_A)^2 & \text{εάν } Q \in \mathcal{Z}_{S_1}, \text{ δηλαδή } x_A \leq x_Q \leq x_B, \\ d^2(Q,A) & \text{εάν } x_Q < x_A, \\ d^2(Q,B) & \text{εάν } x_Q > x_B. \end{cases}$$

$$d^2(Q,S_2) = \begin{cases} (x_Q - x_C)^2 & \text{εάν } Q \in \mathcal{Z}_{S_2}, \text{ δηλαδή } y_C \leq y_Q \leq y_D, \\ d^2(Q,C) & \text{εάν } y_Q < y_C, \\ d^2(Q,D) & \text{εάν } y_Q > y_D. \end{cases}$$

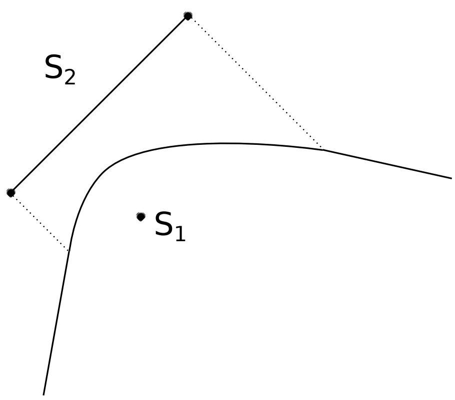
οπότε υπολογίζουμε την συνάρτηση SoOB σχηματίζοντας την διαφορά τους,

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = d^2(Q,S_1) - d^2(Q,S_2).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο αλγεβρικός βαθμός του κατηγορήματος SoOB για την περίπτωση που μελετάμε θα είναι 2 για όλες τις δυνατές σχετικές θέσεις του σημείου Q και των ζωνών $\mathcal{Z}_{S_1}, \mathcal{Z}_{S_2}$, εκτός της περίπτωσης όπου $Q \in \mathcal{Z}_{S_1} \cap \mathcal{Z}_{S_2}$, Στην συγκεκριμένη περίπτωση, μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = |y_Q - y_A| - |x_Q - x_C|$$

η οποία προφανώς ικανοποιεί τον ορισμό του κατηγορήματος SoOB, και έχει αλγεβρικό βαθμό 1.



Σχήμα 4.7: Η μεσοκάθετος του σημείου S_1 και του τμήματος S_2, το οποίο είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$.

4.2.5 Απόσταση από σημείο και ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο σχηματίζει γωνία 45° με τους άξονες

Στην υποενότητα αυτή, θεωρούμε τα σημεία Q και $S_1 = A$ και το ευθύγραμμο τμήμα $S_2 = CD$ το οποίο σχηματίζει γωνία 45° με κάποιον άξονα και θέλουμε να ελέγξουμε εάν το Q βρίσκεται πλησιέστερα στο S_1 ή στο S_2.

Στην μελέτη που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το τμήμα CD σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ (βλ. Σχήμα 4.7), ενώ η αντίστοιχη περίπτωση όπου το τμήμα CD σχηματίζει γωνία με τον φανταστικό άξονα θα μελετηθεί στο τέλος της υποενότητας.

Ο φορέας του τμήματος S_2 είναι η ευθεία $\ell_{CD} : y = x + a_{CD}$, όπου $a_{CD} = y_C - x_C = y_D - x_D$. Στο σημείο αυτό θα υποθέσουμε επίσης ότι $x_C < x_D$. Συμβολίζοντας Q' την προβολή του σημείου Q στην ευθεία ℓ_{CD}, γνωρίζουμε ότι ο τρόπος υπολογισμού της απόστασης $d(Q, S_2)$ εξαρτάται από το εάν το Q' ανήκει στο τμήμα S_2.

Ο έλεγχος αυτός είναι ισοδύναμος με τον να ελέγξουμε εάν το σημείο Q βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $\ell_C^\perp$ και $\ell_D^\perp$ οι οποίες είναι κάθετες στο τμήμα S_2 στα σημεία C και D αντίστοιχα

$$\ell_C^\perp : y + x - a_C = 0$$
$$\ell_D^\perp : y + x - a_D = 0$$

όπου $a_C = x_C + y_C$ και $a_D = x_D + y_D$.

Λόγω της υπόθεσης $x_C < x_D$ ισχύει ότι $a_C < a_D$ οπότε, θέτοντας $a_Q = x_Q + y_Q$ προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

1. εάν $a_C \leq a_Q \leq a_D$ τότε $Q \in \mathcal{Z}_{S_2}$ οπότε $d^2(Q, S_2) = d^2(Q, Q')$,

2. εάν $a_Q < a_C$ τότε το σημείο Q βρίσκεται εκτός της ζώνης $\mathcal{Z}_{S_2}$ από την πλευρά του άκρου C οπότε $d^2(Q, S_2) = d^2(Q, C)$,

3. εάν $a_Q > a_D$ τότε το σημείο Q βρίσκεται εκτός της ζώνης $\mathcal{Z}_{S_2}$ από την πλευρά του άκρου D οπότε $d^2(Q, S_2) = d^2(Q, D)$.

Στην πρώτη περίπτωση, όπου $Q \in \mathcal{Z}_{S_2}$, η απόσταση $d^2(Q, Q')$ είναι η ευκλείδεια απόσταση του σημείου Q από την ευθεία ℓ_{CD} υψωμένη στο τετράγωνο, οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$d^2(Q, S_2) = d^2(Q, Q') = d^2(Q, \ell_{CD}) = \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a_{CD})^2.$$

Αξιοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, προχωράμε στον υπολογισμό του κατηγορήματος SoOB για το σημείο Q και τα αντικείμενα S_1 και S_2. Αρχικά, εξετάζουμε εάν τα σημεία Q και A βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD}. Ο έλεγχος αυτός είναι ισοδύναμος με το να ελέγξουμε εάν οι παραστάσεις $y_Q - x_Q - a_{CD}$ και $y_A - x_A - a_{CD}$ είναι ομόσημες.

Εάν είναι ετερόσημες, τότε τα σημεία Q και A βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ℓ_{CD}, οπότε χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της Πρότασης 4.3 μπορούμε να αποδείξουμε ότι $d(Q, S_1) > d(Q, S_2)$, και άρα μπορούμε να θέσουμε $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = 1$.

Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή τα σημεία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε υπολογίζουμε την απόσταση

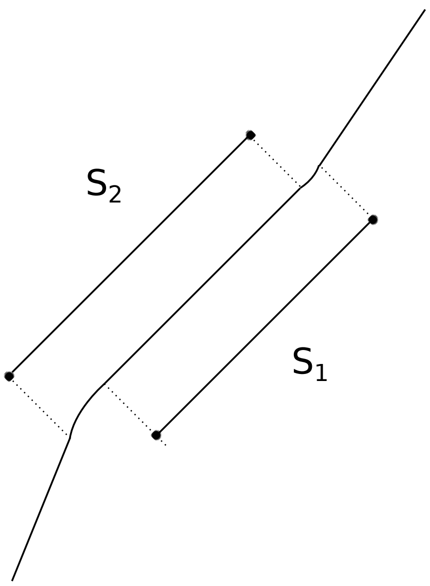
$$d^2(Q, S_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a)^2 & \text{εάν } a_C \leq a_Q \leq a_D, \\ d^2(Q, C) & \text{εάν } a_Q < a_C, \\ d^2(Q, D) & \text{εάν } a_Q > a_D \end{cases}$$

και στην συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) &= d^2(Q, S_1) - d^2(Q, S_2) \\ &= \begin{cases} d^2(Q, S_1) - \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a)^2 & \text{εάν } a_C \leq a_Q \leq a_D, \\ d^2(Q, S_1) - d^2(Q, C) & \text{εάν } a_Q < a_C, \\ d^2(Q, S_1) - d^2(Q, D) & \text{εάν } a_Q > a_D \end{cases} \\ d^2(Q, S_1) &= (x_Q - x_A)^2 - (y_Q - y_A)^2. \end{aligned}$$

Σε κάθε ένα κλάδο, ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμό του κατηγορήματος SoOB είναι 2.

Τέλος, για την περίπτωση όπου το ευθύγραμμο τμήμα S_2 είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{S}$, αξιοποιώντας τις ιδιότητές του. Πράγματι, εφόσον $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = d^2(Q, S_1) - d^2(Q, S_2)$ προκύπτει ότι $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{S}(S_1), \mathcal{S}(S_2), \mathcal{S}(Q))$. Όμως το τμήμα $\mathcal{S}(S_2)$ σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$ και άρα ο υπολογισμός του $\mathsf{SoOB}(\mathcal{S}(S_1), \mathcal{S}(S_2), \mathcal{S}(Q))$ μπορεί να γίνει με βάση την ανάλυση που έχει προηγηθεί.



Σχήμα 4.8: Η μεσοκάθετος των ευθυγράμμων τμημάτων S_1 και S_2, τα οποία είναι παράλληλα στην ευθεία $y = x$.

Λόγω της γραμμικής σχέσης των συντεταγμένων του $\mathcal{S}(I)$ ως προς τις αρχικές συντεταγμένες του σημείου I, για $I \in \{A, C, D, Q\}$ ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμός του κατηγορήματος SoOB και σε αυτήν την περίπτωση παραμένει 2.

4.2.6 Απόσταση από δυο παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία σχηματίζουν γωνία $45°$ με τους άξονες

Στην υποενότητα αυτή, θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα S_1 και S_2 τα οποία σχηματίζουν γωνία $45°$ με κάποιον άξονα, και θέλουμε να υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$.

Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι τα τμήματα $S_1 = AB$ και $S_2 = CD$ είναι παράλληλα στην ευθεία $y = x$ (βλ. Σχήμα 4.8), ενώ στο τέλος της υποενότητας θα αναφερθούμε στην περίπτωση παραλληλίας με την ευθεία $y = -x$.

Οι φορείς των ευθυγράμμων τμημάτων AB και CD είναι οι ευθείες

$$\ell_{AB} : y = x + a_1$$
$$\ell_{CD} : y = x + a_2$$

όπου $a_1 = y_A - x_A = y_B - x_B$ και $a_2 = y_C - x_C = y_D - x_D$.

Θα μελετήσουμε αρχικά την περίπτωση όπου $a_1 \neq a_2$ δηλαδή τα τμήματα δεν είναι συνευθειακά. Ο τρόπος υπολογισμού της απόστασης του σημείου Q από τα ευθύγραμμα τμήματα S_1 και S_2 εξαρτάται από τη σχετική θέση του Q ως προς την ζώνη $\mathcal{Z}_{S_1}$ και $\mathcal{Z}_{S_2}$ αντίστοιχα.

Θα πρέπει λοιπόν να ελέγξουμε σαν πρώτο βήμα εάν το Q βρίσκεται μέσα ή έξω από την ζώνη $\mathcal{Z}_{S_i}$ για $i \in \{1, 2\}$.

Θεωρούμε τις ευθείες $\ell_A^\perp$, $\ell_B^\perp$, $\ell_C^\perp$ και $\ell_D^\perp$ οι οποίες διέρχονται από τα σημεία A, B, C και D αντίστοιχα και είναι κάθετες στην ευθεία $y = x$. Υποθέτοντας ότι $x_A < x_B$ και $x_C < x_D$, προκύπτει ότι εάν $\ell_I^\perp : y = -x + a_I$ με $a_I = y_I + x_I$ για $I \in \{A, B, C, D\}$, τότε $a_A < a_B$ και $a_C < a_D$. Συμπεραίνουμε τελικά ότι το σημείο Q ανήκει στην ζώνη $\mathcal{Z}_{AB}$ (αντίστοιχα $\mathcal{Z}_{CD}$) εάν και μόνο εάν $a_A \leq a_Q \leq a_B$ (αντίστοιχα $a_C \leq a_Q \leq a_D$), όπου $a_Q = x_Q + y_Q$.

Ανάλογα με το εάν το Q ανήκει ή όχι στις ζώνες $\mathcal{Z}_{S_1}$ και $\mathcal{Z}_{S_2}$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Εάν $Q \in \mathcal{Z}_{S_1}$ και $Q \in \mathcal{Z}_{S_2}$, τότε ελέγχουμε σε ποια από τις ευθείες ℓ_1, ℓ_2, βρίσκεται πλησιέστερα το σημείο Q. Εφόσον οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες, αρκεί να ελέγξουμε σε ποια μεριά της μεσοπαράλληλης τους, η οποία έχει εξίσωση $\ell_{1,2} : 2y = 2x + a_1 + a_2$, βρίσκεται το Q. Τελικά προκύπτει ότι

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = 2(y_Q - x_Q) - (a_1 + a_2)$$

2. Εάν $Q \in \mathcal{Z}_{S_1}$ και $Q \notin \mathcal{Z}_{S_2}$, εντοπίζουμε το πλησιέστερο άκρο του S_2 στο σημείο Q, και στην συνέχεια υπολογίζουμε το κατηγόρημα SoOB. Τελικά προκύπτει ότι

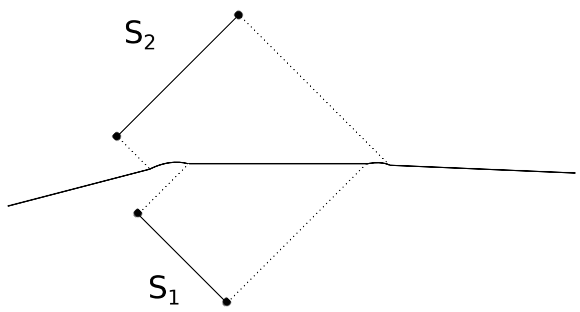
$$\begin{aligned}\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) &= d^2(Q, S_1) - d^2(Q, S_2) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a_1)^2 - d^2(Q, C) & \text{εάν } a_Q < a_C, \\ \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a_1)^2 - d^2(Q, D) & \text{εάν } a_Q > a_D. \end{cases}\end{aligned}$$

3. Εάν $Q \in \mathcal{Z}_{S_2}$ και $Q \notin \mathcal{Z}_{S_1}$, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη περίπτωση οπότε και προκύπτει

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a_2)^2 - d^2(Q, A) & \text{εάν } a_Q < a_A, \\ \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a_2)^2 - d^2(Q, B) & \text{εάν } a_Q > a_B. \end{cases}$$

4. Εάν $Q \notin \mathcal{Z}_{S_1}$ και $Q \notin \mathcal{Z}_{S_2}$, υπολογίζουμε για κάθε τμήμα το πλησιέστερο άκρο στο σημείο Q και υπολογίζουμε τις αποστάσεις $d^2(Q, S_1)$ και $d^2(Q, S_2)$ με βάση αυτά. Τελικά, προκύπτει ότι

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \begin{cases} d^2(Q, A) - d^2(Q, C) & \text{εάν } a_Q < \min(a_A, a_C), \\ d^2(Q, B) - d^2(Q, C) & \text{εάν } a_B < a_Q < a_C, \\ d^2(Q, A) - d^2(Q, D) & \text{εάν } a_D < a_Q < a_A, \\ d^2(Q, B) - d^2(Q, D) & \text{εάν } a_Q > \max(a_B, a_D). \end{cases}$$



Σχήμα 4.9: Η μεσοκάθετος των ευθυγράμμων τμημάτων S_1 και S_2, όπου το S_1 είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$ και το S_2 είναι κάθετο σε αυτό.

Στην περίπτωση όπου τα τμήματα S_1 και S_2 είναι παράλληλα στην ευθεία $y = -x$, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{S}$. Αξιοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, προκύπτει ότι $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{S}(S_1), \mathcal{S}(S_2), \mathcal{S}(Q))$ όπου τα τμήματα $\mathcal{S}(S_1)$ και $\mathcal{S}(S_2)$ είναι παράλληλα με την ευθεία $y = x$ και συνεπώς ο υπολογισμός του κατηγορήματος στο δεξί μέλος είναι εφικτός βάσει της ανάλυσης που έχουμε ήδη κάνει.

4.2.7 Απόσταση από δυο ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία σχηματίζουν γωνία $45°$ με τους άξονες και είναι κάθετα μεταξύ τους

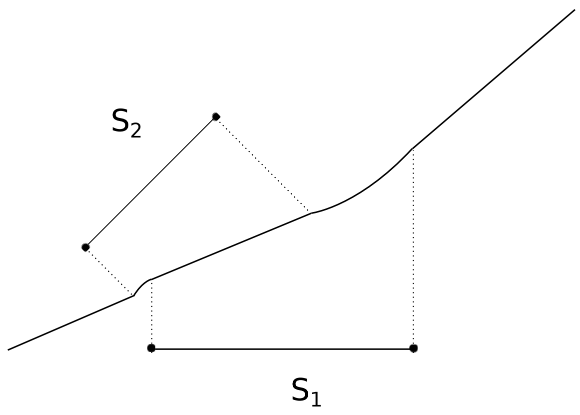
Στην υποενότητα αυτή, θεωρούμε τα τμήματα S_1 και S_2, όπου το ένα τμήμα είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$ και το άλλο στην ευθεία $y = -x$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$. Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα S_1 σχηματίζει γωνία $45°$ με τον πραγματικό άξονα και το S_2 αντίστοιχα με τον φανταστικό άξονα (βλ. Σχήμα 4.9).

Αν και μπορούμε να ακολουθήσουμε ανάλογη στρατηγική μελέτης όπως με την προηγούμενη υποενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{I}$ ώστε να ανάγουμε την περίπτωση που μελετάμε στην αμέσως προηγούμενη.

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες του μετασχηματισμού $\mathcal{I}$, έχουμε ότι

$$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(S_1, \mathcal{I}(S_2), Q)$$

Στην τελευταία σχέση, τα τμήματα S_1 και $\mathcal{I}(S_2)$ είναι παράλληλα στην ευθεία $y = x$, οπότε ο υπολογισμός του κατηγορήματος $\mathsf{SoOB}(S_1, \mathcal{I}(S_2), Q)$ μπορεί να γίνει αλγεβρικά με βάση την προηγούμενη υποενότητα. Επιπλέον, λόγω της γραμμικής σχέσης των συντεταγμένων των άκρων του $\mathcal{I}(S_2)$ ως προς τις αντίστοιχες συντεταγμένες των άκρων του S_2, ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμό του κατηγορήματος παραμένει 2.



Σχήμα 4.10: Η μεσοκάθετος των ευθυγράμμων τμημάτων S_1 και S_2, όπου το S_1 είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το S_2 είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$.

4.2.8 Απόσταση από δύο ευθύγραμμα τμήματα, το ένα παράλληλο και το άλλο υπό γωνία $45°$ με τους άξονες

Στην υποενότητα αυτή θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα S_1 και S_2 όπου το ένα είναι παράλληλο και το άλλο σχηματίζει γωνία $45°$ με κάποιον άξονα και θέλουμε να υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι το $S_1 = AB$ είναι παράλληλο σε κάποιον άξονα, π.χ. τον πραγματικό και το $S_2 = CD$ είναι παράλληλο σε κάποια από τις ευθείες $y = \pm x$, π.χ. την $y = x$ (βλ. Σχήμα 4.10). Επιπλέον θα υποθέσουμε ότι για τα άκρα των τμημάτων AB και CD ισχύει ότι $x_A < x_B$ και $x_C < x_D$.

Για να υπολογίσουμε αλγεβρικά το κατηγόρημα SoOB, ελέγχουμε σε πρώτο στάδιο εάν το σημείο Q ανήκει στην ζώνη $\mathcal{Z}_{S_1}$ και πώς αυτό επηρεάζει τον τρόπο υπολογισμού της απόστασης $d^2(Q, S_1)$:

1. Εάν $x_A \leq x_Q \leq x_B$, τότε $Q \in \mathcal{Z}_{S_1}$, οπότε $d^2(Q, S_1) = (y_Q - y_A)^2$.

2. Εάν $x_Q < x_A$ τότε $Q \notin \mathcal{Z}_{S_1}$, και ισχύει ότι $d^2(Q, S_1) = d^2(Q, A)$.

3. Εάν $x_Q > x_B$ τότε $Q \notin \mathcal{Z}_{S_1}$, και ισχύει ότι $d^2(Q, S_1) = d^2(Q, B)$.

Εάν αναφερόμαστε στην περίπτωση (2) ή (3), τότε ο υπολογισμός του $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$ ανάγεται στον υπολογισμό του $-\mathsf{SoOB}(S_2, A, Q)$ και $-\mathsf{SoOB}(S_2, B, Q)$ αντίστοιχα, ο οποίος μπορεί να γίνει σύμφωνα με την Υποενότητα 4.2.5.

Για την περίπτωση (1), όταν δηλαδή $Q \in \mathcal{Z}_{S_1}$, ελέγχουμε επιπλέον εάν σημείο Q ανήκει στην ζώνη $\mathcal{Z}_{S_2}$ (βλ. Υποενότητα 4.2.5) και πως αυτό επηρεάζει τον τρόπο υπολογισμού της απόστασης $d(Q, S_2)$:

1. Εάν $a_C \leq a_Q \leq a_D$, τότε $Q \in \mathcal{Z}_{S_2}$, οπότε $d^2(Q, S_2) = \frac{1}{2}(y_Q - x_Q - a_2)^2$.

2. Εάν $a_Q < a_C$ τότε $Q \notin \mathcal{Z}_{S_2}$, και ισχύει ότι $d^2(Q, S_2) = d^2(Q, C)$.

3. Εάν $a_Q > a_D$ τότε $Q \notin \mathcal{Z}_{S_2}$, και ισχύει ότι $d^2(Q, S_2) = d^2(Q, D)$.

Για την περίπτωση (1), έχουμε ότι $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = 2(y_Q - y_A)^2 - (y_Q - x_Q - a_2)^2$. Για τις περιπτώσεις (2) και (3) προκύπτει ότι ο υπολογισμός του $\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q)$ ανάγεται στον υπολογισμό του $\mathsf{SoOB}(S_1, C, Q)$ και $\mathsf{SoOB}(S_1, D, Q)$ αντίστοιχα, ο οποίος μπορεί να γίνει βάσει της Υποενότητας 4.2.2.

Σε κάθε περίπτωση ο απαιτούμενος αλγεβρικός βαθμός για τον υπολογισμό του κατηγορήματος SoOB είναι 2.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, όλες τις δυνατές εκδοχές προσανατολισμού των τμημάτων S_1 και S_2 σε αυτήν που μόλις μελετήσαμε:

- Εάν το τμήμα S_1 είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα αλλά το τμήμα S_2 είναι παράλληλο στην ευθεία $y = -x$, τότε με βάση τον μετασχηματισμό $\mathcal{I}$ έχουμε ότι

  $$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{I}(S_1), \mathcal{I}(S_2), Q)$$

  Όμως, βάσει των ιδιοτήτων του $\mathcal{I}$, το τμήμα $\mathcal{I}(S_1)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ και το τμήμα $\mathcal{I}(S_2)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$.

- Εάν το τμήμα S_1 είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα και το τμήμα S_2 είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$, τότε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$ έχουμε ότι

  $$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(Q))$$

  Όμως, βάσει των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού $\mathcal{R}$, το τμήμα $\mathcal{R}(S_1)$ είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το τμήμα $\mathcal{R}(S_2)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$.

- Εάν το τμήμα S_1 είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα και το τμήμα S_2 είναι παράλληλο στην ευθεία $y = -x$ τότε χρησιμοποιώντας την σύνθεση των μετασχηματισμών $\mathcal{I}$ και $\mathcal{R}$ έχουμε ότι

  $$\mathsf{SoOB}(S_1, S_2, Q) = \mathsf{SoOB}(\mathcal{R}(\mathcal{I}(S_1)), \mathcal{R}(\mathcal{I}(S_2)), \mathcal{R}(Q))$$

  Όμως, βάσει των ιδιοτήτων των μετασχηματισμών $\mathcal{I}$ και $\mathcal{R}$, το τμήμα $\mathcal{R}(\mathcal{I}(S_1))$ είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το τμήμα $\mathcal{R}(\mathcal{I}(S_2))$ είναι παράλληλο στην ευθεία $y = x$.

Κεφάλαιο 5

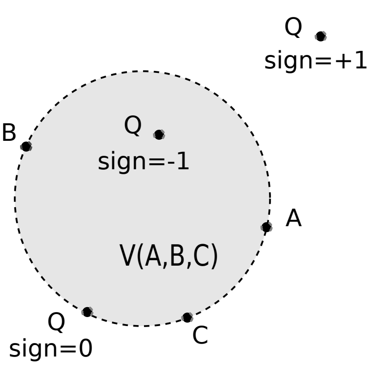
Incircle Test σημείων και τμημάτων τα οποία είναι παράλληλα με τους άξονες

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε το κατηγόρημα Incircle το οποίο είχαμε αρχικά αναφέρει στο Κεφαλαιο 3 (βλ. Θεώρημα 3.3). Το αρχικό κατηγόρημα όπως είδαμε, δέχεται ως ορίσματα τέσσερα σημεία και αποφαίνεται εάν το τέταρτο ανήκει στον Voronoi κύκλο τον οποίο ορίζουν μοναδικά τα άλλα τρία. Συγκεκριμένα, η τιμή της ορίζουσας

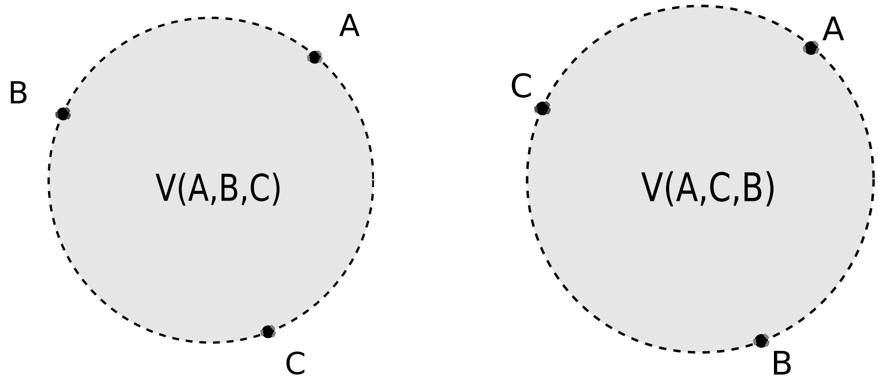
$$\text{Incircle}(A, B, C, Q) = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix}$$

είναι θετική (αντίστοιχα αρνητική) εάν και μόνο εάν το σημείο Q ανήκει (αντίστοιχα δεν ανήκει) στον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, C)$ (βλ. Σχήμα 5.1). Εάν η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδέν, τότε τα σημεία A, B, C, Q είναι ομοκυκλικά.

Θα επεκτείνουμε το κατηγόρημα Incircle έτσι ώστε να μπορεί να δεχθεί ορίσματα είτε



Σχήμα 5.1: Το πρόσημο του κατηγορήματος Incircle (A, B, C, Q) για πιθανά Q.



Σχήμα 5.2: Για A, B, C σημεία, μόνο ένας από τους κύκλους $\mathcal{V}(A, B, C), \mathcal{V}(B, A, C)$ μπορεί να ορίζεται κάθε φορά.

σημεία είτε ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι παράλληλα με τους άξονες. Στο συγκεκριμένο σημείο αναφέρουμε ότι θεωρούμε τα τμήματα και τα άκρα τους ως ξεχωριστά σημεία, δηλαδή όταν αναφερόμαστε σε τμήματα θα εννοούμε ότι είναι ανοικτά. Με βάση την σύμβαση αυτή, δεν επιτρέπουμε στα τμήματα να τέμνονται (στο εσωτερικό τους) ενώ δύο τμήματα μπορούν να έχουν το πολύ ένα κοινό άκρο.

Στο τέλος της ενότητας αυτής θα έχουμε δώσει τον τρόπο υπολογισμού του $\mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, Q)$ έτσι ώστε

$$\mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, Q) = \begin{cases} < 0 & \text{εάν το } Q \text{ είναι εντός του } \mathcal{V}(S_1, S_2, S_3) \\ > 0 & \text{εάν το } Q \text{ είναι εκτός του } \mathcal{V}(S_1, S_2, S_3) \\ 0 & \text{εάν το } Q \text{ εφάπτεται στον } \mathcal{V}(S_1, S_2, S_3) \end{cases}$$

όπου S_1, S_2, S_3, Q μπορεί να είναι είτε σημεία είτε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στους άξονες.

Οποιαδήποτε συνάρτηση $f(S_1, S_2, S_3, Q)$ ικανοποιεί την παραπάνω ισότητα θα λέμε ότι είναι έγκυρο κατηγόρημα Incircle και θα συμβολίζουμε $f(S_1, S_2, S_3, Q) = \mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, Q)$.

Επιπλέον,από τον ορισμό του Incircle είναι προφανές ότι η κυκλική εναλλαγή των τριών πρώτων ορισμάτων δεν επηρεάζει το πρόσημο του κατηγορήματος.

Πριν ξεκινήσουμε όμως να αναλύουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις, θα αναφέρουμε ξανά τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$ ο οποίος θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος.

5.1 Ο Μετασχηματισμός $\mathcal{R}$

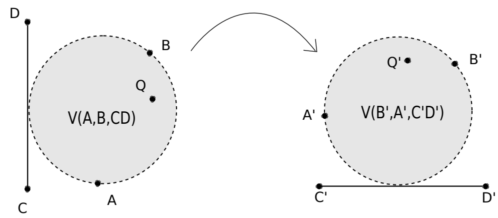
Έστω $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στην ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = x$. Η εικόνα του σημείου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μέσω της απεικόνισης είναι το σημείο $(y, x) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον η εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathcal{R}(AB)$ με άκρα τα σημεία $\mathcal{R}(A)$ και $\mathcal{R}(B)$.

Σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού αυτού είναι ότι η εικόνα ενός τμήματος παράλληλου στον άξονα $x'x$ είναι ένα τμήμα παράλληλο στον άξονα $y'y$ και αντίστροφα. Ομοίως η εικόνα ενός τμήματος που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ είναι ένα τμήμα που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $y'y$.

Ο μετασχηματισμός $\mathcal{R}$ διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ αντικειμένων της μορφής αυτής (σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα), ως προς την απόσταση που χρησιμοποιούμε όπως αυτή αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4.

Η πιο χρήσιμη όμως ιδιότητα του μετασχηματισμού αυτού είναι ότι διατηρεί τον εγκλεισμό ως προς κύκλο (inclusion preserving). Συγκεκριμένα, παρατηρεί κανείς ότι το αντικείμενο Q βρίσκεται εντός του κύκλου $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ εάν και μόνο εάν το αντικείμενο $\mathcal{R}(Q)$ βρίσκεται εντός του κύκλου $\mathcal{V}(\mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_3))$. (βλ. Σχήμα 5.3 για την περίπτωση όπου S_1 και S_2 είναι σημεία και S_3 τμήμα παράλληλο στον φανταστικό άξονα). Αξίζει να σημειώσουμε ότι επειδή η ανάκλαση αντιστρέφει τον προσανατολισμό του κύκλου, χρησιμοποιούμε τον κύκλο $\mathcal{V}(\mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_3))$ και όχι τον $\mathcal{V}(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(S_3))$.

Θα χρησιμοποιήσουμε κατ΄ επανάληψη την ιδιότητα αυτή για να ανάγουμε αρκετές από τις παρακάτω εμφανιζόμενες περιπτώσεις σε κάποιες βασικές, τις οποίες και θα μελετήσουμε.



Σχήμα 5.3: Incircle(A, B, CD, Q) = Incircle$(B', A', C'D', Q')$

5.2 Έλεγχος αντικειμένου Q ως προς τον Voronoi κύκλο τριών αντικειμένων: Μια δική μας προσέγγιση

Στην ενότητα αυτή, μελετάμε το κατηγόρημα Incircle αναπτύσσοντας έναν καινούριο τρόπο αντιμετώπισης. Η μέθοδος αυτή αν και χρησιμοποιεί έξυπνα κάποια αλγεβρικά εργαλεία, δεν επιτυγχάνει στο να αποφανθεί πάντα με το ελάχιστο αλγεβρικό βαθμό- κόστος, και συγκεκριμένα σε τέσσερις περιπτώσεις τις οποίες θα μελετήσουμε στην ενότητα 5.3.

Θα χωρίσουμε την ανάλυση μας ανάλογα με το εάν το τέταρτο αντικείμενο Q είναι σημείο (P) ή τμήμα (S), σε δύο υποενότητες. Κάθε μία από αυτές, χωρίζεται ανάλογα με την μορφή που έχουν τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3 ενώ σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ότι ο κύκλος $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ ορίζεται, εκτός και εάν αναφέρεται διαφορετικά (ένας προσανατολισμένος κύκλος Voronoi δεν ορίζεται πάντα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2).

Για τις υποενότητες, θα συμβολίσουμε με P το αντικείμενο S_i εάν αυτό είναι σημείο και S εάν είναι τμήμα. Έτσι όταν αναφερόμαστε στη περίπτωση $PPSP$, θα εννοούμε ότι δύο από τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3 είναι σημεία και το άλλο είναι τμήμα, χωρίς να μας ενδιαφέρει πιο από αυτά έχει την συγκεκριμένη μορφή. Άλλωστε, εφόσον η κυκλική εναλλαγή των τριών πρώτων ορισμάτων του κατηγορήματος Incircle το αφήνει αναλλοίωτο, οι περιπτώσεις $(S_1, S_2, S_3) = (P, P, S)$ ή (P, S, P) ή (S, P, P) μπορούν να θεωρηθούν ως μια, την PPS.

Αντίστοιχα, ανάλογα με το εάν το αντικείμενο Q είναι σημείο (το σημείο Q) ή είναι τμήμα (το τμήμα QS) θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό P ή S. Για παράδειγμα εάν μελετάμε την περίπτωση PPS και το αντικείμενο Q είναι σημείο θα συμβολίζουμε την περίπτωση αυτή $PPSP$.

5.2.1 Η Περίπτωση $PPSP$

Έστω τα σημεία $S_1 = A$ και $S_2 = B$ και το ευθύγραμμο τμήμα $S_3 = CD$. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα θεωρήσουμε ότι το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, ενώ θα υποθέσουμε ακόμα ότι $x_C < x_D$. Επίσης, εφόσον ο κύκλος $\mathcal{V}(A, B, CD)$ ορίζεται, τα σημεία A και B βρίσκονται από την ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD}.

Εάν γνωρίζαμε το σημείο επαφής του $\mathcal{V}(A, B, CD)$ με το τμήμα CD, έστω P, τότε θα μπορούσαμε να αποφανθούμε ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) = \mathsf{Incircle}(A, B, P, Q)$. Για να υπολογίσουμε το σημείο P, θα πρέπει να υπολογίσουμε το κέντρο K του Voronoi κύκλου, και στην συνέχεια να υπολογίσουμε την προβολή του στο ευθύγραμμο τμήμα. Εφόσον το CD είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, αρκεί να βρούμε το x_K οπότε $P = (x_K, y_C)$.

Το κέντρο K αποτελεί την τομή της παραβολής που ορίζεται από το A και την ευθεία $\ell_{CD} : y = y_C$, η οποία είναι η

$$(x - x_A)^2 = (y_A - y_C)(2y - y_A - y_C)$$

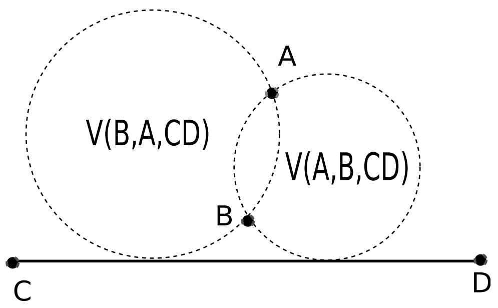
με την μεσοκάθετο των σημείων A, B, η οποία στην γενική περίπτωση (όταν δηλαδή $y_A \neq y_B$) είναι

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x\right)$$

. Την περίπτωση $y_A = y_B$ θα την μελετήσουμε αργότερα στην ενότητα αυτή.

Απαλοίφοντας από τις δύο παράπανω σχέσεις την μεταβλητή y, προκύπτει ότι το x_K είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$, όπου

$$\begin{aligned}
p_2 &= y_B - y_A \neq 0 \\
p_1 &= (y_B - y_C)(x_A - x_B) - 2x_B(y_B - y_A) \\
p_0 &= (y_B - y_A)x_B^2 + (y_C - y_B)\left[(x_B^2 - x_A^2) + (y_A - y_C)(y_B - y_A)\right]
\end{aligned}$$



Σχήμα 5.4: Οι δύο κύκλοι Voronoi που ορίζουν τα σημεία A, B και το τμήμα CD .

Η ύπαρξη δύο λύσεων για το x_K, έστω $x_1 < x_2$, είναι απόλυτα φυσιολογική καθώς είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία A, B και ταυτόχρονα εφάπτονται στην ευθεία CD (βλ. Σχήμα 5.4). Μόνο ένας όμως από τους δύο κύκλους, και άρα μόνο μία από τις ρίζες του $P(x)$, μας ενδιαφέρει και συγκεκριμένα αυτός στον οποίο τα αντικείμενα A, B, CD εμφανίζονται σε CCW φορά. Προκειμένου να εξακριβώσουμε αλγεβρικά για ποια ρίζα ενδιαφερόμαστε, κάνουμε μία γεωμετρική μελέτη όλων των δυνατών περιπτώσεων, η οποία φαίνεται στον Πίνακα 5.1.

Σχετική θέση A, B, CD	Μας ενδιαφέρει η ρίζα
$y_C < y_A < y_B$	x_1
$y_C < y_B < y_A$	x_2
$y_B < y_A < y_C$	x_2
$y_A < y_B < y_C$	x_1

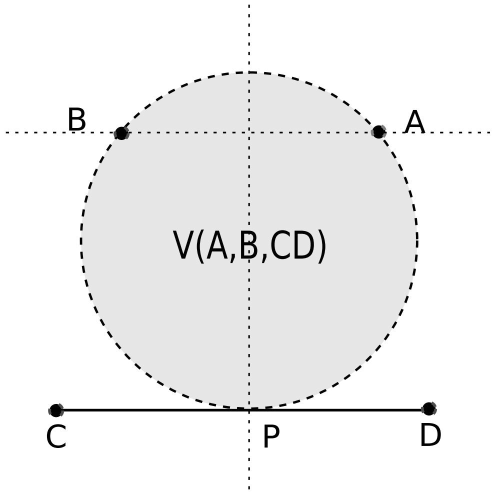
Πίνακας 5.1: Ρίζα του $P(x)$ που μας ενδιαφέρει όταν $y_A \neq y_B$.

Γνωρίζοντας λοιπόν ότι $x_K = x_i$ για κάποιο $i \in \{1, 2\}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της ορίζουσας

$$\mathsf{Incircle}(A,B,P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & x_K & y_C & x_K^2 + y_C^2 \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix}$$

Κάνοντας ανάλυση ως προς την τρίτη γραμμή και ομαδοποιώντας με βάση την μεταβλητή $x = x_K$, έχουμε ότι

$$\mathsf{Incircle}(A,B,P,Q) = Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$



Σχήμα 5.5: Ειδική περίπτωση όπου $y_A = y_B$

όπου

$$\begin{aligned}
q_2 &= -\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_Q & y_Q \end{vmatrix}, \\
q_1 &= -\begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix}, \\
q_0 &= \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & 0 & y_C & 0 \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix} + y_C^2 q_2
\end{aligned}$$

Για να βρούμε το πρόσημο του $Q(x)$ στην επιθυμητή ρίζα του $P(x)$, χρησιμοποιούμε είτε την μέθοδο της απαλοίφουσας είτε τις ακολουθίες Sturm, μεθοδολογίες που έχουμε αναπτύξει στο Κεφάλαιο 3 (βλ. Θεωρήματα 3.7 και 3.12).

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου $y_A = y_B$ (βλ. Σχήμα 5.5), οπότε και η μεσοκάθετος των σημείων A, B είναι η

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Εφόσον το κέντρο του κύκλου ανήκει σε αυτήν, προκύπτει ότι $x_K = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ και άρα το σημείο επαφής του Voronoi κύκλου με το τμήμα CD είναι το $P = (\frac{1}{2}(x_A + x_B), y_C)$.

Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μόνος ένας κύκλος Voronoi ο οποίος διέρχεται από τα 3 αντικείμενα αλλά δεν γνωρίζουμε εάν αυτός είναι ο προσανατολισμένος $\mathcal{V}(A, B, CD)$. Για την ακρίβεια, ο προσανατολισμένος Voronoi κύκλος δεν ορίζεται πάντα, ενώ ο παρακάτω πίνακας αναφέρει ποιος από τους $\mathcal{V}(A, B, CD)$ ή $\mathcal{V}(B, A, CD)$ ορίζεται κάθε φορά.

Σχετική θέση x_A, x_B	Σχετική θέση y_A, y_C	Κύκλος που ορίζεται
$x_A < x_B$	$y_A < y_C$	$\mathcal{V}(A, B, CD)$
	$y_A > y_C$	$\mathcal{V}(B, A, CD)$
$x_A > x_B$	$y_A < y_C$	$\mathcal{V}(B, A, CD)$
	$y_A > y_C$	$\mathcal{V}(A, B, CD)$

Στις περιπτώσεις που ο $\mathcal{V}(A, B, CD)$ ορίζεται, αρκεί να υπολογίσουμε το πρόσημο της ορίζουσας

$$\mathsf{Incircle}(A, B, P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) & y_C & \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + y_C^2 \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

Αλγόριθμος Υπολογισμού και Αλγεβρικοί Βαθμοί Για την γενική περίπτωση όπου το τμήμα CD είναι οριζόντιο και $y_A \neq y_B$:

1. Υπολογίζουμε τους συντελεστές p_2, p_1, p_0 του $P(x)$, οι οποίοι έχουν αλγεβρικό βαθμό 1, 2, 3 αντίστοιχα.

2. Υπολογίζουμε τους συντελεστές q_2, q_1, q_0 του $Q(x)$, οι οποίοι έχουν αλγεβρικό βαθμό 2, 3, 4 αντίστοιχα.

3. Ελέγχουμε ποια ρίζα x_i του $P(x)$ μας ενδιαφέρει, με βάση τον Πίνακα 5.1. Ο έλεγχος αυτός είναι αλγεβρικού βαθμού 1.

4. Κάνουμε χρήση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3, για να υπολογίσουμε το $\mathsf{Incircle} = sign(Q(x_i))$. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι $2(1 + 2 + 2) = 10$.

Για την ειδική περίπτωση όπου $y_A = y_B$ αρκεί να υπολογίσουμε το πρόσημο της ορίζουσας (5.1), με αλγεβρικό βαθμό 4.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή, θεωρώντας την περίπτωση όπου το τμήμα CD είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$. Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού $\mathcal{R}$, προκύπτει ότι

$$\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) = \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(B), \mathcal{R}(A), \mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(Q)).$$

Το τμήμα $\mathcal{R}(CD)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ εφόσον είναι η εικόνα τμήματος παράλληλο στον άξονα $y'y$ μέσω του $\mathcal{R}$, οπότε ο υπολογισμός του κατηγορήματος στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να γίνει σύμφωνα με την ανάλυση αυτής της ενότητας. Όσον αφορά τους αλγεβρικούς βαθμούς στην περίπτωση αυτή, ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός παραμένει 10, εφόσον οι συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου $\mathcal{R}(I)$, για $I \in \{A, B, C, D, Q\}$, είναι στην πραγματικότητα οι συντεταγμένες του σημείου I αντεστραμένες.

Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός 10, ο οποίος προκύπτει από την ανάλυση της υποενότητας αυτής μπορεί να μειωθεί περαιτέρω. Συγκεκριμένα στην Υποενότητα 5.3.2 (περίπτωση όπου το Q είναι σημείο), αποδεικνύουμε ότι ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου σημείου ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν δύο σημεία και ένα τμήμα παράλληλο σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 6 (βλ. Λήμμα (5.4)).

5.2.2 Η Περίπτωση $PSSP$

Έστω το σημείο $S_1 = A$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $S_2 = CD$ και $S_3 = EF$. Εφόσον κάθε ένα από τα τμήματα S_1 και S_2 είναι παράλληλο σε κάποιον από τους άξονες, τα CD και EF μπορεί να είναι είτε παράλληλα είτε κάθετα μεταξύ τους, οπότε θα μελετήσουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Έστω ότι τα τμήματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Θα υποθέσουμε ότι και τα δύο τμήματα είναι παράλληλα στον άξονα $x'x$ και επιπλέον ότι ισχύει $x_C < x_D$ και $x_E < x_F$. Για να ορίζεται ο Voronoi κύκλος των τριών αυτών αντικειμένων, το σημείο A βρίσκεται μεταξύ των δύο ευθειών ℓ_{CD}, ℓ_{EF}.

Παρατηρούμε ότι το κέντρο K του $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ βρίσκεται στην μεσοπαράλληλη ευθεία των δύο τμημάτων οπότε ισχύει ότι $y_K = \frac{1}{2}(y_C + y_E)$. Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι ίση με το μισό της απόστασης των ευθειών ℓ_{CD} και ℓ_{EF}, δηλαδή $\rho = \frac{1}{2}|y_C - y_E|$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι το σημείο A ανήκει Voronoi κύκλο, οπότε από την εξίσωση του κύκλου, προκύπτει ότι το x_K, ικανοποιεί την εξίσωση $P(x) = x^2 + p_1 x + p_0$ όπου

$$\begin{aligned} p_1 &= 2x_A, \\ p_0 &= x_A^2 + (y_A - y_C)(y_A - y_E). \end{aligned}$$

Ανάλογα με την σχετική θέση των τμημάτων CD και EF, η ρίζα του $P(x)$ που μας ενδιαφέρει είναι είτε η x_1 είτε η x_2 όπου $x_1 \leq x_2$, όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.2.

Σε κάθε περίπτωση, εφόσον τα σημεία επαφής του κύκλου με τα CD, EF είναι τα σημεία

Σχετική θέση CD, EF	Μας ενδιαφέρει η ρίζα
$y_E < y_C$	x_1
$y_E > y_C$	x_2

Πίνακας 5.2: Ρίζα του $P(x)$ που μας ενδιαφέρει για την περίπτωση όπου τα τμήματα CD, EF είναι παράλληλα με τον άξονα $x'x$.

(x_K, y_C) και (x_K, y_E) αντίστοιχα, θα πρέπει να υπολογίσουμε το πρόσημο της ορίζουσας

$$\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q) = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_K & y_C & x_K^2 + y_C^2 \\ 1 & x_K & y_E & x_K^2 + y_E^2 \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix}.$$

Η παραπάνω ορίζουσα είναι ένα πολυώνυμο $Q(x)$, δευτέρου βαθμού ως προς τη μεταβλητή $x = x_K$ και συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} Q(x) &= (y_E - y_C)(q_2 x^2 + q_1 x + q_0) \text{ όπου} \\ q_2 &= x_A - x_Q \\ q_1 &= \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 0 & 1 & y_E + y_C \\ 1 & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix} \\ q_0 &= \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 0 & 0 & 1 & y_E + y_C \\ 1 & x_Q & y_Q & x_Q^2 + y_Q^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Αρκεί να ελέγξουμε το πρόσημο του $Q(x)$, στην επιθυμητή ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, λαμβάνοντας υπόψιν το πρόσημο της ποσότητας $y_E - y_C$.

Αλγόριθμος Υπολογισμού και Αλγεβρικοί Βαθμοί

1. Υπολογίζουμε τους συντελεστές p_1, p_0 του $P(x)$, οι οποίοι έχουν αλγεβρικό βαθμό 1, 2 αντίστοιχα.

2. Υπολογίζουμε τους συντελεστές q_2, q_1, q_0 του $Q(x)$, οι οποίοι έχουν αλγεβρικό βαθμό 1, 2, 3 αντίστοιχα.

3. Υπολογίζουμε το πρόσημο του $y_E - y_C$, παράσταση αλγεβρικού βαθμού 1.

4. Ελέγχουμε ποια ρίζα x_i του $P(x)$ μας ενδιαφέρει, με βάση τον Πίνακα 5.2. Ο έλεγχος αυτός είναι αλγεβρικού βαθμού 1.

5. Κάνουμε χρήση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3, για να υπολογίσουμε το πρόσημο του $Q(x_i)$ και συνεπώς το $\mathsf{Incircle} = sign(y_E - y_C)sign(Q(x_i))$. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι $2(0+1+2) = 6$.

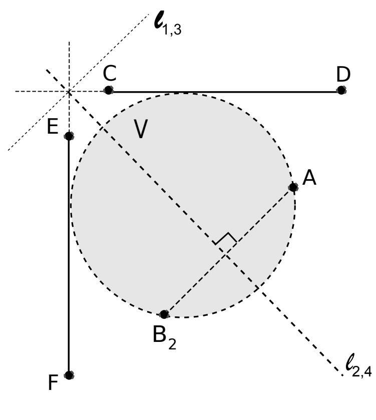
Στην περίπτωση όπου τα τμήματα CD, EF είναι παράλληλα με τον άξονα $y'y$, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$ οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q) &= \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(A), \mathcal{R}(EF), \mathcal{R}(Q)) \\ &= \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(EF), \mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(Q)).\end{aligned}$$

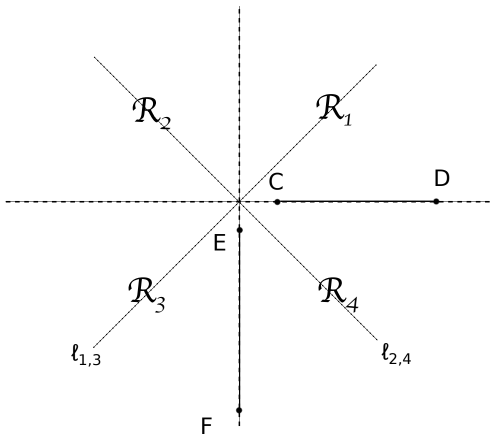
Λόγω του προσανατολισμού των τμημάτων CD και EF, τα τμήματα $\mathcal{R}(CD)$ και $\mathcal{R}(EF)$ είναι παράλληλα στον άξονα $x'x$ και άρα ο υπολογισμός του τελευταίου κατηγορήματος στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να γίνει με βάση την ανάλυση της υποενότητας αυτής. Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός και στην περίπτωση αυτή παραμένει 6, εφόσον οι συντεταγμένες των συμμετρικών σημείων είναι στην πραγματικότητα οι συντεταγμένες του αρχικών σημείων αντεστραμένες.

Έστω ότι τα τμήματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Θα υποθέσουμε ότι τα τμήματα CD, EF είναι παράλληλα στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και επιπλέον ότι ισχύει $x_C < x_D$ και $y_F < y_E$.

Ας αναλύσουμε λίγο τις πιθανές περιπτώσεις για την σχετική θέση των τμημάτων CD και EF και του σημείου A και τι συμπεράσματα μπορούμε να αντλήσουμε από αυτήν. Εφόσον οι ευθείες ℓ_{CD} και ℓ_{EF} είναι κάθετες μεταξύ τους, ορίζουν τέσσερα άπειρα χωρία στο επίπεδο, έστω τα R_i για $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (βλ. Σχήμα 5.7). Δεδομένου ότι ο κύκλος



Σχήμα 5.6: Περίπτωση όπου τα τμήματα CD, EF είναι κάθετα μεταξύ τους.



Σχήμα 5.7: Τα τμήματα CD και EF χωρίζουν το χώρο $\mathbb{R}^2$ στα χωρία R_i, για $i \in \{1,2,3,4\}$. Τα χωρία R_1, R_3 έχουν διχοτόμο την ευθεία $\ell_{1,3}$ και αντίστοιχα τα χωρία R_2, R_4 την ευθεία $\ell_{2,4}$.

$\mathcal{V}(A, CD, EF)$ ορίζεται, το σημείο A βρίσκεται γνήσια σε κάποιο από τα χωρία R_i, δηλαδή δεν ανήκει σε κάποια από τις ευθείες ℓ_{CD}, ℓ_{EF} (το σημείο A μπορεί να ανήκει σε κάποια από τις ευθείες ℓ_{CD}, ℓ_{EF} εάν και μόνο εάν ταυτίζεται με κάποιο άκρο τμήματος, οπότε για αυτήν την περίπτωση βλ. Ενότητα 5.4).

Εάν θεωρήσουμε T το σημείο τομής των ευθειών ℓ_{CD} και ℓ_{EF}, τότε τα χωρία R_1 και R_3 (αντίστοιχα R_2 και R_4) έχουν διχοτόμο την ευθεία $\ell_{1,3}$ (αντίστοιχα $\ell_{2,4}$) η οποία είναι παράλληλη στην $y = x$ ($y = -x$) και διέρχεται από το T. Οι εξισώσεις των ευθειών $\ell_{1,3}$ και $\ell_{2,4}$ είναι

$$\ell_{1,3} : y = x + y_C - x_E$$
$$\ell_{2,4} : y = -x + y_C + x_E.$$

Γνωρίζοντας το χωρίο R_i στο οποίο ανήκει το σημείο A, προκύπτει από την γεωμετρία του προβλήματος ότι το συμμετρικό του ως προς την αντίστοιχη διχοτόμο του χωρίου ανήκει και αυτό στο κύκλο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$. Εάν θεωρήσουμε B_1 (αντίστοιχα B_2) το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $\ell_{1,3}$ (αντίστοιχα $\ell_{2,4}$), τότε γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ ταυτίζεται με έναν από τους $\mathcal{V}(A, B, CD), \mathcal{V}(B, A, CD)$ για $B \in \{B_1, B_2\}$.

Συγκεκριμένα, εάν $A \in \{R_1, R_3\}$ (αντίστοιχα $\{R_2, R_4\}$) τότε επιλέγουμε $B = B_1$ (αντίστοιχα $B = B_2$). Γνωρίζοντας πλέον ότι ο Voronoi κύκλος που ορίζεται από τα αντικείμενα A, CD, EF είναι ο ίδιος ο οποίος ορίζεται από τα αντικείμενα A, B, CD, χρειάζεται να βρούμε με ποια σειρά εμφανίζονται τα δεύτερα στον $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ σε CCW φορά. Για τον έλεγχο αυτόν, εξετάζουμε εάν το A βρίσκεται πιο κοντά στον φορέα του τμήματος EF οπότε $\mathcal{V}(A, CD, EF) \equiv \mathcal{V}(A, B, CD)$, ή στον φορέα του τμήματος CD οπότε $\mathcal{V}(A, CD, EF) \equiv \mathcal{V}(B, A, CD)$.

Τελικά, ο υπολογισμός του $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q)$ ανάγεται στον υπολογισμό του

Incircle(A, B, CD, Q) ο οποίος μπορεί να γίνει με βάση την προηγούμενη υποενότητα. Συγκεκριμένα, αρκεί να θέσουμε τις συντεταγμένες του $B = B_i$ στο πολυώνυμο $Q(x)$ της υποενότητας 5.2.2 καθώς και στο αντίστοιχο $P(x)$. Τελικά αρκεί να υπολογίσουμε Incircle$(A, B, CD, Q) = sign(Q(x_j))$, όπου x_j μία από τις δύο ρίζες $x_1 \leq x_2$ του $P(x)$. Η ρίζα του $P(x)$ που αντιστοιχεί στο προσανατολισμένο κύκλο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$, αναφέρεται στον Πίνακα 5.3 .

Σχετική θέση A, CD, EF	Κατάλληλο B	x_j
$x_A, x_C > x_E$ και $y_A, y_F > y_C$	$B_1 = (y_A - y_C + x_E, x_A + y_C - x_E)$	x_2
$x_A, x_C < x_E$ και $y_A, y_F > y_C$	$B_2 = (-y_A + y_C + x_E, -x_A + y_C + x_E)$	x_2
$x_A, x_D < x_E$ και $y_A, y_E < y_C$	$B_1 = (y_A - y_C + x_E, x_A + y_C - x_E)$	x_1
$x_A, x_D > x_E$ και $y_A, y_E < y_C$	$B_2 = (-y_A + y_C + x_E, -x_A + y_C + x_E)$	x_1

Πίνακας 5.3: Κατάλληλη επιλογή συμμετρικού σημείου B_i και ρίζας του $P(x)$, ανάλογα με την σχετική θέση των σημείων A, C, D, E, F.

Αλγόριθμος Υπολογισμού και Αλγεβρικοί Βαθμοί

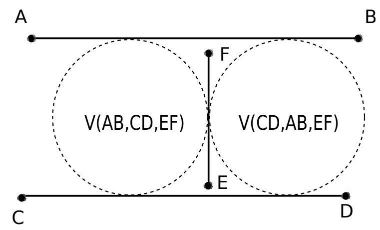
1. Ελέγχουμε ποιο είναι το κατάλληλο B με βάση τον Πίνακα 5.3, καθώς και ποια από τις ρίζες x_j μας ενδιαφέρει. Ο αλγεβρικός βαθμός του ελέγχου αυτού είναι 1.

2. Υπολογίζουμε τους συντελεστές p_2, p_1, p_0 του $P(x)$ της Υποενότητας 5.2.2 , οι οποίοι έχουν αλγεβρικό βαθμό 1, 2, 3 αντίστοιχα.

3. Υπολογίζουμε τους συντελεστές q_2, q_1, q_0 του $Q(x)$ της Υποενότητας 5.2.2 , οι οποίοι έχουν αλγεβρικό βαθμό 2, 3, 4 αντίστοιχα.

4. Κάνουμε χρήση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3, για να υπολογίσουμε το πρόσημο του Incircle $= sign(Q(x_i))$. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι $2(1 + 2 + 2) = 10$.

Σημείωση. Εάν το σημείο B που επιλέξαμε μετά το 1ο βήμα ικανοποιεί την σχέση $y_B = y_A$, τότε το Incircle (A, CD, EF, Q) ισούται με το πρόσημο της ορίζουσας (5.1), η οποία έχει αλγεβρικό βαθμό 4.



Σχήμα 5.8: Περίπτωση Voronoi κύκλου 3 τμημάτων.

Ολοκληρώνουμε την υποενότητα, μελετώντας την περίπτωση που το τμήμα CD είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ και το EF κάθετο σε αυτό. Τότε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q) &= \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(A), \mathcal{R}(EF), \mathcal{R}(Q)) \\ &= \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(EF), \mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(Q)).\end{aligned}$$

Το τμήμα $\mathcal{R}(EF)$ είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ και το $\mathcal{R}(CD)$ στον άξονα $x'x$ αντίστοιχα, οπότε το τελευταίο κατηγόρημα στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να υπολογιστεί με βάση την ανάλυση της υποενότητας αυτής. Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός στην περίπτωση αυτή παραμένει ίδιος, δηλαδή 10. Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερο άνω φράγμα στον αλγεβρικό βαθμό για την περίπτωση όπου τα τμήματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, με βάση την μεθοδολογία της Υποενότητας 5.3.2, μπορούμε να επιτύχουμε μέγιστο αλγεβρικό βαθμό 6 για κάθε περίπτωση προσανατολισμού των τμημάτων (βλ. Λήμμα (5.6)).

5.2.3 Η Περίπτωση $SSSP$

Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα $S_1 = AB, S_2 = CD$ και $S_3 = EF$, κάθε ένα από τα οποία είναι παράλληλα με κάποιον άξονα. Εφόσον ο Voronoi κύκλος των τμημάτων ορίζεται, δύο από αυτά είναι παράλληλα μεταξύ τους και το τρίτο είναι κάθετο σε αυτά. Έστω λοιπόν τα AB, CD παράλληλα στον $x'x$, με $x_A < x_B$ και $x_C < x_D$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το EF είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$, με $y_E < y_F$.

Από τα παραπάνω δεδομένα, προκύπτει ότι το κέντρο K του $\mathcal{V}(AB, CD, EF)$ βρίσκεται στην μεσοπαράλληλη των τμημάτων AB, CD, δηλαδή $y_K = \frac{1}{2}(y_C + y_A)$, ενώ η ακτίνα του ρ είναι το μισό της απόστασης των δύο τμημάτων, δηλαδή $\rho = \frac{1}{2}|y_C - y_A|$. Εφόσον ο κύκλος εφάπτεται στο EF, το κέντρο του είναι το $K = (x_E + \frac{1}{2}(y_C - y_A), \frac{1}{2}(y_C + y_A))$ οπότε, για να ελέγξουμε εάν το Q είναι εκτός του κύκλου, αρκεί να ελέγξουμε εάν το πρόσημο της παράστασης

$$\begin{aligned}\mathsf{Incircle}(AB, CD, EF, Q) &= 4[(x_K - x_Q)^2 + (y_K - y_Q)^2 - \rho^2] \\ &= 4(x_E - x_Q)(1 + y_C - y_A) + (y_C + y_A - 2y_Q)^2\end{aligned}$$

είναι θετικό. Προφανώς ο έλεγχος αυτός είναι απαραίτητος μόνο στην περίπτωση όπου το σημείο Q βρίσκεται στο ίδιο χωρίο του επιπέδου που ορίζεται από τις ευθείες $\ell_{AB}, \ell_{CD}, \ell_{EF}$ και το σημείο A, δηλαδή ισχύει $y_A < y_Q < y_C$ και $x_Q > x_E$. Σε αντίθετη περίπτωση, το Q δεν μπορεί να είναι εντός του Voronoi κύκλου των τριών αυτών αντικειμένων και άρα Incircle $(AB, CD, EF, Q) > 0$.

Ολοκληρώνουμε την υποενότητα αυτή μελετώντας όλες τις δυνατές εκδοχές των προσανατολισμών των τμημάτων S_1, S_2 και S_3. Αναφέραμε στην αρχή ότι για να ορίζεται ο κύκλος $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$, πρέπει δύο από τα τμήματα αυτά να είναι παράλληλα μεταξύ τους και το άλλο κάθετο σε αυτά. Συγκεκριμένα μελετήσαμε την περίπτωση όπου τα S_1 και S_2 είναι παράλληλα στον άξονα $x'x$ και το S_3 είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$. Εάν αντί για το $\{S_1, S_2\}$ υπήρχε κάποιο άλλο ζεύγος τμημάτων από τα S_1, S_2, S_3 όπου θα ήταν παράλληλα με τον άξονα $x'x$ και το τρίτο τμήμα θα ήταν κάθετο σε αυτά, τότε με κατάλληλη κυκλική εναλλαγή θα μπορούσαμε να φέρουμε τα πρώτα τρία ορίσματα του αντίστοιχου Incircle έτσι ώστε τα δύο πρώτα να ήταν το εν λόγω ζεύγος, οπότε και ο υπολογισμός του κατηγορήματος θα ήταν εφικτός με βάση την υπάρχουσα ανάλυση.

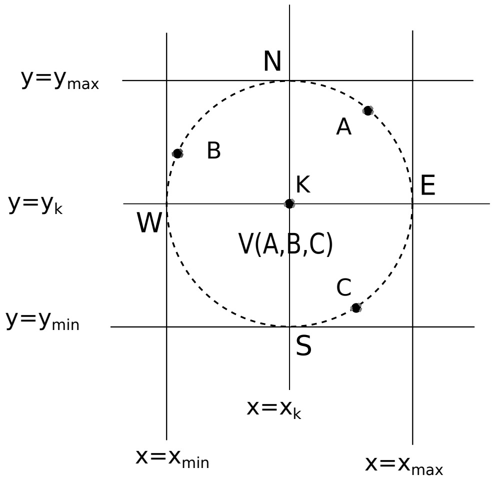
Στην περίπτωση όπου δύο από τα τρία τμήματα S_1, S_2, S_3 είναι παράλληλα με τον άξονα $y'y$ και το άλλο κάθετο σε αυτά τότε, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$ θα είχαμε ότι

$$\mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, Q) = \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2), \mathcal{R}(S_3), \mathcal{R}(Q)).$$

Όμως, στο σύνολο $\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_3), \mathcal{R}(S_3)$ δύο από τα τρία τμήματα είναι παράλληλα στον πραγματικό άξονα και το άλλο παράλληλο στο φανταστικό και συνεπώς ο υπολογισμός του κατηγορήματος στο δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας είναι εφικτός με βάση την υπάρχουσα ανάλυση.

Σε κάθε περίπτωση, λόγω της γραμμικότητας του μετασχηματισμού $\mathcal{R}$, ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται παραμένει ίδιος, δηλαδή 2.

Λήμμα 5.1. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου σημείου ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν τρία τμήματα παράλληλα σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 2.*



Σχήμα 5.9: Οι βασικές ευθείες του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, C)$.

5.2.4 Μια γενική μελέτη για την περίπτωση όπου το τέταρτο αντικείμενο είναι ευθύγραμμο τμήμα

Στις υποενότητες που ακολουθούν, θα μελετήσουμε την σχετική θέση ενός τμήματος QS, το οποίο είναι παράλληλο σε κάποιον άξονα και του κύκλου Voronoi τον οποίο ορίζουν τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3. Ανεξάρτητα από το τι αντικείμενα είναι τα S_i, σε κάθε μία από τις αναλύσεις που ακολουθούν ακολουθούμε την ίδια στρατηγική.

Αρχικά εξετάζουμε εάν τα άκρα Q, S βρίσκονται εντός του $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ κάνοντας χρήση των αντίστοιχων Incircle, όπως αυτά αναπτύχθηκαν στις Ενότητες 5.2.1-5.2.3.

Στην περίπτωση όπου τουλάχιστον ένα από τα σημεία Q, S βρίσκεται εντός του $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ ή βρίσκονται και τα δύο επί του κύκλου, συμπεραίνουμε ότι το τμήμα QS τέμνει τον $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ και άρα Incircle$(S_1, S_2, S_3, QS) < 0$.

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, χρειάζεται να ελέγξουμε εάν το εσωτερικό του τμήματος QS τέμνει, εφάπτεται ή βρίσκεται εξ ολοκλήρου εκτός του $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$.

Για να εξετάσουμε εάν το εσωτερικό του τμήματος QS τέμνει τον κύκλο που ορίζουν τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3, ελέγχουμε την σχετική θέση των άκρων Q, S ως προς:

- τις μέγιστες και ελάχιστες θέσεις των σημείων του κύκλου, που ορίζονται από τις ευθείες $y = y_{min}, y = y_{max}$ και $x = x_{min}, x = x_{max}$, και
- τις ευθείες $x = x_K$ και $y = y_K$, όπου K το κέντρο του $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$.

Τις ευθείες αυτές θα τις ονομάζουμε *βασικές ευθείες* ενός Voronoi κύκλου για το υπόλοιπο του Κεφαλαίου 5.2.4 (βλ. Σχήμα 5.9).

Με βάση τα σημεία αυτά, και ανάλογα τον προσανατολισμό του τμήματος QS δημιουργούμε ένα πλέγμα το οποίο χωρίζει το εξωτερικό του κύκλου σε 6 χωρία (βλ. Σχήμα 5.10). Γνωρίζοντας σε ποια από αυτά τα χωρία αυτά βρίσκονται τα άκρα του τμήματος, Q

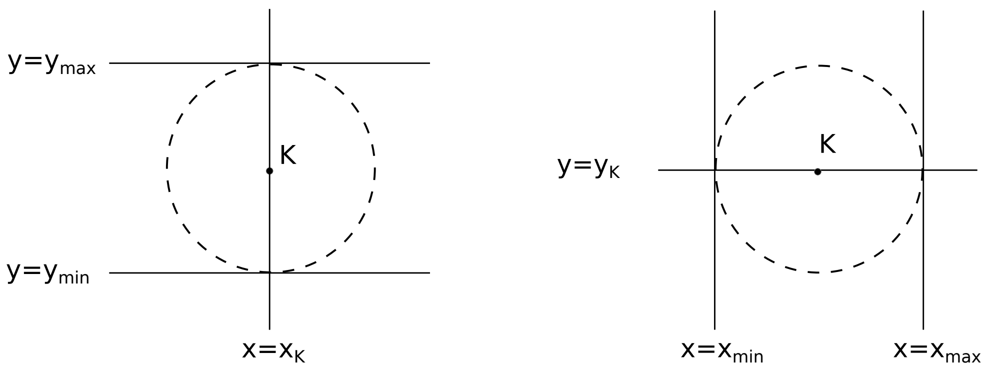
και S και δεδομένου του προσανατολισμού του τμήματος QS, μπορούμε να αποφανθούμε με σχετική ευκολία για την σχετική θέση του τμήματος και του Voronoi κύκλου, με βάση την παρακάτω μεθοδολογία.

Στην περίπτωση του οριζόντιου τμήματος, χρειάζεται να ελέγξουμε την θέση των άκρων ως προς τις ευθείες $y = y_{min}, y = y_{max}$ και $x = x_K$:

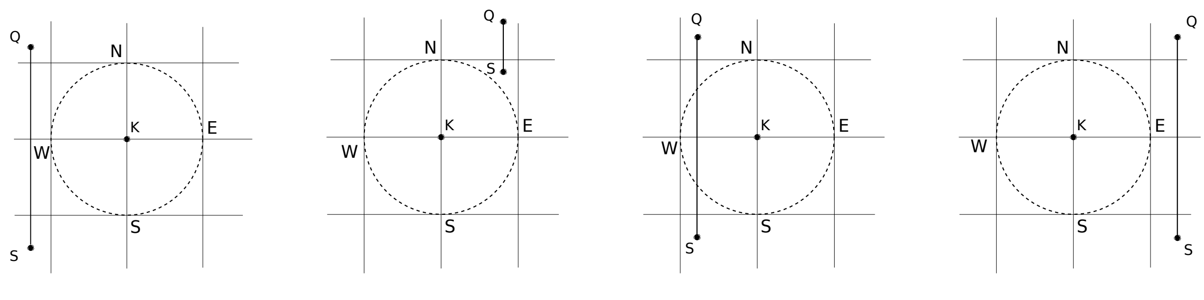
1. εάν κάποιο από τα σημεία Q, S βρίσκεται γνήσια εκτός της ζώνης $\mathcal{Z}_y$ που ορίζουν οι ευθείες $y = y_{min}, y = y_{max}$, τότε συμπεραίνουμε αυτόματα ότι το τμήμα QS δεν τέμνει τον κύκλο $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$, δηλαδή $\mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, QS) > 0$.

2. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή κάποιο από τα σημεία Q, S (άρα και τα δύο) βρίσκονται γνήσια εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_y$ που ορίζουν οι ευθείες $y = y_{min}, y = y_{max}$ (αντίστοιχα ανήκουν σε κάποια από τις ευθείες αυτές) τότε χρειάζεται να ελέγξουμε την σχετική θέση των Q, S ως προς την ευθεία $x = x_K$· το τμήμα QS τέμνει (αντίστοιχα εφάπτεται) στον κύκλο $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ εάν και μόνο εάν τα σημεία Q, S βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της $x = x_K$.

Στην περίπτωση του κατακόρυφου τμήματος, χρειάζεται να ελέγξουμε την θέση των



Σχήμα 5.10: Ανάλογα με τον προσανατολισμό του τμήματος QS χρειάζεται να ελέγξουμε την θέση των άκρων Q, S ως προς 3 τρεις ευθείες. Αριστερά: οι εν λόγω ευθείες για την περίπτωση όπου το QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, Δεξιά: αντίστοιχα στον φανταστικό άξονα.



Σχήμα 5.11: Παραδείγματα σχετικής θέσης κατακόρυφου τμήματος QS και Voronoi κύκλου.

άκρων ως προς τις ευθείες $x = x_{min}, x = x_{max}$ και $y = y_K$:

1. εάν κάποιο από τα σημεία Q, S βρίσκεται γνήσια εκτός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ που ορίζουν οι ευθείες $x = x_{min}, x = x_{max}$, τότε συμπεραίνουμε αυτόματα ότι το τμήμα QS δεν τέμνει τον κύκλο $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$, δηλαδή $\mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, QS) > 0$.

2. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή κάποιο από τα σημεία Q, S (άρα και τα δύο) βρίσκονται γνήσια εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ που ορίζουν οι ευθείες $x = x_{min}, x = x_{max}$ (αντίστοιχα ανήκουν σε κάποια από τις ευθείες αυτές) τότε χρειάζεται να ελέγξουμε την σχετική θέση των Q, S ως προς την ευθεία $y = y_K$· το τμήμα QS τέμνει (αντίστοιχα εφάπτεται) στον κύκλο $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ εάν και μόνο εάν τα σημεία Q, S βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της $y = y_K$.

Στην υποενότητες που ακολουθούν θα μελετήσουμε κάθε πιθανό συνδυασμό όσον αφορά την μορφή των αντικειμένων S_1, S_2, S_3. Σε κάθε περίπτωση, χρειάζεται να κάνουμε τον παραπάνω έλεγχο δηλαδή να ελέγξουμε αρχικά τα άκρα του τμήματος QS και στην συνέχεια το εσωτερικό του ως προς τον Voronoi κύκλο των S_i. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ως δεδομένο στις αναλύσεις που ακολουθούν ότι τα άκρα Q, S βρίσκονται εκτός του $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ και θα αναπτύξουμε μεθόδους ελέγχου ως προς τις βασικές ευθείες. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε πως να ελέγχουμε εάν ένα σημείο (συγκεκριμένα το Q ή το S) βρίσκεται εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ ή της $\mathcal{Z}_y$ και πως μπορούμε να βρούμε την πλευρά της ευθείας $x = x_K$ ή $y = y_K$ στην οποία ανήκει.

5.2.5 Η περίπτωση $PPPS$

Στην υποενότητα αυτή, θεωρούμε τα αντικείμενα $S_1 = A$, $S_2 = B$ και $S_3 = C$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mathsf{Incircle}(A, B, C, QS)$. Αρκεί να θεωρήσουμε στην περίπτωση αυτή ότι το τμήμα QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα. Πράγματι, εάν γνωρίζουμε πως να υπολογίσουμε το κατηγόρημα στην περίπτωση αυτή, τότε εάν το QS είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, τότε, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$ προκύπτει ότι

$$\mathsf{Incircle}(A, B, C, QS) = \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B), \mathcal{R}(C), \mathcal{R}(QS))$$

Το κατηγόρημα στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να υπολογιστεί όμως, εφόσον το τμήμα $\mathcal{R}(QS)$ είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$.

Κάνοντας λοιπόν την παραδοχή ότι το QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, χρειάζεται να ελέγξουμε εάν το σημείο Q βρίσκεται εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ και στην συνέχεια, εάν ανήκει, να ελέγξουμε την σχετική θέση των Q και S ως προς την $y = y_K$.

Για τον έλεγχο ως προς τη ζώνη $\mathcal{Z}_x$, χρειάζεται να ελέγξουμε εάν $x_Q \in [x_{min}, x_{max}]$, όπου x_{min}, x_{max} η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της τετμημένης ενός σημείου του $\mathcal{V}(A, B, C)$. Προκειμένου να κάνουμε τον παραπάνω έλεγχο, θα υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το οποίο θα έχει ρίζες τις τιμές x_{min}, x_{max}, οπότε ελέγχοντας το πρόσημο του πολυωνύμου αυτού στην τιμή x_Q θα μπορούμε να αποφανθούμε εάν $x_Q \in [x_{min}, x_{max}]$.

Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο πολυώνυμο, αρχικά αξιοποιούμε το γεγονός ότι

$$\mathsf{Incircle}(A, B, C, (x, y)) = U(y; x) = U_2 y^2 + U_1 y + U_0(x)$$

όπου

$$U_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$$

$$U_1 = -\begin{vmatrix} 1 & x_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & x_C & x_C^2 + y_C^2 \end{vmatrix}$$

$$U_0(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 \\ 1 & x & 0 & x^2 \end{vmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $U(y; x)$ είναι μηδέν εάν και μόνο εάν το $(x, y) \in \mathcal{V}(A, B, C)$. Επιπλέον, για $x^\star \in \mathbb{R}$ οι ρίζες του $U(y; x^\star)$ αντιστοιχούν στις τεταγμένες των σημείων τομής του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, C)$ με την ευθεία $x = x^\star$. Είναι όμως προφανές ότι όταν $x^\star \in \{x_{min}, x_{max}\}$, το πολυώνυμο $U(y; x^\star)$ έχει διπλή ρίζα την $y = y_K$. Από αυτό συνεπάγεται ότι η ορίζουσα του $U(y; x)$ ως προς y, $\Delta(x) = U_1^2 - 4U_2 U_0(x)$ μηδενίζεται για $x \in \{x_{min}, x_{max}\}$. Αναπτύσσοντας το πολυώνυμο $\Delta(x) = \Delta_2 x^2 + \Delta_1 x + \Delta_0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= -4U_2^2 \quad (\neq 0, \text{εφόσον τα } A, B, C \text{ δεν είναι συνευθειακά}) \\
\Delta_1 &= -4U_2 V_1 \\
\Delta_0 &= U_1^2 + 4U_2 W \\
W &= \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 \end{vmatrix} \\
V_1 &= \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & y_C & x_C^2 + y_C^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο όμως $\Delta(x)$ έχει αρνητικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή, οπότε ισχύει ότι $x_Q \in [x_{min}, x_{max}]$ εάν και μόνο εάν $\Delta(x_Q) \leq 0$. Συνεπώς, το σημείο Q ανήκει γνήσια στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$ εάν και μόνο εάν $\Delta(x_Q) > 0$, και αντίστοιχα βρίσκεται γνήσια εκτός της $\mathcal{Z}_x$ εάν και μόνο εάν $\Delta(x_Q) < 0$. Στην περίπτωση όπου η ποσότητα $\Delta(x_Q)$ είναι μηδέν τότε εάν $\frac{d}{dx}\Delta(x_Q) > 0$ (αντίστοιχα < 0) τότε ισχύει $x_Q = x_{min}$ (αντίστοιχα $x_Q = x_{max}$).

Για τον έλεγχο των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $y = y_K$, γνωρίζουμε ότι το y_K είναι η διπλή ρίζα του πολυωνύμου $U(y; x^\star)$, όπου $x^\star \in \{x_{min}, x_{max}\}$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $y_K = \frac{-U_1}{2U_2}$, όπου όμως οι συντελεστές U_1 και U_2 δεν είναι συνάρτηση του $x^\star$. Τελικά, για να ελέγξουμε την σχετική θέση των σημείων Q και S ως προς την $y = y_K$, αρκεί να ελέγξουμε τα πρόσημα των ποσοτήτων $2U_2 y_Q + U_1$ και $2U_2 y_S + U_1$· τα Q και S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της $y = y_K$ εάν και μόνο εάν οι ποσότητες αυτές είναι ομόσημες.

Αλγόριθμος Υπολογισμού και Αλγεβρικοί Βαθμοί Δεδομένου ότι τα σημεία Q και S είναι εκτός του $\mathcal{V}(A, B, C)$,

1. Ελέγχουμε τον προσανατολισμό του τμήματος QS, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1, και στην περίπτωση όπου είναι παράλληλο με τον πραγματικό άξονα υπολογίζουμε τα σημεία $\mathcal{R}(I)$ για $I \in \{A, B, C, Q, S\}$. Ο αλγεβρικός βαθμός του υπολογισμού αυτού είναι 0.

2. Ελέγχουμε το πρόσημο της παράστασης $\Delta(x_Q)$, η οποία έχει αλγεβρικό βαθμό 6. Εάν $\Delta(x_Q) < 0$ τότε $\mathsf{Incircle}(A, B, C, QS) > 0$, ειδάλλως,

3. Ελέγχουμε εάν οι ποσότητες $2U_2 y_Q + U_1$ και $2U_2 y_S + U_1$ είναι ομόσημες. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμό αυτόν είναι 3. Εάν οι ποσότητες αυτές είναι ομόσημες τότε $\mathsf{Incircle}(A, B, C, QS) > 0$, ειδάλλως συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, C, QS) < 0$ (αντίστοιχα $\mathsf{Incircle}(A, B, C, QS) = 0$) εάν $\Delta(x_Q) > 0$ (αντίστοιχα $\Delta(x_Q) = 0$).

Λήμμα 5.2. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του* Incircle *για την περίπτωση ελέγχου τμήματος παράλληλου σε κάποιον άξονα ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν τρία σημεία είναι το πολύ 6.*

5.2.6 Η περίπτωση $PPSS$

Θεωρούμε τα σημεία $S_1 = A, S_2 = B$ και το τμήμα $S_3 = CD$ το οποίο είναι παράλληλο σε κάποιον άξονα, ας υποθέσουμε στον πραγματικό. Βασιζόμενοι στην ανάλυση που έχει προηγηθεί στην Υποενότητα 5.2.2, γνωρίζουμε ότι εάν τα σημεία A, B δεν ισαπέχουν από το τμήμα CD (δηλαδή $y_A \neq y_B$) και θεωρήσουμε K το κέντρο του $\mathcal{V}(A, B, CD)$ τότε το σημείο επαφής του κύκλου με το τμήμα CD είναι το (x_K, y_C), όπου το x_K είναι μία από τις ρίζες $x_1 \leq x_2$ του πολυωνύμου $P(x) = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$, όπου

$$
\begin{aligned}
p_2 &= y_B - y_A \neq 0 \\
p_1 &= (y_B - y_C)(x_A - x_B) - 2x_B(y_B - y_A) \\
p_0 &= (y_B - y_A)x_B^2 + (y_C - y_B)\left[(x_B^2 - x_A^2) + (y_A - y_C)(y_B - y_A)\right]
\end{aligned}
$$

Επίσης γνωρίζουμε ποια από τις δύο ρίζες του $P(x)$ αντιστοιχεί στον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, CD)$, ανάλογα με την σχετική θέση των αρχικών αντικειμένων A, B, CD, όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.4.

Σχετική θέση A, B, CD	Μας ενδιαφέρει η ρίζα
$y_C < y_A < y_B$	x_1
$y_C < y_B < y_A$	x_2
$y_B < y_A < y_C$	x_2
$y_A < y_B < y_C$	x_1

Πίνακας 5.4: Ρίζα του $P(x)$ που μας ενδιαφέρει όταν $y_A \neq y_B$.

Πριν προχωρήσουμε στον έλεγχο του σημείου Q ως προς τις ζώνες $\mathcal{Z}_x$ και $\mathcal{Z}_y$ και τις ευθείες $x = x_K$ και $y = y_K$, ελέγχουμε εάν τουλάχιστον ένα από τα σημεία Q, S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD} με τα A, B. Ο έλεγχος αυτός είναι βασικός καθώς εάν κανένα από τα Q, S δεν βρίσκεται από την ίδια πλευρά που βρίσκονται τα A και B, τότε γνωρίζουμε αυτόματα ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, FG) > 0$. Για να κάνουμε τον έλεγχο αυτό, αρκεί να ελέγξουμε τα πρόσημα των ποσοτήτων $y_B - y_C$ και $y_I - y_C$ για $I \in \{Q, S\}$· τα σημεία A, B και I είναι στην ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD} εάν και μόνο εάν οι ποσότητες αυτές είναι ομόσημες.

Για τον έλεγχο του σημείου Q ως προς τη ζώνη $\mathcal{Z}_x$, θα χρησιμοποιήσουμε παρόμοια ανάλυση με αυτήν της προηγούμενης υποενότητας. Γνωρίζουμε ότι για τα σημεία $(x, y) \in \mathcal{V}(A, B, CD)$ τα οποία ανήκουν στον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, CD)$, ισχύει ότι

$$\mathsf{Incircle}(A, B, CD, (x, y)) = \mathsf{Incircle}(A, B, (x_K, y_C), (x, y)) = U(y; x, x_K) = 0$$

Είναι λοιπόν προφανές ότι οι ρίζες του y-πολυωνύμου $U(y; x^\star, x_K)$ για $x^\star \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούν στις τεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας $x = x^\star$ και του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$. Από την γεωμετρία του προβλήματος γνωρίζουμε ότι για $x^\star \in \{x_{min}, x_{max}\}$ το δευτέρου βαθμού πολυώνυμο ως προς την μεταβλητή y, $U(y; x^\star, x_K) = U_2(x_K)y^2 + U_1(x_K)y + U_0(x^\star, x_K)$ έχει διπλή ρίζα την $y = y_K$. Αυτό σημαίνει ότι η ορίζουσα του, $\Delta(x; x_K) = U_1(x_K)^2 - 4U_2(x_K)U_0(x, x_K)$ είναι μηδέν εάν και μόνο εάν $x \in \{x_{min}, x_{max}\}$. Το πολυώνυμο $\Delta(x; x_K)$ είναι δευτέρου βαθμού ως προς την μεταβλητή x και ειδικότερα ο συντελεστής του x^2 είναι γνήσια αρνητικός για κάθε $x_K \in \{x_1, x_2\}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $x_Q \in [x_{min}, x_{max}]$ εάν και μόνο εάν $\Delta(x_Q; x_K) \geq 0$, οπότε στην περίπτωση όπου $\Delta(x_Q; x_K) < 0$ (αντίστοιχα > 0) το σημείο Q βρίσκεται γνήσια εκτός (εντός) της ζώνης $\mathscr{Z}_x$. Τέλος, στην περίπτωση όπου η τιμή $\Delta(x_Q; x_K)$ είναι μηδέν το Q ανήκει σε κάποια από τις ευθείες $x = x_{min}$ ή $x = x_{max}$.

Για να υπολογίσουμε την παράσταση $\Delta(x_Q; x_K)$, την εκφράζουμε ως πολυώνυμο της μεταβλητής x_K:

$$\Delta(x_Q; x_k) = \sum_{i=0}^{4} \delta_i x_k^i$$

όπου

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{vmatrix}^2, \qquad \delta_3 = -4 \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B^2 + y_B^2 \end{vmatrix} - 4 \left(\begin{vmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_Q & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$\delta_1 = 4 \left(\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 1 & x_Q & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & x_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & 0 & y_C^2 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 1 & x_Q & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix}$$

Όμως, όπως αναφέραμε στην αρχή, το x_K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, και άρα ο υπολογισμός του $\Delta(x_Q; x_K)$ ανάγεται στο υπολογισμό του προσήμου ενός πολυωνύμου τετάρτου βαθμού σε μια συγκεκριμένη ρίζα ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού. Ο υπολογισμός αυτός είναι εφικτός με βάση την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 (βλ. Θεώρημα 3.8).

Στην περίπτωση όπου $y_A = y_B$, ο υπολογισμός της παράστασης $\Delta(x_Q; x_K)$ απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό εφόσον $x_K = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$. Συγκεκριμένα, προκύπτει ότι αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_Q, x_K) &= 4\begin{vmatrix} 1 & x_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & x_B & x_B^2+y_B^2 \\ 4 & 2(x_A+x_B) & (x_A+x_B)^2+4y_C^2 \end{vmatrix}^2 \\
&\quad - \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 4 & 2(x_A+x_B) & 4y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2+y_B^2 \\ 4 & 2(x_A+x_B) & 4y_C & (x_A+x_B)^2+4y_C^2 \\ 1 & x_Q & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Για να ελέγξουμε εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$, υπολογίζουμε με ανάλογο τρόπο, το πολυώνυμο $E(y_Q; x_K)$ για το οποίο ισχύει ότι $y_Q \in [y_{min}, y_{max}]$ εάν και μόνο εάν $E(y_Q; x_K) \geq 0$. Συγκεκριμένα,

$$E(y_Q; x_K) = \sum_{i=0}^{4} \epsilon_i x_k^i$$

όπου

$$\epsilon_4 = \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix}^2, \qquad \epsilon_3 = -4\begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_Q \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_2 = -4\left(\begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2+y_B^2 \\ 1 & y_Q & y_Q^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_Q \end{vmatrix} \right)$$

$$\epsilon_1 = 4\left(\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2+y_B^2 \\ 1 & y_Q & y_Q^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2+y_B^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 1 & 0 & y_Q & y_Q^2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\epsilon_0 = \begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2+y_B^2 \\ 1 & y_C & y_C^2 \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & 0 & y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2+y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2+y_B^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 1 & 0 & y_Q & y_Q^2 \end{vmatrix}$$

Προκειμένου λοιπόν να ελέγξουμε εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της παράστασης $E(y_Q; x_K)$, δηλαδή το πρόσημου ενός πολυωνύμου τετάρτου βαθμού σε μια συγκεκριμένη ρίζα ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. Ένας τέτοιος υπολογισμός είναι εφικτός με βάση την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 (βλ. Θεώρημα 3.8).

Στην περίπτωση όπου $y_A = y_B$, ο υπολογισμός της παράστασης $E(y_Q; x_K)$ απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό εφόσον $x_K = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$. Συγκεκριμένα, προκύπτει ότι αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης

$$\begin{aligned} E(y_Q, x_K) &= 4\begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 4 & 4y_C & (x_A + x_B)^2 + 4y_C^2 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad - \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 4 & 2(x_A + x_B) & 4y_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 \\ 4 & 2(x_A + x_B) & 4y_C & (x_A + x_B)^2 + 4y_C^2 \\ 1 & 0 & y_Q & y_Q^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Θέλουμε τώρα να ελέγξουμε την σχετική θέση των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $x = x_K$, το οποίο ισοδυναμεί με το να προσδιορίσουμε το πρόσημο των ποσοτήτων $x_Q - x_K$ και $x_S - x_K$. Συγκεκριμένα, εάν οι ποσότητες αυτές είναι ομόσημες, τα Q και S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της $x = x_K$. Ο υπολογισμός της παράστασης $x_I - x_K$ για $I \in \{Q, S\}$ ισοδυναμεί με το να συγκρίνω την τιμή x_I με μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ — την x_K. Εφόσον γνωρίζουμε το πολυώνυμο $P(x)$ και ότι το x_K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του, $x_K \in \{x_1, x_2\}$ (βλ. Πίνακα 5.4), αρκεί να υπολογίσουμε τα πρόσημα των ποσοτήτων $P(x_I)$ και $P'(x_I)$. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου $sign(P(x_I)) = sign(p_2)$ (αντίστοιχα $sign(P(x_I)) = 0$), εάν $sign(P'(x_I)) = -sign(p_2)$ τότε $x_I < x_K$ ($x_I = x_1$) ειδάλλως, εάν $sign(P'(x_I)) = sign(p_2)$ τότε $x_I > x_K$ ($x_I = x_2$). Τέλος, εάν $sign(P(x_I)) = -sign(p_2)$ τότε $x_1 < x_I < x_2$. Γνωρίζοντας εάν $x_K = x_1$ ή $x_K = x_2$, μπορούμε να αποφανθούμε σε κάθε περίπτωση το πρόσημο της παράστασης $x_I - x_K$, για $I \in \{Q, S\}$.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ελέγξουμε την σχετική θέση των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $y = y_K$, ελέγχοντας τα πρόσημα των παραστάσεων $y_Q - y_K$ και $y_S - y_K$· τα Q, S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας $y = y_K$ εάν και μόνο εάν οι παραστάσεις αυτές είναι ομόσημες. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι εφόσον το κέντρο K του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$ είναι το σημείο τομής της παραβολής του σημείου A και του τμήματος CD, με εξίσωση

$$(x - x_A)^2 = (y_A - y_C)(2y - y_A - y_C)$$

και της μεσοκαθέτου των σημείων A, B, με εξίσωση

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x\right) \qquad \text{εάν} \quad y_A \neq y_B$$

ή

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{εάν} \quad y_A = y_B.$$

Για την περίπτωση όπου $y_A \neq y_B$, εάν απαλείψουμε από το σύστημα την μεταβλητή x, προκύπτει ότι το y_K είναι ρίζα του πολυωνύμου $T(y) = t_2 y^2 + t_1 y + t_0$ όπου

$$\begin{aligned} t_2 &= 4(y_B - y_A)^2 \\ t_1 &= 4(y_B - y_A)(x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2) - 8(y_A - y_C)(x_A - x_B)^2 \\ t_0 &= (x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2) + 4(y_A^2 - y_C^2)(x_A - x_B)^2. \end{aligned}$$

Μελετώντας γεωμετρικά τις πιθανές σχετικές θέσεις των σημείων A και B, προκύπτει ότι εάν $y_1 \leq y_2$ είναι οι ρίζες του $T(y)$, τότε εάν $x_A < x_B$, $y_K = y_2$ ειδάλλως εάν $x_A > x_B$, $y_K = y_1$ (βλ. Πίνακα 5.5). Με ανάλογο τρόπο με προηγουμένως, μπορούμε να ελέγξουμε την τιμή της παράστασης $y_I - y_K$, υπολογίζοντας το πρόσημο των παραστάσεων $T(y_I)$ και $T'(y_I)$, για $I \in \{Q, S\}$.

Σχετική θέση x_A, x_B	Μας ενδιαφέρει η ρίζα
$x_A < x_B$	y_2
$x_A > x_B$	y_1

Πίνακας 5.5: Ρίζα του $T(y)$ που μας ενδιαφέρει όταν $x_A \neq x_B$

Τέλος στην περίπτωση όπου $x_A = x_B$, προκύπτει ότι $y_K = \frac{(x_B - x_A)^2 + 4(y_A^2 - y_C^2)}{8(y_A - y_C)}$, όπου $y_A \neq y_C$ (σε αντίθετη περίπτωση ο $\mathcal{V}(A, B, CD)$ δεν ορίζεται). Συνεπώς το πρόσημο της παράσταση $y_I - y_K$ είναι ισοδύναμο με το πρόσημο της παράστασης $(x_B - x_A)^2 + 4(y_A^2 - y_C^2) - 8(y_A - y_C)y_I$, οπότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε εάν οι αντίστοιχες παραστάσεις για $I \in \{Q, S\}$ είναι ομόσημες ή όχι.

Αλγόριθμος Υπολογισμού και Αλγεβρικοί Βαθμοί Δεδομένου ότι τα σημεία Q και S βρίσκονται εκτός του $\mathcal{V}(A, B, CD)$,

1. Ελέγχουμε τον προσανατολισμό του τμήματος QS, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1.

2α. Εάν το τμήμα QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, τότε (α′) Ελέγχουμε εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$· εάν είναι γνήσια εκτός της ζώνης συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) > 0$. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται στην προκειμένη περίπτωση είναι $4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 = 16$.

(β′) Εάν το σημείο Q βρίσκεται γνήσια εντός (αντίστοιχα στο σύνορο) της ζώνης $\mathcal{Z}_y$, τότε ελέγχουμε εάν τα σημεία Q και S βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $x = x_K$· εάν ναι, τότε $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) < 0$ (αντίστοιχα $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) = 0$), ειδάλλως $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) > 0$. Ο έλεγχος αυτός απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 3.

2β. Εάν το τμήμα QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, τότε

(α′) Ελέγχουμε εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$· εάν είναι γνήσια εκτός της ζώνης συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) > 0$. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται στην προκειμένη περίπτωση είναι $4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 = 16$.

(β′) Εάν το σημείο Q βρίσκεται γνήσια εντός (αντίστοιχα στο σύνορο) της ζώνης $\mathcal{Z}_x$, τότε ελέγχουμε εάν τα σημεία Q και S βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $y = y_K$· εάν ναι, τότε $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) < 0$ (αντίστοιχα $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) = 0$), ειδάλλως $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) > 0$. Ο έλεγχος αυτός απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 4.

Το φράγμα του μέγιστου αλγεβρικού βαθμού που απαιτείται μπορεί να μειωθεί περαιτέρω από 16 σε 6, με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.3.1 (βλ. Λήμμα (5.5)).

5.2.7 Η περίπτωση $PSSS$

Θεωρούμε το σημείο $S_1 = A$ και τα τμήματα $S_2 = CD$ και $S_3 = EF$ τα οποία θα είναι είτε παράλληλα είτε κάθετα μεταξύ τους, λόγω των περιορισμών των οποίων έχουμε θέσει. Θα υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\mathsf{Incircle}\ (A, CD, EF, QS)$ ξεχωριστά για κάθε περίπτωση.

Έστω ότι τα τμήματα είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε ότι τα CD, EF είναι παράλληλα με τον άξονα $x'x$, και επιπλέον ας υποθέσουμε ότι $x_C < x_D, x_E < x_F$.

Για να ελέγξουμε εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$, παρατηρούμε ότι, εφόσον θεωρήσαμε ότι τα τμήματα CD και EF είναι παράλληλα με τον πραγματικό άξονα, οι τιμές y_{min} και y_{max} είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του συνόλου $\{y_C, y_E\}$. Συνεπώς, το σημείο Q ανήκει γνήσια στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$ εάν και μόνο εάν $\min\{y_C, y_E\} < y_Q < \max\{y_C, y_E\}$.

Για να κάνουμε τον αντίστοιχο έλεγχο για τη ζώνη $\mathcal{Z}_x$, υπολογίζουμε ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $\Delta(x)$ το οποίο έχει ρίζες τις τιμές x_{min} και x_{max}. Ο υπολογισμός του πολυωνύμου γίνεται με ανάλογο τρόπο όπως σε προηγούμενες υποενότητες· αρχικά παρατηρούμε ότι $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, (x, y)) = \mathsf{Incircle}(A, (x_K, y_C), (x_K, y_E), (x, y)) = U(y; x, x_K) = 0$ για τα σημεία (x, y) που ανήκουν στον κύκλο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$. Το y-πολυώνυμο $U(y; x, x_K) = U_2(x_K)y^2 + U_1(x_K)y + U_0(x, x_K)$ έχει διπλή ρίζα την $y = y_K$, όταν $x \in \{x_{min}, x_{max}\}$. Από αυτό συνεπάγεται ότι η ορίζουσα του $U(y; x, x_K)$, δηλαδή το x-πολυώνυμο $\Delta(x; x_K) = U_1(x)^2 - 4U_2(x)U_0(x, x_K)$ μηδενίζεται όταν $x \in \{x_{min}, x_{max}\}$. Όμως το $\Delta(x; x_K)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς την μεταβλητή x και επιπλέον ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του είναι αρνητικός, οπότε μπορεί να μας εξυπηρετήσει ως το πολυώνυμο το οποίο ψάχναμε.

Για τον υπολογισμό της ποσότητας $\Delta(x_Q; x_K)$, η οποία είναι θετική εάν και μόνο εάν το σημείο Q ανήκει γνήσια στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$, θεωρούμε την ποσότητα $\Delta(x_Q; x_K)$ ως πολυώνυμο της μεταβλητής x_K. Υπενθυμίζουμε ότι από την γεωμετρία του προβλήματος, το x_K είναι μια από τις ρίζες $x_1 \leq x_2$ του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - p_1x + p_0$, όπου

$$\begin{aligned} p_1 &= 2x_A \\ p_0 &= x_A^2 + (y_A - y_C)(y_A - y_E) \end{aligned}$$

όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Σχετική θέση CD, EF	Ρίζα του $P(x)$ που μας ενδιαφέρει
$y_E < y_C$	x_1
$y_E > y_C$	x_2

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι $P(x_K) = 0$, μπορούμε να μειώσουμε το βαθμό του $\Delta(x_Q; x_K) = E(x_K)$ από τρία σε δύο, και συγκεκριμένα $E(x_K) = (y_C - y_E)^2(\epsilon_2 x_K^2 + \epsilon_1 x_K + \epsilon_0)$, όπου

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \delta_2 - p_1\delta_3 \\ \epsilon_1 &= \delta_1 - p_0\delta_3 \\ \epsilon_0 &= \delta_0 \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
\delta_3 &= 4(x_Q - x_A) \\
\delta_2 &= (y_E + y_C)^2 + 4x_A(x_A - x_Q) - 4\begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 0 & 1 & y_E + y_C \\ 1 & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix} \\
\delta_1 &= 4x_A\begin{vmatrix} 1 & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 0 & 1 & y_E + y_C \\ 1 & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 0 & 0 & 1 & y_C + y_E \\ 1 & x & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix} \\
\delta_0 &= x_A^2(y_E + y_C)^2 + 4x_A\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 \\ 1 & 0 & y_C & y_C^2 \\ 0 & 0 & 1 & y_C + y_E \\ 1 & x_Q & 0 & x_Q^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Άρα για να υπολογίσουμε εάν το σημείο Q είναι εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο του πολυωνύμου $E(x_K)$ στην ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$, κάτι το οποίο είναι εφικτό με βάση την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 (βλ. Θεώρημα 3.8).

Για τον έλεγχο των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $x = x_K$, είναι αρκετό να υπολογίσουμε το πρόσημο των $P(x_I), P'(x_I)$ για $I \in \{Q, S\}$, όπως αναφέραμε και στην Υποενότητα 5.2.6.

Τέλος για τον έλεγχο των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $y = y_K$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $y_K = \frac{1}{2}(y_E + y_C)$, οπότε μπορούμε να κάνουμε άμεσο υπολογισμό των ποσοτήτων $y_I - y_K$ για $I \in \{Q, S\}$ και να συγκρίνουμε τα πρόσημα των δύο παραστάσεων.

Έστω ότι τα τμήματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε ότι τα τμήματα CD, EF είναι παράλληλα στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε από την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.2 ότι το σημείο A βρίσκεται σε ένα από τα τέσσερα χωρία του επιπέδου που ορίζουν οι ευθείες ℓ_{CD} και ℓ_{EF}, έστω στο R_i. Γνωρίζουμε στην περίπτωση αυτή ότι, εάν B είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την διχοτόμο του χωρίου R_i, τότε το σημείο B ανήκει και αυτό στον κύκλο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$. Ειδικότερα με βάση την ανάλυση που έχουμε κάνει, δείξαμε ότι ο Voronoi κύκλος $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ είναι ένας (και συγκεκριμένα ποιος) από τους $\mathcal{V}(A, B, CD)$ ή $\mathcal{V}(B, A, CD)$.

Με τον τρόπο αυτό, ανάγουμε τον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle(A, CD, EF, QS) στον υπολογισμό του Incircle(A, B, CD, QS) ή Incircle(B, A, CD, QS). Τα δύο τελευταία κατηγορήματα μπορούν να υπολογιστούν με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.6.

Σε κάθε περίπτωση οι αλγεβρικοί βαθμοί που προκύπτουν από την παραπάνω μπορούν να βελτιωθούν με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.3.2 (βλ. Λήμμα (5.7))

5.2.8 Η περίπτωση $SSSS$

Ας θεωρήσουμε τα τμήματα $S_1 = AB$, $S_2 = CD$ και $S_3 = EF$ τα οποία είναι παράλληλα με τους άξονες. Όπως αναφέραμε στην Υποενότητα 5.2.3, για να ορίζεται ο κύκλος $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ τα δύο από αυτά είναι παράλληλα σε έναν άξονα και το τρίτο κάθετο σε αυτά. Επιπλέον αναφέραμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου τα δύο πρώτα τμήματα S_1, S_2 είναι παράλληλα στον πραγματικό άξονα και το S_3 είναι παράλληλο στον φανταστικό.

Με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.3, το κέντρο K του $\mathcal{V}(AB, CD, EF)$ έχει συντεταγμένες $(x_K, y_K) = (x_E + \frac{1}{2}(y_C - y_A), \frac{1}{2}(y_A + y_C))$ και η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{1}{2}|y_A - y_C|$.

Για να ελέγξουμε τελικά εάν το σημείο Q, βρίσκεται γνήσια εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ αρκεί να ελέγξουμε εάν $x_K - \rho < x_Q < x_K + \rho$. Αντίστοιχα για τον έλεγχο του Q ως προς τη ζώνη $\mathcal{Z}_y$ αρκεί να ελέγξουμε εάν $y_K - \rho < y_Q < y_K + \rho$ ή αντίστοιχα εάν $y_Q \in (\min\{y_A, y_C\}, \max\{y_A, y_C\})$.

Τέλος, η σχετική θέση των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $x = x_K$ (αντίστοιχα $y = y_K$), μπορεί να γίνει μέσω της σύγκρισης των προσήμων των παραστάσεων $x_Q - x_K$ και $x_S - x_K$ (αντίστοιχα $y_Q - y_K$ και $y_S - y_K$) οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν άμεσα εφόσον γνωρίζουμε επακριβώς την τιμή x_K (y_K).

Εφόσον όλοι οι υπολογισμοί που αναφέραμε σε αυτήν την υποενότητα είναι το πολύ βαθμού 1, και το αντίστοιχο Incircle όπου το τέταρτο αντικείμενο είναι σημείο απαιτεί το πολύ αλγεβρικό βαθμό 2, προκύπτει το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.3. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου τμήματος παράλληλου σε κάποιον άξονα ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν τρία τμήματα παράλληλα σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 2.*

5.3 Έλεγχος αντικειμένου Q ως προς τον Voronoi κύκλο τριών αντικειμένων: Η βέλτιστη προσέγγιση

Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα καλύπτουν κάθε δυνατό συνδυασμό για τις μορφές που μπορεί να έχουν τα ορίσματα του κατηγορήματος Incircle. Θα πρέπει όμως να λάβουμε υπόψιν αναφορικά με την χρηστικότητα μιας τέτοιας υλοποίησης του Incircle ότι σημαντικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου αλγεβρικού κόστους που απαιτείται σε κάθε περίπτωση.

Αν και οι βαθμοί στις περιπτώσεις PPP και SSS είναι οι καλύτεροι δυνατοί, δεν ισχύει το ίδιο και για τις περιπτώσεις PPS και PSS. Ειδικότερα, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ακολουθώντας την γενικευμένη μέθοδο του Burnikel [Bur96], και απλοποιώντας τις εμφανιζόμενες εκφράσεις με βάση τους περιορισμούς στους προσανατολισμούς των τμημάτων, προκύπτουν βαθμοί μικρότεροι από τους δικούς μας. Κάτι τέτοιο μας οδηγεί στο να επανεξετάσουμε τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους.

5.3.1 Η περίπτωση PPS

Έστω λοιπόν τα σημεία $S_1 = A$ και $S_2 = B$ και το ευθύγραμμο τμήμα $S_3 = CD$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, εφόσον σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q)$ στο $\mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B), \mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(Q))$.

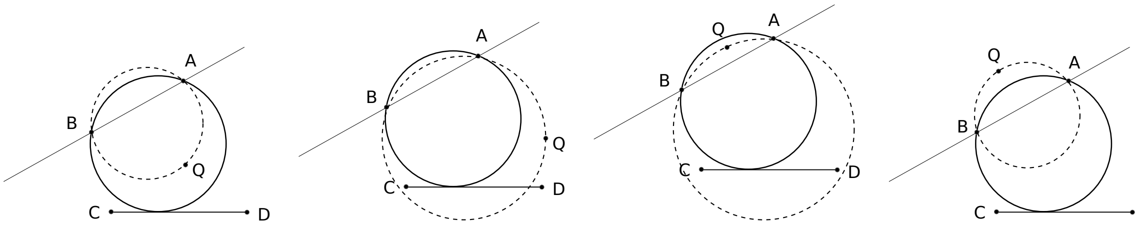
Το αντικείμενο Q είναι σημείο

Έστω το σημείο Q και K το κέντρο του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$. Γνωρίζουμε από την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.1 ότι η τετμημένη του K είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, όπου οι ποσότητες p_2, p_1, p_0 είναι βαθμού 1,2 και 3 αντίστοιχα. Είχαμε δείξει στην συγκεκριμένη υποενότητα ότι ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμό του κατηγορήματος είναι το πολύ 10. Θα δείξουμε λοιπόν με ποιο τρόπο μπορούμε να μειώσουμε αυτόν τον βαθμό σε 6.

Εφόσον ο Voronoi κύκλος $\mathcal{V}(A, B, CD)$ ορίζεται τα σημεία A και B βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD}. Αρχικός έλεγχος για τον υπολογισμό του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q)$ είναι η θέση του Q ως προς την ίδια ευθεία· εάν το Q δεν ανήκει στην ίδια πλευρά που ανήκουν τα A και B, τότε $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) > 0$. Ο έλεγχος αυτός απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1.

Υποθέτοντας ότι τα σημεία A, B και Q βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ℓ_{CD}, ας ορίσουμε r το αποτέλεσμα του κατηγορήματος $\mathsf{Orientation}(B, A, Q)$. Στην ειδική περίπτωση $r = 0$ (δηλαδή τα σημεία A, B και Q είναι συγγραμικά), παρατηρούμε ότι το Q βρίσκεται εντός του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$ εάν και μόνο εάν το Q βρίσκεται στην ευθεία ℓ_{BA} και μεταξύ του A και B. Ο έλεγχος αυτός αντιστοιχεί στον υπολογισμό των προσήμων των διαφορών $x_Q - x_A$ και $x_Q - x_B$, οπότε ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι 1.

Εάν $r \neq 0$, θα ανάξουμε τον υπολογισμό του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q)$ στο $\mathsf{Incircle}(A, B, Q, CD)$ (βλ. Σχήμα 5.12). Ας υποθέσουμε ότι $r < 0$, δηλαδή το σημείο Q βρίσκεται δεξιά από την προσανατολισμένη ευθεία ℓ_{BA}. Εφόσον τα A, B και CD εμφανίζονται με την συγκεκριμένη σειρά εάν διανύσουμε το κύκλο $\mathcal{V}(A, B, CD)$ με φορά αντίθετη με του ρολογιού, συμπεραίνουμε ότι το Q βρίσκεται εντός του $\mathcal{V}(A, B, CD)$ (αντίστοιχα ανήκει στον $\mathcal{V}(A, B, CD)$) εάν και μόνο εάν ο κύκλος που ορίζουν τα A, B και Q δεν τέμνει (αντίστοιχα δεν εφάπτεται) στο τμήμα CD. Πράγματι, αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό εάν «μετατοπίσουμε» το κέντρο του Voronoi κύκλου προς το σημείο Q, κρατώντας το όμως πάνω στην μεσοκάθετο των σημείων A και B. Προκύπτει λοιπόν ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) = -\mathsf{Incircle}(A, B, Q, CD)$. Με ανάλογο τρόπο, εάν $r > 0$, δηλαδή



Σχήμα 5.12: Αναγωγή του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q)$ στο $\mathsf{Incircle}(A, B, Q, CD)$. Αριστερά δύο σχήματα: το Q κείται στα αριστερά της προσανατολισμένης ευθείας ℓ_{BA}. Δεξιά δύο σχήματα: το Q κείται στα δεξιά της προσανατολισμένης ευθείας ℓ_{BA}. Ο κύκλος με διακεκομμένη γραμμή είναι ο Voronoi κύκλος των B, A και Q.

το σημείο Q βρίσκεται αριστερά από την προσανατολισμένη ευθεία ℓ_{BA}, το Q βρίσκεται εντός του $\mathcal{V}(A, B, CD)$ (αντίστοιχα ανήκει στον $\mathcal{V}(A, B, CD)$) εάν και μόνο εάν ο κύκλος που ορίζουν τα A, B και Q τέμνει (αντίστοιχα εφάπτεται) στο τμήμα CD. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) = \mathsf{Incircle}(A, Q, B, CD)$.

Συνοψίζοντας την παραπάνω ανάλυση, χρειάζεται αρχικά να ελέγξουμε από ποια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD} βρίσκεται το σημείο Q, έλεγχος που απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1. Εάν είναι απαραίτητο, το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το $r = \mathsf{Orientation}(B, A, Q)$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 2. Εάν $r = 0$, χρειαζόμαστε δύο επιπλέον ελέγχους αλγεβρικού βαθμού 1 για να υπολογίσουμε το $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q)$, ειδάλλως παρατηρούμε ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) = -\mathsf{Incircle}(A, B, Q, CD)$ εάν $r < 0$, ή $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, Q) = \mathsf{Incircle}(A, Q, B, CD)$ εάν $r > 0$. Ο υπολογισμός για του $\mathsf{Incircle}(A, B, Q, CD)$ ή του $\mathsf{Incircle}(A, Q, B, CD)$ μπορεί να γίνει με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.5 με αλγεβρικό κόστος το πολύ 6.

Λήμμα 5.4. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου σημείου ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν δύο σημεία και ένα τμήμα παράλληλο σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 6.*

Το αντικείμενο Q είναι τμήμα

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα QS το οποίο είναι παράλληλο σε κάποιον άξονα και K το κέντρο του $\mathcal{V}(A, B, CD)$. Με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.1, ο υπολογισμός του κατηγορήματος $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS)$ μπορεί να γίνει μέσω μίας αλληλουχίας ελέγχων και υπολογισμών, ανάλογα με τον προσανατολισμό του τμήματος QS.

Αναφέρουμε επιγραμματικά τους ελέγχους αυτούς και το αλγεβρικό κόστος το οποίο έχουν:

1. Αρχικά ελέγχουμε εάν τουλάχιστον ένα από τα σημεία Q, S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD} με τα σημεία A και B. Ο έλεγχος αυτός απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1. Εάν ισχύει κάτι τέτοιο, προχωράμε στον επόμενο βήμα, δηλαδή,

2. Ελέγχουμε εάν κάποιο από τα σημεία Q, S βρίσκεται εντός ή επί του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κατηγόρημα. Ο αλγεβρικός βαθμός για κάθε ένα από αυτούς τους υπολογισμούς είναι το πολύ 6. Εάν και τα δύο σημεία είναι εκτός του κύκλου, προχωράμε στον επόμενο βήμα, δηλαδή,

3. Ελέγχουμε εάν η ευθεία ℓ_{QS} τέμνει τον κύκλο υπολογίζοντας εάν το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$ (εάν το QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα) ή στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$ (εάν το QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα). Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι μπορούμε να μειώσουμε το αλγεβρικό κόστος του ελέγχου αυτού σε 6. Εάν το σημείο Q βρίσκεται εντός ή στο σύνορο της αντίστοιχης ζώνης, προχωράμε στο επόμενο βήμα, δηλαδή,

4. Ελέγχουμε εάν τα σημεία Q και S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας $x = x_K$ ή $y = y_K$ (ανάλογα με τον προσανατολισμό του QS). Ο έλεγχος αυτός θα δείξουμε παρακάτω ότι απαιτεί αλγεβρικό βαθμό το πολύ 5.

Τελικά, θα έχουμε αποδείξει ότι ο μέγιστος απαιτούμενος βαθμός για το υπολογισμό του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS)$ είναι το πολύ 6.

Αρχικά ας δούμε τι γνωρίζουμε από την μέχρι τώρα ανάλυση. Γνωρίζουμε με βάση την ανάλυση της Υποενότητας 5.2.6 ότι (στην γενική περίπτωση όπου $y_A \neq y_B$) η τετμημένη του K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, όπου οι ποσότητες p_2, p_1, p_0 είναι βαθμού 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Επιπλέον η τεταγμένη του y_K είναι και αυτή μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $T(y) = t_2y^2 + t_1y + t_0$, όπου οι ποσότητες t_2, t_1, t_0 είναι βαθμού 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Επιπλέον οι ποσότητες x_K και y_K είναι γραμμικά εξαρτημένες, εφόσον ανήκουν στην μεσοκάθετο των σημείων A και B, και συγκεκριμένα $y_K = \frac{z_1}{w}x_K + \frac{z_0}{w}$, όπου

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2(x_A - x_B)\\
z_0 &= x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2\\
w &= 2(y_B - y_A).
\end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι το τμήμα QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, προχωράμε στον έλεγχο του σημείου Q ως προς τη ζώνη $\mathcal{Z}_x$. Παρατηρούμε ότι το σημείο Q βρίσκεται γνήσια εντός της ζώνης $\mathcal{Z}_x$ εάν και μόνο εάν η ευθεία ℓ_{QS} τέμνει τον $\mathcal{V}(A, B, CD)$, κάτι το οποίο συμβαίνει εάν και μόνο εάν $d(K, \ell_{QS}) < d(K, CD)$. Εφόσον το τμήμα QS είναι παράλληλο στον x-άξονα, προκύπτει ότι $d(K, \ell_{QS}) = |y_K - y_Q|$, όπου το πρόσημο της ποσότητας $y_K - y_Q$ μπορεί να υπολογιστεί ελέγχοντας τις ποσότητες $T(y_Q)$ και $T'(y_Q)$. Ο έλεγχος αυτός απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 4. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την ποσότητα $d(K, CD) = |y_K - y_C|$, της οποίας το πρόσημο μπορεί να υπολογιστεί ανάλογα, με αλγεβρικό κόστος 4. Γνωρίζοντας τα πρόσημα των παραστάστεων $y_K - y_C$ και $y_K - y_Q$, σχηματίζουμε το $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = |y_K - y_Q| - |y_K - y_C|$ το οποίο αντιστοιχεί στον έλεγχο του Q

ως προς τη ζώνη $\mathcal{Z}_x$. Τελικά, προκύπτει ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = J_1 y_K + J_0$, όπου οι ποσότητες J_1 και J_0 δίδονται στον παρακάτω πίνακα.

$y_K - y_Q$	$y_K - y_C$	J_1	J_0
≥ 0	≥ 0	0	$y_C - y_Q$
	< 0	2	$-y_Q - y_C$
< 0	≥ 0	-2	$y_Q + y_C$
	< 0	0	$-y_C + y_Q$

Προφανώς, εάν $J_1 = 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε με ευκολία το κατηγόρημα $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = sign(J_0)$. Σε αντίθετη περίπτωση, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της ποσότητας $J_1 y_K + J_0$, όπου y_K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $T(y)$. Αν και ο υπολογισμός αυτός θα μπορούσε να γίνει με ευθεία αντικατάσταση του y_K, κάτι τέτοιο θα απαιτούσε αλγεβρικό βαθμό 6. Μια πιο έξυπνη προσέγγιση θα ήταν να παρατηρήσουμε ότι $sign(J_1 y_K + J_0) = sign(J_1) sign(y_K + \frac{J_0}{J_1})$, όπου ο υπολογισμός του προσήμου της παράστασης $y_K + \frac{J_0}{J_1}$, είναι ισοδύναμος με το να συγκρίνουμε την τιμή $-\frac{J_0}{J_1}$ με την ρίζα y_K του $T(y)$. Ο τελευταίος έλεγχος είναι ισοδύναμος με το να ελέγξουμε το πρόσημο των παραστάσεων $T(-\frac{J_0}{J_1})$ και $T'(-\frac{J_0}{J_1})$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 4 και 3 αντίστοιχα.

Με ανάλογο τρόπο, στην περίπτωση όπου το τμήμα QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, ο έλεγχος ως του σημείου Q ως προς τη ζώνη $\mathcal{Z}_y$ είναι ισοδύναμη με το $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = d(K, \ell_{QS}) - d(K, CD)$. Όπως και προηγουμένως, $d(K, \ell_{QS}) = |x_K - x_Q|$ και $d(K, CD) = |y_K - y_C|$, ενώ ο υπολογισμός των προσήμων των παραστάσεων $x_K - x_Q$ και $y_K - y_C$ μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τα πρόσημα των παραστάσεων $P(x_Q), P'(x_Q)$ και $T(y_C), T'(y_C)$ αντίστοιχα. Ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι 3, 2, 4 και 3 αντίστοιχα, δηλαδή το πολύ 4. Έχοντας υπολογίσει τα πρόσημα των παραπάνω παραστάσεων, και θέτοντας $y_K = \frac{z_1}{w} x_K + \frac{z_0}{w}$ προκύπτει ότι $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, QS) = \frac{1}{w}(L_1 x_K + L_0)$ όπου οι ποσότητες L_1 και L_0 δίδονται στον παρακάτω πίνακα.

$x_K - x_Q$	$y_K - y_C$	L_1	L_0
≥ 0	≥ 0	$-z_1 + w$	$w(y_C - x_Q) - z_0$
	< 0	$z_1 + w$	$w(-y_C - x_Q) + z_0$
< 0	≥ 0	$-z_1 - w$	$w(y_C + x_Q) - z_0$
	< 0	$z_1 - w$	$w(-y_C + x_Q) + z_0$

Προφανώς, εάν $L_1 = 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε με ευκολία το κατηγόρημα $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = sign(L_0) sign(w)$. Σε αντίθετη περίπτωση, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της ποσότητας $L_1 x_K + L_0$, όπου x_K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. Ισοδύναμα ελέγχουμε την ποσότητα $-\frac{L_0}{L_1}$ ως προς την τιμή x_K, δεδομένου ότι $sign(L_1 x_K + L_0) = sign(L_1) sign(x_K + \frac{L_0}{L_1})$. Ο έλεγχος αυτός αντιστοιχεί στο να ελέγξουμε το πρόσημο των παραστάσεων $P(-\frac{L_0}{L_1})$ και $P'(-\frac{L_0}{L_1})$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 5 και 4 αντίστοιχα.

Στην περίπτωση όπου το σημείο Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$ ή $\mathcal{Z}_y$, ανάλογα με τον προσανατολισμό του τμήματος QS, χρειάζεται να ελέγξουμε την σχετική θέση των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $y = y_K$ ή την ευθεία $x = x_K$ αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, εάν το QS είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, και το Q ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_y$, τότε χρειάζεται να ελέγξουμε εάν τα Q και S βρίσκονται στην ίδια ή σε διαφορετικές πλευρές της ευθείας $x = x_K$. Ο έλεγχος αυτός ισοδυναμεί με το να ελέγξουμε εάν οι ποσότητες $x_Q - x_K$ και $x_S - x_K$ είναι ομόσημες ή όχι. Αυτό συνεπάγεται ότι πρέπει να συγκρίνουμε τις τιμές x_Q και x_S με μια συγκεκριμένη ρίζα του $P(x)$, την x_K, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το πρόσημο των ποσοτήτων $P(x_Q), P'(x_Q)$ και $P(x_S), P'(x_S)$. Το αλγεβρικό κόστος των υπολογισμών αυτών είναι 3, 2, 3 και 2 αντίστοιχα, δηλαδή το πολύ 3. Με ανάλογο τρόπο, στην περίπτωση όπου το τμήμα QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, εάν είναι απαραίτητο να ελέγξουμε εάν τα σημεία Q και S βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας $y = y_K$, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα πρόσημα των ποσοτήτων $y_Q - y_K$ και $y_S - y_K$. Οι υπολογισμοί αυτοί ανάγονται στον υπολογισμό των ποσοτήτων $T(y_Q), T'(y_Q)$ και $T(y_S), T'(y_S)$ αντίστοιχα, εφόσον το y_K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $T(y)$.

Τέλος, εξετάζουμε την ειδική περίπτωση $y_A = y_B$, στην οποία υπάρχει μόνο ένας Voronoi κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και το τμήμα CD, ο οποίος έχει κέντρο το

$$K = (x_K, y_K) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{(x_B - x_A)^2 + 4(y_A^2 - y_C^2)}{8(y_A - y_C)} \right).$$

Θέτοντας $y_K = \frac{u_2}{u_1}$, όπου $u_2 = (x_B - x_A)^2 + 4(y_A^2 - y_C^2)$ και $u_1 = 8(y_A - y_C)$, θεωρούμε τις δύο δυνατές εκδοχές προσανατολισμού του τμήματος QS. Εάν το QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, τότε ο υπολογισμός του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = |y_K - y_Q| - |y_K - y_S|$ είναι ισοδύναμος με το πρόσημο της παράστασης $|u_2 - u_1 y_Q| - |u_2 - u_1 y_S|$, η οποία έχει αλγεβρικό βαθμό 2. Εάν το QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, τότε ο υπολογισμός του $\mathsf{Incircle}(A, B, CD, \ell_{QS}) = |x_K - x_Q| - |y_K - y_S|$ είναι ισοδύναμος με το πρόσημο της παράστασης $|u_1(x_A + x_B - 2x_Q)| - 2|u_2 - u_1 y_C|$, η οποία έχει αλγεβρικό βαθμό 2. Τέλος, για την σχετική θέση των σημείων Q και S ως προς την ευθεία $x = x_K$, ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι 1, ενώ ο αντίστοιχος έλεγχος ως προς την ευθεία $y = y_K$ είναι 2.

Λήμμα 5.5. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου τμήματος παράλληλου σε κάποιον άξονα ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν δύο σημεία και ένα τμήμα παράλληλο σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 6.*

5.3.2 Η περίπτωση PSS

Έστω λοιπόν το σημείο $S_1 = A$ και το ευθύγραμμο τμήμα $S_2 = CD$ και $S_3 = EF$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

(1) είτε και τα δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα με τον άξονα $x'x$ είτε (2) το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το EF στον φανταστικό. Όλες οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στις παραπάνω χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{R}$, οπότε $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q) = \mathsf{Incircle}(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(CD), \mathcal{R}(EF), \mathcal{R}(Q))$.

Το αντικείμενο Q είναι σημείο

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά τις δύο πιθανές εκδοχές προσανατολισμού των τμημάτων CD και EF, ανακεφαλαιώνοντας όσα είδαμε στην Υποενότητα 5.2.2.

1. Έστω ότι τα τμήματα είναι παράλληλα στον πραγματικό άξονα. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σημείο Q δεν μπορεί να ανήκει στον κύκλο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ εάν δεν βρίσκεται στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$ που ορίζουν οι ευθείες ℓ_{CD} και ℓ_{EF}. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τα πρόσημα των ποσοτήτων $y_Q - y_C$, $y_Q - y_F$ και $y_C - y_F$ οπότε απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 1.

   Υποθέτοντας ότι το σημείο Q, όπως και το σημείο A, ανήκει στη ζώνη $\mathcal{Z}_x$, ας θεωρήσουμε το σημείο K, κέντρο του κύκλου $\mathcal{V}(A, CD, EF)$. Από την γεωμετρία του προβλήματος προκύπτει τετριμμένα ότι $y_K = \frac{1}{2}(y_C + y_E)$ και ότι η ακτίνα ρ του Voronoi κύκλου ισούται με $\rho = \frac{1}{2}|y_C - y_E|$. Εφόσον το σημείο A ανήκει στον κύκλο ικανοποιεί την εξίσωσή του, οπότε προκύπτει ότι η τετμημένη του κέντρου x_K είναι μία από τις ρίζες $x_1 \le x_2$ του πολυωνύμου $P(x) = x^2 + p_1 x + p_0$ όπου

   $$p_1 = 2x_A, \qquad p_0 = x_A^2 + (y_A - y_C)(y_A - y_E).$$

   Η ρίζα του $P(x)$ που αντιστοιχεί στην τιμή x_K φαίνεται στον Πίνακα 5.6, όπως προκύπτει μετά από γεωμετρική ανάλυση κάθε περίπτωσης.

   Για να υπολογίσουμε λοιπόν το κατηγόρημα $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q)$, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της παράστασης

   $$d^2(K, A) - d^2(K, Q) = m_1 x_K + m_0$$

   όπου

   $$m_1 = 2(x_Q - x_A), \qquad m_0 = x_A^2 + y_A^2 - x_Q^2 - y_Q^2 + (y_C + y_E)(x_Q - x_A).$$

Σχετική θέση CD, EF	Μας ενδιαφέρει η ρίζα
$y_E < y_C$	x_1
$y_E > y_C$	x_2

Πίνακας 5.6: Ρίζα του $P(x)$ που μας ενδιαφέρει για την περίπτωση όπου τα τμήματα CD, EF είναι παράλληλα με τον άξονα $x'x$.

Ο υπολογισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την σύγκριση της τιμής $-\frac{m_0}{m_1}$ με την τιμή x_K, εφόσον $sign(m_1 x_K + m_0) = sign(m_1)sign(x_K + \frac{m_0}{m_1})$. Η σύγκριση αυτή είναι εφικτή υπολογίζοντας τις ποσότητες $P(-\frac{m_0}{m_1})$ και $P'(-\frac{m_0}{m_1})$, εφόσον το x_K είναι συγκεκριμένη ρίζα του $P(x)$.

2. Έστω ότι το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το EF στον φανταστικό. Όπως είδαμε στην Υποενότητα 5.2.2, οι ευθείες ℓ_{CD} και ℓ_{EF} οριοθετούν τέσσερα χωρία του επιπέδου, έστω R_1, R_2, R_3, R_4. Οι εξισώσεις των διχοτόμων των χωρίων 1,3 και 2,4 είναι αντίστοιχα οι ευθείες

$$\ell_{1,3} : y = x + y_C - x_E, \quad \ell_{2,4} : y = -x + y_C + x_E.$$

Το χωρίο στο οποίο ανήκει το σημείο A, έστω R_j, είναι το χωρίο στο οποίο βρίσκεται ο κύκλος $\mathcal{V}(A, CD, EF)$, και ειδικότερα το κέντρο K του κύκλου βρίσκεται στην αντίστοιχη διχοτόμο ευθεία του χωρίου. Αρχικά λοιπόν ελέγχουμε εάν το σημείο Q βρίσκεται στο χωρίο R_j, το οποίο αντιστοιχεί στο να ελέγξουμε τις ποσότητες $x_I - x_E$ και $y_I - y_C$ για $I \in \{Q, A\}$ και στην περίπτωση που δεν ανήκει ισχύει $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q) > 0$. Υποθέτοντας ότι ανήκει στο ίδιο χωρίο με το σημείο A, παρατηρούμε ότι το κέντρο K του Voronoi κύκλου αποτελεί την τομή της διχοτόμου του χωρίου R_j και της παραβολής που ορίζεται από το σημείο A και την ευθεία ℓ_{CD}. Αντικαθιστώντας την εξίσωση της αντίστοιχης διχοτόμου στην παραβολή, προκύπτει ότι η τεταγμένη του K είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^2 + p_1 x + p_0$, όπου

$$p_1 = 2(y_C - y_A - x_A), \quad p_0 = (y_C - y_A)^2 + x_A^2 - 2x_E(y_C - y_A)$$

εάν $A \in R_1 \cup R_3$, ή

$$p_1 = 2(y_A - y_C - x_A), \quad p_0 = (y_C - y_A)^2 + x_A^2 + 2x_E(y_C - y_A)$$

εάν $A \in R_2 \cup R_4$. Επιπλέον, μελετώντας γεωμετρικά κάθε δυνατή περίπτωση προκύπτει ότι εάν $x_1 \leq x_2$ είναι οι ρίζες του $P(x)$, τότε η ρίζα που αντιστοιχεί στην x_K είναι ίδια με αυτή που αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου τα τμήματα CD και EF είναι παράλληλα με τον άξονα $x'x$ (βλ. Πίνακα 5.6).

Τελικά, για να υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, Q)$ υπολογίζουμε την διαφορά

$$d^2(K, Q) - d^2(K, A) = m_1 x_K + m_0,$$

όπου

$$m_1 = 4(x_Q - x_A), \qquad m_0 = (x_A^2 - x_Q^2) + (y_A^2 - y_Q^2) + 2(x_Q - x_A)(y_C - x_E)$$

εάν $A \in R_1 \cup R_3$, ή

$$m_1 = 0, \qquad m_0 = (x_A^2 - x_Q^2) + (y_A^2 - y_Q^2) + 2(x_Q - x_A)(y_C + x_E)$$

εάν $A \in R_2 \cup R_4$.

Για την περίπτωση όπου $m_1 = 0$, αρκεί να υπολογίσουμε το πρόσημο $sign(m_0)$ το οποίο έχει βαθμό 2, ενώ σε διαφορετική περίπτωση χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο $sign(m_1)sign(x_K + \frac{m_0}{m_1})$. Το πρόσημο της δεύτερης παράστασης αντιστοιχεί στο να συγκρίνουμε την τιμή $-\frac{m_0}{m_1}$ με την ρίζα του $P(x)$, και συνεπώς αρκεί να υπολογίσουμε τις παραστάσεις $P(-\frac{m_0}{m_1})$ και $P'(-\frac{m_0}{m_1})$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 4 και 3 αντίστοιχα.

Τελικά, ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για τον υπολογισμό του Incircle είναι 4 στην περίπτωση αυτή.

Λήμμα 5.6. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου σημείου ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν ένα σημείο και δύο τμήματα παράλληλα σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 4.*

Το αντικείμενο Q είναι τμήμα

Ας θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα QS και θέλουμε να υπολογίσουμε το κατηγόρημα Incircle(A, CD, EF, QS). Θα μελετήσουμε ξεχωριστά τις δύο πιθανές εκδοχές προσανατολισμού των τμημάτων CD και EF, ακολουθώντας παρόμοια στρατηγική με αυτή της περίπτωσης $PPSS$. Συγκεκριμένα, ο έλεγχος των σημείων A και Q ως προς τις ευθείες ℓ_{CD} και ℓ_{EF} είναι 1, ενώ για να ελέγξουμε εάν τα σημεία Q και S βρίσκονται εντός του κύκλου $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ απαιτείται το πολύ υπολογισμοί αλγεβρικού βαθμού 4, όπως μόλις αποδείξαμε.

Δεδομένου ότι τα Q και S δεν βρίσκονται εντός του κύκλου, προχωράμε στον έλεγχο του Incircle(A, CD, EF, ℓ_{QS}). Επιπλέον, ανάλογα με τον προσανατολισμό του QS, ενδεχομένως να χρειαστεί να ελέγξουμε την σχετική θέση των άκρων του ως προς την ευθεία $x = x_K$, εάν το QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα ή την $y = y_K$, εάν το QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα. Έχουμε δείξει στην προηγούμενη υποενότητα (περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι σημείο) ότι ο έλεγχος του σημείου I ως προς την ευθεία $x = x_K$ ή ισοδύναμα ο έλεγχος του προσήμου $x_I - x_K$, μπορεί σε κάθε περίπτωση να γίνει υπολογίζοντας την ποσότητα $P(x_I)$ και $P'(x_I)$, όπου $P(x)$ το πολυώνυμο του οποίου ρίζα είναι το x_K. Σε κάθε περίπτωση ο υπολογισμός αυτός απαιτεί υπολογισμούς το πολύ αλγεβρικού βαθμού 3, ενώ οι αντίστοιχοι υπολογισμοί ως προς την ευθεία $y = y_K$ απαιτούν και αυτοί τον ίδιο βαθμό, λόγω της απλουστευμένης γραμμικής εξάρτησης μεταξύ x_K και y_K.

Όπως προηγουμένως, διακρίνουμε περιπτώσεις σχετικά με το προσανατολισμό των τμημάτων CD και EF, έχοντας δείξει ότι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ανάγονται σε δύο. Σε κάθε περίπτωση θα δείξουμε ότι ο υπολογισμός $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, \ell_{QS})$ απαιτεί το πολύ αλγεβρικό βαθμό 2.

1. Έστω ότι τα τμήματα είναι παράλληλα στον πραγματικό άξονα. Τότε για την περίπτωση όπου το τμήμα QS είναι και αυτό παράλληλο στον πραγματικό άξονα, ο υπολογισμός του κατηγορήματος $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, \ell_{QS})$ ανάγεται στον έλεγχο της ανισότητας
$$\min(y_C, y_E) \leq y_Q \leq \max(y_C, y_E).$$
Εάν η παραπάνω ανισότητα ισχύει τότε $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, \ell_{QS}) \leq 0$. Για την περίπτωση όπου το τμήμα QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, αρκεί να ελέγξουμε εάν $x_Q \in \mathcal{Z}_x$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να ελέγξουμε την ανισότητα $|x_Q - x_K| \leq \rho$, όπου το x_K είναι μία συγκεκριμένη (βλ. Πίνακα 5.6) ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^2 + p_1 x + p_0$, όπου $p_1 = 2x_A$ και $p_2 = x_A^2 + (y_A - y_C)(y_A - y_E)$, ενώ $\rho = \frac{1}{2}|y_C - y_E|$ είναι η ακτίνα του κύκλου Voronoi. Ο υπολογισμός αυτός αντιστοιχεί στην σύγκριση των ποσοτήτων $x_Q \pm \rho$ με την συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, το οποίο με την σειρά του είναι ισοδύναμο σε αλγεβρικό κόστος με τον υπολογισμό των ποσοτήτων $P(x_Q \pm \rho)$ και $P'(x_Q \pm \rho)$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό κόστος 2 και 1 αντίστοιχα. Συνολικά για την περίπτωση αυτή ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται είναι 2 για τον υπολογισμό του κατηγορήματος $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, \ell_{QS})$, και συνολικά 4 για τον υπολογισμό του κατηγορήματος $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, QS)$.

2. Έστω ότι το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και το EF στον φανταστικό. Με βάση την αντίστοιχη ανάλυση προηγούμενης υποενότητας, η συντεταγμένη x_K του κέντρου του κύκλου είναι μία συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, ανάλογα με το χωρίο R_i το οποίο ανήκει το σημείο A. Για να υπολογίσουμε το κατηγόρημα $\mathsf{Incircle}(A, CD, EF, \ell_{QS})$, ελέγχουμε εάν το τμήμα QS είναι παράλληλο στο τμήμα CD (αντίστοιχα στο τμήμα EF) οπότε χρειάζεται να συγκρίνουμε την απόσταση του κέντρου K από τους φορείς των τμημάτων CD και QS, δηλαδή να ελέγξουμε την ανισότητα $|x_K - x_Q| \leq |x_K - x_C|$ (αντίστοιχα την ανισότητα $|y_K - y_Q| \leq |y_K - y_C|$). Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το τμήμα QS είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα και στο τμήμα CD. Υπολογίζοντας την σχέση των x_Q και x_C με το x_K, με βάση τα πρόσημα των ποσοτήτων $P(x_Q), P(x_C), P'(x_Q)$ και $P'(x_C)$, μπορούμε να απαλείψουμε τα απόλυτα στην ανισότητα $|x_K - x_Q| \leq |x_K - x_C|$,

ανάγοντας έτσι το πρόσημο του κατηγορήματος Incircle(A, CD, EF, ℓ_{QS}) στο πρόσημο της ποσότητας $L_1 x_K + L_0$ όπου οι ποσότητες L_1 και L_0 δίδονται στον παρακάτω πίνακα.

$x_K - x_Q$	$x_K - x_C$	L_1	L_0
≥ 0	≥ 0	0	$x_C - x_Q$
	< 0	2	$-x_C - x_Q$
< 0	≥ 0	-2	$x_C + x_Q$
	< 0	0	$x_Q - x_C$

Προφανώς, εάν $L_1 = 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε με ευκολία το κατηγόρημα Incircle$(A, B, CD, \ell_{QS}) = sign(L_0)$. Σε αντίθετη περίπτωση, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πρόσημο της ποσότητας $L_1 x_K + L_0$, όπου x_K είναι μια συγκεκριμένη ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. Ισοδύναμα ελέγχουμε την ποσότητα $-\frac{L_0}{L_1}$ ως προς την τιμή x_K, δεδομένου ότι $sign(L_1 x_K + L_0) = sign(L_1) sign(x_K + \frac{L_0}{L_1})$. Ο έλεγχος αυτός αντιστοιχεί στο να ελέγξουμε το πρόσημο των παραστάσεων $P(-\frac{L_0}{L_1})$ και $P'(-\frac{L_0}{L_1})$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 2 και 1 αντίστοιχα.

Στην περίπτωση όπου το τμήμα QS είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα και στο τμήμα EF, ακολουθούμε την αντίστοιχη διαδικασία. Αρχικά υπολογίζουμε την σχέση των y_Q και y_C με το y_K, με βάση το γεγονός ότι $y_K = y_C \pm (x_K - x_E)$, ανάλογα με το εάν το χωρίο R_i στο οποίο βρίσκεται το σημείο A, οπότε και το κέντρο $K = (x_K, y_K)$ ικανοποιεί την ευθεία $\ell_{1,3}$ ή την $\ell_{2,4}$. Σε κάθε περίπτωση τα πρόσημα των ποσοτήτων $|y_K - y_Q|$ και $|y_K - y_C|$ μπορούν να υπολογιστούν εφόσον κάθε παράσταση τελικά ανάγεται σε σύγκριση μια ποσότητας L αλγεβρικού βαθμού 1 και της ποσότητας x_K, το οποίο τελικά είναι ισοδύναμο με τον υπολογισμό των προσήμων των ποσοτήτων $P(L)$ και $P'(L)$ το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 2 και 1 αντίστοιχα.

Έχοντας προσδιορίσει τα πρόσημα των ποσοτήτων $|y_K - y_Q|$ και $|y_K - y_C|$, μπορούμε να απαλείψουμε τα απόλυτα που εμφανίζονται στην ανισότητα $|y_K - y_Q| \leq |y_K - y_C|$, εξισώνοντας με τον τρόπο αυτό το πρόσημο του κατηγορήματος Incircle(A, CD, EF, ℓ_{QS}) με το πρόσημο της ποσότητας $J_1 y_K + J_0$ όπου οι ποσότητες J_1 και J_0 δίδονται στον παρακάτω πίνακα.

$y_K - y_Q$	$y_K - y_C$	J_1	J_0
≥ 0	≥ 0	0	$x_C - x_Q$
	< 0	2	$-x_C - x_Q$
< 0	≥ 0	-2	$x_C + x_Q$
	< 0	0	$x_Q - x_C$

Δεδομένου την σχέση μεταξύ του x_K και του y_K (η οποία προκύπτει όπως αναφέραμε από το γεγονός ότι το κέντρο K ανήκει είτε στην ευθεία $\ell_{1,3}$ είτε στην $\ell_{2,4}$) το πρόσημο της παράστασης $J_1 y_K + J_0$ είναι ίδιο με αυτό της ποσότητας $L_1 x_K + L_0$ όπου

$$(L_1, L_0) = \begin{cases} (J_1, J_0 + J_1(y_C - x_E)) & \text{εάν } A \in R_1 \cup R_3, \\ (-J_1, J_0 + J_1(y_C + x_E)) & \text{εάν } A \in R_2 \cup R_4. \end{cases}$$

Για την περίπτωση όπου $L_1 = 0$, αρκεί να ελέγξουμε το πρόσημο της παράστασης L_0. Σε αντίθετη περίπτωση, ο υπολογισμός της παράστασης $L_1 x_K + L_0$ μπορεί να γίνει μέσω του υπολογισμού των ποσοτήτων $P(-\frac{L_0}{L_1})$ και $P'(-\frac{L_0}{L_1})$, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 2 και 1 αντίστοιχα.

Λήμμα 5.7. *Ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του Incircle για την περίπτωση ελέγχου τμήματος παράλληλου σε κάποιον άξονα ως προς Voronoi κύκλο που ορίζουν ένα σημείο και δύο τμήματα παράλληλα σε κάποιον άξονα είναι το πολύ 4.*

5.4 Ιδιάζουσες Περιπτώσεις

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα, θεωρήσαμε ότι τα σημειακά αντικείμενα S_i δεν ταυτίζονται με κάποια από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος κάποιου αντικειμένο S_j. Θα εξετάσουμε τώρα την συγκεκριμένη εκδοχή, δείχνοντας ότι οι αλγεβρικοί βαθμοί των κατηγορημάτων είναι πάντα μικρότεροι σε σχέση με τις αντίστοιχες μη ιδιάζουσες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις PPS και PSS εφόσον στις εκδοχές PPP και SSS δεν μπορεί κάποιο σημειακό αντικείμενο να ταυτίζεται με άκρο κάποιου τμήματος.

5.4.1 Η περίπτωση PPS

Έστω A, B τα σημειακά αντικείμενα και CD το ευθύγραμμο τμήμα. Θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα με $x_C < x_D$ και ότι το σημείο A ταυτίζεται με το σημείο C, δηλαδή $A \equiv C$. Προκειμένου να εφάπτεται ο κύκλος Voronoi στο τμήμα CD, και να διέρχεται από το σημείο A, θα ισχύει απαραίτητα ότι $x_K = x_A$, όπου K το κέντρο του $\mathcal{V}(A, B, CD)$. Επιπλέον εφόσον το σημείο B ανήκει στον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, CD)$, ικανοποιεί την εξίσωσή του, οπότε προκύπτει ότι $(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2 = \rho^2$, όπου $\rho^2 = (y_A - y_K)^2$. Τελικά, προκύπτει ότι

$$y_K = \frac{(x_A - x_B)^2 + y_B^2 - y_A^2}{2(y_B - y_A)}.$$

Γνωρίζοντας ακριβώς τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα κατηγορήματα Incircle(A, B, CD, Q) και Incircle(A, B, CD, QS), με μεγαλύτερη ευκολία όπως αναπτύσσεται στην Ενότητα 6.1. Με βάση την ανάλυση της συγκεκριμένης ενότητας ο αλγεβρικός βαθμός που απαιτείται για το υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle(A, B, CD, Q) είναι μόλις 3, ενώ αντίστοιχα για τον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle(A, B, CD, QS) είναι 4.

5.4.2 Η περίπτωση PSS

Έστω A το σημειακό αντικείμενο και CD, EF το ευθύγραμμο τμήμα. Θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το τμήμα CD είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα με $x_C < x_D$ και ότι το σημείο A ταυτίζεται με το σημείο C, δηλαδή $A \equiv C$ (οι υπόλοιπες δυνατές περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ακολουθώντας την ίδια στρατηγική.) Όπως προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $x_K = x_A$, όπου K το κέντρο του κύκλου $\mathcal{V}(A, B, CD)$, προκειμένου να αυτός να εφάπτεται στο σημείο A και στο τμήμα CD. Διακρίνουμε στην συνέχεια περιπτώσεις όσον αφορά τον προσανατολισμό του τμήματος EF:

- Εάν το τμήμα EF είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα, άρα και παράλληλο στον τμήμα CD, τότε το κέντρου του Voronoi κύκλου θα βρίσκεται αναγκαστικά στην μεσοπαράλληλη τους, δηλαδή θα ισχύει

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

  Εφόσον είναι γνωστές οι συντεταγμένες του κέντρου του Voronoi κύκλου, ο υπολογισμός των κατηγορημάτων Incircle(A, B, CD, Q) και Incircle(A, B, CD, QS), μπορεί να γίνει βάσει της ανάλυσης της Ενότητας 6.1, και οι αντίστοιχοι μέγιστοι αλγεβρικοί βαθμοί που απαιτούνται για τον υπολογισμό τους είναι 2 και 2.

- Εάν το τμήμα EF είναι παράλληλο στον φανταστικό άξονα, άρα και κάθετο στον τμήμα CD, τότε το κέντρου του Voronoi κύκλου θα βρίσκεται σε κάποια από τις διχοτόμους των σχηματιζόμενων χωρίων R_i (βλ. Υποενότητα 5.2.2, περίπτωση όπου τα τμήματα είναι κάθετα μεταξύ τους). Συγκεκριμένα η διχοτόμος των χωρίων R_1, R_3 έχει εξίσωση $\ell_{1,3} : y = x + y_C - x_E$, και αντίστοιχα η διχοτόμος των χωρίων R_2, R_4 έχει εξίσωση $\ell_{2,4} : y = -x + y_C + x_E$, οπότε θα ισχύει

$$y_K = x_A + y_C - x_E \quad ή \quad y_K = -x_A + y_C + x_E.$$

  Για να διαπιστώσουμε εάν η επιλογή του y_K είναι η σωστή, ελέγχουμε εάν $y_E < y_K < y_F$, δηλαδή εάν επιλέξαμε τον κύκλο Voronoi που εφάπτεται στο τμήμα EF.

  Εφόσον είναι γνωστές οι συντεταγμένες του κέντρου του Voronoi κύκλου, ο υπολογισμός των κατηγορημάτων Incircle(A, CD, EF, Q) και Incircle(A, CD, EF, QS), μπορεί να γίνει βάσει της ανάλυσης της Ενότητας 6.1, και οι αντίστοιχοι μέγιστοι αλγεβρικοί βαθμοί που απαιτούνται για τον υπολογισμό τους είναι 2 και 2.

Κεφάλαιο 6

Incircle Test σημείων και τμημάτων τα οποία είναι παράλληλα ή υπό γωνία 45° με τους άξονες

Στο κεφάλαιο αυτό επεκτείνουμε ακόμα περισσότερο το κατηγόρημα Incircle το οποίο αναφέραμε έτσι ώστε να μπορούμε να συμπεριλάβουμε στα ορίσματά του και ευθύγραμμα τμήματα τα οποία να είναι υπό γωνία 45° με τους άξονες. Το επιχείρημα αυτό είναι σαφώς δυσκολότερο και πιο πολύπλοκο από αυτό του προηγούμενου κεφαλαίου, καθώς οι δυνατοί συνδυασμοί είναι σαφώς περισσότεροι ενώ επιπλέον δεν υπάρχουν μέχρι στιγμής τεχνικές με τις οποίες να μπορέσουμε να ρίξουμε το αλγεβρικό κόστος σε σημαντικά χαμηλότερο σημείο από ότι τους αντίστοιχους στην εργασία [Bur96] .

Για τον λόγο αυτό ακολουθούμε τελείως διαφορετική προσέγγιση από αυτήν που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπολογίζοντας σε κάθε περίπτωση τις συντεταγμένες του κέντρου του Voronoi κύκλου, και έπειτα συγκρίνουμε αποστάσεις από αυτό προκειμένου να ελέγξουμε την σχετική θέση του τέταρτου όρισματος ως προς τον κύκλος που ορίζουν τα πρώτα τρία. Η διαδικασία αυτή είναι ανάλογη με αυτήν της εργασίας [Bur96] προσαρμοσμένη όμως στα δικά μας δεδομένα, ακολουθώντας τον ήδη υπάρχοντα συμβολισμό.

Στο τέλος του κεφαλαίου θα έχουμε υποδείξει τον τρόπο υπολογισμού του κατηγορήματος Incircle έτσι ώστε

$$\mathsf{Incircle}(S_1, S_2, S_3, Q) = \begin{cases} < 0 & \text{εάν το } Q \text{ είναι εντός του } \mathcal{V}(S_1, S_2, S_3) \\ > 0 & \text{εάν το } Q \text{ είναι εκτός του } \mathcal{V}(S_1, S_2, S_3) \\ 0 & \text{εάν το } Q \text{ εφάπτεται στον } \mathcal{V}(S_1, S_2, S_3) \end{cases}$$

όπου κάθε ένα από τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3 και Q μπορεί να είναι είτε σημείο είτε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο ή υπό γωνία 45° με κάποιον άξονα.

Στις ενότητες που ακολουθούν αναφέρουμε αρχικά την μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το κατηγόρημα Incircle. Στην συνέχεια, χωρίζουμε την μελέτη μας σε υποενότητες με βάση την μορφή των τριών πρώτων ορισμάτων του Incircle.

6.1 Γενικευμένη μέθοδος υπολογισμού του κατηγορήματος Incircle

Σε κάθε μία από τις δυνατές περιπτώσεις που υπάρχουν, θα υπολογίσουμε αρχικά το κέντρο K του κέντρου $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$. Το σημείο K θα υπολογίζεται πάντα στην μορφή $K = (x_K, y_K) = (\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z})$, όπου οι ποσότητες v_X, v_Y και v_Z θα είναι αλγεβρικές ποσότητες βαθμού $m+1, m+1$ και m αντίστοιχα.

Έχοντας ως δεδομένες τις συντεταγμένες του κέντρου, μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle στον έλεγχο του προσήμου της ποσότητας $d^2(K,Q) - d^2(K,S)$ όπου $S \in \{S_1, S_2, S_3\}$.

Εάν το αντικείμενο Q είναι σημείο και υπάρχει ένα σημείο $A \in \{S_1, S_2, S_3\}$, τότε αρκεί να ελέγξουμε την ανισότητα

$$\left(\frac{v_X}{v_Z} - x_Q\right)^2 + \left(\frac{v_X}{v_Z} - y_Q\right)^2 < \left(\frac{v_X}{v_Z} - x_A\right)^2 + \left(\frac{v_X}{v_Z} - y_A\right)^2.$$

Για $v_Z > 0$, η παραπάνω ανισότητα μετατρέπεται στην σχέση

$$v_X(2x_Q - 2x_A) + v_Y(2y_Q - 2y_A) + v_Z(x_A^2 + y_A^2 - x_Q^2 - y_Q^2) > 0 \tag{6.1}$$

Η παραπάνω ανισότητα θα μας φανεί χρήσιμη για τις περιπτώσεις $PPPP, PPSP$, και $PSSP$, στις οποίες και μπορεί να εφαρμοστεί.

Εάν το αντικείμενο Q είναι σημείο και υπάρχει ένα τμήμα $CD \in \{S_1, S_2, S_3\}$, τότε αρκεί να ελέγξουμε την ανισότητα

$$(a_1 v_X + b_1 v_y + c_1 v_Z)^2 < (a_1^2 + b_1^2)[(v_X - x_Q v_Z)^2 + (v_Y - y_Q v_Z)^2], \tag{6.2}$$

όπου ο φορέας του τμήματος CD είναι η ευθεία $\ell_{CD} : a_1 x + b_1 y + c = 0$. Η παραπάνω ανισότητα είναι χρήσιμη μόνο στην περίπτωση $SSSP$, καθώς εάν υπάρχει έστω και ένα σημείο ανάμεσα στα τρία πρώτα ορίσματα η ανισότητα (6.1) δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Εάν το αντικείμενο Q είναι τμήμα, έστω το τμήμα QS, τότε αρχικά ελέγχουμε εάν τα άκρα Q και S βρίσκονται εντός του $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$. Εάν τουλάχιστον ένα από αυτά βρίσκεται εντός του κύκλου τότε συμπεραίνουμε αυτόματα ότι Incircle$(S_1, S_2, S_3, QS) > 0$. Σε αντίθετη περίπτωση, χρειάζεται να ελέγξουμε εάν ο φορέας του τμήματος QS, δηλαδή η ευθεία $\ell_{QS} : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, τέμνει ή όχι τον κύκλο $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$. Ο έλεγχος αυτός ισοδυναμεί με το κατηγόρημα Incircle$(S_1, S_2, S_3, \ell_{QS})$ και άρα αρκεί να συγκρίνουμε τις αποστάσεις $d^2(K, \ell_{QS})$ και $d^2(K, S)$, για κάποιο αντικείμενο $S \in \{S_1, S_2, S_3\}$.

Εάν υπάρχει κάποιο σημείο $A \in \{S_1, S_2, S_3\}$, τότε αρκεί να ελέγξουμε την ανισότητα

$$(a_2 v_X + b_2 v_y + c_2 v_Z)^2 > (a_2^2 + b_2^2)[(v_X - x_A v_Z)^2 + (v_Y - y_A v_Z)^2]. \tag{6.3}$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι χρήσιμη για την περίπτωση $PPPS$ και για τις περιπτώσεις $PPSS$ και $PSSS$ εάν δεν υπάρχει τμήμα στα πρώτα τρία ορίσματα το οποίο να είναι παράλληλο ή κάθετο το τμήμα QS, οπότε και η παρακάτω ανισότητα (6.4) δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Εάν υπάρχει κάποιο τμήμα $CD \in \{S_1, S_2, S_3\}$ με φορέα $\ell_{CD} : a_1 x + b_1 y + c = 0$, τότε για να συγκρίνουμε τις αποστάσεις $d^2(K, \ell_{QS})$ και $d^2(K, CD)$ ελέγχουμε την ανισότητα

$$(a_2 v_X + b_2 v_y + c_2 v_Z)^2 (a_1^2 + b_1^2) < (a_1 v_X + b_1 v_y + c_1 v_Z)^2 (a_2^2 + b_2^2). \tag{6.4}$$

Η παραπάνω σχέση είναι χρήσιμη στην περίπτωση $SSSS$, αλλά φαίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη εάν υπάρχει τμήμα CD το οποίο να είναι παράλληλο ή κάθετο στο τμήμα QS. Στην περίπτωση αυτή οι ποσότητες $a_1^2 + b_1^2$ και $a_2^2 + b_2^2$ είναι ίσες και άρα μπορούν να απλοποιηθούν. Στην περίπτωση αυτή δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε διαφορά τετραγώνων αποστάσεων, αλλά απλά αποστάσεων οπότε ρίχνουμε το αλγεβρικό κόστος στο μισό, έχοντας να υπολογίσουμε την ανισότητα

$$|a_2 v_X + b_2 v_y + c_2 v_Z| < |a_1 v_X + b_1 v_y + c_1 v_Z|. \tag{6.5}$$

Έχοντας ελέγξει την σχετική θέση του φορέα του τμήματος QS και του Voronoi κύκλου $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ γνωρίζουμε ότι εάν η ευθεία δεν τέμνει τον εν λόγω κύκλο τότε το τμήμα QS δεν μπορεί να τέμνει τον κύκλο και συνεπώς $\mathsf{Incircle}(AB, CD, EF, QS) > 0$. Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή η ευθεία ℓ_{QS} τέμνει (αντίστοιχα εφάπτεται) τον κύκλο, τότε χρειάζεται να ελέγξουμε την θέση των άκρων Q και S ως προς την ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ℓ_{QS} και διέρχεται από το κέντρο· το τμήμα QS τέμνει τον Voronoi κύκλο (αντίστοιχα εφάπτεται) εάν και μόνο εάν τα σημεία Q και S βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της εν λόγω ευθείας. Σε αντίθετη περίπτωση το τμήμα βρίσκεται εκτός του κύκλου $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$, δηλαδή $\mathsf{Incircle}(AB, CD, EF, QS) > 0$.

Για τον έλεγχο της σχετικής θέσης των σημείων Q, S ως προς την ευθεία αυτή, έστω $\ell^{\perp}(K)$, αρχικά υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθείας. Η $\ell^{\perp}(K)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\ell_{QS} : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ και επιπλέον διέρχεται από σημείο $K = (\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z})$. Τελικά η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$\ell^{\perp}(K) : \quad -b_2 x + a_2 y + c_K = 0,$$

όπου $c_K = \frac{1}{v_Z}(b_2 v_X - a_2 v_Y)$. Τελικά για τον έλεγχο της πλευράς στην οποία βρίσκεται το σημείο $(x,y) \in \{Q,S\}$, χρησιμοποιούμε την σχέση

$$(-b_2 x + a_2 y)v_Z + (b_2 v_X - a_2 v_Y). \tag{6.6}$$

6.2 Υπολογισμός του κέντρου Voronoi

Έχοντας στη διάθεση μας τις εξισώσεις (6.1)-(6.5), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το κόστος που απαιτείται για το κατηγόρημα Incircle στην περίπτωση όπου οι συντεταγμένες του κέντρου K είναι δεδομένες. Στις παρακάτω υποενότητες υπολογίζουμε τις συντεταγμένες αυτές με βάση τα αρχικά αντικείμενα S_i ενώ στην αμέσως επόμενη ενότητα υπολογίζουμε ακριβώς τον απαιτούμενο βαθμό για κάθε μία περίπτωση.

6.2.1 Η περίπτωση PPP

Στην περίπτωση όπου τα αντικείμενα S_1, S_2, S_3 είναι τα σημεία A, B, C, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το κέντρο K του κύκλου $\mathcal{V}(A,B,C)$, συναρτήσει των συντεταγμένων των 3 σημείων. Πράγματι, ο κύκλος $\mathcal{V}(A,B,C)$ ο οποίος είναι μοναδικός, έχει ως κέντρο την τομή των μεσοκαθέτων των σημείων A, B και B, C.

Τελικά το σημείο K είναι τομή των ευθειών

$$\begin{aligned} y - \frac{y_A + y_B}{2} &= \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x\right) \\ y - \frac{y_C + y_B}{2} &= \left(\frac{x_B - x_C}{y_B - y_C}\right)\left(\frac{x_C + x_B}{2} - x\right) \end{aligned}$$

οπότε από την επίλυση του συστήματος προκύπτει ότι $K = (x_K, y_K) = (\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z})$, όπου

$$\begin{aligned} v_X &= (x_A^2 + y_A^2)(y_B - y_C) + (x_B^2 + y_B^2)(y_C - y_A) + (x_C^2 + y_C^2)(y_A - y_B) \\ -v_Y &= (x_A^2 + y_A^2)(x_B - x_C) + (x_B^2 + y_B^2)(x_C - x_A) + (x_C^2 + y_C^2)(x_A - x_B) \\ v_Z &= 2[(x_B y_C - x_C y_B) + (x_C y_A - x_A y_C) + (x_A y_B - x_B y_A)]. \end{aligned}$$

6.2.2 Η περίπτωση PPS

Στην περίπτωση όπου τα αντικείμενα S_1, S_2 και S_3 είναι τα σημεία A, B και το τμήμα CD αντίστοιχα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το κέντρο K του κύκλου $\mathcal{V}(A,B,CD)$, συναρτήσει των συντεταγμένων των 3 αντικειμένων.

Πράγματι, το κέντρο K είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου των σημείων A και B, με την παραβολή που ορίζει το σημείο A και ο φορέας του τμήματος CD, $\ell_{CD} : ax+by+c = 0$.

Η μεσοκάθετος των σημείων A, B έχει εξίσωση

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x\right) \tag{6.7}$$

και η παραβολή που ορίζεται από το σημείο A και την ευθεία ℓ_{CD} έχει εξίσωση

$$(bx - ay)^2 - 2a(ax_A + by_A + c)x - 2b(ax_A + by_A + c)y - (ax_A + by_A + c)^2 = 0. \tag{6.8}$$

Απαλείφοντας από την σχέση (6.8) την μεταβλητή x χρησιμοποιώντας την σχέση (6.7) προκύπτει ότι το y_K είναι ρίζα του πολυωνύμου $W(y) = w_2 y^2 + w_1 y + w_0$, όπου

$$\begin{aligned} w_2 &= (bs - ar)^2 \\ w_1 &= r(ds - er) - 2b_1 t(bs + ar) \\ w_0 &= bt^2 + r(fr - dt). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} r &= 2(x_B - x_A) & d &= -2a(ax_A + by_A + c) \\ s &= 2(y_B - y_A) & e &= -2b(ax_A + by_A + c) \\ t &= -((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2) & f &= -(ax_A + by_A + c)^2 \end{aligned}$$

Για την περίπτωση όπου $b_1 s - a_1 r \neq 0$, προκύπτει ότι

$$y_K = \frac{1}{w_2}\left(-w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - 4w_2 w_0}\right).$$

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε, μετά από απλοποιήσεις, ότι τα δύο σημεία- λύσεις που προκύπτουν από το αρχικό σύστημα είναι της μορφής $(x_K, y_K) = \left(\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z}\right)$, για

$$\begin{aligned} v_X &= J \pm 2(y_B - y_A)\sqrt{S}, \\ v_Y &= I \mp 2(x_B - x_A)\sqrt{S}, \\ v_Z &= 2X^2, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} I &= -bt[a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A)] + r(ax_A + by_A + c)[b(x_B - x_A) - a(y_B - y_A)], \\ J &= -at[a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A)] + s(ax_A + by_A + c)[b(x_B - x_A) - a(y_B - y_A)], \\ S &= -t(a^2 + b^2)(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c), \\ X &= [a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A)]. \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ποσότητα S είναι πάντοτε θετική, εφόσον η παράσταση t είναι αρνητική, ενώ οι ποσότητες $(ax_A + by_A + c)$ και $(ax_B + by_B + c)$ είναι ομόσημες εφόσον τα σημεία A και B βρίσκονται από την ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_{CD}.

Με γεωμετρική διερεύνηση προκύπτει ότι το κέντρο που αντιστοιχεί στον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, CD)$ είναι το σημείο $K = \left(\frac{J+2(y_B-y_A)\sqrt{S}}{2X}, \frac{I-2(x_B-x_A)\sqrt{S}}{2X}\right)$, ενώ αυτό που αντιστοιχεί στον κύκλο $\mathcal{V}(B, A, CD)$ είναι το σημείο $K = \left(\frac{J-2(y_B-y_A)\sqrt{S}}{2X}, \frac{I+2(x_B-x_A)\sqrt{S}}{2X}\right)$.

Για την ειδική περίπτωση όπου τα σημεία A και B ισαπέχουν από την ευθεία ℓ_{CD}, η παράσταση $bs - ar$ μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή $w_2 = 0$ δηλαδή το πολυώνυμο $W(y)$ εκφυλίζεται(ή υποβιβάζεται) στο γραμμικό πολυώνυμο πολυώνυμο $w_1 y + w_0$. Γεωμετρικά αυτό δηλώνει ότι υπάρχει μόνο ένα κέντρο Voronoi, το οποίο έχει συντεταγμένες $K = (x_K, y_K) = (\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z})$, όπου

$$\begin{aligned}
v_X &= [2r(ax_A + by_A + c) - at](a^2 + b^2) + 4af, \\
v_Y &= [(2s(ax_A + by_A + c) - bt](a^2 + b^2) + 4bf, \\
v_Z &= 8(a^2 + b^2)(ax_A + by_A + c).
\end{aligned}$$

6.2.3 Η περίπτωση PSS

Στην περίπτωση όπου τα αντικείμενα S_1, S_2 και S_3 είναι το σημείο A και τα τμήματα CD, EF αντίστοιχα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το κέντρο K του κύκλου $\mathcal{V}(A, CD, EF)$, συναρτήσει των συντεταγμένων των 3 αντικειμένων.

Πράγματι, το κέντρο K είναι το σημείο τομής της διχοτόμου των ευθειών $\ell_{CD} : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ και $\ell_{EF} : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, και της παραβολής που ορίζει η ευθεία ℓ_{CD} και το σημείο A. Η εξίσωση της διχοτόμου των ℓ_{CD} και ℓ_{EF} έχει εξίσωση

$$rx + sy + t = 0, \tag{6.9}$$

όπου $r = a_1\Delta_2 - a_2\Delta_1$, $s = b_1\Delta_2 - b_2\Delta_1$, $t = (a_1 x_A + b_1 y_A + c_1)\Delta_2 - (a_2 x_A + b_2 y_A + c_2)\Delta_1$ και $\Delta_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$. Η εξίσωση της παραβολής που ορίζει η ευθεία ℓ_{CD} και το σημείο A έχει εξίσωση

$$(b_1 x - a_1 y)^2 + dx + ey + f = 0, \tag{6.10}$$

όπου $d = -2a_1(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1)$, $e = -2b_1(a_2 x_A + b_2 y_A + c_2)$, $f = -(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1)^2$. Απαλείφοντας από την σχέση (6.10) την μεταβλητή x χρησιμοποιώντας την σχέση (6.9), προκύπτει ότι το y_K ικανοποιεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς την μεταβλητή y:

$$y_K = \frac{1}{w_2}\left(-w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - 4w_2 w_0}\right),$$

όπου

$$
\begin{aligned}
w_2 &= (b_1 s - a_1 r)^2 \\
w_1 &= r(ds - er) - 2b_1 t(b_1 s + a_1 r) \\
w_0 &= b_1 t^2 + r(fr - dt).
\end{aligned}
$$

Τελικά προκύπτουν τα δύο πιθανά κέντρα Voronoi τα οποία έχουν συντεταγμένες $K = (x_K, y_K) = \left(\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z}\right)$, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
v_X &= J \pm sign(s)\sqrt{G}, \\
v_Y &= I \mp sign(s)\sqrt{F}, \\
v_Z &= X,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
I &= b_1(a_2 x_A + b_2 y_A + c_2) + b_2(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1), \\
J &= a_1(a_2 x_A + b_2 y_A + c_2) + a_2(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1), \\
F &= 2(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1)(a_2 x_A + b_2 y_A + c_2)(\Delta_1\Delta_2 + b_1 b_2 - a_1 a_2), \\
G &= 2(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1)(a_2 x_A + b_2 y_A + c_2)(\Delta_1\Delta_2 + a_1 a_2 - b_1 b_2), \\
X &= \Delta_1\Delta_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2.
\end{aligned}
$$

Με γεωμετρική διερεύνηση προκύπτει ότι το κέντρο που αντιστοιχεί στον κύκλο $\mathcal{V}(A, CD, EF)$ είναι το σημείο $K = \left(\frac{J - sign(s)\sqrt{G}}{X}, \frac{I + sign(s)\sqrt{F}}{X}\right)$, ενώ αυτό που αντιστοιχεί στον κύκλο $\mathcal{V}(A, EF, CD)$ είναι το σημείο $K = \left(\frac{J + sign(s)\sqrt{G}}{X}, \frac{I - sign(s)\sqrt{F}}{X}\right)$.

6.2.4 Η περίπτωση SSS

Στην περίπτωση όπου τα αντικείμενα S_1, S_2 και S_3 είναι τα ευθύγραμμα τμήματα AB, CD και EF αντίστοιχα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το κέντρο K του κύκλου $\mathcal{V}(AB, CD, EF)$, συναρτήσει των συντεταγμένων των 3 αντικειμένων.

Αρχικά ας υποθέσουμε ότι οι φορείς των τμημάτων AB, CD και EF είναι οι ευθείες

$$
\begin{aligned}
\ell_{AB}: &\quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\
\ell_{CD}: &\quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \\
\ell_{EF}: &\quad a_3 x + b_3 y + c_3 = 0,
\end{aligned}
$$

και επίσης ότι δεν είναι και οι τρεις παράλληλες μεταξύ τους, έτσι ώστε να ορίζεται ο Voronoi κύκλος $\mathcal{V}(AB, CD, EF)$. Ας κοιτάξουμε όμως αρχικά την περίπτωση του Voronoi κύκλου $\mathcal{V}(\ell_{AB}, \ell_{CD}, \ell_{EF})$, ο οποίος εν γένει δεν ταυτίζεται με τον $\mathcal{V}(AB, CD, EF)$. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί κύκλοι που εφάπτονται στις τρεις αυτές ευθείες, εάν θεωρήσουμε τις ευθείες αυτές προσημασμένες, τότε υπάρχει ένας μοναδικός Voronoi κύκλος $\mathcal{V}(\ell_{AB}, \ell_{CD}, \ell_{EF})$ τέτοιος ώστε το κέντρο K του κύκλου να βρίσκεται στην αριστερή πλευρά κάθε ευθείας, ή ισοδύναμα τα τμήματα στα οποία εφάπτεται να εμφανίζονται με την συγκεκριμένη σειρά στην περιφέρεια του κύκλου εάν κινηθούμε πάνω σε αυτήν με φορά αντίθετη με αυτήν του ρολογιού.

Δεδομένου ότι μπορούμε να βρούμε τον σωστό προσανατολισμό των φορέων των τμημάτων, ας υπολογίσουμε το κέντρο K του Voronoi κύκλου. Εάν θεωρήσουμε $\Delta_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ όπως προηγουμένως, τότε γνωρίζουμε ότι η (σωστά προσημασμένη διχοτόμος) των ευθειών $a_i x + b_i y + c_i = 0$ και $a_j x + b_j y + c_j = 0$, δίδεται από την σχέση

$$(a_i\Delta_j - a_j\Delta_i)x + (b_i\Delta_j + b_j\Delta_i) + c_i\Delta_j - c_j\Delta_i = 0.$$

Δεδομένου λοιπόν ότι οι ευθείες $k_1x + l_1y + m_1 = 0$, $k_2x + l_2y + m_2 = 0$ τέμνονται στο σημείο

$$\left(\frac{m_1 l_2 - m_2 l_1}{l_1 k_2 - l_2 k_1}, \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{l_1 k_2 - l_2 k_1}\right), \tag{6.11}$$

υπολογίζουμε το σημείο τομής των διχοτόμων $\mathrm{Bis}(\ell_{AB}, \ell_{CD})$ και $\mathrm{Bis}(\ell_{AB}, \ell_{EF})$, θέτοντας στην σχέση (6.11) τα εξής

$$\begin{aligned} k_1 &= a_1\Delta_2 - a_2\Delta_1, & l_1 &= b_1\Delta_2 - b_2\Delta_1, & m_1 &= c_1\Delta_2 - c_2\Delta_1, \\ k_2 &= a_1\Delta_3 - a_3\Delta_1, & l_2 &= b_1\Delta_3 - b_3\Delta_1, & m_2 &= c_1\Delta_3 - c_3\Delta_1. \end{aligned}$$

Τελικά προκύπτει ότι το κέντρο K έχει συντεταγμένες $(x_K, y_K) = \left(\frac{v_X}{v_Z}, \frac{v_Y}{v_Z}\right)$, όπου

$$\begin{aligned} v_X &= (c_2b_3 - c_3b_2)\Delta_1 + (c_3b_1 - c_1b_3)\Delta_2 + (c_1b_2 - c_2b_1)\Delta_3, \\ -v_Y &= (c_2a_3 - c_3a_2)\Delta_1 + (c_3a_1 - c_1a_3)\Delta_2 + (c_1a_2 - c_2a_1)\Delta_3, \\ -v_Z &= (a_2b_3 - a_3b_2)\Delta_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\Delta_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\Delta_3. \end{aligned}$$

Ένας ενδιαφέρον τρόπος γραφής των παραπάνω ομογενών συντεταγμένων είναι ο εξής

$$(v_X, v_Y, v_Z) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \Delta_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \Delta_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \Delta_3 \\ \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_j} & \vec{0} \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

Εάν λοιπόν μπορούσαμε να προσανατολίσουμε σωστά τις ευθείες ℓ_{AB}, ℓ_{CD} και ℓ_{EF} θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το σωστό κέντρο Voronoi, οπότε και θα αναφερόμασταν πλέον στον κύκλο$\mathcal{V}(AB, CD, EF)$. Τίθεται το ερώτημα λοιπόν εάν και με ποιόν τρόπο μπορούμε να βρούμε τον σωστό προσανατολισμό. Επίσης πρέπει να αναλογιστούμε ότι αν και υπάρχουν τέσσερις κύκλοι που να εφάπτονται στις τρεις ευθείες, μπορούν να υπάρχουν μόνο δύο κύκλοι που να εφάπτονται στα τρία τμήματα, δεδομένου ότι αυτά δεν μπορούν να τέμνονται μεταξύ τους.

Ας συμβολίσουμε για λόγους ευχρηστίας με $\ell_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$ τον φορέα του τμήματος S_i, για $i \in \{1, 2, 3\}$. Εάν και τα δύο άκρα του τμήματος S_j βρίσκονται από την ίδια πλευρά της ευθείας ℓ_i, τότε και οι δύο πιθανές κορυφές του κύκλου $\mathcal{V}(S_1, S_2, S_3)$ θα βρίσκονταν από την ίδια πλευρά της ℓ_i που βρίσκονται τα άκρα. Συνεπώς πρέπει να προσανατολίσουμε την ευθεία ℓ_i έτσι ώστε το τμήμα S_j να βρίσκεται αριστερά της ℓ_i. Εφόσον θεωρούμε ότι ο Voronoi κύκλος $\mathcal{V}(\ell_{AB}, \ell_{CD}, \ell_{EF})$ ορίζεται δεν μπορούν δύο διαφορετικά τμήματα να βρίσκονται εξ΄ ολοκλήρου σε διαφορετικές πλευρές σε σχέση με τον φορέα του τρίτου τμήματος. Συνεπώς η διαδικασία που μόλις αναφέραμε δίδει στην ευθεία ℓ_i μοναδικό προσανατολισμό.

Εάν ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία δώσουμε τον κατάλληλο προσανατολισμό σε όλες τις ευθείες, τότε έχουμε τελειώσει. Σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ευθείες ℓ_i και ℓ_j έχουν προσανατολιστεί κατάλληλα, ενώ η ευθεία ℓ_k παραμένει μη-προσανατολισμένη. Θεωρώντας έναν από τους δύο πιθανούς προσανατολισμούς για την ευθεία ℓ_k, υπολογίζουμε τα σημεία επαφής του κύκλου που προκύπτει από τους προσανατολισμούς των τριών ευθειών. Εάν c_1, c_2, c_3 είναι τα σημεία τομής του Voronoi κύκλου με τις ευθείες ℓ_1, ℓ_2 και ℓ_3 αντίστοιχα, τότε υπολογίζουμε ότι στο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του κύκλου τα σημεία αυτά είναι της μορφής $c_i = d(-a_i/\Delta_i, -b_i/\Delta_i)$ για $i \in \{1, 2, 3\}$, όπου d είναι ακτίνα του Voronoi κύκλου. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε εάν τα σημεία εμφανίζονται στην σωστή σειρά, το οποίο ισοδυναμεί με το να ελέγξουμε εάν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} -a_1 d/\Delta_1 & -b_1 d/\Delta_1 & 1 \\ -a_2 d/\Delta_2 & -b_2 d/\Delta_2 & 1 \\ -a_3 d/\Delta_3 & -b_1 d/\Delta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

είναι θετική. Η παραπάνω ορίζουσα είναι ομόσημη με την απλούστερη παράσταση

$$-v_Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \Delta_1 \\ a_2 & b_2 & \Delta_2 \\ a_3 & b_3 & \Delta_3 \end{vmatrix}$$

η οποία παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι μηδέν εφόσον τα τρία σημεία επαφής δεν γίνεται να είναι συγγραμμικά.

6.3 Αλγεβρικοί βαθμοί για το υπολογισμό των κατηγορημάτων.

Στην ενότητα αυτή υπολογίζουμε τον αλγεβρικό βαθμό που απαιτείται για τον υπολογισμό του κατηγορήματος Incircle για κάθε μία από τις δυνατές περιπτώσεις. Αναφορικά με τα τμήματα, υποθέτουμε ότι μπορούν να είναι είτε παράλληλα είτε υπό γωνία 45° με κάποιον άξονα. Ο περιορισμός αυτός αντιστοιχεί στον περιορισμό των συντελεστών των φορέων των τμημάτων και συγκεκριμένα εάν $\ell : ax+by+c=0$ ένας τυχαίος φορέας τμήματος τότε $(a,b) \in \{(1,0),(0,1),(\pm 1,\pm 1),(\pm 1,\mp 1)\}$. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τους συντελεστές a,b να έχουν αλγεβρικό βαθμό 0, ενώ ο αλγεβρικός βαθμός του c είναι προφανώς 1.

6.3.1 Η περίπτωση PPP

Δεδομένου ότι από την ενότητα 6.2.1, οι αλγεβρικοί βαθμοί των ποσοτήτων v_X, v_Y και v_Z είναι 3,3 και 2 αντίστοιχα, τότε για την περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι σημείο χρειάζεται να ελέγξουμε την ανισότητα 6.1, κάτι το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 4. Το πρόσημο της παράστασης στο αριστερό μέλος της ανισότητας αντιστοιχεί στο $-sign(\text{Incircle}(A,B,C,Q))$.

Εάν το αντικείμενο Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα QS, τότε χρειάζεται να ελέγξουμε τα άκρα QS ως προς τον κύκλο $\mathcal{V}(A,B,C)$ το οποίο απαιτεί βαθμό 4, όπως μόλις αναφέραμε. Εάν βρίσκονται και τα δύο εκτός κύκλου τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την θέση του φορέα ℓ_{QS} ως προς τον κύκλο, ελέγχοντας την σχέση 6.3, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό 6. Εάν ο φορέας τέμνει τον κύκλο χρειάζεται επιπλέον να ελέγξουμε το πρόσημο της ποσότητας (6.6), για τα σημεία Q και S το οποίο απαιτεί βαθμό 3.

6.3.2 Η περίπτωση PPS

Όπως έχουμε αναφέρει στην ενότητα 5.3.1, η περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι σημείο, ανάγεται στον υπολογισμό του $\text{Incircle}(A,B,Q,CD)$, το οποίο με βάση την προηγούμενη υποενότητα απαιτεί αλγεβρικό βαθμό το πολύ 6. Ας μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα QS. Αρχικά όμως ας κοιτάξουμε τους βαθμούς των συντεταγμένων του κέντρου K.

Από την ενότητα 6.2.2, οι αλγεβρικοί βαθμοί των ποσοτήτων I, J, X και S προκύπτουν ότι είναι 3,3,4 και 1 αντίστοιχα. Συνεπώς το v_Z έχει αλγεβρικό βαθμό 2 ενώ οι ποσότητες v_X και v_Y είναι της μορφής $k+l\sqrt{S}$, όπου τα k, l έχουν αλγεβρικό βαθμό 3 και 1 αντίστοιχα ενώ το $\sqrt{S}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει βαθμό $\tilde{2}$. Με την θεώρηση αυτή, ο υπολογισμός παραστάσεων τα οποία περιέχουν τα v_X, v_Y και έχουν βαθμό $\tilde{d}$, για να υπολογιστούν τελικά απαιτείται βαθμός $2d$, εφόσον υπάρξει ομαδοποίηση των στοιχείων που περιέχουν το $\sqrt{S}$ και στην συνέχεια υψώσουμε στο τετράγωνο.

Με βάση την παραπάνω θεώρηση, οι συντεταγμένες v_X, v_Y και v_Z έχουν αλγεβρικό βαθμό $\tilde{3}$,$\tilde{3}$ και $\tilde{2}$. Στην περίπτωση λοιπόν όπου το αντικείμενο Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα QS, αρχικά να ελέγχουμε τα άκρα Q, S ως προς τον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, C)$ το οποίο απαιτεί βαθμό 6, όπως αναφέραμε στην αρχή της υποενότητας. Εάν βρίσκονται και τα δύο εκτός κύκλου τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την θέση του φορέα ℓ_{QS} ως προς τον κύκλο, ελέγχοντας την σχέση 6.3, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό $\tilde{6}$ στον δακτύλιο $\mathbb{R}[\sqrt{S}]$. Τελικά, ο βαθμός που απαιτείται για το πρόσημο της παράστασης είναι ο διπλάσιος, δηλαδή 12. Εάν ο ο φορέας τέμνει τον κύκλο χρειάζεται επιπλέον να ελέγξουμε το πρόσημο της ποσότητας (6.6), για τα σημεία Q και S το οποίο απαιτεί βαθμό $\tilde{3}$, δηλαδή 6.

6.3.3 Η περίπτωση PSS

Αρχικά ας μελετήσουμε την περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι σημείο. Από την ενότητα 6.2.3, οι αλγεβρικοί βαθμοί των ποσοτήτων I, J, F, G και X προκύπτουν ότι είναι στην χειρότερη περίπτωση (S_2 τμήμα παράλληλο σε κάποιον άξονα και S_3 τμήμα υπό γωνία $45°$ με κάποιον άξονα) 1,1,$\tilde{2}$, $\tilde{2}$ και $\tilde{0}$ αντίστοιχα, όπου τα $F, G, X \in \mathbb{R}[\sqrt{2}, \sqrt{F}, \sqrt{G}]$. Συνεπώς το v_Z έχει αλγεβρικό βαθμό 0 ενώ οι ποσότητες v_X και v_Y είναι της μορφής $k \pm \sqrt{F}$ και $l \pm \sqrt{G}$, όπου τα k, l έχουν αλγεβρικό βαθμό 1 ενώ οι παραστάσεις $\sqrt{F}, \sqrt{G}$ μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν βαθμό $\tilde{1}$. Με την θεώρηση αυτή, και παρατηρώντας ότι η ποσότητα $\sqrt{FG}$ είναι πολυώνυμο, ο υπολογισμός παραστάσεων τα οποία περιέχουν τα v_X, v_Y και έχουν βαθμό $\tilde{d}$, για να υπολογιστούν τελικά απαιτείται βαθμός $4d$, εφόσον υπάρξει ομαδοποίηση των στοιχείων που περιέχουν το $\sqrt{2}$ και στην συνέχεια υψώσουμε στο τετράγωνο, και στη συνέχεια ομαδοποιούμε τα στοιχεία που περιέχουν $\sqrt{F}$ ή $\sqrt{G}$ και υψώνουμε στο τετράγωνο.

Με βάση την παραπάνω θεώρηση, οι συντεταγμένες v_X, v_Y και v_Z έχουν αλγεβρικό βαθμό $\tilde{1}$,$\tilde{1}$ και $\tilde{0}$. Στην περίπτωση λοιπόν που το αντικείμενο Q είναι σημείο, χρειάζεται να ελέγξουμε την ανισότητα (6.1), η οποία απαιτεί αλγεβρικό βαθμό $\tilde{2}$, δηλαδή 8.

Στην περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα QS, αρχικά ελέγχουμε τα άκρα Q, S ως προς τον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, C)$ το οποίο απαιτεί βαθμό 8, όπως μόλις αναφέραμε. Εάν βρίσκονται και τα δύο εκτός κύκλου τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την θέση του φορέα ℓ_{QS} ως προς τον κύκλο, ελέγχοντας την σχέση 6.3, το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό $\tilde{2}$ στον δακτύλιο $\mathbb{R}[\sqrt{2}, \sqrt{F}, \sqrt{G}]$. Τελικά, ο βαθμός που απαιτείται για το πρόσημο της παράστασης είναι ο τετραπλάσιος, δηλαδή 8. Εάν ο ο φορέας τέμνει τον κύκλο χρειάζεται επιπλέον να ελέγξουμε το πρόσημο της ποσότητας (6.6), για τα σημεία Q και S το οποίο απαιτεί βαθμό '1', δηλαδή 4.

6.3.4 Η περίπτωση SSS

Από την υποενότητα 6.2.4, και δεδομένου του περιορισμού στον προσανατολισμό των τμημάτων, προκύπτει ότι οι ποσότητες v_X, v_Y και v_Z είναι της μορφής $k + l\sqrt{2}$, όπου οι ποσότητες k, l είναι πολυώνυμα αλγεβρικού βαθμού 1 (για τα v_X, v_Y) ή 0 (για το v_Z). Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ποσότητες v_X, v_Y και v_Z έχουν αλγεβρικό βαθμό $\tilde{1}$,$\tilde{1}$ και $\tilde{0}$ εννοώντας ότι οποιοσδήποτε υπολογισμός ο οποίος περιλαμβάνει τις ποσότητες αυτές θα απαιτεί τον διπλάσιο βαθμό λόγω της ποσότητας $\sqrt{2}$.

Με βάση τον συμβολισμό αυτό, εξετάζουμε την περίπτωση όπου το αντικείμενο Q είναι σημείο. Στην περίπτωση αυτή, χρειάζεται να εξετάσουμε την ανισότητα (6.2). Οι εμφανιζόμενες ποσότητες στην ανισότητα έχουν βαθμό $\tilde{2}$, το οποίο σημαίνει ότι απαιτούνται υπολογισμοί ποσοτήτων αλγεβρικού βαθμού 4.

Για την περίπτωση όπου το αντικείμενο QS είναι το τμήμα QS, αρχικά ελέγχουμε τα άκρα Q, S ως προς τον κύκλο $\mathcal{V}(A, B, C)$ το οποίο απαιτεί βαθμό 4. Εάν βρίσκονται και τα δύο εκτός κύκλου τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την θέση του φορέα ℓ_{QS} ως προς τον κύκλο, ελέγχοντας την σχέση (6.4), το οποίο απαιτεί αλγεβρικό βαθμό $\tilde{2}$, ουσιαστικά δηλαδή απαιτούνται υπολογισμοί παραστάσεων αλγεβρικού βαθμού 4. Επιπλέον εάν υπάρχει ανάμεσα στα τμήματα $\{S_1, S_2, S_3\}$ τμήμα CD το οποίο να είναι παράλληλο ή κάθετο στο τμήμα QS, τότε μπορούμε να κάνουμε τον παρακάτω έλεγχο εκτελώντας πράξεις αλγεβρικού βαθμού μόλις 2, χρησιμοποιώντας την σχέση (6.5) αντί για την (6.4). Εάν ο ο φορέας τέμνει τον κύκλο χρειάζεται επιπλέον να ελέγξουμε το πρόσημο της ποσότητας (6.6), για τα σημεία Q και S το οποίο απαιτεί βαθμό $\tilde{1}$, δηλαδή πραγματικό αλγεβρικό βαθμό 2.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και Ανοιχτά Προβλήματα

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής μελετήσαμε τον τρόπο κατασκευής του Ευκλείδειου Voronoi διαγράμματος ευθυγράμμων τμημάτων ενώ αναλύσαμε δύο από τα κεντρικότερα κατηγορήματα τα οποία χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο κατασκευής. Συγκεκριμένα αναλύσαμε τα κατηγορήματα SoOB και Incircle, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στο δεύτερο, για την περίπτωση όπου τα ευθύγραμμα τμήματα είναι είτε παράλληλα είτε υπό γωνία 45° με κάποιον άξονα.

Ο σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να υπολογίσουμε και παράλληλα να ελαχιστοποιήσουμε τον μέγιστο αλγεβρικό βαθμό που απαιτείται για τον υπολογισμό των εν λόγω κατηγορημάτων. Στην περίπτωση όπου τα ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα με τους άξονες αποδείξαμε ότι ο μέγιστος αλγεβρικός βαθμός είναι μόλις 6, ενώ για διάφορες περιπτώσεις μειώσαμε τους ήδη υπάρχοντες βαθμούς (βλ. Πίνακα 7.1).

	$PPPP$	$PPSP$	$PSSP$	$SSSP$
Γενική περίπτωση [Bur96]	4	12	16	32
Παράλληλα τμήματα [Bur96]	4	8	4	2
Παράλληλα τμήματα [παρούσα εργασία]	4	6	4	2

	$PPPS$	$PPSS$	$PSSS$	$SSSS$
Γενική περίπτωση [Bur96]	8	24	32	40
Παράλληλα τμήματα [Bur96]	6	12	4	2
Παράλληλα τμήματα [παρούσα εργασία]	6	6	4	2

Πίνακας 7.1: Αλγεβρικοί βαθμοί για το κατηγόρημα Incircle σύμφωνα με: την εργασία [Bur96] για την γενική περίπτωση και για τμήματα παράλληλα με τους άξονες, και την παρούσα εργασία. Πάνω/Κάτω πίνακας: το τέταρτο αντικείμενο είναι σημείο/τμήμα.

Στην περίπτωση όπου τα τμήματα είναι είτε παράλληλα είτε υπό γωνία 45° με τους άξονες δεν έχουμε κάποιο καλύτερο αποτέλεσμα να παρουσιάσουμε από το ήδη υπάρχον. Αν και δίδουμε τους τύπους υπολογισμού των κατηγορημάτων για άμεση χρήση από τον

	$PPPP$	$PPSP$	$PSSP$	$SSSP$
Γενική περίπτωση [Bur96]	4	12	16	32
Παράλληλα/υπό γωνία 45° τμήματα [Bur96]	4	8	8	4
Παράλληλα/υπό γωνία 45° τμήματα [παρούσα εργασία]	4	6	8	4

	$PPPS$	$PPSS$	$PSSS$	$SSSS$
Γενική περίπτωση [Bur96]	8	24	32	40
Παράλληλα/υπό γωνία 45° τμήματα [Bur96]	6	12	8	4
Παράλληλα/υπό γωνία 45° τμήματα [παρούσα εργασία]	6	12	8	4

Πίνακας 7.2: Αλγεβρικοί βαθμοί για το κατηγόρημα Incircle σύμφωνα με: την εργασία [Bur96] για την γενική περίπτωση και για τμήματα παράλληλα ή υπό γωνία 45° με τους άξονες, και την παρούσα εργασία. Πάνω/Κάτω πίνακας: το τέταρτο αντικείμενο είναι σημείο/τμήμα.

αναγνώστη, η ύπαρξη της άρρητης ποσότητας $\Delta_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$, για $i \in \{1, 2\}$, όταν υπάρχει σύγκριση μεταξύ δύο τμημάτων με φορείς $a_i x + b_i y + c_i = 0$ με $\Delta_1 \neq \Delta_2$, οδηγεί σε υποχρεωτική ύψωση τετραγώνων, το οποίο διπλασιάζει το μέγιστο αλγεβρικό βαθμό, οδηγώντας μας τελικά σε βαθμούς διπλάσιους από την αντίστοιχη περίπτωση όπου έχουμε μόνο τμήματα παράλληλα στους άξονες. Σε μελλοντική εργασία θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να διατηρήσουμε χαμηλότερους βαθμούς εάν επιτρέψουμε στα τμήματά μας να έχουν οποιοδήποτε προσανατολισμό αρκεί να είναι μεταξύ τους είτε παράλληλα είτε κάθετα (οπότε θα έχουμε ίδια Δ για όλους τους φορείς των τμημάτων).

Επίσης αναφέρουμε ότι η ύψωση αυτή που απαιτείται για την περίπτωση όπου το τμήμα είναι υπό γωνία 45° με τους άξονες, δηλαδή $\Delta = \sqrt{2}$, απαιτείται και για όλες τις περιπτώσεις όπου η ποσότητα Δ είναι άρρητη. Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 6 ισχύει γενικά και για όλα τα τμήματα, ενώ οι βαθμοί στην περίπτωση όπου θέλαμε να υπολογίσουμε τους εμφανιζόμενους βαθμούς στην εκδοχή του προβλήματος μας για τμήματα είτε παράλληλα είτε υπό κάποια γωνία με τους άξονες, θα ήταν οι ίδιοι, ανεξαρτήτου επιλογής γωνίας.

Βιβλιογραφία

[BDS$^+$92] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, R. Schott, M. Teillaud, and M. Yvinec. Applications of random sampling to on-line algorithms in computational geometry. *Discrete Comput. Geom.*, 8:51–71, 1992.

[BP00] J.-D. Boissonnat and F.P. Preparata. Robust plane sweep for intersecting segments. *SIAM J. Comput.*, 29(5):1401–1421, 2000.

[Bur96] C. Burnikel. *Exact Computation of Voronoi Diagrams and Line Segment Intersections.* PhD thesis, Universität des Saarlandes, mar 1996.

[BY98] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Algorithmic Geometry.* Cambridge University Press, UK, 1998. Translated by Hervé Brönnimann.

[DFMT02] O. Devillers, A. Fronville, B. Mourrain, and M. Teillaud. Algebraic methods and arithmetic filtering for exact predicates on circle arcs. *Comp. Geom: Theory & Appl., Spec. Issue*, 22:119–142, 2002.

[DL78] R. L. Drysdale, III and D. T. Lee. Generalized Voronoi diagrams in the plane. In *Proc. 16th Allerton Conf. Commun. Control Comput.*, pages 833–842, 1978.

[EK06] Ioannis Z. Emiris and Menelaos I. Karavelas. The predicates of the Apollonius diagram: algorithmic analysis and implementation. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 33(1-2):18–57, January 2006. Special Issue on Robust Geometric Algorithms and their Implementations.

[For87] S. J. Fortune. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 2:153–174, 1987.

[Gol10] Chris Gold. The Dual is the Context: Spatial Structures for GIS. In *Proceedings of the 7th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (VD2010)*, pages 3–10, Québec City, Québec, Canada, June 28–30, 2010.

[GP08] Puneet Gupta and Evanthia Papadopoulou. Yield analysis and optimization. In C.J. Alpert, D.P. Mehta, and S.S. Sapatnekar, editors, *The Handbook of Al-*

gorithms for VLSI Physical Design Automation, chapter 7.3. Taylor & Francis CRC Press, November 2008.

[Hel01] M. Held. VRONI: An engineering approach to the reliable and efficient computation of Voronoi diagrams of points and line segments. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 18:95–123, 2001.

[Ima96] T. Imai. A topology oriented algorithm for the Voronoi diagram of polygons. In *Proc. 8th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pages 107–112. Carleton University Press, Ottawa, Canada, 1996.

[Kar04] Menelaos I. Karavelas. A robust and efficient implementation for the segment Voronoi diagram. In *Proceedings of the International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (VD2004)*, pages 51–62, Hongo, Tokyo, Japan, September 13–15, 2004.

[KE03] Menelaos I. Karavelas and Ioannis Z. Emiris. Root comparison techniques applied to the planar additively weighted Voronoi diagram. In *Proc. 14th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 320–329, January 2003.

[Kir79] D. G. Kirkpatrick. Efficient computation of continuous skeletons. In *Proc. 20th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, pages 18–27, 1979.

[KMM93] R. Klein, K. Mehlhorn, and S. Meiser. Randomized incremental construction of abstract Voronoi diagrams. *Comput. Geom.: Theory & Appl.*, 3(3):157–184, 1993.

[Lee82] D. T. Lee. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, PAMI-4(4):363–369, 1982.

[LPT99] G. Liotta, F.P. Preparata, and R. Tamassia. Robust proximity queries: An illustration of degree-driven algorithm design. *SIAM J. Comput.*, 28(3):864–889, 1999.

[MS10] David L. Millman and Jack Snoeyink. Computing planar Voronoi diagrams in double precision: a further example of degree-driven algorithm design. In *Proceedings of the 2010 Annual Aymposium on Computational geometry*, SoCG '10, pages 386–392, New York, NY, USA, 2010. ACM.

[Pap01] Evanthia Papadopoulou. Critical area computation for missing material defects in VLSI circuits. *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems*, 20(5):583–597, 2001.

[See] M. Seel. The AVD LEP user manual.

[SIII00] K. Sugihara, M. Iri, H. Inagaki, and T. Imai. Topology-oriented implementation - an approach to robust geometric algorithms. *Algorithmica*, 27(1):5–20, 2000.

[Yap87] C. K. Yap. An $O(n \log n)$ algorithm for the Voronoi diagram of a set of simple curve segments. *Discrete Comput. Geom.*, 2:365–393, 1987.