§A1. Χώροι συναρτήσεων–Συμβολισμός.

Έστω $d \in \mathbb{N}$ και Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^d$ με σύνορο $\partial\Omega$.

Έστω $\ell \in \mathbb{N}_0$. Συμβολίζουμε με $C^\ell(\overline{\Omega})$ το χώρο των συναρτήσεων οι οποίες έχουν συνεχείς κλασικές μερικές παραγώγους τάξης μέχρι και ℓ στο $\overline{\Omega}$. Σ' αυτόν το χώρο η συνήθης στάθμη $\|\cdot\|_{\ell,\infty}$ ορίζεται ως εξής

$$\|w\|_{\ell,\infty} := \max\Big\{\sup_{\overline{\Omega}} |\partial_x^\beta w| : |\beta| \le \ell,\ \beta \in \mathbb{N}_0^d\Big\}.$$

Ακόμα $C_0^\infty(\Omega)$ θα είναι ο χώρος των συναρτήσεων των οποίων ο φορέας περιέχεται στο Ω και έχουν συνεχείς κλασικές παραγώγους κάθε τάξης στο Ω.

Έστω $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{N}_0$ και $I_* \subset \mathbb{R}$ ένα κλειστό διάστημα. Τότε με $C^{\mu_1,\mu_2}(\overline{\Omega}\times I_*)$ θα συμβολίζουμε το χώρο των συναρτήσεων w οι οποίες ορίζονται στο $\overline{\Omega}\times I_*$ και έχουν συνεχείς κλασικές μερικές παραγώγους $\partial_x^\beta \partial_t^m w$ στο $\overline{\Omega}\times I_*$, για $|\beta| \le \mu_1$ και $0 \le m \le \mu_2$.

$L^1_{\rm loc}(\Omega)$ είναι ο χώρος των κλάσεων των κατά Lebesgue μετρησίμων συναρτήσεων, με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές, οι οποίες είναι *τοπικά ολοκληρώσιμες* στο Ω. Στον $L^2(\Omega)$, ο οποίος αποτελείται από τις συναρτήσεις του $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο Ω, το εσωτερικό γινόμενο και η παραγόμενη απ' αυτό στάθμη δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$(v,w) := \int_\Omega v\overline{w}dx \ \ \text{και} \ \ \|v\| := (v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

Για ακεραίους $s \ge 0$ συμβολίζουμε με $H^s(\Omega)$ το χώρο Sobolev, ο οποίος αποτελείται από τις συναρτήσεις του $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ οι οποίες μαζί με τις παραγώγους τους (με την έννοια των κατανομών) τάξεως μέχρι και s ανήκουν στον $L^2(\Omega)$. Οι $H^s(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_s$, το οποίο περιγράφεται ως εξής

$$(v,w)_s := \sum_{\{\beta\in\mathbb{N}_0^d : |\beta|\le s\}} (\partial_x^\beta v, \partial_x^\beta w),$$

ενώ με $\|\cdot\|_s$ συμβολίζουμε την παραγόμενη απ' αυτό στάθμη. Ακόμα, $H_0^1(\Omega)$ είναι ένας υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ ο οποίος ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_0^\infty(\Omega)$ ως προς τη στάθμη $\|\cdot\|_1$. Λόγω της ανισότητας Poincaré–Friedrichs

$$\|w\|^2 \le C_{PF} \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j} w\|^2, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \tag{A1.1}$$

ένα εσωτερικό γινόμενο στον $H_0^1(\Omega)$ ορίζεται από τη σχέση

$$(\nabla w, \nabla v) := \sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_j} w, \partial_{x_j} v),$$

ενώ με $\|\nabla \cdot\|$ συμβολίζουμε την παραγόμενη στάθμη.

Στον $L^2(\partial\Omega)$ το εσωτερικό γινόμενο και η αντίστοιχη στάθμη δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} \varphi\psi \, dS \quad \text{και} \quad |\varphi|_{\partial\Omega} := \Big[\langle \varphi, \varphi \rangle_{\partial\Omega} \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Όταν το $\partial\Omega$ είναι Lipschitz τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $T_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, γνωστός ως *τελεστής ίχνους*, τέτοιος ώστε

$$T_0 w = w\,|_{\partial\Omega}\,, \quad \forall w \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \text{και} \quad |T_0 w|_{\partial\Omega} \le C_{\rm trc} \|w\|_1, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Επί πλέον, ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ προσδιορίζεται ως το σύνολο των στοιχείων w του $H^1(\Omega)$ για τα οποία $T_0 w = 0$, ενώ η εικόνα του $H^1(\Omega)$ μέσω του T_0 είναι ο $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ που είναι ένας πυκνός υπόχωρος του $L^2(\partial\Omega)$. Όταν το $\partial\Omega$ είναι C^1 ή το Ω είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τότε (βλ. [Lad], Chapter 1, §6) υπάρχει σταθερά C_Ω, η οποία εξαρτάται μόνο από το σύνολο Ω, τέτοια ώστε

$$|T_0 w|_{\partial\Omega} \le \varepsilon \|w\|_1 + \frac{C_\Omega}{\varepsilon} \|w\|, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \tag{A1.2}$$

και ισχύει ο γενικευμένος τύπος ολοκλήρωσης Gauss–Green

$$\int_\Omega \partial_{x_j} w v dx = \int_{\partial\Omega} T_0 w T_0 v n_j dS - \int_\Omega w \partial_{x_j} v dx, \quad j = 1, \ldots, d, \quad \forall w, v \in H^1(\Omega),$$

όπου, για $x \in \partial\Omega$, $\boldsymbol{n}(x) := (n_1(x), \ldots, n_d(x))$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο προς το $\partial\Omega$ στο x και έχει διεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω. Στη συνέχεια παραλείπουμε το σύμβολο T_0 θεωρώντας σιωπηρά την $T_0 w$ ως τις τιμές της w στο $\partial\Omega$ ή γράφοντας $w\,|_{\partial\Omega}$.

Δοθέντων χώρων Banach V και W, $\mathcal{L}(V; W)$ θα είναι ο χώρος Banach των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον V στον W, με την ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών. Ακόμη, με $C^\ell([t_1, t_2], V)$ θα συμβολίζουμε το χώρο Banach των τελεστών οι οποίοι είναι συνεχώς παραγωγίσιμοι τάξης μέχρι και ℓ, από το διάστημα $[t_1, t_2]$ στο χώρο V με στάθμη

$$\|w\|_{\ell, V} := \max_{0 \le s \le \ell} \sup_{[t_1, t_2]} \|\partial_t^s w\|_V,$$

όπου $\|\cdot\|_V$ είναι η στάθμη του V. Επί πλέον θα γράφουμε

$$\|g\|_{I_*, V, \ell} := \int_{I_*} \|g(\tau)\|_V d\tau + \sum_{m=0}^{\ell-1} \sup_{I_*} \|\partial_t^m g\|_V,$$

για κάθε κλειστό υποδιάστημα I_* του $[t_1, t_2]$ και $g \in C^{\max\{0,\ell-1\}}([t_1,t_2],V)$. Τέλος, γράφοντας $V \hookrightarrow W$, εννοούμε ότι ο V είναι υπόχωρος του W, και ότι ο ταυτοτικός τελεστής από τον V στον W είναι συνεχής.

Περισσότερες πληροφορίες, για όλα όσα αναφέρθηκαν σ' αυτή την παράγραφο, υπάρχουν στα βιβλία των Adams, [Ad], Wloka, [Wl], Evans & Gariepy, [EvG], Dieudonné, [Deu], Mikhailov, [Mk], καθώς και στις σημειώσεις Ακρίβη, [Ak1].

§A2. Το Λήμμα Lax–Milgram.

Σ' αυτή την παράγραφο θα συμβολίζουμε με $\mathbb{K}$, είτε το σύνολο $\mathbb{R}$ είτε το σύνολο $\mathbb{C}$.

Ορισμός A2.1. *Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι πάνω στο $\mathbb{K}$, και μιά απεικόνιση $b : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Λέμε ότι η b είναι $\mathbb{K}$–γραμμική μορφή όταν ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

$$b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y),$$

$$b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2),$$

$$b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y),$$

$$b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x, y),$$

για οποιαδήποτε $\lambda \in \mathbb{K}$, x_1, x_2, $x \in X$, και y_1, y_2, $y \in Y$.

Όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ λέμε ότι η b είναι διγραμμική μορφή και όταν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ότι είναι συζυγογραμμική μορφή. $\square$

Ορισμός A2.2. *Έστω $(W, \|\cdot\|_W)$ ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{K}$ και $b : W \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ μιά $\mathbb{K}$–γραμμική μορφή. Λέμε ότι η b είναι φραγμένη, όταν υπάρχει $C_B \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$|b(v, w)| \le C_B \|v\|_W \|w\|_W, \quad \forall v, w \in W.$$

Έστω $V \subset W$. Λέμε ότι η b είναι ελλειπτική στον V ή V–ελλειπτική, όταν υπάρχει $C_E > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{Re}\, b(w, w) \ge C_E \|w\|_W^2, \quad \forall w \in V. \ \square$$

Πρόταση A2.1. *Έστω $(H, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος Hilbert πάνω στο $\mathbb{K}$, $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ μιά φραγμένη, H–ελλειπτική, $\mathbb{K}$–γραμμική μορφή, και $F : H \longrightarrow \mathbb{K}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα $w \in H$ τέτοιο ώστε*

$$b(w, v) = F(v), \quad \forall v \in H. \ \square$$

Η Πρόταση A2.1 είναι γνωστή ως Λήμμα Lax–Milgram, εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην εργασία [LaM], και έχει εφαρμογές στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Η απόδειξή του στηρίζεται στο θεώρημα αναπαραστάσεως του Riesz (βλ., π.χ. [LaM], [Wl], [BeS], [Ak1]).

§A3. Ολοκληρωτικές ανισότητες και αναδρομικές σχέσεις.

Πρόταση A3.1 (Λήμμα Gronwall). *Έστω $t^* > 0$ και δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$ και $\mathcal{K} : [0, t^*] \longrightarrow [0, +\infty)$, τέτοιες ώστε:*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t \mathcal{K}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Τότε, η f ικανοποιεί τη σχέση

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t \exp\Big(\int_\tau^t \mathcal{K}(s) ds\Big) \mathcal{K}(\tau) g(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad \square$$

Μιά απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά κατά τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, περιέχεται στο βιβλίο του Corduneanu [Cor]. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μιά διαφορετική οπτική του ίδιου αποτελέσματος.

Πόρισμα A3.1. *Έστω $t^* > 0$ και $f, w : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε*

$$f(t) \leq w(t) + \int_0^t \psi(\tau) f(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*],$$

όπου $\psi : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$ κάποια συνάρτηση μη αρνητική και συνεχής. Τότε, έχουμε

$$f(t) \leq \exp\Big(\int_0^t \psi(\tau) d\tau\Big) \max_{s \in [0,t]} w(s), \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Απόδειξη. Έστω $g(t) = w(t)$ και $\mathcal{K}(t) = \psi(t)$ για κάθε $t \in [0, t^*]$. Τότε από την Πρόταση A3.1 έπεται αμέσως ότι

$$f(t) \leq \max_{s \in [0,t]} w(s) \big[1 - \int_0^t \big(\exp(\int_\tau^t \psi(s) ds)\big)' d\tau\big] = \exp(\int_0^t \psi(\tau) d\tau) \max_{s \in [0,t]} w(s),$$

για κάθε $t \in [0, t^*]$. ■

Πρόταση A3.2. *Έστω $t^* > 0$. Υποθέτουμε ότι έχουμε συνεχείς μη αρνητικές συναρτήσεις $f, g : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα*

(A3.1a) $$f^2 \in C^1([0, t^*], \mathbb{R})$$

και

(A3.1b) $$\frac{d}{dt}(f^2)(t) \leq f(t) g(t), \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Τότε έπεται ότι

$$f(t) \leq f(0) + \int_0^t g(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{A3.2}$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (A3.1b), λόγω της (A3.1a), προκύπτει ότι

$$f^2(t) \leq f^2(0) + \int_0^t f(\tau)g(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{A3.3}$$

Βασιζόμενοι στην (A3.3), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}(\max_{[0,t]} f)^2 = \max_{[0,t]} f^2 \leq & f^2(0) + \int_0^t f(\tau)g(\tau)d\tau \\ \leq & (\max_{[0,t]} f)\Big[f(0) + \int_0^t g(\tau)d\tau\Big], \quad \forall t \in [0, t^*].\end{aligned}$$

Άρα

$$f(t) \leq \max_{[0,t]} f \leq f(0) + \int_0^t g(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \ \blacksquare$$

Λήμμα A3.1. *Έστω $\beta \geq 0$ και $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, τέτοια ώστε*

$$a_{n+1} \leq a_n + \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Τότε, ισχύει

$$a_n \leq a_0 + n\beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \ \square \tag{A3.4}$$

Λήμμα A3.2. *Έστω $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ και $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, τέτοια ώστε*

$$a_{n+1} \leq (1+\gamma)a_n + \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Τότε, ισχύει

$$a_n \leq \exp(n\gamma)\Big(a_0 + \frac{\beta}{\gamma}\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{A3.5}$$

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι

$$a_n \leq (1+\gamma)^n a_0 + \beta \sum_{\ell=0}^{n-1} (1+\gamma)^{\ell}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{A3.6}$$

Η απόδειξη της (A3.6) θα γίνει επαγωγικά. Είναι προφανές ότι αληθεύει για $n = 0$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ισχύει για $n = 0, \dots, n_0$, όπου $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Τότε, έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\le (1+\gamma)a_{n_0} + \beta \le (1+\gamma)^{n_0+1}a_0 + \beta \sum_{\ell=0}^{n_0-1}(1+\gamma)^{\ell+1} + \beta \\ &= (1+\gamma)^{n_0+1}a_0 + \beta\sum_{\ell=1}^{n_0}(1+\gamma)^{\ell} + \beta = (1+\gamma)^{n_0+1}a_0 + \beta\sum_{\ell=0}^{n_0}(1+\gamma)^{\ell}. \end{aligned}$$

Επομένως η (A3.6) ισχύει για $n = n_0 + 1$.

Συνεχίζοντας, από την (A3.6) έπεται ότι

$$\begin{aligned} a_n &\le (1+\gamma)^n a_0 + \beta\frac{(1+\gamma)^n - 1}{(1+\gamma)-1} \\ &\le (1+\gamma)^n\Big(a_0 + \frac{\beta}{\gamma}\Big) \le \exp(n\gamma)\Big(a_0 + \frac{\beta}{\gamma}\Big), \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. ■

§A4. Μέθοδοι Runge–Kutta.

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για μιά συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: ζητούμε συνάρτηση $y : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in (0, t^*], \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

όπου $f : [0, t^*] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μιά ομαλή συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, t^*].$$

(Για τη θεωρία ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του παραπάνω προβλήματος, βλ., π.χ. [CodL], [Cor].)

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Μιά μέθοδος Runge–Kutta με q στάδια προσδιορίζεται πλήρως από ένα σύνολο πραγματικών παραμέτρων: $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{q}$, $\{b_j\}_{j=1}^{q}$, $\{\tau_j\}_{j=1}^{q}$, που συνήθως παριστάνονται σε μορφή μητρώου (*tableau*)

$$\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{\tau} \\ \hline \boldsymbol{b}^T & \end{array}$$

όπου $A := (a_{ij})_{i,j=1}^{q}$ είναι ένας $q \times q$ πίνακας, $\boldsymbol{b} := (b_1, ..., b_q)^T$ και $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, ..., \tau_q)^T$. Συμβολίζουμε στη συνέχεια $T := \mathrm{diag}(\tau_1, \dots, \tau_q)$ και $\boldsymbol{e} := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^q$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $k = \frac{t^*}{N}$ και $t^n := nk$ για $n = 0, \dots, N$. Η μέθοδος Runge–Kutta οδηγεί στην κατασκευή προσεγγίσεων $\{y^n\}_{n=0}^N$ της y στα $\{t^n\}_{n=0}^N$, με την ακόλουθη διαδικασία

(A4.1a) $\quad y^0 := y_0,$

για $n = 0, \dots, N-1$, προσδιόρισε $\{y^{n,j}\}_{j=1}^q$ τέτοια ώστε

$$y^{n,j} = y^n + k \sum_{s=1}^{q} a_{js} f(t^{n,s}, y^{n,s}), \quad j = 1, \dots, q, \tag{A4.1b}$$

και όρισε

$$y^{n+1} := y^n + k \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}), \tag{A4.1c}$$

όπου $t^{n,j} := t^n + \tau_j k$ για $n = 0, \dots, N-1$ και $j = 1, \dots, q$. Βλέπουμε ότι ο υπολογισμός των ενδιαμέσων βημάτων $\{y^{n,j}\}_{j=1}^q$ απαιτεί, εν γένει, τη λύση ενός μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Είναι γνωστό (βλ. [Cr1], Théorème 1.1, p. 6) ότι

Πρόταση A4.1. *Αν* $|A| = (|a_{js}|)_{j,s=1}^q$ *και* $0 < k_0 < \dfrac{1}{L\rho(|A|)}$ *(όπου* $\rho(|A|)$ *η φασματική ακτίνα του* $|A|$*), τότε για κάθε* $k \in (0, k_0]$ *το σύστημα* (A4.1b) *έχει μοναδική λύση.* □

Επομένως, για μικρό k, η μέθοδος (A4.1) είναι καλά ορισμένη. Επί πλέον (βλ. [Dg], §3.2, Απόδειξη Πρότασης 2) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα *ευστάθειας*:

Πρόταση A4.2. *Υπάρχουν σταθερές* C_1 *και* C_2 *τέτοιες ώστε, για οποιαδήποτε* $k \in (0, k_0]$, $\{\tau^s\}_{s=1}^q \subset [0, t^*]$, $\{\omega^s\}_{s=1}^d$, $\{\omega_0^j\}_{j=1}^d$, ω_0, ω^*, $\{z^s\}_{s=1}^d$, $\{z_0^j\}_{j=1}^d$, z^0, z^* *και* ϵ *που ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\omega^j = \omega_0^j + k \sum_{s=1}^{q} a_{js} f(\tau^s, \omega^s), \quad j = 1, \dots, q,$$
$$\omega^* = \omega_0 + k \sum_{j=1}^{q} b_j f(\tau^j, \omega^j),$$

και

$$z^j = z_0^j + k \sum_{s=1}^{q} a_{js} f(\tau^s, z^s), \quad j = 1, \dots, q,$$
$$z^* = z_0 + k \sum_{j=1}^{q} b_j f(\tau^j, z^j) + \epsilon,$$

να ισχύει ότι

$$\max_{1\le j\le q} |\omega^j - z^j| \le C_1 \max_{1\le j\le q} |\omega_0^j - z_0^j|,$$

και

$$|\omega^* - z^*| \le (1 + C_2 k)|\omega_0 - z_0| + |\epsilon|,$$

όταν $\omega_0^j = \omega_0$ *και* $z_0^j = z_0$ *για* $j = 1, \dots, q$. $\square$

Η μελέτη της σύγκλισης των προσεγγίσεων Runge–Kutta συνδέεται με την έννοια της *συνέπειας* και της *τάξης ακρίβειας* (βλ. [Cr1], Definitions 1.4–1.5, p. 8):

Ορισμός A4.1. *Έστω* $k \in (0, k_0]$. *Για* $n = 0, \dots, N-1$, *θεωρούμε τη λύση* $\{\zeta^{n,j}\}_{j=1}^q$ *του συστήματος*

$$\zeta^{n,j} = y(t^n) + k \sum_{s=1}^q a_{js} f(t^{n,s}, \zeta^{n,s}), \quad j = 1, \dots, q, \tag{A4.2a}$$

και ορίζουμε

$$\epsilon^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - k \sum_{j=1}^q b_j f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}). \tag{A4.2b}$$

Η μέθοδος Runge–Kutta, *εφαρμοζόμενη στο πρόβλημα* (E), *λέμε ότι έχει τάξη ακρίβειας* p_0, *όταν υπάρχει σταθερά* C_3 *ανεξάρτητη του* k, *τέτοια ώστε*

$$\max_{0\le n\le N-1} |\epsilon^n| \le C_3 k^{p_0+1}. \tag{A4.3}$$

Όταν $p_0 = 1$, *λέμε ότι η μέθοδος είναι συνεπής. Συχνά η τάξη ακρίβειας καλείται και κλασική τάξη.*

Ακόμα, λέμε *ότι η μέθοδος* Runge–Kutta, *εφαρμοζόμενη στο πρόβλημα* (E), *έχει τάξη σταδίου* m_0, όταν οι ποσότητες

$$\delta_j^n := y(t^{n,j}) - y(t^n) - k \sum_{s=1}^q a_{js} f(t^{n,s}, y(t^{n,s})), \quad j = 1, \dots, q, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

ικανοποιούν την

$$\max_{1\le j\le q} \max_{0\le n\le N-1} |\delta_j^n| \le C_4 k^{m_0+1}$$

για κάποια σταθερά C_4 *ανεξάρτητη από το* k. $\square$

Η συνέπεια και η ευστάθεια οδηγούν στη σύγκλιση.

Πρόταση A4.3. *Έστω ότι η μέθοδος* (A4.1) *έχει τάξη ακρίβειας* p_0. *Τότε*

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le Ck^{p_0}. \tag{A4.4}$$

Απόδειξη. Οι σχέσεις (A4.1), (A4.2), (A4.3) και η Πρόταση A4.2 δίνουν αμέσως ότι

$$|y^{n+1} - y(t^{n+1})| \le (1 + C_2k)|y^n - y(t^n)| + Ck^{p_0+1}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Τότε το Λήμμα A3.2 και η (A4.1a) οδηγούν στην (A4.4). ■

Είναι γνωστό (βλ. [Bu1] και [Cr1], Théorème 1.2, p. 9) ότι:

Πρόταση A4.4. *Όταν η μέθοδος* Runge–Kutta *ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες* (*γνωστές ως simplifying assumptions*):

$$\boldsymbol{b}^T T^\ell \boldsymbol{e} = \frac{1}{(\ell+1)}, \quad \ell = 0, \dots, \nu-1, \tag{A4.5a}$$

$$AT^\ell \boldsymbol{e} = \frac{1}{(\ell+1)} T^{\ell+1}\boldsymbol{e}, \quad \ell = 0, \dots, p-1, \tag{A4.5b}$$

$$\boldsymbol{b}^T T^\ell A = \frac{1}{(\ell+1)} \boldsymbol{b}^T (I - T^{\ell+1}), \quad \ell = 0, \dots, \rho-1, \tag{A4.5c}$$

για μη αρνητικούς ακεραίους p, ρ *και* $\nu \ge 1$, *τέτοιους ώστε*

$$\nu \le p + \rho + 1, \tag{A4.5d}$$

$$\nu \le 2p + 2, \tag{A4.5e}$$

τότε έχει τάξη ακρίβειας ν (*και* p *είναι η τάξη σταδίου*). □

Θεωρούμε την περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι γραμμική ως προς y, δηλ.

$$f(t, y) = \beta(t)y + \gamma(t). \tag{A4.6}$$

Τότε η συνθήκη (A4.5e) μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό φαίνεται στη συνέχεια ακολουθώντας βήμα προς βήμα την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης από τον Crouzeix (βλ. επίσης [Dg], §3.2, Θεώρημα 2).

Πρόταση Α4.5. *Όταν η μέθοδος* Runge–Kutta *ικανοποιεί τις* (Α4.5a)–(Α4.5d)*, τότε εφαρμοζόμενη στο πρόβλημα* (Ε)*, με την f να δίνεται από την* (Α4.6)*, έχει τάξη ακρίβειας ν.*

Απόδειξη. Για κάθε $\ell \in \mathbb{N}_0$ και $n \in \{0, \dots, N-1\}$, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$S^{n,\ell} := \sum\nolimits_{j=1}^{q} b_j (t^{n,j} - t^n)^\ell \beta(t^{n,j})(y(t^{n,j}) - \zeta^{n,j}),$$

$$\epsilon^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - k \sum\nolimits_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}),$$

όπου τα $\{\zeta^{n,j}\}_{j=1}^{q}$ δίνονται από την (Α4.2a). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\epsilon^n = k\big[\int_0^1 y'(t^n + tk)dt - \sum\nolimits_{j=1}^{q} b_j y'(t^n + \tau_j k)\big] + kS^{n,0}.$$

Η συνθήκη (Α4.5a) εκφράζει έναν τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης στο $[0,1]$, ο οποίος είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου με $\nu - 1$. Έτσι $\int_0^1 y'(t^n + tk)dt - \sum_{j=1}^{q} b_j y'(t^n + \tau_j k) = O(k^\nu)$ και $\epsilon^n = kS^{n,0} + O(k^{\nu+1})$. Αρκεί, επομένως, να δείξουμε ότι $S^{n,0} = O(k^\nu)$. Αυτό θα γίνει στη συνέχεια εκτιμώντας κατάλληλα το $S^{n,\ell}$ για $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Για $j = 1, \dots, q$, έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_j^n :=& y(t^{n,j}) - y(t^n) - k \sum\nolimits_{s=1}^{q} a_{js} y'(t^{n,s})\\ =& k\big[\int_0^{\tau_j} y'(t^n + tk)dt - \sum\nolimits_{s=1}^{q} a_{js} y'(t^n + \tau_s k)\big] = O(k^{p+1}),\end{aligned}$$

επειδή η συνθήκη (Α4.5b) εκφράζει τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης στα $\big\{[0,\tau_j]\big\}_{j=1}^{q}$ οι οποίοι είναι ακριβείς για πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου με $p-1$. Έτσι η Πρόταση Α4.2 δίνει $\max_{1\le j\le q} |y(t^{n,j}) - \zeta^{n,j}| \le C_1 \max_{1\le j\le q} |\delta_j^n| \le Ck^{p+1}$. Επομένως

$$|S^{n,\ell}| \le Ck^\ell \sum\nolimits_{j=1}^{q} |y(t^{n,j}) - \zeta^{n,j}| \le Ck^{p+\ell+1}. \tag{Α4.7}$$

Έστω $\ell \ge \rho$. Τότε $|S^{n,\ell}| \le Ck^{p+\rho+1} \le Ck^\nu$, λόγω της (Α4.5d). Αν $\rho = 0$, τότε έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά συνεχίζουμε ως εξής:

Έστω $0 \le \ell < \rho$. Εφαρμογή του τύπου του Taylor γύρω από το t^n δίνει

$$\begin{aligned}S^{n,\ell} =& k^\ell \sum\nolimits_{j=1}^{q} b_j (\tau_j)^\ell (y(t^{n,j}) - \zeta^{n,j}) \Big[\sum\nolimits_{\lambda=0}^{\rho-\ell-1} \frac{1}{\lambda!}(t^{n,j} - t^n)^\lambda \partial_t^\lambda \beta(t^n)\\ &+ \frac{1}{(\rho-\ell-1)!}\int_{t^n}^{t^{n,j}} (t^{n,j} - t)^{\rho-\ell-1} \partial_t^{\rho-\ell} \beta(t) dt\Big].\end{aligned}$$

Η προηγούμενη σχέση, εν συνεχεία, δίνει

$$
\begin{aligned}
|S^{n,\ell}| \le & k^\ell \Big|\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\ell (y(t^{n,j})-\zeta^{n,j})\Big[\sum\nolimits_{\lambda=0}^{\rho-\ell-1}\frac{1}{\lambda!}(t^{n,j}-t^n)^\lambda \partial_t^\lambda \beta(t^n)\Big]\Big| \\
& + Ck^\rho \sum\nolimits_{j=1}^q |y(t^{n,j})-\zeta^{n,j}| \\
\le & Ck^{\rho+p+1} + \Big|\sum\nolimits_{\lambda=\ell}^{\rho-1}\frac{k^\lambda}{(\lambda-\ell)!}\partial_t^\lambda\beta(t^n)\Big[\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\lambda (y(t^{n,j})-\zeta^{n,j})\Big]\Big|.
\end{aligned}
\tag{A4.8}
$$

Έστω $0 \le \lambda \le \rho-1$. Από τις (A4.2a) και (A4.5c) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\lambda (y(t^n)-\zeta^{n,j}) = -k\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\lambda\Big(\sum\nolimits_{s=1}^q a_{js} f(t^{n,s},\zeta^{n,s})\Big) \\
&= -k\sum\nolimits_{s=1}^q f(t^{n,s},\zeta^{n,s})\Big(\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\lambda a_{js}\Big) = -k\sum\nolimits_{s=1}^q f(t^{n,s},\zeta^{n,s})\frac{b_s(1-(\tau_s)^{\lambda+1})}{\lambda+1}.
\end{aligned}
$$

Από την (A4.5a) έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\lambda (y(t^{n,j})-y(t^n)) = \int_0^1 t^\lambda (y(t^n+tk)-y(t^n))dt + O(k^\nu) \\
&= k\int_0^1\int_0^t t^\lambda y'(t^n+xk)dxdt + O(k^\nu) = k\int_0^1 \frac{(1-t^{\lambda+1})}{\lambda+1} f(t^n+tk, y(t^n+tk))dt + O(k^\nu) \\
&= \frac{k}{\lambda+1}\sum\nolimits_{s=1}^q b_s(1-(\tau_s)^{\lambda+1}) f(t^{n,s}, y(t^{n,s})) + O(k^\nu).
\end{aligned}
$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_{j=1}^q b_j(\tau_j)^\lambda (y(t^{n,j})-\zeta^{n,j}) &= \frac{k}{\lambda+1}\sum\nolimits_{s=1}^q b_s(1-(\tau_s)^{\lambda+1})\beta(t^{n,s})(y(t^n)-\zeta^{n,j}) + O(k^\nu) \\
&= \frac{k}{\lambda+1}(S^{n,0} - \frac{1}{k^{\lambda+1}}S^{n,\lambda+1}) + O(k^\nu).
\end{aligned}
$$

Έτσι οι (A4.8) και (A4.5d) δίνουν

$$
|S^{n,\ell}| \le C\Big[k^\nu + k^{\ell+1}|S^{n,0}| + \sum\nolimits_{\lambda=\ell+1}^{\rho-1}|S^{n,\lambda}|\Big]. \tag{A4.9}
$$

Θα δείξουμε (με ένα επαγωγικό επιχείρημα) ότι

$$
|S^{n,\ell}| \le C(k^\nu + k^{p+\ell+\ell_0+1}),\quad \ell = 0,\dots,\rho-\ell_0,\quad \ell_0 = 1,\dots,\rho. \tag{A4.10}
$$

Έστω $\ell_0 = 1$. Τότε οι (A4.9) και (A4.7) δίνουν $|S^{n,\ell}| \le C(k^\nu + k^{\ell+p+2})$ για $0 \le \ell \le \rho-1$. Έστω ότι η (A4.10) ισχύει για κάποιο $\ell_0 \in \{1,\dots,\rho-1\}$. Τότε, για $\ell \in \{0,\dots,\rho-\ell_0-1\}$, η (A4.9) δίνει $|S^{n,\ell}| \le C[k^\nu + k^{\ell+1}(k^\nu + k^{p+\ell_0+1}) + \sum_{\lambda=\ell+1}^{\rho-1}(k^\nu + k^{p+\lambda+\ell_0+1})] \le C(k^\nu + k^{p+\ell+\ell_0+2})$. Από τις (A4.10) και (A4.5d) έπεται ότι $|S^{n,0}| \le C(k^\nu + k^{p+\rho+1}) \le Ck^\nu$. ■

Ακόμα είναι γνωστό (βλ. [Bu1], [Cr1]) ότι

$$\nu \le 2q,$$

και υπάρχει μιά μόνο μέθοδος Runge–Kutta τέτοια ώστε $\nu = 2q$. Πρόκειται για τη μέθοδο Gauss–Legendre με q στάδια, στην οποία τα $\{\tau_j\}_{j=1}^q$ και $\{b_j\}_{j=1}^q$ είναι αντίστοιχα οι κόμβοι και οι συντελεστές της ολοκλήρωσης Gauss στο $[0,1]$, ενώ τα $\{a_{js}\}_{j,s=1}^q$ μπορούν να υπολογιστούν μέσω της (A4.5b) για $p = q$.

Η έννοια της ευστάθειας της μεθόδου Runge–Kutta, όπως διατυπώθηκε στην Πρόταση A4.2, φαίνεται να έχει περιορισμένο πρακτικό ενδιαφέρον. Στις εφαρμογές έχουν παρουσιαστεί κάποιες δυσκολίες, όπως ασταθής συμπεριφορά της προσεγγιστικής λύσης και παρατηρούμενη τάξη ακρίβειας κατώτερη της τάξης της μεθόδου (αυτό ειδικά το φαινόμενο λέγεται *αναγωγή τάξης* (order reduction)). Αυτά οφείλονται συνήθως στην ύπαρξη μεγάλων σταθερών Lipschitz, L, (που σημαίνει, λόγω της Πρότασης A4.1, ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί πολύ μικρό βήμα k που μπορεί να πλησιάζει τα όρια της αριθμητικής πεπερασμένης ακρίβειας του υπολογιστή) ή στην παρουσία διακυμάνσεων στη λύση (ενώ αυτή μεταβάλλεται αργά) οι οποίες όμως αποσβένονται πολύ γρήγορα. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας είναι γνωστά ως *άκαμπτα* (stiff) και τέτοια προκύπτουν από τη διακριτοποίηση παραβολικών και υπερβολικών εξισώσεων (βλ. π.χ. [DekV]). Η αναζήτηση μεθόδων κατάλληλων για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων οδήγησε στην έννοια της A–ευστάθειας (βλ. π.χ. [Cr1], Chapitre 1, §5) και στην πιό ισχυρή έννοια της B–ευστάθειας (βλ. [Bu2], [BuB], [Cr2]).

Ορισμός A4.2. *Μιά μέθοδος Runge–Kutta λέγεται* B*–ευσταθής όταν, εφαρμοζόμενη στο πρόβλημα* (E) *και υπό την προϋπόθεση ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$(f(t,w) - f(t,z))(w - z) \le 0, \quad \forall t \in [0,t^*], \quad \forall w,z \in \mathbb{R}, \tag{A4.11}$$

συνεπάγεται ότι

$$|w^{n+1} - z^{n+1}| \le |w^n - z^n|, \quad n = 0,\ldots,N-1,$$

για οποιεσδήποτε προσεγγίσεις $\{w^n\}_{n=0}^N$, $\{z^n\}_{n=0}^N$ προσδιοριζόμενες μέσω της διαδικασίας (A4.1). □

Σημείωση. Στην περίπτωση που το πρόβλημα (E) διατυπώνεται στο $\mathbb{C}$, στον παραπάνω ορισμό η (A4.11) αντικαθίσταται από τη συνθήκη $\mathrm{Re}\big[(f(t,w) - f(t,z))(w-z)\big] \le 0$, $\forall t \in [0,t^*]$, $\forall w,z \in \mathbb{C}$. □

Ο Crouzeix, [Cr2], και οι Burrage & Butcher, [BuB], προσδιόρισαν ικανές συνθήκες για τη B–ευστάθεια μιάς μεθόδου Runge–Kutta.

Πρόταση A4.6. *Όταν τα $\{b_j\}_{j=1}^q$ είναι μη αρνητικά και επί πλέον ο πίνακας $M = (b_j a_{js} + b_s a_{sj} - b_j b_s)_{j,s=1}^q$ είναι θετικά ημιορισμένος, τότε η μέθοδος Runge–Kutta είναι* B*–ευσταθής*. □

Όταν η μέθοδος ικανοποιεί τις συνθήκες της παραπάνω πρότασης, τότε λέμε ότι είναι *αλγεβρικά ευσταθής*.

Όσα αναφέρθηκαν ισχύουν και για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Περισσότερες πληροφορίες για τις εφαρμογές και την ανάλυση των μεθόδων Runge–Kutta μπορεί να βρεί κανείς στα βιβλία των Butcher, [Bu3], Dekker & Verwer, [DekV], Hairer, Nørsett & Wanner, [HaNW], και Hairer & Wanner, [HaW].

ENA

ME NEUMANN

§B1. Εισαγωγή.

Έστω $d \in \mathbb{N}$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ένα φραγμένο χωρίο με αρκετά ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, ή ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Για δοθέν $t^* > 0$, θεωρούμε το ακόλουθο παραβολικό πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Neumann

$$\partial_t u = L(t)u + f(x,t) \ \text{ στο } \ \Omega \times (0,t^*], \tag{B1.1a}$$

$$\boldsymbol{n}(x)\Gamma(x,t)\nabla u = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega \times (0,t^*], \tag{B1.1b}$$

$$u(x,0) = v^0(x) \ \text{ για κάθε } \ x \in \Omega, \tag{B1.1c}$$

όπου

$$\begin{aligned} L(t)u &\equiv \nabla\cdot(\Gamma(x,t)\nabla u) - \beta(x,t)\nabla u - \gamma_0(x,t)u \\ &\equiv \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}(\gamma_{ij}(x,t)\partial_{x_j}u) - \sum_{j=1}^{d} \beta_j(x,t)\partial_{x_j}u - \gamma_0(x,t)u. \end{aligned} \tag{B1.1d}$$

Οι $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^d$, $\{\beta_j\}_{j=1}^d$, γ_0, v^0 και f είναι ομαλές πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στο $\overline{\Omega} \times [0,t^*]$, εκτός από τη v^0 η οποία ορίζεται στο $\overline{\Omega}$. Υποθέτουμε ότι οι πίνακες $\Gamma(x,t) = (\gamma_{ij}(x,t))_{i,j=1}^d$ είναι συμμετρικοί και ομοιόμορφα θετικά ορισμένοι στο $\overline{\Omega}\times[0,t^*]$ με σταθερά $C_\Gamma > 0$, δηλ.

$$\sum_{i,j=1}^{d} \xi_i\gamma_{ij}(x,t)\xi_j \geq C_\Gamma \sum_{j=1}^{d}(\xi_j)^2, \quad \forall(\xi_1,\ldots,\xi_d)^T \in \mathbb{R}^d, \quad \forall(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,t^*]. \tag{B1.1e}$$

Υποθέτουμε επί πλέον, (βλ. [Sa], (1.2)), ότι

$$\boldsymbol{n}(x)\beta(x,t) = 0, \quad \forall(x,t) \in \partial\Omega \times [0,t^*], \tag{B1.1f}$$

και

$$\Gamma(x,t) = \tilde{\gamma}(x,t)\tilde{\Gamma}(x), \quad \forall(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,t^*], \tag{B1.1g}$$

όπου $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας με στοιχεία πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται στο $\overline{\Omega}$, και $\tilde{\gamma}$ είναι, επίσης, μιά πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται στο $\overline{\Omega} \times [0, t^*]$. (Η (B1.1g) εξασφαλίζει ότι η συνοριακή συνθήκη Neumann (B1.1b) είναι ανεξάρτητη από το χρόνο. Όμως δεν είναι απαραίτητη όταν $\Omega = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$ και ο Γ είναι ένας διαγώνιος πίνακας, καθώς τότε η (B1.1b) ισοδυναμεί με $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0$ στο $\partial\Omega \times (0, t^*]$.)

Ακόμα, υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (B1.1) δέχεται μια μόνο λύση η οποία είναι όσο χρειάζεται ομαλή. Σημειώνουμε ότι, γενικά, η ομαλότητα της λύσης στο χώρο εξαρτάται από την ομαλότητα του συνόρου $\partial\Omega$ και την ομαλότητα των δεδομένων ως προς τις χωρικές μεταβλητές. Η ομαλότητα στο χρόνο εξασφαλίζεται εφ' όσον τα δεδομένα είναι αρκετά ομαλά στο χρόνο και ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες συμβιβαστότητας στο $t = 0$ (για λεπτομέρειες βλ., π.χ., [Wl]).

Σ' αυτό το κεφάλαιο, ενδιαφερόμαστε για πλήρως διακριτές προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος (B1.1), χρησιμοποιώντας μια μέθοδο Galerkin–πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο, και μια πεπλεγμένη μέθοδο Runge–Kutta στο χρόνο. Διερευνούμε τη σύγκλιση αυτών των μεθόδων και αποδεικνύουμε a priori εκτιμήσεις σφάλματος της μορφής

$$\text{(B1.2)} \qquad \max_{0 \le n \le N} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \le C(h^r + k^{\sigma_1} h^{-\sigma_2}),$$

όπου σ_1 είναι ένας θετικός ακέραιος, σ_2 είναι ένας πραγματικός αριθμός ίσος με 0 ή $\frac{1}{2}$, h είναι η παράμετρος διακριτοποίησης στο χώρο, r είναι η βέλτιστη τάξη σύγκλισης στο χώρο ως προς την στάθμη του $L^2(\Omega)$ (βλ. §B2), $k := \frac{t^*}{N}$ είναι το βήμα στο χρόνο, $t^n := nk$ για $n = 0, \ldots, N$, και u_h^n είναι η πλήρως διακριτή προσέγγιση της $u(\cdot, t^n)$ (βλ. §B3). Ειδικώτερα, όταν $\nu \le p+1$, όπου p είναι η *τάξη σταδίου* και ν είναι η *κλασική τάξη* της μεθόδου Runge–Kutta, τότε $\sigma_1 = \nu$ και $\sigma_2 = 0$. Όταν $\nu > p+1$, χωρίς πρόσθετες υποθέσεις για τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε $\sigma_1 = p+2$ και $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ στην (B1.2). Γι' αυτό, όταν $\nu > p+1$, υποθέτοντας επί πλέον ότι

$$\text{(B1.3)} \qquad k \le C_0 h,$$

η εκτίμηση σφάλματος (B1.2) δίνει

$$\text{(B1.4)} \qquad \max_{0 \le n \le N} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \le C(h^r + k^{p+\frac{3}{2}}).$$

Ακόμα, λαμβάνουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα $\sigma_1 = \nu$, $\sigma_2 = 0$, για ειδικές κατηγορίες δεδομένων (βλ. Πρόταση B6.1). Επί πλέον αποδεικνύουμε ότι η τιμή του σ_1 μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $p+2$, όταν τα δεδομένα έχουν ειδική συμπεριφορά στό σύνορο (βλ. Πρόταση B6.4), καθώς και στην περίπτωση που το χωρίο Ω είναι καρτεσιανό γινόμενο ανοικτών διαστημάτων και ο τελεστής L έχει μια ειδική μορφή (βλ. Πρόταση B6.3).

Εξετάζοντας την ίδια εξίσωση αλλά με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε (βλ. §B6.2) αποτέλεσμα βέλτιστης τάξης, δηλ. $\sigma_1 = \nu$, $\sigma_2 = 0$, για περιοδικές συνοριακές συνθήκες, ενώ για συνοριακές συνθήκες Dirichlet (βλ. §B6.1) έχουμε, γενικά,

$\sigma_1 = p+1$ και $\sigma_2 = 0$ (βλ. Πρόταση B6.2, για ένα πιο ειδικό αποτέλεσμα όπου $\sigma_1 = p+2$ και $\sigma_2 = 0$).

Ολοκληρώνουμε την §B1 δίνοντας μια γενική εικόνα του υπολοίπου του Κεφαλαίου B. Στην §B2 εισάγουμε συμβολισμό, διατυπώνουμε τις υποθέσεις μας για τους υποχώρους της προσέγγισης Galerkin, ορίζουμε μια ελλειπτική προβολή και εξετάζουμε τις προσεγγιστικές της ιδιότητες. Ακόμα ορίζουμε και μελετούμε τη σύγκλιση μιάς ημιδιακριτής προσέγγισης για τη λύση. Στην §B3 παρουσιάζουμε τις υποθέσεις μας για τις μεθόδους Runge–Kutta, ορίζουμε τις πλήρως διακριτές προσεγγίσεις, και αποδεικνύουμε ιδιότητες ευστάθειας. Στην §B4 παρουσιάζονται αποτελέσματα συνέπειας και στην παράγραφο B5 αποδεικνύεται η εκτίμηση σφάλματος (B1.2). Στην §B6 συζητούμε την τάξη σύγκλισης στο χρόνο, για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες, και εξετάζοντας ειδικά προβλήματα. Τέλος στην παράγραφο B7 σχολιάζουμε τη σχετική βιβλιογραφία.

Σε ότι ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με C (συχνά συνοδευόμενο από δείκτη περιέχοντα αριθμούς ή γράμματα) μιά μη αρνητική σταθερά ανεξάρτητη των παραμέτρων διακριτοποίησης h και k, η οποία, όμως, μπορεί να εξαρτάται από τη λύση, τα δεδομένα του (B1.1) και την αριθμητική μέθοδο. Ακόμα αναφερόμενοι στη λύση u θα γράφουμε $u(t)$ αντί $u(\cdot, t)$.

§B2. Διακριτοποίηση στο χώρο–Ημιδιακριτό πρόβλημα.

Έστω ακέραιος $r \geq 2$ και $\{S_h\}_{h\in(0,h_\alpha)}$ μία οικογένεια αποτελούμενη από πεπερασμένης διάστασης υποχώρους του $H^1(\Omega)$ και έχουσα την ακόλουθη προσεγγιστική ιδιότητα: υπάρχει μιά πραγματική σταθερά C_F τέτοια ώστε

$$(\mathrm{H}_1)\quad \inf_{\chi\in S_h}\big\{\|w-\chi\|+h\|w-\chi\|_1\big\} \leq C_F h^s \|w\|_s,\ \ \forall w\in H^s(\Omega),\ \ s=2,\dots,r,\ \ \forall h\in(0,h_\alpha).$$

Παρατήρηση B2.1. Στη *συνήθη* (standard) μέθοδο Galerkin, κατά την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Neumann, δεν απαιτείται τα στοιχεία των χώρων προσέγγισης να ικανοποιούν κάποια συνοριακή συνθήκη, όπως συμβαίνει π.χ. στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet (βλ. §B6.1). Παραδείγματα χώρων που ικανοποιούν την (H_1) υπάρχουν στις εργασίες των Ciarlet & Raviart [CiR], Bramble & Hilbert [BaH] καθώς και στο βιβλίο του Ciarlet [Ci].

Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχει δυσκολία στην κατασκευή τέτοιων χώρων προσέγγισης όταν το Ω είναι ένα διάστημα ή ένα παραλληλεπίπεδο. Όταν το Ω έχει καμπύλο σύνορο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα παραλληλεπίπεδο $\widetilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^d$ το οποίο να περιέχει στο εσωτερικό του το $\overline{\Omega}$. Έπειτα υποθέτουμε ότι έχουμε μιά οικογένεια χώρων προσέγγισης $\{\widetilde{S_h}\}_{h\in(0,\widetilde{h_\alpha})}\subset H^1(\widetilde{\Omega})$ η οποία να ικανοποιεί την (H_1) στο $\widetilde{\Omega}$ με σταθερά $C_{\widetilde{F}}$, δηλ.

$$\inf_{\chi\in\widetilde{S_h}}\big\{\|w-\chi\|_{L^2(\widetilde{\Omega})}+h\|w-\chi\|_{H^1(\widetilde{\Omega})}\big\} \leq C_{\widetilde{F}} h^s \|w\|_{H^s(\widetilde{\Omega})},\quad \forall w\in H^s(\widetilde{\Omega}),\quad \forall h\in(0,\widetilde{h_\alpha}),$$

όπου $s=2,\dots,r$. Επιπλέον, για κάθε $\ell\in\mathbb{N}_0$, το θεώρημα επέκτασης του Calderón (βλ., π.χ. Theorem 11.12, σελ. 171, [Ag]), εξασφαλίζει ότι κάθε $w\in H^\ell(\Omega)$ έχει επέκταση

$\widetilde{w} \in H^\ell(\mathbb{R}^d)$ με την ιδιότητα $\|\widetilde{w}\|_{H^\ell(\mathbb{R}^d)} \le \mathcal{C}_\ell \|w\|_{H^\ell(\Omega)}$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}\inf_{\chi\in\widetilde{S_h}}\big\{\|w-\chi\|_{L^2(\Omega)}+h\|w-\chi\|_{H^1(\Omega)}\big\} &= \inf_{\chi\in\widetilde{S_h}}\big\{\|\widetilde{w}-\chi\|_{L^2(\Omega)}+h\|\widetilde{w}-\chi\|_{H^1(\Omega)}\big\}\\ &\le \inf_{\chi\in\widetilde{S_h}}\big\{\|\widetilde{w}-\chi\|_{L^2(\widetilde{\Omega})}+h\|\widetilde{w}-\chi\|_{H^1(\widetilde{\Omega})}\big\}\\ &\le C_{\widetilde{F}} h^s \|\widetilde{w}\|_{H^s(\widetilde{\Omega})} \le C_{\widetilde{F}} h^s \|\widetilde{w}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\\ &\le C_{\widetilde{F}}\mathcal{C}_s h^s\|w\|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall w\in H^s(\Omega), \quad \forall h\in(0,\widetilde{h_\alpha}), \quad s=2,\dots,r.\end{aligned}$$

Αρκεί, λοιπόν να πάρουμε $S_h := \{\chi\,|_\Omega : \chi\in\widetilde{S_h}\}$ για κάθε $h\in(0,\widetilde{h_\alpha})$. $\Box$

Υποθέτουμε ακόμα ότι τα στοιχεία της $\{S_h\}_{h\in(0,h_\alpha)}$ ικανοποιούν την ακόλουθη *αντίστροφη ανισότητα*:

$$(\mathrm{H}_2) \qquad |\chi|_{\partial\Omega} \le \frac{C_I}{\sqrt{h}}\|\chi\|, \quad \forall\chi\in S_h, \quad 0<h<h_\alpha.$$

Παρατήρηση B2.2. Έστω, ότι οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων $\{S_h\}_{h\in(0,h_\alpha)}$ ικανοποιούν μιά αντίστροφη ανισότητα της μορφής

$$(\mathrm{H}_2') \qquad \|\chi\|_1 \le \frac{C_{II}}{h}\|\chi\|, \quad \forall\chi\in S_h, \quad 0<h<h_\alpha,$$

κάτι που συμβαίνει όταν η κατασκευή τους βασίζεται σε κατάλληλες διαμερίσεις του $\overline{\Omega}$ (quasi–uniform subdivisions, δες π.χ. [Ci], [BeS]). Θέτοντας $\varepsilon = \sqrt{h}$ και $w=\chi$ στην (A1.2), παίρνουμε

$$|\chi|_{\partial\Omega} \le \sqrt{h}\|\chi\|_1 + \frac{C_\Omega}{\sqrt{h}}\|\chi\| \le \frac{C_\Omega + C_{II}}{\sqrt{h}}\|\chi\|, \quad \forall\chi\in S_h, \quad 0<h<h_\alpha.$$

Επομένως η (H_2') συνεπάγεται την (H_2). $\Box$

Στη συνέχεια $\mathcal{X}_\mathcal{N}$ θα είναι ο χώρος των συναρτήσεων, οι οποίες ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη Neumann του (B1.1), δηλ.

$$\mathcal{X}_\mathcal{N} := \big\{w\in H^2(\Omega) : \boldsymbol{n}\Gamma\nabla w = 0 \text{ στο } \partial\Omega\times[0,t^*]\big\}.$$

Παρατήρηση B2.3. Χρησιμοποιώντας την (B1.1g), εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{X}_\mathcal{N} = \big\{w\in H^2(\Omega) : \boldsymbol{n}\tilde{\Gamma}\nabla w = 0 \text{ στο } \partial\Omega\big\}.$$

Όταν το σύνολο Ω είναι καρτεσιανό γινόμενο ανοικτών διαστημάτων και ο πίνακας Γ είναι διαγώνιος, τότε

$$\mathcal{X}_\mathcal{N} = \Big\{w\in H^2(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 \text{ στο } \partial\Omega\Big\}.$$

Σε κάθε περίπτωση, ο χώρος $\mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ δεν εξαρτάται από το χρόνο (συγκεκριμένα, αν έχουμε $w \in C^1([0,t^*];H^2(\Omega))$ με $w(t) \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ για κάθε $t \in [0,t^*]$, τότε $\partial_t w(t) \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ για κάθε $t \in [0,t^*]$). $\square$

Για $t \in [0,t^*]$ και $h \in (0,h_\alpha)$, ορίζουμε μιά απεικόνιση $L_h(t) : S_h \longrightarrow S_h$, μέσω της απαίτησης

(B2.1a) $$(L_h(t)\varphi,\chi) = -(\Gamma(\cdot,t)\nabla\varphi,\nabla\chi) - (\beta(\cdot,t)\nabla\varphi,\chi) - (\gamma_0(\cdot,t)\varphi,\chi), \quad \forall \varphi,\chi \in S_h,$$

και θέτουμε

(B2.1b) $$F_h(t) := P_h(f(\cdot,t)),$$

όπου P_h είναι ο τελεστής της L^2–προβολής στον S_h. Για $t \in [0,t^*]$, ορίζουμε, ακόμα, τις διγραμμικές μορφές $B(t), B^*(t), \dot{B}(t) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, ως εξής:

(B2.2a) $$B(t;v,w) := (\Gamma(\cdot,t)\nabla v,\nabla w) + (\beta(\cdot,t)\nabla v, w) + \mathcal{M}_0(v,w),$$

(B2.2b) $$B^*(t;v,w) := (\Gamma(\cdot,t)\nabla v,\nabla w) - (\beta(\cdot,t)\nabla v, w) + ((\mathcal{M}_0 - \sum_{\ell=1}^{d} \partial_{x_\ell}\beta_\ell(\cdot,t))v, w),$$

(B2.2c) $$\dot{B}(t;v,w) := (\partial_t\Gamma(\cdot,t)\nabla v,\nabla w) + (\partial_t\beta(\cdot,t)\nabla v, w),$$

όπου

(B2.2d) $$\mathcal{M}_0 := 1 + \sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\partial_{x_\ell}\beta_\ell| + \left[1 + \frac{1}{2C_\Gamma}\sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell|\right] \sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell|.$$

Λήμμα B2.1. *Η διγραμμική μορφή B είναι φραγμένη και $H^1(\Omega)$–ελλειπτική, ομοιόμορφα ως προς t, δηλ. υπάρχουν πραγματικές σταθερές C_B και $C_E > 0$, τέτοιες ώστε*

(B2.3) $$|B(t;v,w)| \le C_B \|v\|_1 \|w\|_1, \quad \forall v,w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0,t^*],$$

(B2.4) $$B(t;w,w) \ge C_E \|w\|_1^2, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Απόδειξη. Έστω $t \in [0,t^*]$ και $v,w \in H^1(\Omega)$. Τότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$|B(t;v,w)| \le \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i} w| \Big\{ \sum_{j=1}^{d} |\gamma_{ij}(\cdot,t)||\partial_{x_j} v| \Big\} dx$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega |w|\Big\{\sum_{\ell=1}^d |\beta_\ell(\cdot,t)||\partial_{x_\ell}v|\Big\}dx+\mathcal{M}_0\|v\|\|w\|\\
&\leq \int_\Omega \Big\{\sum_{j=1}^d |\partial_{x_j}v|^2\Big\}^{\frac12}\sum_{i=1}^d|\partial_{x_i}w|\Big\{\sum_{j=1}^d|\gamma_{ij}(\cdot,t)|^2\Big\}^{\frac12}dx\\
&+\int_\Omega |w|\Big\{\sum_{\ell=1}^d|\beta_\ell(\cdot,t)|^2\Big\}^{\frac12}\Big\{\sum_{\ell=1}^d|\partial_{x_\ell}v|^2\Big\}^{\frac12}dx+\mathcal{M}_0\|v\|\|w\|\\
&\leq \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}\Big\{\max_{1\leq i\leq d}\Big(\sum_{j=1}^d|\gamma_{ij}|^2\Big)\Big\}^{\frac12}\sqrt{d}\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^d|\partial_{x_i}w|^2\Big\}^{\frac12}\Big\{\sum_{j=1}^d|\partial_{x_j}v|^2\Big\}^{\frac12}dx\\
&+\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}\Big\{\sum_{\ell=1}^d|\beta_\ell|^2\Big\}^{\frac12}\int_\Omega|w|\Big\{\sum_{\ell=1}^d|\partial_{x_\ell}v|^2\Big\}^{\frac12}dx+\mathcal{M}_0\|v\|\|w\|\\
&\leq C\Big(\|\nabla w\|\|\nabla v\|+\|w\|\|\nabla v\|+\|v\|\|w\|\Big)\leq C_B\|w\|_1\|v\|_1.
\end{aligned}
$$

Ακόμα, χρησιμοποιώντας την (B1.1e) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
B(t;w,w)&=(\Gamma(\cdot,t)\nabla w,\nabla w)+(\beta(\cdot,t)\nabla w,w)+\mathcal{M}_0(w,w)\\
&\geq C_\Gamma\|\nabla w\|^2+\mathcal{M}_0\|w\|^2+\sum_{\ell=1}^d(\beta_\ell(\cdot,t)\partial_{x_\ell}w,w)\\
&\geq C_\Gamma\|\nabla w\|^2+\mathcal{M}_0\|w\|^2-\sum_{\ell=1}^d\Big[(\varepsilon\|w\|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|\partial_{x_\ell}w\|^2)\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|\Big]\\
&=\|\nabla w\|^2\Big(C_\Gamma-\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{\ell=1}^d\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|\Big)+\|w\|^2\Big(\mathcal{M}_0-\varepsilon\sum_{\ell=1}^d\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|\Big),\quad\forall\varepsilon>0.
\end{aligned}
$$

Επιλέγοντας $\varepsilon=1+\frac{1}{2C_\Gamma}\sum_{\ell=1}^d\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|$, η (B2.2d) και η παραπάνω σχέση δίνουν:

$$
B(t;w,w)\geq\frac{C_\Gamma}{2}\|\nabla w\|^2+\|w\|^2\geq\min\Big\{1,\frac{C_\Gamma}{2}\Big\}\|w\|_1^2.\quad\blacksquare
$$

Λήμμα B2.2. *Οι διγραμμικές μορφές $\dot{B}$, B^* είναι φραγμένες και η B^* ειναι $H^1(\Omega)$–ελλειπτική ομοιόμορφα ως προς t, δηλ. υπάρχουν πραγματικές σταθερές $\tilde{C}_B$ και $\tilde{C}_E>0$, τέτοιες ώστε:*

(B2.5) $$|B^*(t;v,w)|\leq\tilde{C}_B\|v\|_1\|w\|_1,\quad\forall v,w\in H^1(\Omega),\quad\forall t\in[0,t^*],$$

(B2.6) $$|\dot{B}(t;v,w)|\leq\tilde{C}_B\|v\|_1\|w\|_1,\quad\forall v,w\in H^1(\Omega),\quad\forall t\in[0,t^*],$$

$$\text{(B2.7)} \qquad B^*(t;w,w) \geq \tilde{C}_E \|w\|_1^2, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Απόδειξη. Οι (B2.5) και (B2.6) προκύπτουν όπως η (B2.3). Τώρα έστω $w \in H^1(\Omega)$ και $t \in [0,t^*]$. Τότε, βασιζόμενοι στην (B1.1e) και στην ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε:

$$\begin{aligned}
B^*(t;w,w) =& (\Gamma(\cdot,t)\nabla w, \nabla w) - (\beta(\cdot,t)\nabla w, w) + ((\mathcal{M}_0 - \sum_{\ell=1}^{d} \partial_{x_\ell}\beta_\ell(\cdot,t))w, w) \\
\geq& C_\Gamma \|\nabla w\|^2 + \int_\Omega (\mathcal{M}_0 - \sum_{\ell=1}^{d} \partial_{x_\ell}\beta_\ell(\cdot,t))|w|^2 dx \\
&- \sum_{\ell=1}^{d} \Big[(\varepsilon \|w\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\partial_{x_\ell} w\|^2) \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell| \Big] \\
=& \|\nabla w\|^2 \Big(C_\Gamma - \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell| \Big) \\
&+ \int_\Omega \Big(\mathcal{M}_0 - \varepsilon \sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell| - \sum_{\ell=1}^{d} \partial_{x_\ell}\beta_\ell(\cdot,t) \Big) |w|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\varepsilon = 1 + \frac{1}{2C_\Gamma} \sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell|$, και χρησιμοποιώντας την (B2.2d), καταλήγουμε στην (B2.7) όπου $\tilde{C}_E = \min\{1, \frac{C_\Gamma}{2}\}$. ■

Λήμμα B2.3. *Οι διγραμμικές μορφές B, $\dot{B}$ και B^* έχουν, επί πλέον, τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\text{(B2.8)} \qquad B^*(t;v,w) = B(t;w,v), \quad \forall v,w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0,t^*],$$

$$\text{(B2.9)} \qquad |\dot{B}(t;v,w)| \leq C_{\dot{B}} \|v\| \|w\|_2, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall w \in \mathcal{X}_\mathcal{N}, \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Απόδειξη. Έστω $t \in [0,t^*]$ και $v,w \in H^1(\Omega)$. Από την (B2.2b), χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του πίνακα Γ, τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και την (B1.1f), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
B^*(t;v,w) &= (\Gamma(\cdot,t)\nabla v, \nabla w) - (\beta(\cdot,t)\nabla v, w) + ((\mathcal{M}_0 - \sum_{\ell=1}^{d} \partial_{x_\ell}\beta_\ell(\cdot,t))v, w) \\
&= (\Gamma(\cdot,t)\nabla w, \nabla v) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\beta(\cdot,t) v w dS + \int_\Omega \beta(\cdot,t)\nabla w v dx + \mathcal{M}_0(v,w) \\
&= B(t;w,v) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\beta(\cdot,t) v w dS = B(t;w,v).
\end{aligned}$$

Έστω επί πλέον ότι $w \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$. Από την (B2.2c), χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του $\partial_t\Gamma$ και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\dot{B}(t; v, w) =&(\partial_t\Gamma(\cdot,t)\nabla v, \nabla w) + (\partial_t\beta(\cdot,t)\nabla v, w)\\
=&(\partial_t\Gamma(\cdot,t)\nabla w, \nabla v) + (\partial_t\beta(\cdot,t)\nabla v, w)\\
=&\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\partial_t\Gamma(\cdot,t)\nabla w v dx + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\partial_t\beta(\cdot,t) v w dS\\
&- (\nabla\cdot(\partial_t\Gamma(\cdot,t)\nabla w), v) - (\partial_t\beta(\cdot,t)\nabla w, v)\\
&- \sum_{\ell=1}^{d}(\partial_{x_\ell}\partial_t\beta_\ell(\cdot,t)w, v).
\end{aligned}
\tag{B2.10}
$$

Από την (B1.1f) είναι προφανές ότι

$$\boldsymbol{n}\partial_t\beta = 0 \text{ στο } \partial\Omega \times [0, t^*], \tag{B2.11a}$$

ενώ η (B1.1g) και η Παρατήρηση B2.3 δίνουν

$$\boldsymbol{n}\partial_t\Gamma\nabla w = 0 \text{ στο } \partial\Omega \times [0, t^*]. \tag{B2.11b}$$

Οι (B2.10), (B2.11) και η ανισότητα Cauchy–Schwarz οδηγούν εύκολα στην (B2.9). ■

Για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$, ορίζουμε μιά H^1 προβολή $R_h : [0, t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(H^1(\Omega); S_h)$, μέσω της συνθήκης:

$$B(t; R_h(t)w, \chi) = B(t; w, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{B2.12}$$

Παρατήρηση B2.4. Το Λήμμα B2.1 και το Λήμμα Lax–Milgram εξασφαλίζουν ότι η R_h είναι καλά ορισμένη. Επίσης, από την (B2.12) και το Λήμμα B2.1, συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\|R_h(t)w\|_1^2 \leq& \frac{1}{C_E} B(t; R_h(t)w, R_h(t)w)\\
=&\frac{1}{C_E} B(t; w, R_h(t)w) \leq \frac{C_B}{C_E}\|w\|_1 \|R_h(t)w\|_1.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\|R_h(t)w\|_1 \leq \frac{C_B}{C_E}\|w\|_1, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, t^*], \quad \forall h \in (0, h_\alpha).$$

Έστω $w \in C^1([0, t^*], H^1(\Omega))$ και $w_h : [0, t^*] \longrightarrow S_h$ οριζόμενη ως εξής $w_h(t) := R_h(t)w(t)$. Όταν οι $\{B(\cdot; w, \chi)\}_{\chi \in S_h}$ ανήκουν στον $C^1([0, t^*], \mathbb{R})$, τότε έχουμε $w_h \in C^1([0, t^*], S_h)$. □

Στις Προτάσεις B2.1 και B2.2, που ακολουθούν, παρουσιάζονται προσεγγιστικές ιδιότητες της προβολής R_h. Οι αποδείξεις, σ' αυτές τις προτάσεις, είναι ανάλογες μ' εκείνες των Huang & Thomée στην εργασία [HuT], για το πρόβλημα ομογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet (βλ. επίσης [Th], Chapter 4).

Πρόταση B2.1. *Έστω $\ell \in \{0,1\}$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C_{\ell,H}$, τέτοια ώστε:*

$$\|\partial_t^\ell w(t) - \partial_t^\ell (R_h w)(t)\|_1 \le C_{\ell,H} h^{s-1} \sum_{m=0}^{\ell} \|\partial_t^m w(t)\|_s, \tag{B2.13}$$

για κάθε $w \in C^\ell([0,t^*], H^s(\Omega))$, $s \in \{2,\dots,r\}$, $t \in [0,t^*]$ και $h \in (0,h_\alpha)$.

Απόδειξη. Έστω $s \in \{2,\dots,r\}$, $h \in (0,h_\alpha)$ και $w \in C([0,t^*], H^s(\Omega))$. Τότε ορίζουμε $e : [0,t^*] \longrightarrow H^1(\Omega)$, ως εξής $e(t) := w(t) - R_h(t) w(t)$ για κάθε $t \in [0,t^*]$. Από τις (B2.4), (B2.12) και (B2.3) έχουμε

$$\begin{aligned} C_E \|e(t)\|_1^2 \le B(t; e(t), e(t)) =& B(t; e(t), w(t) - \chi) \\ \le& C_B \|e(t)\|_1 \|w(t) - \chi\|_1, \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0,t^*]. \end{aligned} \tag{B2.14}$$

Η (B2.14) και η υπόθεση (H_1) στη συνέχεια δίνουν

$$\|e(t)\|_1 \le C \inf_{\chi \in S_h} \|w(t) - \chi\|_1 \le C h^{s-1} \|w(t)\|_s, \quad \forall t \in [0,t^*]. \tag{B2.15}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $w \in C^1([0,t^*], H^s(\Omega))$. Αυτό σημαίνει ότι $R_h w \in C^1([0,t^*], S_h)$ και επομένως $e \in C^1([0,t^*], H^1(\Omega))$. Από την (B2.12), έχουμε ότι $B(t; e(t), \chi) = 0$ για κάθε $\chi \in S_h$ και $t \in [0,t^*]$. Παραγωγίζοντας μιά φορά ως προς t, καταλήγουμε στη σχέση

$$B(t; \partial_t e(t), \chi) + \dot{B}(t; e(t), \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h \quad \forall t \in [0,t^*]. \tag{B2.16}$$

Έτσι οι (B2.4), (B2.16), (B2.3) και (B2.6) δίνουν

$$\begin{aligned} C_E \|\partial_t e(t)\|_1^2 \le& B(t; \partial_t e(t), \partial_t e(t)) \\ =& B(t; \partial_t e(t), \partial_t e(t) + \chi) - B(t; \partial_t e(t), \chi) \\ =& B(t; \partial_t e(t), \partial_t e(t) + \chi) + \dot{B}(t; e(t), \chi) \\ \le& C\Big[\|\partial_t e(t)\|_1 \|\partial_t e(t) + \chi\|_1 + \|e(t)\|_1 \|\chi\|_1 \Big] \\ \le& C\Big[\|\partial_t e(t)\|_1 \|\partial_t e(t) + \chi\|_1 + \|e(t)\|_1 \big(\|\partial_t e(t)\|_1 + \|\partial_t e(t) + \chi\|_1 \big) \Big] \\ \le& C\Big[\big(\|\partial_t e(t)\|_1 + \|e(t)\|_1 \big) \|\partial_t e(t) + \chi\|_1 + \|e(t)\|_1 \|\partial_t e(t)\|_1 \Big], \end{aligned}$$

για κάθε $\chi \in S_h$ και $t \in [0,t^*]$. Επομένως

$$\begin{aligned} \|\partial_t e(t)\|_1^2 \le& C\Big[\big(\|\partial_t e(t)\|_1 + \|e(t)\|_1 \big) \inf_{\chi \in S_h} \|\partial_t e(t) + \chi\|_1 + \|e(t)\|_1 \|\partial_t e(t)\|_1 \Big] \\ \le& C\Big[\|\partial_t e(t)\|_1 \inf_{\chi \in S_h} \|\partial_t e(t) + \chi\|_1 + \|e(t)\|_1 \|\partial_t e(t)\|_1 \Big] \\ \le& C \|\partial_t e(t)\|_1 \Big[\|e(t)\|_1 + \inf_{\chi \in S_h} \|\partial_t w(t) - \chi\|_1 \Big] \quad \forall t \in [0,t^*]. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση, την (H_1) και την (B2.15) έχουμε τελικά ότι

$$\|\partial_t e(t)\|_1 \le C h^{s-1} \Big[\|w(t)\|_s + \|\partial_t w(t)\|_s \Big] \quad \forall t \in [0,t^*]. \quad \blacksquare$$

Πρόταση B2.2. *Έστω $\ell \in \{0,1\}$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C_{\ell,L}$, τέτοια ώστε:*

$$\|\partial_t^\ell w(t) - \partial_t^\ell (R_h w)(t)\| \le C_{\ell,L} h^s \sum_{m=0}^{\ell} \|\partial_t^m w(t)\|_s, \tag{B2.17}$$

για κάθε $w \in C^\ell([0,t^*], H^s(\Omega))$, $s \in \{2,\dots,r\}$, $t \in [0,t^*]$ και $h \in (0,h_\alpha)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, ορίζουμε τελεστή $\mathsf{T}^* : [0,t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(H^2(\Omega); L^2(\Omega))$, ως εξής

$$\mathsf{T}^*(t)\tilde{w} = -\nabla\cdot(\Gamma(\cdot,t)\nabla\tilde{w}) - \beta(\cdot,t)\nabla\tilde{w} + \big(\mathcal{M}_0 - \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\beta_j(\cdot,t)\big)\tilde{w}, \quad \tilde{w} \in H^2(\Omega), \quad t \in [0,t^*],$$

και θα συμβολίζουμε με $\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}}(t)$ τον περιορισμό του $\mathsf{T}^*(t)$ στον $\mathcal{X}_{\mathcal{N}}$.

Έστω $t \in [0,t^*]$. Οι (B2.5), (B2.7) και το Λήμμα Lax–Milgram εξασφαλίζουν ότι υπάρχει γραμμικός τελεστής $Z(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ τέτοιος ώστε

$$B^*(t; Z(t)\psi, \varphi) = (\psi, \varphi), \quad \forall \psi \in L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{B2.18}$$

(Για δοθέν $\psi \in L^2(\Omega)$, η $Z(t)\psi$ είναι η *ασθενής λύση* του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών Neumann: *ζητούμε $\tilde{w} \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ τέτοια ώστε $\mathsf{T}^*(t)\tilde{w} = \psi$.*) Από τη θεωρία των ελλειπτικών προβλημάτων (αποτέλεσμα *ελλειπτικής ομαλότητας*) έχουμε ότι $Z(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega)$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green και την (B2.18), παίρνουμε

$$(\mathsf{T}^*(t)Z(t)\psi - \psi, \varphi) = 0, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Επειδή ο $H_0^1(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(\Omega)$, η τελευταία σχέση δίνει

$$\mathsf{T}^*(t)Z(t)\psi = \psi, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega). \tag{B2.19}$$

Έστω $\psi \in L^2(\Omega)$. Από τις (B2.19) και (B2.18), έχουμε στη συνέχεια ότι

$$\begin{aligned} 0 = (\mathsf{T}^*(t)Z(t)\psi - \psi, \varphi) &= B^*(t; Z(t)\psi, \varphi) - (\psi, \varphi) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t)\nabla Z(t)\psi\varphi dS \\ &= -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t)\nabla Z(t)\psi\varphi dS, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{B2.20}$$

Επειδή ο $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(\partial\Omega)$ (βλ. π.χ. [GiR], Theorem 1.3) από την (B2.20) έπεται ότι $\boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t)\nabla Z(t)\psi = 0$ στο $\partial\Omega$, δηλ. $Z(t)\psi \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ (για το ίδιο αποτέλεσμα δες [BeS], Proposition (5.1.9)). Δείξαμε, λοιπόν, ότι $Z(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ και έτσι η (B2.19) εξασφαλίζει ότι ο $\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}}$ είναι *επί*. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(\mathsf{T}^*(t)\tilde{w}, \tilde{v}) = B^*(t; \tilde{w}, \tilde{v}), \quad \forall \tilde{w} \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}, \quad \forall \tilde{v} \in H^1(\Omega). \tag{B2.21}$$

Επειδή ο $\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}}(t)$ είναι γραμμικός, από τις (B2.21) και (B2.7) έπεται ότι είναι *ένα πρός ένα*. Έτσι ο $\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}}(t)$ είναι αντιστρέψιμος και $(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t) = Z(t)$.

Μιά ακόμα συνέπεια του αποτελέσματος ελλειπτικής ομαλότητας (βλ. π.χ. [GiT], Chapter 8, και [LoM], Chapter 5, Lemma 2.1) είναι ότι

$$\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\psi\|_2 \le C\|\psi\|, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega), \quad \forall t \in [0,t^*]. \tag{B2.22}$$

Έστω $s \in \{2,\dots,r\}$, $h \in (0,h_\alpha)$ και $w \in C([0,t^*],H^s(\Omega))$. Ορίζουμε, στη συνέχεια, τη συνάρτηση σφάλματος $e : [0,t^*] \longrightarrow H^1(\Omega)$ ως εξής: $e(t) = w(t) - R_h(t)w(t)$, $\forall t \in [0,t^*]$. Τότε από τις (B2.18), (B2.8), (B2.12), (B2.3), (B2.13) (για $\ell = 0$) και (B2.22) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|e(t)\|^2 =& B^*(t;(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t),e(t))\\
=& B(t;e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t))\\
=& B(t;e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t) - R_h(t)(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t))\\
&+ B(t;e(t),R_h(t)(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t))\\
=& B(t;e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t) - R_h(t)(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t))\\
\le& C\|e(t)\|_1\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t) - R_h(t)(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t)\|_1\\
\le& Ch^{s-1}\|w(t)\|_s h\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)e(t)\|_2\\
\le& Ch^s\|w(t)\|_s\|e(t)\|, \quad \forall t \in [0,t^*],
\end{aligned}$$

από την οποία έπεται προφανώς η (B2.17) για $\ell = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $w \in C^1([0,t^*],H^s(\Omega))$. Βασιζόμενοι στις σχέσεις (B2.18), (B2.8), (B2.16), (B2.3), (B2.6), (B2.9) και (B2.22), συνάγουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
\|\partial_t e(t)\|^2 =& B^*(t;(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t),\partial_t e(t))\\
=& B(t;\partial_t e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t))\\
=& B(t;\partial_t e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi) + B(t;\partial_t e(t),\chi)\\
=& B(t;\partial_t e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi)\\
&+ \dot{B}(t;e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi) - \dot{B}(t;e(t),(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t))\\
\le& C\Big[\|\partial_t e(t)\|_1\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi\|_1\\
&\quad + \|e(t)\|_1\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi\|_1 + \|e(t)\|\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t)\|_2\Big]\\
\le& C\Big[\|e(t)\|\|\partial_t e(t)\| + (\|e(t)\|_1 + \|\partial_t e(t)\|_1)\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi\|_1\Big],
\end{aligned}$$

για κάθε $\chi \in S_h$ και $t \in [0,t^*]$. Από την προηγούμενη σχέση και τις (B2.13), (H_1) και (B2.22) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|\partial_t e(t)\|^2 \le& C\Big[(\|e(t)\|_1 + \|\partial_t e(t)\|_1)\inf_{\chi \in S_h}\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t) - \chi\|_1 + \|e(t)\|\|\partial_t e(t)\|\Big]\\
\le& C\Big[h^{s-1}(\|w(t)\|_s + \|\partial_t w(t)\|_s)h\|(\mathsf{T}^*_{\mathcal{N}})^{-1}(t)\partial_t e(t)\|_2 + h^s\|w(t)\|_s\|\partial_t e(t)\|\Big]\\
\le& Ch^s\|\partial_t e(t)\|\Big[\|w(t)\|_s + \|\partial_t w(t)\|_s\Big], \quad \forall t \in [0,t^*].
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση οδηγεί προφανώς στην (Β2.17) για $\ell = 1$. ■

Παρατήρηση Β2.5. Έστω $s \in \{2, \dots, r\}$ και $w \in H^s(\Omega)$ ανεξάρτητο του t. Τότε, προφανώς, $\partial_t w = 0$. Όμως η $R_h w$ εξαρτάται από το t λόγω της εξάρτησης της διγραμμικής μορφής B από το t (βλ. (Β2.12)). Έτσι, οι εκτιμήσεις (Β2.13) και (Β2.17) δίνουν ότι $\|\partial_t(R_h w)\|_j \le C h^{s-j}\|w\|_s$ για κάθε $j \in \{0, 1\}$ και $h \in (0, h_\alpha)$. □

Ως πρώτο βήμα για την πλήρη διακριτοποίηση του προβλήματος (Β1.1) διατυπώνουμε το αντίστοιχο *ημιδιακριτό* πρόβλημα: *για κάθε* $h \in (0, h_\alpha)$ *ζητούμε* $u_h \in C^1((0, t^*], S_h) \cap C([0, t^*], S_h)$ *τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} \partial_t u_h =& L_h u_h + F_h \quad \text{στο} \quad (0, t^*], \\ u_h(0) =& v_h^0, \end{aligned} \tag{Β2.23}$$

όπου $v_h^0 \in S_h$ είναι κατάλληλη προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης v^0. Επειδή ο S_h είναι πεπερασμένης διάστασης, η (Β2.23) ισοδυναμεί με ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με άγνωστες συναρτήσεις τους συντελεστές του u_h ως προς κάποια βάση του S_h. Η θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων εξασφαλίζει ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση u_h, η οποία (λόγω της συνέχειας των δεδομένων στο $\overline{\Omega} \times [0, t^*]$) ανήκει στον $C^1([0, t^*], S_h)$ για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$.

Στη συνέχεια (ακολουθώντας μιά τεχνική ανάλογη μ' εκείνη της εργασίας [HuT] για το πρόβλημα Dirichlet) θα μελετήσουμε τη σύγκλιση (στη στάθμη του $L^2(\Omega)$) των ημιδιακριτών προσεγγίσεων u_h όταν το h τείνει στο 0.

Πρόταση Β2.3. *Έστω* u, u_h *οι λύσεις των προβλημάτων* (Β1.1) *και* (Β2.23), *αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι*

$$\|v_h^0 - v^0\| \le C h^r \|v^0\|_r, \quad 0 < h < h_\alpha. \tag{IV}$$

Τότε

$$\sup_{t \in [0, t^*]} \|u_h(t) - u(t)\| \le C h^r \Big[\|v^0\|_r + \int_0^{t^*} \big(\|u(\tau)\|_r + \|\partial_t u(\tau)\|_r\big) d\tau\Big], \quad \forall h \in (0, h_\alpha). \tag{Β2.24}$$

Απόδειξη. Έστω $h \in (0, h_\alpha)$. Έστω $w_h(t) := R_h(t)u(t)$, $\eta(t) := u(t) - w_h(t)$ και $\vartheta_h(t) := u_h(t) - w_h(t)$ για κάθε $t \in [0, t^*]$. Τότε οι (Β2.2a), (Β2.23), (Β2.12) και (Β1.1) δίνουν

$$\begin{aligned} (\partial_t \vartheta_h(t), \chi) + &(\Gamma(\cdot, t)\nabla\vartheta_h(t), \nabla\chi) + (\beta(\cdot, t)\nabla\vartheta_h(t), \chi) + (\gamma_0(\cdot, t)\vartheta_h(t), \chi) \\ =&(\partial_t u_h(t) - L_h(t)u_h(t), \chi) \\ &- \Big[(\partial_t w_h(t), \chi) + B(t; w_h(t), \chi) + ((\gamma_0(\cdot, t) - \mathcal{M}_0)w_h(t), \chi)\Big] \\ =&(f(t), \chi) - \Big[(\partial_t w_h(t), \chi) + B(t; u(t), \chi) + ((\gamma_0(\cdot, t) - \mathcal{M}_0)w_h(t), \chi)\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\Big[(\partial_t u(t),\chi)+B(t;u(t),\chi)+((\gamma_0(\cdot,t)-\mathcal{M}_0)u(t),\chi)\Big]\\
&-\Big[(\partial_t w_h(t),\chi)+B(t;u(t),\chi)+((\gamma_0(\cdot,t)-\mathcal{M}_0)w_h(t),\chi)\Big]\\
=&(\partial_t\eta(t),\chi)+((\gamma_0(\cdot,t)-\mathcal{M}_0)\eta(t),\chi),\quad\forall\chi\in S_h,\quad\forall t\in[0,t^*].
\end{aligned}
$$

Επομένως έχουμε

$$
\partial_t\vartheta_h(t)=L_h(t)\vartheta_h(t)+r_h(t),\quad\forall t\in[0,t^*],\tag{B2.25a}
$$

$$
\vartheta_h(0)=v_h^0-v^0,\tag{B2.25b}
$$

όπου

$$
r_h(t):=P_h\big(\partial_t\eta(t)+(\gamma_0(\cdot,t)-\mathcal{M}_0)\eta(t)\big),\quad\forall t\in[0,t^*].\tag{B2.25c}
$$

Παίρνοντας το $L^2(\Omega)$–εσωτερικό γινόμενο της (B2.25a) με την ϑ_h και χρησιμοποιώντας την (B1.1e), έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\vartheta_h(t)\|^2=&(L_h(t)\vartheta_h(t),\vartheta_h(t))+(r_h(t),\vartheta_h(t))\\
=&-(\Gamma(\cdot,t)\nabla\vartheta_h(t),\nabla\vartheta_h(t))-(\beta(\cdot,t)\nabla\vartheta_h(t),\vartheta_h(t))\\
&-(\gamma_0(\cdot,t)\vartheta_h(t),\vartheta_h(t))+(r_h(t),\vartheta_h(t))\\
=&-\int_\Omega\sum_{i,m=1}^d\gamma_{im}(x,t)\partial_{x_m}\vartheta_h(t)\partial_{x_i}\vartheta_h(t)dx-\sum_{\ell=1}^d(\beta_\ell(\cdot,t)\partial_{x_\ell}\vartheta_h(t),\vartheta_h(t))\\
&-(\gamma_0(\cdot,t)\vartheta_h(t),\vartheta_h(t))+(r_h(t),\vartheta_h(t))\\
\le&-C_\Gamma\|\nabla\vartheta_h(t)\|^2+\|\vartheta_h(t)\|\sum_{\ell=1}^d\Big\{\sup\nolimits_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|\Big\}\|\partial_{x_\ell}\vartheta_h(t)\|\\
&+\Big(\|\gamma_0\|_\infty\|\vartheta_h(t)\|+\|r_h(t)\|\Big)\|\vartheta_h(t)\|\\
\le&-C_\Gamma\|\nabla\vartheta_h(t)\|^2+\|\beta\|_\infty\|\nabla\vartheta_h(t)\|\|\vartheta_h(t)\|\\
&+\Big(\|\gamma_0\|_\infty\|\vartheta_h(t)\|+\|r_h(t)\|\Big)\|\vartheta_h(t)\|\\
\le&\|\nabla\vartheta_h(t)\|^2\Big(-C_\Gamma+\varepsilon\frac{\|\beta\|_\infty}{2}\Big)+\|\vartheta_h(t)\|^2\Big(\|\gamma_0\|_\infty+\frac{\|\beta\|_\infty}{2\varepsilon}\Big)\\
&+\|r_h(t)\|\|\vartheta_h(t)\|,\quad\forall\varepsilon>0,\quad\forall t\in[0,t^*],
\end{aligned}
$$

όπου $\|\beta\|_\infty=\Big(\sum_{\ell=1}^d\big(\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|\big)^2\Big)^{\frac12}$ και $\|\gamma_0\|_\infty=\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\gamma_0|$. Παίρνοντας $\varepsilon=\dfrac{2C_\Gamma}{1+\|\beta\|_\infty}$, έχουμε στη συνέχεια ότι

$$
\frac{d}{dt}\|\vartheta_h(t)\|^2\le\Big[C_A\|\vartheta_h(t)\|+\|r_h(t)\|\Big]\|\vartheta_h(t)\|,\quad\forall t\in[0,t^*].
$$

Από την Πρόταση A3.2 έπεται ότι

$$\|\vartheta_h(t)\| \leq \Big[\|\vartheta_h(0)\| + \int_0^t \|r_h(\tau)\| d\tau\Big] + C_A \int_0^t \|\vartheta_h(\tau)\| d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{B2.26}$$

Χρησιμοποιώντας τις (B2.25b), (B2.25c), (IV) και (B2.17) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\vartheta_h(0)\| + \int_0^t \|r_h(\tau)\| d\tau \leq & \|v_h^0 - v^0\| + C \int_0^t \big[\|\eta(\tau)\| + \|\partial_t \eta(\tau)\|\big] d\tau \\ \leq & C_D h^r g(t), \quad \forall t \in [0, t^*], \end{aligned} \tag{B2.27}$$

όπου $g(t) = \|v^0\|_r + \int\limits_0^t [\|u(\tau)\|_r + \|\partial_t u(\tau)\|_r] d\tau$. Επομένως, οι (B2.26) και (B2.27) δίνουν

$$\|\vartheta_h(t)\| \leq C_D h^r g(t) + C_A \int_0^t \|\vartheta_h(\tau)\| d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{B2.28}$$

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα A3.1 στην (B2.28), προκύπτει ότι

$$\sup_{t \in [0,t^*]} \|\vartheta_h(t)\| \leq C_D h^r \sup_{t \in [0,t^*]} \Big[\exp(C_A t) g(t)\Big] \leq C h^r g(t^*). \tag{B2.29}$$

Τελικά, από τις (B2.29) και (B2.17), έχουμε

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,t^*]} \|u(t) - u_h(t)\| \leq & \sup_{t \in [0,t^*]} \|\vartheta_h(t)\| + \sup_{t \in [0,t^*]} \|\eta(t)\| \\ \leq & C h^r \Big[g(t^*) + \sup_{t \in [0,t^*]} \|u(t)\|_r\Big] \\ = & C h^r \Big[g(t^*) + \sup_{t \in [0,t^*]} \|v^0 + \int_0^t \partial_t u(\tau) d\tau\|_r\Big] \\ \leq & C h^r \Big[g(t^*) + \sup_{t \in [0,t^*]} \big(\|v^0\|_r + \int_0^t \|\partial_t u(\tau)\|_r d\tau\big)\Big] \\ \leq & C h^r g(t^*). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Παρατήρηση B2.6. Η (IV) ικανοποιείται επιλέγοντας $v_h^0 = P_h v^0$, λόγω της (H_1). Μιά άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι $v_h^0 = R_h(t) v^0$ (για κάποιο $t \in [0, t^*]$) λόγω της (B2.17). □

Παρατήρηση B2.7. Η αντίστροφη ανισότητα (H_2) δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά σ' αυτή την παράγραφο (ούτε στην απόδειξη των προσεγγιστικών ιδιοτήτων της προβολής R_h, ούτε στην ανάλυση του ημιδιακριτού προβλήματος). Αντίθετα παίζει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια κατά την ανάλυση των μεθόδων Runge–Kutta. □

§B3. Πλήρως διακριτές προσεγγίσεις–Ευστάθεια.

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Μιά μέθοδος Runge–Kutta q σταδίων περιγράφεται πλήρως από τα στοιχεία ενός πίνακα $A = (a_{js})_{j,s=1}^{q} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ και από τα διανύσματα $\boldsymbol{b} := (b_1, \dots, b_q)^T$, $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \dots, \tau_q)^T$. Ακόμα, έστω $T := \mathrm{diag}(\tau_1, \dots, \tau_q)$, $\boldsymbol{e} := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^q$ και $M = (m_{js})_{j,s=1}^{q} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, όπου $m_{js} := a_{js}b_j + a_{sj}b_s - b_j b_s$. Σ' αυτό το κεφάλαιο ενδιαφερόμαστε για μεθόδους Runge–Kutta οι οποίες ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες ευστάθειας και συνέπειας, που περιγράφονται πιό κάτω.

Κατ' αρχήν απαιτούμε να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες *συνέπειας*:

$$(B) \qquad \boldsymbol{b}^T T^\ell \boldsymbol{e} = \frac{1}{(\ell+1)}, \quad \ell = 0, \dots, \nu - 1,$$

$$(C) \qquad A T^\ell \boldsymbol{e} = \frac{1}{(\ell+1)} T^{\ell+1}\boldsymbol{e}, \quad \ell = 0, \dots, p - 1,$$

$$(D) \qquad \boldsymbol{b}^T T^\ell A = \frac{1}{(\ell+1)} \boldsymbol{b}^T (I - T^{\ell+1}), \quad \ell = 0, \dots, \rho - 1,$$

για μη αρνητικούς ακεραίους p, ρ και $\nu \geq 1$, τέτοιους ώστε

$$\text{(B3.1)} \qquad \nu \leq p + \rho + 1,$$

όπου p είναι η *τάξη σταδίου* και ν είναι η *κλασική τάξη* της μεθόδου Runge–Kutta (βλ. §A4). Απαιτούμε ακόμα να είναι *αλγεβρικά ευσταθής* (βλ. §A4), δηλ.

(S) *ο πίνακας M είναι θετικά ημιορισμένος και $b_j \geq 0$, $\; j = 1, \dots, q$.*

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $k := \frac{t^*}{N}$, $t^n := nk$ για $n = 0, \dots, N$, και $t^{n,j} := t^n + \tau_j k$, για $j = 1, \dots, q$ και $n = 0, \dots, N-1$. Για δοθέν $h \in (0, h_\alpha)$, οι προσεγγίσεις Runge–Kutta $\{u_h^n\}_{n=0}^N \subset S_h$ των $\{u(t^n)\}_{n=0}^N$ (όπου u είναι η λύση του (B1.1)) κατασκευάζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο στο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης το οποίο προκύπτει από το αντίστοιχο ημιδιακριτό πρόβλημα (βλ. (B2.23)), μιά διαδικασία που περιγράφεται στη συνέχεια.

Πρώτα ορίζουμε

$$\text{(B3.2a)} \qquad u_h^0 := v_h^0.$$

Τότε για $n = 0, \dots, N-1$, προσδιορίζουμε τα *ενδιάμεσα στάδια* $\{u_h^{n,j}\}_{j=1}^q \subset S_h$, έτσι ώστε να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\text{(B3.2b)} \qquad u_h^{n,j} = u_h^n + k \sum_{s=1}^{q} a_{js} (L_h(t^{n,s}) u_h^{n,s} + F_h(t^{n,s})), \quad j = 1, \dots, q,$$

και υπολογίζουμε την $u_h^{n+1} \in S_h$, χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο

$$u_h^{n+1} = u_h^n + k \sum_{j=1}^{q} b_j (L_h(t^{n,j}) u_h^{n,j} + F_h(t^{n,j})). \tag{B3.2c}$$

Για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη και η μοναδικότητα των παραπάνω προσεγγίσεων, υποθέτουμε ότι η μέθοδος Runge–Kutta έχει την ιδιότητα *θετικότητας*:

(P) *ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας D με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε ο $\tilde{C} := DA^{-1}D^{-1}$ να είναι θετικά ορισμένος.*

Στη συνέχεια θα γράφουμε $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_q)$, $\tilde{C} = (\tilde{c}_{js})_{j,s=1}^q$, και θα συμβολίζουμε τον αντίστροφο του A ως εξής: $A^{-1} = (a_{js}^{-1})_{j,s=1}^q$.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι Runge–Kutta οι οποίες ικανοποιούν όλες τις συνθήκες που περιγράψαμε πιό πάνω, όπως: η *q–σταδίων Gauss–Legendre* ($\nu = 2q$, $p = \rho = q$), η *Radau* IIA ($\nu = 2q - 1$, $p = q$, $\rho = q - 1$) και η *2–σταδίων βέλτιστης τάξης DIRK* ($\nu = 3$, $p = \rho = 1$) (βλ., π.χ., στο βιβλίο [DekV] για περισσότερες λεπτομέρειες και επί πλέον αναφορές).

Η μέθοδος Crank–Nicolson: $u_h^{n+1} - u_h^n = \frac{k}{2} L_h(t^{n+\frac{1}{2}})(u_h^{n+1} + u_h^n) + kF_h(t^{n+\frac{1}{2}})$, γνωστή ως *πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου*, με παραμέτρους $q = 1$, $a_{11} = \frac{1}{2}$, $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$, είναι η 1–*σταδίου* Gauss–Legendre με τάξη $\nu = 2$. Η *πεπλεγμένη μέθοδος* Euler: $u_h^{n+1} - u_h^n = kL_h(t^{n+1})u_h^{n+1} + kF_h(t^{n+1})$ έχει παραμέτρους $q = 1$, $a_{11} = \tau_1 = b_1 = 1$. Επί πλέον $\nu = 1$, $p = 1$ και ικανοποιεί τις (B), (C), (D) και (B3.1) με $\rho = 0$. Ενώ οι (P) και (S) ισχύουν τετριμμένα.

Η ανάλυση που ακολουθεί καλύπτει και την 3–*σταδίων βέλτιστης τάξης DIRK* ($\nu = 4$, $p = 1$), καλούμενη στη συνέχεια εν συντομία 3–DIRK, (βλ. σελ. 76, 121 στο [DekV]), η οποία ικανοποιεί, εκτός των (S) και (P), τις (B), (C) και (D) για $\rho = 1$, ενώ η (B3.1) δεν ισχύει.

Παρατήρηση B3.1. Πιό πάνω ορίσαμε $t^{n,j} = t^n + \tau_j k$ για κάθε $j \in \{1, \dots, q\}$ και $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Όταν $\tau_j \in [0,1]$, έπεται ότι $t^{n,j} \in [t^n, t^{n+1}]$. Τίποτε δεν φαίνεται να αποκλείει την περίπτωση να έχουμε $\tau_{\max} := \max_{1 \le j \le q} \tau_j > 1$ ή ακόμα $\tau_{\min} := \min_{1 \le j \le q} \tau_j < 0$. Ήδη στην 3–DIRK ισχύει $\tau_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\frac{\pi}{18}) > 1$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις δημιουργείται πρόβλημα στην υλοποίηση της μεθόδου στα πρώτα βήματα όταν $\tau_{\min} < 0$ και στα τελευταία όταν $\tau_{\max} > 1$, επειδή τότε $t^{n,j_0} \notin [0, t^*]$ για κάποιο $j_0 \in \{1, \dots, q\}$. Γι' αυτό πρέπει να γίνουν κάποιοι συμβιβασμοί. Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $\tau_{\min} \ge 0$ και $\tau_{\max} > 1$. Αυτό σημαίνει ότι $\tau_{\max} = \ell_0 + \tau_\alpha$, για κάποια $\ell_0 \in \mathbb{N}$ και $\tau_\alpha \in [0, 1)$. Υπάρχουν δύο επιλογές. Η πρώτη είναι να επεκτείνουμε ομαλά τους όρους της διαφορικής εξίσωσης (τους συντελεστές και τον μη ομογενή όρο) στο $[t^*, t^* + \epsilon^*]$ για κάποιο $\epsilon^* > 0$, έτσι ώστε να μην μεταβάλονται οι ιδιότητες που περιγράψαμε στην §B1 (κάτι που γίνεται τετριμμένα όταν δεν εξαρτώνται από το χρόνο). Στην ανάλυση σφάλματος, χρειαζόμαστε η λύση του προβλήματος στο $[0, t^*+\epsilon^*]$ να είναι ομαλή επέκταση της λύσης στο $[0, t^*]$. Τότε, παίρνοντας $N > \frac{t^*(\tau_{\max}-1)}{\epsilon^*}$, έχουμε $t^{n,j} \in [0, t^*+\epsilon^*]$. Η δεύτερη επιλογή είναι να περιοριστούμε στα βήματα όπου η μέθοδος υλοποιείται χωρίς πρόβλημα. Συγκεκριμένα έχουμε $t^n + \tau_{\min}k \leq t^{n,j} \leq t^n + \tau_{\max}k = t^n + \ell_0 k + \tau_\alpha k = t^{n+\ell_0} + \tau_\alpha k$, επομένως $t^{n,j} \in [t^n, t^{n+\ell_0+1}]$. Έτσι όταν $n = 0, \ldots, N - \ell_0 - 1$, ισχύει ότι $t^{n,j} \in [0, t^*]$. Τότε στην ανάλυση της μέθοδου αντί N θέτουμε $N - \ell_0$. Στην πράξη, όταν δεν μπορούμε να έχουμε επεκτασιμότητα των δεδομένων, και μας ενδιαφέρουν προσεγγίσεις της λύσης μέχρι το t^*, μπορούμε είτε να κάνουμε προέκταση (extrapolation) χρησιμοποιώντας τις ήδη υπολογισθείσες προσεγγίσεις, είτε να εκτελέσουμε τα υπόλοιπα βήματα με μια άλλη μέθοδο Runge–Kutta. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου $\tau_{\max} \leq 1$ και $\tau_{\min} = -\ell_0 + \tau_\alpha < 0$, με $\ell_0 \in \mathbb{N}$ και $\tau_\alpha \in [0, 1)$. Είναι προφανές ότι $t^{n,j} \in [t^{n-\ell_0}, t^{n+1}]$, και επομένως το πρόβλημα εμφανίζεται όταν $n = 0, \ldots, \ell_0 - 1$. Η φύση του προβλήματος (B1.1) δεν επιτρέπει επέκταση για αρνητικά t. Μπορούμε, λοιπόν, να υλοποιήσουμε τα πρώτα ℓ_0 βήματα με άλλη μέθοδο Runge–Kutta. Η περίπτωση όπου $\tau_{\max} > 1$ και $\tau_{\min} < 0$ ανάγεται εύκολα στις δύο προηγούμενες.

Στις περιπτώσεις, όπου γίνεται χρήση δύο μεθόδων, η ανάλυση μπορεί να γίνει εύκολα για κάθε μέθοδο χωριστά και έπειτα να γίνει συνδυασμός των επιμέρους αποτελεσμάτων ώστε να καταλήξουμε σ' ένα συμπέρασμα για τη σύγκλιση (βλ. Παρατήρηση B5.1). Στη συνέχεια θα γράφουμε $t^*_\epsilon := t^* + \epsilon^*$ όπου $\epsilon^* \geq 0$, αντί t^*, έχοντας υπ' όψιν την περίπτωση στην οποία θεωρούμε επέκταση των δεδομένων και της λύσης μέχρι το $t^* + \epsilon^*$. □

Στα λήμματα που ακολουθούν συζητούμε ιδιότητες L^2–ευστάθειας αυτών των μεθόδων.

Λήμμα B3.1. *Υπάρχουν σταθερές* C_1, C_2 *και* $k_0 > 0$ *τέτοιες ώστε, για οποιαδήποτε* $h \in (0, h_\alpha)$, $k \in (0, k_0]$, $\{\tau^s\}_{s=1}^q \subset [0, t^*_\epsilon]$, *και για οποιεσδήποτε συναρτήσεις* $\{Y_j\}_{j=1}^q$, $\{\Phi_j\}_{j=1}^q$, Y, Φ *του* S_h *που ικανοποιούν τις σχέσεις*

(B3.3a) $$\Phi_j = Y_j + k\sum_{s=1}^q a_{js} L_h(\tau^s)\Phi_s, \quad j = 1, \ldots, q,$$

(B3.3b) $$\Phi = Y + k\sum_{j=1}^q b_j L_h(\tau^j)\Phi_j,$$

να ισχύει ότι

(B3.4a) $$\sum_{j=1}^q \|\Phi_j\| \leq C_1 \sum_{j=1}^q \|Y_j\|$$

και

(B3.4b) $$\|\Phi\| \leq \|Y\| + C_2 \sum_{j=1}^q \|Y_j\|.$$

Απόδειξη. Έστω $\overrightarrow{\Phi} := (\Phi_1, \dots, \Phi_q)^T \in (S_h)^q$, $\overrightarrow{Y} := (Y_1, \dots, Y_q)^T \in (S_h)^q$ και $\overrightarrow{\Lambda} := (L_h(\tau^1)\Phi_1, \dots, L_h(\tau^q)\Phi_q)^T \in (S_h)^q$. Τότε η (B3.4), γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$\overrightarrow{\Phi} = \overrightarrow{Y} + kA\overrightarrow{\Lambda}, \tag{B3.5a}$$

$$\Phi = Y + k\boldsymbol{b}^T\overrightarrow{\Lambda}. \tag{B3.5b}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (B3.5a) με DA^{-1}, οπότε (λόγω της (P)) έχουμε

$$\tilde{C}D\overrightarrow{\Phi} = DA^{-1}\overrightarrow{Y} + kD\overrightarrow{\Lambda},$$

που σημαίνει ότι

$$\sum_{s=1}^{q} \tilde{c}_{js} d_s \Phi_s = k d_j L_h(\tau^j)\Phi_j + d_j \sum_{s=1}^{q} a_{js}^{-1} Y_s, \quad j = 1, \dots, q. \tag{B3.6}$$

Τώρα παίρνουμε το L^2–εσωτερικό γινόμενο της (B3.6) με την $d_j\Phi_j$ και αθροίζουμε ως προς j. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\sum_{j,s=1}^{q} \tilde{c}_{js}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j) = k\sum_{j=1}^{q}(d_j)^2(L_h(\tau^j)\Phi_j, \Phi_j) + \sum_{j,s=1}^{q} a_{js}^{-1}(d_j)^2(Y_s, \Phi_j). \tag{B3.7a}$$

Επειδή ο πίνακας $\tilde{C}$ είναι θετικά ορισμένος, υπάρχει σταθερά $C_{\tilde{C}} > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j,s=1}^{q} x_s \tilde{c}_{js} x_j \geq C_{\tilde{C}} \sum_{j=1}^{q} (x_j)^2, \quad \forall (x_1, \dots, x_q)^T \in \mathbb{R}^q.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{j,s=1}^{q} \tilde{c}_{js}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j) &= \int_\Omega \sum_{j,s=1}^{q} \tilde{c}_{js}(d_s\Phi_s)(d_j\Phi_j)dx \\ &\geq C_{\tilde{C}} \sum_{j=1}^{q} \int_\Omega (d_j\Phi_j)^2 dx \geq C_{M_1}\Big(\sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|\Big)^2, \end{aligned} \tag{B3.7b}$$

όπου $C_{M_1} = \frac{C_{\tilde{C}}}{q} \min\limits_{1 \leq j \leq q} (d_j)^2$. Θέτοντας

$$\|\beta\|_\infty := \Big\{\sum_{\ell=1}^{d} \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\beta_\ell|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|\gamma_0\|_\infty := \sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} |\gamma_0|,$$

και χρησιμοποιώντας τις (B2.1a) και (B1.1e), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(L_h(\tau^j)\Phi_j,\Phi_j) =& -(\Gamma(\cdot,\tau^j)\nabla\Phi_j,\nabla\Phi_j)-(\beta(\cdot,\tau^j)\nabla\Phi_j,\Phi_j)-(\gamma_0(\cdot,\tau^j)\Phi_j,\Phi_j)\\
=& -\int_\Omega\sum_{i,m=1}^d\gamma_{im}(x,\tau^j)\partial_{x_m}\Phi_j\partial_{x_i}\Phi_j dx\\
&-\sum_{\ell=1}^d(\beta_\ell(\cdot,\tau^j)\partial_{x_\ell}\Phi_j,\Phi_j)-(\gamma_0(\cdot,\tau^j)\Phi_j,\Phi_j)\\
\le& -C_\Gamma\|\nabla\Phi_j\|^2+\|\Phi_j\|\sum_{\ell=1}^d\|\beta_\ell(\cdot,\tau^j)\partial_{x_\ell}\Phi_j\|+\|\gamma_0\|_\infty\|\Phi_j\|^2\\
\le& -C_\Gamma\|\nabla\Phi_j\|^2+\|\Phi_j\|\sum_{\ell=1}^d\Big\{\sup_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\beta_\ell|\Big\}\|\partial_{x_\ell}\Phi_j\|+\|\gamma_0\|_\infty\|\Phi_j\|^2\\
\le& -C_\Gamma\|\nabla\Phi_j\|^2+\|\beta\|_\infty\|\nabla\Phi_j\|\|\Phi_j\|+\|\gamma_0\|_\infty\|\Phi_j\|^2\\
\le&\|\nabla\Phi_j\|^2\big(-C_\Gamma+\varepsilon\big)+\|\Phi_j\|^2\Big(\|\gamma_0\|_\infty+\frac{\|\beta\|_\infty^2}{4\varepsilon}\Big),
\end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon>0$ και $j=1,\dots,q$. Στη συνέχεια, επιλέγοντας $\varepsilon=C_\Gamma$, η πιό πάνω σχέση δίνει

$$\text{(B3.7c)}\qquad (L_h(\tau^j)\Phi_j,\Phi_j)\le\|\Phi_j\|^2\Big(\|\gamma_0\|_\infty+\frac{\|\beta\|_\infty^2}{4C_\Gamma}\Big),\quad j=1,\dots,q.$$

Επομένως,

$$\text{(B3.7d)}\qquad \sum_{j=1}^q(d_j)^2(L_h(\tau^j)\Phi_j,\Phi_j)\le C_{M_2}\Big(\sum_{j=1}^q\|\Phi_j\|\Big)^2,$$

όπου $C_{M_2}=\max\limits_{1\le j\le q}(d_j)^2\Big(\|\gamma_0\|_\infty+\frac{\|\beta\|_\infty^2}{4C_\Gamma}\Big)$. Έχουμε, ακόμα, την εκτίμηση

$$\text{(B3.7e)}\qquad \sum_{j,s=1}^q a_{js}^{-1}(d_j)^2(Y_s,\Phi_j)\le C_{M_3}\Big(\sum_{j=1}^q\|\Phi_j\|\Big)\Big(\sum_{s=1}^q\|Y_s\|\Big),$$

όπου $C_{M_3}:=\max\limits_{1\le j,s\le q}\big((d_j)^2|a_{js}^{-1}|\big)$. Από την (B3.7) έπεται ότι

$$\text{(B3.8)}\qquad (1-k\frac{C_{M_2}}{C_{M_1}})\sum_{j=1}^q\|\Phi_j\|\le\frac{C_{M_3}}{C_{M_1}}\sum_{s=1}^q\|Y_s\|.$$

Έστω $k_0=\frac{C_{M_1}}{2C_{M_2}}$ και $k\in(0,k_0]$. (Όταν $C_{M_2}=0$ παίρνουμε $k_0=t^*$, δηλαδή δεν προκύπτει περιορισμός για το k). Τότε η (B3.4a) έπεται από την (B3.8), για $C_1=2\frac{C_{M_3}}{C_{M_1}}$.

Από την (B3.5a) συμπεραίνουμε ότι

$$k\vec{\Lambda} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \vec{Y}). \tag{B3.9}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την (B3.9) στην (B3.5b), έχουμε

$$\Phi = Y + \boldsymbol{b}^T A^{-1}(\vec{\Phi} - \vec{Y}),$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi = Y + \sum_{j,s=1}^{q} b_j a_{js}^{-1}(\Phi_s - Y_s). \tag{B3.10}$$

Η (B3.10) και η (B3.4a) (τις οποίες μόλις αποδείξαμε) δίνουν εύκολα την (B3.4b). ∎

Πόρισμα B3.1. *Για κάθε $k \in (0, k_0]$ και $h \in (0, h_\alpha)$, η αριθμητική μέθοδος* (B3.2) *είναι καλά ορισμένη.*

Απόδειξη. Έστω $\{\tau^s\}_{s=1}^q \subset [0, t_\epsilon^*]$ και $\mathsf{T}_h : (S_h)^q \longrightarrow (S_h)^q$ ένας γραμμικός τελεστής οριζόμενος ως εξής

$$\mathsf{T}_h(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)^T = (\Phi_1, \ldots, \Phi_q)^T - kA(L_h(\tau^1)\Phi_1, \ldots, L_h(\tau^q)\Phi_q)^T,$$

για κάθε $(\Phi_1, \ldots, \Phi_q)^T \in (S_h)^q$. Για το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι ο T_h αντιστρέφεται.

Έστω $\Phi^* = (\Phi_1^*, \ldots, \Phi_q^*)^T \in (S_h)^q$ τέτοιο ώστε $\mathsf{T}_h\,\Phi^* = 0$. Τότε οι συναρτήσεις $\{\Phi_j^*\}_{j=1}^q$ ικανοποιούν την (B3.3a) όπου: $\Phi_j = \Phi_j^*$ και $Y_j = 0$ για $j = 1, \ldots, q$. Επειδή $k \in (0, k_0]$, η (B3.3a) δίνει $\sum_{j=1}^q \|\Phi_j^*\| \le 0$. Άρα $\Phi^* = 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι ο T_h είναι ένα προς ένα. Επομένως υπάρχει ο $\mathsf{T}_h^{-1} : \mathrm{range}(\mathsf{T}_h) \longrightarrow (S_h)^q$. Επειδή ο $(S_h)^q$ είναι πεπερασμένης διάστασης, έπεται ότι $\dim(\mathrm{range}(\mathsf{T}_h)) = \dim(\mathrm{domain}(\mathsf{T}_h)) = \dim((S_h)^q)$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathrm{range}(\mathsf{T}_h) = (S_h)^q$ και έτσι προκύπτει ότι ο T_h είναι αντιστρέψιμος. ∎

Παρουσιάζουμε, στη συνέχεια, το κύριο αποτέλεσμα ευστάθειας για τη μέθοδο Runge–Kutta.

Λήμμα B3.2. *Υπάρχει σταθερά C_3 τέτοια ώστε, για οποιαδήποτε $h \in (0, h_\alpha)$, $k \in (0, k_0]$, $\{\tau^s\}_{s=1}^q \subset [0, t_\epsilon^*]$ και για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $\{\Phi_j\}_{j=1}^q$, Φ, Y του S_h οι οποίες ικανοποιούν, για $Y_j = Y$, $j = 1, \ldots, q$, την* (B3.3)*, να ισχύει ότι*

$$\|\Phi\| \le (1 + C_3 k)\|Y\|. \tag{B3.11}$$

Απόδειξη. Από την (B3.3b) έχουμε

$$\|\Phi\|^2 = \|Y\|^2 + k^2 \sum_{j,s=1}^{q} b_j b_s (L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j) + 2k \sum_{j=1}^{q} b_j (Y, L_h(\tau^j)\Phi_j). \tag{B3.12a}$$

Από την (B3.3a) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} b_j(Y, L_h(\tau^j)\Phi_j) &= \sum_{j=1}^{q} b_j(\Phi_j, L_h(\tau^j)\Phi_j) \\
&\qquad - k\sum_{j,s=1}^{q} b_j a_{js}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j) \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_j(\Phi_j, L_h(\tau^j)\Phi_j) - \frac{k}{2}\sum_{j,s=1}^{q}(b_j a_{js} + b_s a_{sj})(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j).
\end{aligned}
\tag{B3.12b}
$$

Αντικαθιστώντας την (B3.12b) στην (B3.12a), έπεται ότι

$$
\|\Phi\|^2 = \|Y\|^2 + 2k\sum_{j=1}^{q} b_j(\Phi_j, L_h(\tau^j)\Phi_j) - k^2\sum_{j,s=1}^{q} m_{sj}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j).
\tag{B3.13}
$$

Τότε χρησιμοποιώντας την (S), την (B3.7c) και την (B3.4), η (B3.13) δίνει

$$
\begin{aligned}
\|\Phi\|^2 \leq& \|Y\|^2 + kC_M\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|^2 \\
\leq& \|Y\|^2 + kC_M\big(qC_1\|Y\|\big)^2 \leq \|Y\|^2\big(1 + 2C_3k\big),
\end{aligned}
\tag{B3.14}
$$

όπου $C_M = 2\big\{\max\limits_{1\leq j\leq q} b_j\big\}\Big(\|\gamma_0\|_\infty + \frac{\|\beta\|_\infty^2}{4C_\Gamma}\Big)$ και $C_3 = \frac{1}{2}C_M(qC_1)^2$. Η (B3.14) οδηγεί τετριμμένα στην (B3.11). ■

§B4. Συνέπεια.

Ορίζουμε, επαγωγικά, συναρτήσεις $\alpha_{j\ell}$, ως εξής:

$$
\begin{cases}
\alpha_{j0} := u, \quad j = 1, \ldots, q, \\
\alpha_{j,\ell+1} := \displaystyle\sum_{s=1}^{q} a_{js}\Big\{\sum_{m=0}^{\ell}\frac{(\tau_s)^m}{m!}\Big[\nabla\cdot(\partial_t^m\Gamma\nabla\alpha_{s,\ell-m}) \\
\qquad\qquad - \partial_t^m\beta\nabla\alpha_{s,\ell-m} - \partial_t^m\gamma_0\alpha_{s,\ell-m}\Big] + \dfrac{(\tau_s)^\ell}{\ell!}\partial_t^\ell f\Big\}, \\
\qquad\qquad j = 1, \ldots, q, \quad \ell = 0, \ldots, \nu - 1.
\end{cases}
\tag{B4.1}
$$

Θέτοντας $\boldsymbol{\alpha}_\ell := (\alpha_{1\ell}, \ldots, \alpha_{q\ell})^T$ για $\ell = 0, \ldots, \nu$, η (B4.1) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\alpha}_0 := u\boldsymbol{e}, \\
\boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} := A\Big[\displaystyle\sum_{m=0}^{\ell}\frac{T^m}{m!}\partial_t^m L\boldsymbol{\alpha}_{\ell-m} + \frac{T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell f\Big], \quad \ell = 0, \ldots, \nu - 1,
\end{cases}
\tag{B4.2}
$$

όπου $\partial_t^m L$ —για κάποιο $m \in \mathbb{N}_0$— συμβολίζει τον τελεστή ο οποίος προκύπτει από τον L, παραγωγίζοντας τους συντελεστές του m φορές ως πρός t.

Λήμμα B4.1. *Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η σχέση* (C). *Τότε έχουμε:*

$$\boldsymbol{\alpha}_\ell = \frac{T^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell u, \quad \ell = 0,\dots,\min\{p,\nu\}, \tag{B4.3}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{p+1} = \frac{AT^p \boldsymbol{e}}{p!}\partial_t^{p+1} u, \quad \textit{όταν} \;\; p+1 \le \nu, \tag{B4.4}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} = \frac{AT^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^{\ell+1} u + \sum_{m=p+1}^{\ell} \frac{AT^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m} L\Big(\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{T^m\boldsymbol{e}}{m!}\partial_t^m u\Big), \quad \ell = p+1,\dots,\nu-1, \;\; \textit{όταν} \;\; p+2\le\nu. \tag{B4.5}$$

Απόδειξη. Η (B4.3) θα αποδειχθεί επαγωγικά. Έστω $\ell = 0$. Τότε, η (B4.3) ισχύει λόγω της (B4.2). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $0 \le \ell \le \min\{p,\nu\} - 1$ και ότι η (B4.3) ισχύει για $0,\dots,\ell$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής και την (C), η (B4.2) δίνει:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} = \frac{AT^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\left[\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell}{m}\partial_t^m L\partial_t^{\ell-m}u + \partial_t^\ell f\right] = \frac{AT^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell(Lu+f) = \frac{T^{\ell+1}\boldsymbol{e}}{(\ell+1)!}\partial_t^{\ell+1}u,$$

δηλ. η (B4.3) ισχύει για $\ell+1$. Έστω ότι $p+1\le\nu$. Τότε η (B4.4) προκύπτει από τις (B4.3) και (B4.2), δουλεύοντας όπως παραπάνω (με τη διαφορά ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (C) για $\ell = p$).

Όταν $p+2\le\nu$, για δοθέν $\ell\in\mathbb{N}$ με $p+1\le\ell\le\nu-1$, βασιζόμενοι στις (B4.2) και (B4.3), έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} =& A\left[\sum_{m=0}^{\ell}\frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\boldsymbol{\alpha}_m + \frac{T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell f\right]\\
=& A\left[\sum_{m=0}^{p}\frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\boldsymbol{\alpha}_m + \sum_{m=p+1}^{\ell}\frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\boldsymbol{\alpha}_m + \frac{T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell f\right]\\
=& A\left[\sum_{m=0}^{p}\frac{T^{\ell}\boldsymbol{e}}{(\ell-m)!m!}\partial_t^{\ell-m}L\partial_t^m u + \sum_{m=p+1}^{\ell}\frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\boldsymbol{\alpha}_m + \frac{T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell f\right]\\
=& A\left[\sum_{m=0}^{\ell}\frac{T^{\ell}\boldsymbol{e}}{(\ell-m)!m!}\partial_t^{\ell-m}L\partial_t^m u - \sum_{m=p+1}^{\ell}\frac{T^{\ell}\boldsymbol{e}}{(\ell-m)!m!}\partial_t^{\ell-m}L\partial_t^m u\right.\\
&\left.+ \sum_{m=p+1}^{\ell}\frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\boldsymbol{\alpha}_m + \frac{T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell f\right]\\
=& A\left[\sum_{m=0}^{\ell}\frac{T^{\ell}\boldsymbol{e}}{m!(\ell-m)!}\partial_t^{m}L\partial_t^{\ell-m} u + \frac{T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell f\right.
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=p+1}^{\ell} \frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!} \partial_t^{\ell-m} L\big(\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{T^m \boldsymbol{e}}{m!}\partial_t^m u\big)\Bigg]$$

$$= \frac{AT^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!}\left[\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell}{m}\partial_t^m L \partial_t^{\ell-m} u + \partial_t^\ell f\right] + A \sum_{m=p+1}^{\ell} \frac{T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m} L\big(\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{T^m \boldsymbol{e}}{m!}\partial_t^m u\big)$$

$$= \frac{AT^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^{\ell+1} u + \sum_{m=p+1}^{\ell} \frac{AT^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m} L\big(\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{T^m \boldsymbol{e}}{m!}\partial_t^m u\big). \quad \blacksquare$$

Λήμμα B4.2. *Υποθέτουμε ότι οι σχέσεις* (B), (C), (D) *και* (B3.1) *ισχύουν. Τότε:*

$$\boldsymbol{b}^T T^s \boldsymbol{\alpha}_\ell = \frac{1}{\ell!(\ell+s+1)}\partial_t^\ell u, \quad s = 0, \dots, \nu - \ell - 1, \tag{B4.6}$$

για $\ell = 0, \dots, \nu - 1$.

Απόδειξη. Έστω ότι $0 \le \ell \le \min\{p, \nu-1\}$ και $0 \le s \le \nu - \ell - 1$. Από τις (B4.3) και (B) έχουμε:

$$\boldsymbol{b}^T T^s \boldsymbol{\alpha}_\ell = \frac{\boldsymbol{b}^T T^{s+\ell}\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^\ell u = \frac{1}{\ell!(s+\ell+1)}\partial_t^\ell u.$$

Έτσι δείξαμε ότι η (B4.6) ισχύει όταν $\nu \le p+1$. Ακόμα ισχύει για $\ell = 0, \dots, p$ όταν $\nu \ge p+2$.

Έστω τώρα ότι $p+2 \le \nu$. Παίρνουμε $\ell = p+1$ και $0 \le s \le \nu - \ell - 1 = \nu - p - 2$. Τότε, από την (B3.1) έχουμε $0 \le s \le \rho - 1$, οπότε χρησιμοποιώντας τις (B4.4), (D) και (B) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}^T T^s \boldsymbol{\alpha}_{p+1} &= \frac{1}{p!}(\boldsymbol{b}^T T^s A) T^p \boldsymbol{e} \partial_t^{p+1} u = \frac{1}{p!(s+1)}\boldsymbol{b}^T (I - T^{s+1}) T^p \boldsymbol{e} \partial_t^{p+1} u \\
&= \frac{1}{p!(s+1)}(\boldsymbol{b}^T T^p \boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}^T T^{s+p+1}\boldsymbol{e})\partial_t^{p+1} u \\
&= \frac{1}{p!(s+1)}\left[\frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(s+p+2)}\right]\partial_t^{p+1} u = \frac{1}{(p+1)!(s+p+2)}\partial_t^{p+1} u.
\end{aligned}$$

Έστω $p+3 \le \nu$. Συμπληρώνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας ένα επαγωγικό επιχείρημα. Υποθέτουμε ότι η (B4.6) ισχύει για $0, \dots, \ell$, όπου $p+1 \le \ell \le \nu - 2$. Έστω $s \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 \le s \le \nu - \ell - 2$. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες και την (B3.1) έπεται ότι $0 \le s \le \nu - \ell - 2 \le (p+\rho+1) - \ell - 2 = (p - \ell) + \rho - 1 \le \rho - 2$, δηλ.

$$0 \le s \le \rho - 2. \tag{B4.7}$$

Από την (B4.5) έχουμε

$$\boldsymbol{b}^T T^s \boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} = \frac{\boldsymbol{b}^T T^s A T^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^{\ell+1} u + \sum_{m=p+1}^{\ell} \frac{\boldsymbol{b}^T T^s A T^{\ell-m}}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m} L\left(\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{T^m e}{m!}\partial_t^m u\right). \tag{B4.8}$$

Εν συνεχεία οι (B4.7) και (D) δίνουν ότι

$$\text{(B4.9a)} \qquad \boldsymbol{b}^T T^s A T^{\ell-\mu} = \frac{1}{(s+1)} \boldsymbol{b}^T (I - T^{s+1}) T^{\ell-\mu}, \quad \mu = 0, \ldots, \ell.$$

Παίρνοντας $\mu = 0$ στην (B4.9a) και χρησιμοποιώντας την (B), έχουμε

$$\text{(B4.9b)} \qquad \boldsymbol{b}^T T^s A T^{\ell} \boldsymbol{e} = \frac{1}{(s+1)} \left[\frac{1}{(\ell+1)} - \frac{1}{(s+\ell+2)} \right] = \frac{1}{(\ell+1)(s+\ell+2)}.$$

Από την (B4.9a) και την υπόθεση της επαγωγής έχουμε

$$\text{(B4.9c)} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{b}^T T^s A T^{\ell-\mu} \boldsymbol{\alpha}_\mu =& \frac{1}{(s+1)} \big(\boldsymbol{b}^T T^{\ell-\mu} \boldsymbol{\alpha}_\mu - \boldsymbol{b}^T T^{s+\ell-\mu+1} \boldsymbol{\alpha}_\mu \big) \\ =& \frac{1}{(s+1)} \left[\frac{1}{\mu!(\ell+1)} - \frac{1}{\mu!(\ell+s+2)} \right] \partial_t^\mu u \\ =& \frac{1}{\mu!(\ell+1)(\ell+s+2)} \partial_t^\mu u. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (B4.9b) και (B4.9c), από την (B4.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^T T^s \boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} =& \frac{1}{(\ell+1)!(s+\ell+2)} \partial_t^{\ell+1} u \\ &+ \sum_{m=p+1}^{\ell} \frac{1}{(\ell-m)!} \partial_t^{\ell-m} L \Big(\boldsymbol{b}^T T^s A T^{\ell-m} \boldsymbol{\alpha}_m - \frac{\boldsymbol{b}^T T^s A T^\ell \boldsymbol{e}}{m!} \partial_t^m u \Big) \\ =& \frac{1}{(\ell+1)!(s+\ell+2)} \partial_t^{\ell+1} u. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η (B4.6) ισχύει $\ell + 1$. ■

Πόρισμα B4.1. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (B), (C), (D) και* (B3.1), *ή ότι η μέθοδος Runge–Kutta είναι η 3–DIRK. Τότε*

$$\text{(B4.10)} \qquad \boldsymbol{b}^T A^{-1} \alpha_{\ell+1} = \frac{1}{(\ell+1)!} \partial_t^{\ell+1} u, \quad \ell = 0, \ldots, \nu - 1.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\ell \in \big\{0, \ldots, \min\{p-1, \nu-1\}\big\}$. Τότε, οι (B4.3), (C) και (B) δίνουν

$$\boldsymbol{b}^T A^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} = \frac{\boldsymbol{b}^T (A^{-1} T^{\ell+1} \boldsymbol{e})}{(\ell+1)!} \partial_t^{\ell+1} u = \frac{\boldsymbol{b}^T T^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!} \partial_t^{\ell+1} u = \frac{1}{(\ell+1)!} \partial_t^{\ell+1} u.$$

Έστω ότι $p < \nu$ και $\ell = p$. Τότε, από τις (B4.4) και (B) έχουμε

$$\boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} = \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{p+1} = \frac{\boldsymbol{b}^T A^{-1}(AT^p\boldsymbol{e})}{p!}\partial_t^{p+1}u = \frac{\boldsymbol{b}^T T^p\boldsymbol{e}}{p!}\partial_t^{p+1}u = \frac{1}{(p+1)!}\partial_t^{p+1}u.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η (B4.10) ισχύει για $\ell = 0, \dots, \min\{p, \nu-1\}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $p < \nu - 1$ και $\ell \in \{p+1, \dots, \nu-1\}$. Βασιζόμενοι στις (B4.5), (B) και (B4.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{\ell+1} =& \frac{\boldsymbol{b}^T T^\ell\boldsymbol{e}}{\ell!}\partial_t^{\ell+1}u + \sum_{m=p+1}^{\ell}\frac{1}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\big(\boldsymbol{b}^T T^{\ell-m}\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{\boldsymbol{b}^T T^\ell\boldsymbol{e}}{m!}\partial_t^m u\big)\\ =& \frac{1}{(\ell+1)!}\partial_t^{\ell+1}u + \sum_{m=p+1}^{\ell}\frac{1}{(\ell-m)!}\partial_t^{\ell-m}L\big(\boldsymbol{b}^T T^{\ell-m}\boldsymbol{\alpha}_m - \frac{\partial_t^m u}{m!(\ell+1)}\big)\\ =& \frac{1}{(\ell+1)!}\partial_t^{\ell+1}u.\end{aligned}$$

Η μέθοδος 3–DIRK ικανοποιεί τις (B), (C) και (D) ενώ η (B3.1) δεν ισχύει διότι $p+\rho+1 = 3 < 4 = \nu$. Παρ' όλα αυτά, ακολουθώντας την πιο πάνω αποδεικτική διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι η (B4.10) ισχύει για $\ell = 0, 1, 2$ (δηλ. θεωρώντας προσωρινά ότι η μέθοδος έχει τάξη 3). Έτσι απομένει η περίπτωση $\ell = 3$, δηλ. $\boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\alpha}_4 = \frac{1}{24}\partial_t^4 u$. Αυτό εξασφαλίζεται, με απ' ευθείας υπολογισμούς, από το Λήμμα B4.1 και τις ακόλουθες σχέσεις

$$\boldsymbol{b}^T TAT\boldsymbol{e} = \frac{1}{8}, \quad \boldsymbol{b}^T AT^2\boldsymbol{e} = \frac{1}{12}, \quad \boldsymbol{b}^T A^2T\boldsymbol{e} = \frac{1}{24},$$

που ικανοποιούνται από τη μέθοδο. ■

Για κάθε $n \in \{0, \dots, N-1\}$ και $\sigma \in \{0, \dots, \nu\}$, θέτουμε

$$\boldsymbol{\alpha}_\ell^n := (\alpha_{1\ell}^n, \dots, \alpha_{q\ell}^n)^T := (\alpha_{1\ell}(t^n), \dots, \alpha_{q\ell}(t^n))^T = \boldsymbol{\alpha}_\ell(t^n)$$

και ορίζουμε το διάνυσμα των *σ–οιονεί ενδιαμέσων βημάτων* $\mathcal{U}_\sigma^n := (u_\sigma^{n,1}, \dots, u_\sigma^{n,q})^T$ καθώς και το *σ–οιονεί επόμενο βήμα* u_σ^{n+1}, ως εξής:

(B4.11a) $$\mathcal{U}_\sigma^n := \sum_{\ell=0}^{\sigma} k^\ell \boldsymbol{\alpha}_\ell^n,$$

(B4.11b) $$u_\sigma^{n+1} := u(t^n) + \boldsymbol{b}^T A^{-1}(\mathcal{U}_\sigma^n - u(t^n)\boldsymbol{e}).$$

Πόρισμα B4.2. *Δεχόμενοι τις υποθέσεις του Πορίσματος* B4.1, *έχουμε*

$$\max_{0\leq n\leq N-1}\|u(t^{n+1})-u_\sigma^{n+1}\|_{m_0}\leq Ck^{\sigma+1},\quad m_0=0,1,\quad \sigma=0,\dots,\nu. \tag{B4.12}$$

Απόδειξη. Έστω $m_0\in\{0,1\}$ και $\sigma\in\{0,\dots,\nu\}$. Από τις (B4.11) και (B4.10) έπεται ότι

$$u_\sigma^{n+1}=u(t^n)+\sum_{\ell=1}^{\sigma}k^\ell \boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}_\ell^n=\sum_{\ell=0}^{\sigma}\frac{k^\ell}{\ell!}\partial_t^\ell u(t^n). \tag{B4.13}$$

Από τον τύπο του Taylor και την (B4.13) έχουμε

$$u_\sigma^{n+1}=u(t^{n+1})-\frac{1}{\sigma!}\int_{t^n}^{t^{n+1}}(t^{n+1}-t)^\sigma\partial_t^{\sigma+1}u(t)dt,$$

απ' όπου παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$\|u_\sigma^{n+1}-u(t^{n+1})\|_{m_0}\leq k^\sigma\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t^{\sigma+1}u(t)\|_{m_0}dt\leq k^{\sigma+1}\sup_{t\in[0,t^*]}\|\partial_t^{\sigma+1}u(t)\|_{m_0},$$

η οποία οδηγεί εύκολα στην (B4.12). ■

Στην πρόταση που ακολουθεί θα παρουσιάσουμε ένα αποτέλεσμα *συνέπειας στο χρόνο*.

Πρόταση B4.1. *Για κάθε* $\sigma\in\{0,\dots,\nu\}$ *και* $n\in\{0,\dots,N-1\}$ *θεωρούμε τις συναρτήσεις σφάλματος* $\{e_\sigma^{n,j}\}_{j=1}^q$ *και* e_σ^{n+1}, *οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις*

$$u_\sigma^{n,j}=u(t^n)+k\sum_{s=1}^{q}a_{js}\left(L(t^{n,s})u_\sigma^{n,s}+f(\cdot,t^{n,s})\right)+e_\sigma^{n,j},\quad j=1,\dots,q, \tag{B4.14a}$$

και

$$u(t^{n+1})=u(t^n)+k\sum_{j=1}^{q}b_j\left(L(t^{n,j})u_\sigma^{n,j}+f(\cdot,t^{n,j})\right)+e_\sigma^{n+1}. \tag{B4.14b}$$

Τότε, δεχόμενοι τις υποθέσεις του Πορίσματος B4.1, *έχουμε*

$$\max_{0\leq n\leq N-1}\sum_{j=1}^{q}\|e_\sigma^{n,j}\|\leq Ck^{\sigma+1} \tag{B4.15a}$$

και

$$\max_{0\leq n\leq N-1}\|e_\sigma^{n+1}\|\leq Ck^{\sigma+1}, \tag{B4.15b}$$

$\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $\sigma \in \{0, \dots, \nu\}$.

Απόδειξη. Έστω $\sigma \in \{0, \dots, \nu\}$. Από τις (B4.11a) και (B4.14a) έχουμε ότι

$$e_\sigma^{n,j} = \sum_{\ell=1}^{\sigma} k^\ell \alpha_{j\ell}^n - k \sum_{s=1}^{q} a_{js} \left(L(t^{n,s}) u_\sigma^{n,s} + f(\cdot, t^{n,s}) \right), \quad j = 1, \dots, q. \tag{B4.16}$$

Όταν $\sigma = 0$ η (B4.15a) έπεται προφανώς από την (B4.16). Υποθέτουμε ότι $\sigma \geq 1$. Εφαρμογή του τύπου του Taylor οδηγεί στις ακόλουθες εκφράσεις

$$f(\cdot, t^{n,s}) = \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} k^\ell \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell f(\cdot, t^n) + \frac{1}{(\sigma-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s} - t)^{\sigma-1} \partial_t^\sigma f(\cdot, t) dt,$$

και

$$\begin{aligned} L(t^{n,s}) u_\sigma^{n,s} = & \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} k^\ell \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell L(t^n) u_\sigma^{n,s} \\ & + \frac{1}{(\sigma-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s} - t)^{\sigma-1} \partial_t^\sigma L(t) u_\sigma^{n,s} dt \\ = & \sum_{\lambda=0}^{\sigma-1} k^\lambda \left[\sum_{m=0}^{\lambda} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L(t^n) \alpha_{s,\lambda-m}^n \right] \\ & + \sum_{\lambda=\sigma}^{2\sigma-2} k^\lambda \left[\sum_{m=\lambda-\sigma+1}^{\sigma-1} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L(t^n) \alpha_{s,\lambda-m}^n \right] \\ & + \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} k^{\ell+\sigma} \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell L(t^n) \alpha_{s\sigma}^n \\ & + \frac{1}{(\sigma-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s} - t)^{\sigma-1} \partial_t^\sigma L(t) u_\sigma^{n,s} dt, \end{aligned}$$

για $s = 1, \dots, q$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (B4.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned} e_\sigma^{nj} = & \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} k^{\ell+1} \Bigg\{ \alpha_{j,\ell+1}^n - \sum_{s=1}^{q} a_{js} \Bigg[\sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L(t^n) \alpha_{s,\ell-m}^n \\ & + \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell f(\cdot, t^n) \Bigg] \Bigg\} + w_\sigma^{n,j}, \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned} \tag{B4.17}$$

όπου

$$w_\sigma^{n,j} = -\, k \sum_{s=1}^{q} a_{js} \Bigg\{ \frac{1}{(\sigma-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s} - t)^{\sigma-1} \partial_t^\sigma f(\cdot, t) dt$$

$$+\sum_{\lambda=\sigma}^{2\sigma-2} k^{\lambda} \sum_{m=\lambda-\sigma+1}^{\sigma-1} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L(t^n) \alpha_{s,\lambda-m}^n$$
$$+\sum_{\ell=0}^{\sigma-1} k^{\ell+\sigma} \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell L(t^n) \alpha_{s\sigma}^n$$
$$\left. + \frac{1}{(\sigma-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s}-t)^{\sigma-1} \partial_t^\sigma L(t) u_\sigma^{n,s} dt \right\}, \quad j=1,\dots,q.$$

Εύκολα καταλήγουμε στην εκτίμηση

(B4.18a) $$\|w_\sigma^{n,j}\| \le C k^{\sigma+1}, \quad j=1,\dots,q,$$

ενώ οι (B4.17) και (B4.1) δίνουν

(B4.18b) $$e_\sigma^{n,j} = w_\sigma^{n,j}, \quad j=1,\dots,q.$$

Η (B4.15a) προκύπτει αμέσως από τις (B4.18a) και (B4.18b).

Ορίζουμε τώρα $\Lambda^n := \big(L(t^{n,1})u_\sigma^{n,1} + f(\cdot,t^{n,1}),\dots,L(t^{n,q})u_\sigma^{n,q} + f(\cdot,t^{n,q})\big)^T$ και $\boldsymbol{e}_\sigma^n := (e_\sigma^{n,1},\dots,e_\sigma^{n,q})^T$. Έτσι η (B4.14a) γράφεται ως εξής: $\mathcal{U}_\sigma^n = u(t^n)\boldsymbol{e} + kA\Lambda^n + \boldsymbol{e}_\sigma^n$. Άρα

(B4.19a) $$k\Lambda^n = A^{-1}\big[\mathcal{U}_\sigma^n - u(t^n)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}_\sigma^n\big].$$

Από τις (B4.14b), (B4.19a) και (B4.11b) έχουμε

(B4.19b) $$\begin{aligned} e_\sigma^{n+1} =& u(t^{n+1}) - u(t^n) - k\boldsymbol{b}^T\Lambda^n \\ =& u(t^{n+1}) - u(t^n) - \boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[\mathcal{U}_\sigma^n - u(t^n)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}_\sigma^n\big] \\ =& \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{e}_\sigma^n + u(t^{n+1}) - u(t^n) - \boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[\mathcal{U}_\sigma^n - u(t^n)\boldsymbol{e}\big] \\ =& \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{e}_\sigma^n + u(t^{n+1}) - u_\sigma^{n+1}. \end{aligned}$$

Η (B4.15b) έπεται εύκολα από την (B4.19b), χρησιμοποιώντας τις (B4.12) και (B4.15a) (την οποία ήδη αποδείξαμε). ■

Σημείωση. Η εκτίμηση του e_σ^{n+1} δεν είναι απαραίτητη, όμως διευκολύνει μιά αντιπαραβολή με την έννοια της συνέπειας για μεθόδους Runge–Kutta όταν εφαρμόζονται σε μιά συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (βλ. §A4). □

Εισάγουμε τώρα τις παραμέτρους $\sigma_{\mathcal{N}}$, σ_1 και σ_2, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

(B4.20a) $$\sigma_{\mathcal{N}} := \max\Big\{\ell \in \mathbb{N}_0 : \boldsymbol{\alpha}_s(t) \in (\mathcal{X}_{\mathcal{N}})^q \ \text{ για κάθε } \ t \in [0,t_\epsilon^*] \ \text{ και } \ s \in \{0,\dots,\ell\}\Big\}$$

(B4.20b) $$\sigma_1 := \begin{cases} \sigma_{\mathcal{N}} + 1 & \text{όταν } \ \sigma_{\mathcal{N}} < \nu \\ \nu & \text{όταν } \ \sigma_{\mathcal{N}} = \nu \end{cases}, \qquad \text{και } \ \sigma_2 := \frac{1}{2}(1-\delta_{\nu\sigma_{\mathcal{N}}}),$$

όπου δ είναι το *δέλτα του Kronecker*. Τότε, από το Λήμμα B4.1 και την Παρατήρηση B2.2 συμπεραίνουμε αμέσως ότι

$$\begin{cases} \sigma_{\mathcal{N}} = \nu & \text{όταν} \ \ \nu \leq p+1 \\ \sigma_{\mathcal{N}} \geq p+1 & \text{όταν} \ \ \nu > p+1 \end{cases}. \tag{B4.20c}$$

Από την (B4.20a) είναι προφανές ότι ν είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\sigma_{\mathcal{N}}$, και έχει αυτή την τιμή στην περίπτωση που $\nu \leq p+1$. Όταν $\nu > p+1$, εν γένει έχουμε ότι $\sigma_{\mathcal{N}} = p+1$ και μόνο σε ειδικές περιπτώσεις (βλ. §B6) η $\sigma_{\mathcal{N}}$ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές.

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα συνέπειας.

Πρόταση B4.2. *Για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ και $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ θεωρούμε τις συναρτήσεις $\{\mathcal{H}_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ και $\mathcal{H}_h^{n+1}$ του S_h οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις:*

$$\begin{aligned} R_h(t^{n,j})u_{\sigma_1}^{n,j} =& R_h(t^n)u(t^n) + \mathcal{H}_h^{n,j} \\ & + k\sum_{s=1}^{q} a_{js}\Big[L_h(t^{n,s})R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s} + F_h(t^{n,s})\Big], \quad j = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{B4.21a}$$

και

$$\begin{aligned} R_h(t^{n+1})u(t^{n+1}) =& R_h(t^n)u(t^n) + \mathcal{H}_h^{n+1} \\ & + k\sum_{j=1}^{q} b_j\Big[L_h(t^{n,j})R_h(t^{n,j})u_{\sigma_1}^{n,j} + F_h(t^{n,j})\Big]. \end{aligned} \tag{B4.21b}$$

Τότε, δεχόμενοι τις υποθέσεις του Πορίσματος B4.1, *έχουμε*

$$\max_{0\leq n\leq N-1} \sum_{j=1}^{q} \|\mathcal{H}_h^{n,j}\| \leq Ck(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}) \tag{B4.22a}$$

και

$$\max_{0\leq n\leq N-1} \|\mathcal{H}_h^{n+1}\| \leq Ck(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}). \tag{B4.22b}$$

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στις (B4.21a), (B2.1), (B2.2a) και (B2.12), για κάθε $\chi \in S_h$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_h^{n,j}, \chi) =& (R_h(t^{n,j})u_{\sigma_1}^{n,j} - R_h(t^n)u(t^n), \chi) - k\sum_{s=1}^{q} a_{js}\Big[-B(t^{n,s}; R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi) \\ & + \big((\mathcal{M}_0 - \gamma_0(\cdot, t^{n,s}))R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi\big) + (f(\cdot, t^{n,s}), \chi)\Big] \end{aligned}$$

$$=(R_h(t^{n,j})u_{\sigma_1}^{n,j} - R_h(t^n)u(t^n), \chi) - k\sum_{s=1}^{q} a_{js}\Big[-B(t^{n,s}; u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi)$$
$$+ \big((\mathcal{M}_0 - \gamma_0(\cdot, t^{n,s}))R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi\big) + (f(\cdot, t^{n,s}), \chi)\Big], \quad j = 1, \ldots, q.$$

Παίρνοντας το $L^2(\Omega)$ εσωτερικό γινόμενο της (B4.14a) με κάποιο $\chi \in S_h$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, έχουμε τα ακόλουθα

$$(e_{\sigma_1}^{n,j}, \chi) = (u_{\sigma_1}^{n,j} - u(t^n), \chi) - k\sum_{s=1}^{q} a_{js}\Big[\big\langle \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot, t^{n,s})\nabla u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi\big\rangle_{\partial\Omega} - B(t^{n,s}; u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi)$$
$$+ \big((\mathcal{M}_0 - (\gamma_0(\cdot, t^{n,s}))u_{\sigma_1}^{n,s}, \chi\big) + (f(\cdot, t^{n,s}), \chi)\Big], \quad j = 1, \ldots, q.$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και θέτουμε $\chi = \mathcal{H}_h^{n,j}$. Τότε η ανισότητα Cauchy–Schwarz δίνει

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_h^{n,j}\|^2 \le & C\|\mathcal{H}_h^{n,j}\|\Big[\|e_{\sigma_1}^{n,j}\| + \|R_h(t^{n,j})(u_{\sigma_1}^{n,j} - u(t^n)) - (u_{\sigma_1}^{n,j} - u(t^n))\| \\ & + \|R_h(t^{n,j})u(t^n) - R_h(t^n)u(t^n)\| \\ & + k\sum_{s=1}^{q}\|R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s} - u_{\sigma_1}^{n,s}\|\Big] \\ & + Ck\sum_{s=1}^{q}\Big|\Big\langle \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot, t^{n,s})\nabla u_{\sigma_1}^{n,s}, \mathcal{H}_h^{n,j}\Big\rangle_{\partial\Omega}\Big|, \quad j = 1, \ldots, q.\end{aligned} \tag{B4.23}$$

Στη συνέχεια, θα εκτιμήσουμε κάθε όρο ευρισκόμενο εις το δεξιό μέλος της (B4.23). Πρώτα, θυμίζουμε ότι $\boldsymbol{\alpha}_\ell(t) \in (\mathcal{X}_\mathcal{N})^q$ για κάθε $t \in [0, t_\epsilon^*]$ και $\ell \in \{0, \ldots, \sigma_\mathcal{N}\}$. Επομένως, η (B4.11a) συνεπάγεται ότι $\mathcal{U}_{\sigma_\mathcal{N}}^n \in (\mathcal{X}_\mathcal{N})^q$. Όταν $\sigma_\mathcal{N} < \nu$, ισχύει ότι $\alpha_{j_0, \sigma_\mathcal{N}+1}(t_0) \notin \mathcal{X}_\mathcal{N}$ για κάποια $t_0 \in [0, t_\epsilon^*]$ και $j_0 \in \{1, \ldots, q\}$. Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $\alpha_{j,\sigma_\mathcal{N}+1}^n$ δεν ανήκουν στον $\mathcal{X}_\mathcal{N}$.

Από την (B4.20b) είναι προφανές ότι

$$u_{\sigma_1}^{n,j} = u_{\sigma_\mathcal{N}}^{n,j} + (1 - \delta_{\nu,\sigma_\mathcal{N}})k^{\sigma_1}\alpha_{j\sigma_1}^n, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{B4.24}$$

Χρησιμοποιώντας την (B2.17) και τον τύπο του Taylor έχουμε

$$\begin{aligned}\|R_h(t^{n,j})(u_{\sigma_1}^{n,j} - u(t^n)) - (u_{\sigma_1}^{n,j} - u(t^n))\| &\le \sum_{\ell=1}^{\sigma_1} k^\ell \|R_h(t^{n,j})\alpha_{j\ell}^n - \alpha_{j\ell}^n\| \\ \le Ckh^r\sum_{\ell=1}^{\sigma_1}\|\alpha_{j\ell}^n\|_r &\le Ckh^r\sum_{\ell=1}^{\sigma_1}\sup_{t\in[0,t^*]}\|\alpha_{j\ell}(t)\|_r, \quad j = 1, \ldots, q,\end{aligned} \tag{B4.25a}$$

$$
\begin{aligned}
k\sum_{s=1}^{q}\|R_h(t^{n,s})u^{n,s}_{\sigma_1}-u^{n,s}_{\sigma_1}\| \leq& k\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\sigma_1}k^\ell\|R_h(t^{n,s})\alpha^n_{s\ell}-\alpha^n_{s\ell}\|\\
\leq& Ckh^r\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\sigma_1}\|\alpha^n_{s\ell}\|_r\\
\leq& Ckh^r\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\sigma_1}\sup_{t\in[0,t^*]}\|\alpha_{s\ell}(t)\|_r,
\end{aligned}\tag{B4.25b}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\|R_h(t^{n,j})u(t^n)-R_h(t^n)u(t^n)\| =& \Big\|\int_{t^n}^{t^{n,j}}\partial_t(R_hu(t^n))(t)dt\Big\|\\
\leq& \Big|\int_{t^n}^{t^{n,j}}\|\partial_t(R_hu(t^n))(t)\|dt\Big|\\
\leq& C_{1,L}|\tau_j|kh^r\|u(t^n)\|_r\\
\leq& Ckh^r\sup_{t\in[0,t^*]}\|u(t)\|_r,\quad j=1,\dots,q.
\end{aligned}\tag{B4.25c}
$$

Έστω $\nu>\sigma_{\mathcal N}$. Οι (B4.24) και (H_2) οδηγούν στην ακόλουθη εκτίμηση

$$
\begin{aligned}
k\sum_{s=1}^{q}\Big|\Big\langle \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t^{n,s})\nabla u^{n,s}_{\sigma_1},\mathcal{H}^{n,j}_h\Big\rangle_{\partial\Omega}\Big| =& k^{\sigma_{\mathcal N}+2}\sum_{s=1}^{q}\Big|\Big\langle \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t^{n,s})\nabla \alpha^n_{s,\sigma_{\mathcal N}+1},\mathcal{H}^{n,j}_h\Big\rangle_{\partial\Omega}\Big|\\
\leq& k^{\sigma_{\mathcal N}+2}\big|\mathcal{H}^{n,j}_h\big|_{\partial\Omega}\sum_{s=1}^{q}\big|\boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t^{n,s})\nabla\alpha^n_{s,\sigma_{\mathcal N}+1}\big|_{\partial\Omega}\\
\leq& C_Ik^{\sigma_{\mathcal N}+2}h^{-\frac12}\|\mathcal{H}^{n,j}_h\|\sum_{s=1}^{q}\sup_{t\in[0,t^*_\epsilon]}\big|\boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t)\nabla\alpha_{s,\sigma_{\mathcal N}+1}(t)\big|_{\partial\Omega},
\end{aligned}
$$

για $j=1,\dots,q$. Όταν $\sigma_{\mathcal N}=\nu$, από την (B4.24) έπεται ότι ο όρος που μόλις εκτιμήσαμε είναι ταυτοτικά μηδέν. Τελικά, συμπεραίνουμε ότι

$$
k\sum_{s=1}^{q}\Big|\Big\langle \boldsymbol{n}\Gamma(\cdot,t^{n,s})\nabla u^{n,s}_{\sigma_1},\mathcal{H}^{n,j}_h\Big\rangle_{\partial\Omega}\Big|\leq Ck(k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}),\quad j=1,\dots,q.\tag{B4.25d}
$$

Η (B4.22a) είναι άμεση συνέπεια των (B4.23), (B4.25) και (B4.15a).

Θέτουμε: $\Lambda^n_h:=\big(L_h(t^{n,1})R_h(t^{n,1})u^{n,1}_{\sigma_1}+F_h(t^{n,1}),\dots,L_h(t^{n,q})R_h(t^{n,q})u^{n,q}_{\sigma_1}+F_h(t^{n,q})\big)^T$, $\Phi^n_h:=\big(R_h(t^{n,1})u^{n,1}_{\sigma_1},\dots,R_h(t^{n,q})u^{n,q}_{\sigma_1}\big)^T$ και $\boldsymbol{\eta}^n_h:=\big(\mathcal{H}^{n,1}_h,\dots,\mathcal{H}^{n,q}_h\big)^T$. Έτσι, η (B4.21a) γράφεται ως εξής: $\Phi^n_h=R_h(t^n)u(t^n)\boldsymbol{e}+kA\Lambda^n_h+\boldsymbol{\eta}^n_h$. Άρα

$$
k\Lambda^n_h=A^{-1}\big[\Phi^n_h-R_h(t^n)u(t^n)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\eta}^n_h\big].\tag{B4.26}
$$

Από τις (B4.21b), (B4.26) και (B4.11b) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_h^{n+1} =& R_h(t^{n+1})u(t^{n+1}) - R_h(t^n)u(t^n) - k\boldsymbol{b}^T\Lambda_h^n \\
=& R_h(t^{n+1})u(t^{n+1}) - R_h(t^n)u(t^n) - \boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[\Phi_h^n - R_h(t^n)u(t^n)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\eta}_h^n\big] \\
=& R_h(t^{n+1})(u(t^{n+1}) - u_{\sigma_1}^{n+1}) + \big[R_h(t^{n+1})u_{\sigma_1}^{n+1} - R_h(t^n)u(t^n)\big] \\
&- \boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[\Phi_h^n - R_h(t^n)u(t^n)\boldsymbol{e}\big] + \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\eta}_h^n \\
=& R_h(t^{n+1})(u(t^{n+1}) - u_{\sigma_1}^{n+1}) + \big[R_h(t^{n+1})u(t^n) - R_h(t^n)u(t^n)\big] + \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\eta}_h^n \\
&+ R_h(t^{n+1})\boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[\mathcal{U}_{\sigma_1}^n - u(t^n)\boldsymbol{e}\big] - \boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[\Phi_h^n - R_h(t^n)u(t^n)\boldsymbol{e}\big] \\
=& R_h(t^{n+1})(u(t^{n+1}) - u_{\sigma_1}^{n+1}) + \big[R_h(t^{n+1})u(t^n) - R_h(t^n)u(t^n)\big] + \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\eta}_h^n \\
&+ \boldsymbol{b}^T A^{-1}\big[R_h(t^{n+1})\mathcal{U}_{\sigma_1}^n - \Phi_h^n\big] - \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{e}\big[R_h(t^{n+1})u(t^n) - R_h(t^n)u(t^n)\big],
\end{aligned}$$

δηλ.

(B4.27)
$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_h^{n+1} = \sum_{j,s=1}^{q} b_j a_{js}^{-1}\big[R_h(t^{n+1})u_{\sigma_1}^{n,s} - R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s}\big] + \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{\eta}_h^n \\
+ (1 - \boldsymbol{b}^T A^{-1}\boldsymbol{e})\big[R_h(t^{n+1})u(t^n) - R_h(t^n)u(t^n)\big] \\
+ R_h(t^{n+1})(u(t^{n+1}) - u_{\sigma_1}^{n+1}).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Taylor

$$\begin{aligned}
R_h(t^{n,j})u_{\sigma_1}^{n,j} =& R_h(t^{n+1})u_{\sigma_1}^{n,j} - \int_{t^{n,j}}^{t^{n+1}} \partial_t(R_h u_{\sigma_1}^{n,j})(t)dt, \quad j = 1,\dots,q, \\
R_h(t^n)u(t^n) =& R_h(t^{n+1})u(t^n) - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t(R_h u(t^n))(t)dt,
\end{aligned}$$

και την (B2.17) έχουμε

(B4.28a)
$$\begin{aligned}
\|R_h(t^{n+1})u(t^n) - R_h(t^n)u(t^n)\| \le& \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t(R_h u(t^n))(t)\|dt \\
\le& C_{1,L}kh^r\|u(t^n)\|_r \le C_{1,L}kh^r \sup_{t\in[0,t^*]}\|u(t)\|_r,
\end{aligned}$$

και

(B4.28b)
$$\begin{aligned}
\sum_{j,s=1}^{q} \|R_h(t^{n+1})u_{\sigma_1}^{n,s} - R_h(t^{n,s})u_{\sigma_1}^{n,s}\| =& q\sum_{s=1}^{q}\Big\|\int_{t^{n,s}}^{t^{n+1}} \partial_t(R_h u_{\sigma_1}^{n,s})(t)dt\Big\| \\
\le& q\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\sigma_1} k^\ell\Big|\int_{t^{n,s}}^{t^{n+1}} \|\partial_t(R_h \alpha_{s\ell}^n)(t)\|dt\Big| \\
\le& Ckh^r\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\sigma_1}\|\alpha_{s\ell}^n\|_r \\
\le& Ckh^r\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\sigma_1}\sup_{t\in[0,t^*]}\|\alpha_{s\ell}(t)\|_r.
\end{aligned}$$

Επί πλέον, από την Παρατήρηση B2.4 και την (B4.12), έπεται ότι

(B4.28c) $$\|R_h(t^{n+1})(u(t^{n+1}) - u_{\sigma_1}^{n+1})\| \le C\|u(t^{n+1}) - u_{\sigma_1}^{n+1}\|_1 \le Ck^{\sigma_1+1}.$$

Η (B4.22b) προκύπτει εύκολα από τις (B4.27), (B4.28) και (B4.22a). ■

Το κύριο αποτέλεσμα συνέπειας περιέχεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση B4.3. *Για κάθε $k \in (0, k_0]$, $h \in (0, h_\alpha)$ και $n \in \{0, \dots, N-1\}$, υπάρχουν συναρτήσεις $\{v_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ του S_h τέτοιες ώστε*

(B4.29a) $$v_h^{n,j} = R_h(t^n)u(t^n) + k\sum_{s=1}^q a_{js}\Big[L_h(t^{n,s})v_h^{n,s} + F_h(t^{n,s})\Big], \quad j = 1, \dots, q.$$

Ορίζουμε συναρτήσεις σφάλματος $E_h^n \in S_h$, ως εξής

(B4.29b) $$R_h(t^{n+1})u(t^{n+1}) = R_h(t^n)u(t^n) + k\sum_{j=1}^q b_j[L_h(t^{n,j})v_h^{n,j} + F_h(t^{n,j})] + E_h^n.$$

Τότε, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Πορίσματος B4.1*, έχουμε*

(B4.30) $$\max_{0\le n\le N-1} \|E_h^n\| \le Ck(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}).$$

Απόδειξη. Για δοθέν $h \in (0, h_\alpha)$, $k \in (0, k_0]$ και $n \in \{0, \dots, N-1\}$, η ύπαρξη των $\{v_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ εξασφαλίζεται από το Πόρισμα B3.1.

Έστω $z_h^{n,j} := R_h(t^{n,j})u_{\sigma_1}^{n,j} - v_h^{n,j}$ για $j = 1, \dots, q$, $n = 0, \dots, N-1$ και $h \in (0, h_\alpha)$. Τότε αφαιρώντας κατά μέλη την (B4.29) από την (B4.21), έχουμε

$$\begin{aligned} z_h^{n,j} &= \mathcal{H}_h^{n,j} + k\sum_{s=1}^q a_{js}L_h(t^{n,s})z_h^{n,s}, \quad j = 1, \dots, q, \\ E_h^n &= \mathcal{H}_h^{n+1} + k\sum_{j=1}^q b_jL_h(t^{n,j})z_h^{n,j}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα ευστάθειας του Λήμματος B3.1 (6λ. (B3.4b)), παίρνουμε

(B4.31) $$\|E_h^n\| \le \|\mathcal{H}_h^{n+1}\| + C_2\sum_{j=1}^q \|\mathcal{H}_h^{n,j}\|.$$

Η (B4.30) έπεται αμέσως από τις (B4.31) και (B4.22). ■

§B5. Σύγκλιση.

Η *συνέπεια* (Πρόταση B4.3) και η *ευστάθεια* (Λήμμα B3.2) οδηγούν στη *σύγκλιση*.

Θεώρημα B5.1. *Έστω ότι ισχύει η* (IV) (*βλ. Πρόταση* B2.3)*. Τότε, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Πορίσματος* B4.1*, έχουμε*

$$\|u_h^n - u(t^n)\| \le C(h^r + k^{\sigma_1} h^{-\sigma_2}), \quad n = 0, \dots, N. \tag{B5.1a}$$

Αν επί πλέον *ισχύει η* (B1.3)*, τότε*

$$\max_{0\le n\le N} \|u_h^n - u(t^n)\| \le C\Big[h^r + k^{\min\{\nu, \sigma_N + \frac{1}{2}\}}\Big]. \tag{B5.1b}$$

Απόδειξη. Πρώτα ορίζουμε $\vartheta_h^n := u_h^n - R_h(t^n)u(t^n)$ για $n = 0, \dots, N$. Τότε η (B2.17) δίνει

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u(t^n)\| \le& \|R_h(t^n)u(t^n) - u(t^n)\| + \|\vartheta_h^n\| \\ \le& Ch^r\|u(t^n)\|_r + \|\vartheta_h^n\| \\ \le& Ch^r \sup_{t\in[0,t^*]} \|u(t)\|_r + \|\vartheta_h^n\|, \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{B5.2}$$

Έστω $\vartheta_h^{n,j} := u_h^{n,j} - v_h^{n,j}$ για $j = 1, \dots, q$ και $n = 0, \dots, N-1$. Τότε αφαιρώντας κατά μέλη την (B4.29) από την (B3.2), έχουμε

$$\begin{aligned} \vartheta_h^{n,j} &= \vartheta_h^n + k\sum_{s=1}^q a_{js} L_h(t^{n,s})\vartheta_h^{n,s}, \quad j = 1, \dots, q, \\ \vartheta_h^{n+1} + E_h^n &= \vartheta_h^n + k\sum_{j=1}^q b_j L_h(t^{n,j})\vartheta_h^{n,j}. \end{aligned}$$

Τότε το αποτέλεσμα ευστάθειας του Λήμματος B3.2 (βλ. (B3.11)), δίνει

$$\|\vartheta_h^{n+1} + E_h^n\| \le (1 + C_3 k)\|\vartheta_h^n\|, \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{B5.3}$$

Έτσι, βασιζόμενοι στις (B5.3) και (B4.30), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\vartheta_h^{n+1}\| \le& (1 + C_3 k)\|\vartheta_h^n\| + \|E_h^n\| \\ \le& (1 + C_3 k)\|\vartheta_h^n\| + Ck(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}), \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{B5.4}$$

Από την (B5.4), το Λήμμα A3.2, την (IV) και την (B2.17) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|\vartheta_h^n\| \le& \exp(nC_3 k)\Big[\|\vartheta_h^0\| + C(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2})\Big] \\ \le& \exp(C_3 t^*)\Big[\|v_h^0 - v^0\| + \|v^0 - R_h(0)v^0\| + C(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2})\Big] \\ \le& C\Big[h^r\|v^0\|_r + h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}\Big] \\ \le& C(h^r + k^{\sigma_1}h^{-\sigma_2}), \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{B5.5}$$

Τώρα, η (B5.1a) είναι συνέπεια των (B5.2) και (B5.5), ενώ η (B5.1b) έπεται προφανώς από την (B5.1a). ■

Παρατήρηση B5.1. Συνεχίζοντας τη συζήτηση που έγινε στην Παρατήρηση B3.1, υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούμε δύο μεθόδους Runge–Kutta. Συγκεκριμένα, έστω $\ell_0 \in \mathbb{N}$ σταθερό και ανεξάρτητο του N. Με τη μία εκτελούμε τα $N - \ell_0$ πρώτα βήματα και με την άλλη τα υπόλοιπα ℓ_0. Για την δεύτερη μέθοδο Runge–Kutta δεν υποθέτουμε ότι είναι αλγεβρικά ευσταθής· αρκεί να εξασφαλίσουμε την ισχύ του Λήμματος B3.2, με τη διαφορά ότι στην (B3.11) αρκεί να έχουμε μιά σταθερά $C_{3,*}$ αντί του όρου $(1 + C_3 k)$. Ακόμα, έστω $\tilde{\nu}$ και $\tilde{p}$, η κλασική τάξη και η τάξη σταδίου, αντίστοιχα, της δεύτερης μεθόδου.

Για τα πρώτα βήματα σύμφωνα με το Θεώρημα B5.1 έχουμε

$$\max_{0\le n\le N-\ell_0} \|u_h^n - u(t^n)\| \le C(h^r + k^{\sigma_1} h^{-\sigma_2}). \tag{B5.6}$$

Έστω ότι $\{\tilde{u}_h^n\}_{n=0}^{\ell_0}$ είναι οι προσεγγίσεις που παράγονται στα υπόλοιπα ℓ_0 βήματα, με τη δεύτερη μέθοδο, όπου $\tilde{u}_h^0 := u_h^{N-\ell_0}$. Η ανάλυση γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Ορίζουμε συναρτήσεις $\{\boldsymbol{\alpha}_\ell\}_{\ell=0}^{\tilde{\nu}}$ μέσω της (B4.2) και τις παραμέτρους $\tilde{\sigma}_{\mathcal{N}}$, $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, μέσω της (B4.20). Έπειτα θέτουμε $\tilde{\vartheta}_h^n := \tilde{u}_h^n - R_h(t^{N-\ell_0+n})u(t^{N-\ell_0+n})$, για $n = 0, \dots, \ell_0$. Από την (B5.2) έπεται ότι $\max\limits_{0\le n\le \ell_0} \|\tilde{u}_h^n - u(t^{N-\ell_0+n})\| \le Ch^r + \max\limits_{0\le n\le \ell_0} \|\tilde{\vartheta}_h^n\|$. Επί πλέον έχουμε

$$\|\tilde{\vartheta}_h^{n+1}\| \le C_{3,*}\|\tilde{\vartheta}_h^n\| + Ck(h^r + k^{\tilde{\sigma}_1} h^{-\tilde{\sigma}_2}) \ \text{ για } \ n = 0, \dots, \ell_0 - 1,$$

από την οποία έπεται ότι

$$\max_{0\le n\le \ell_0} \|\tilde{\vartheta}_h^n\| \le C\Big[\|\tilde{\vartheta}_h^0\| + k(h^r + k^{\tilde{\sigma}_1} h^{-\tilde{\sigma}_2})\Big],$$

ενώ $\|\tilde{\vartheta}_h^0\| \le \|u_h^{N-\ell_0} - u(t^{N-\ell_0})\| + \|u(t^{N-\ell_0}) - R_h(t^{N-\ell_0})u(t^{N-\ell_0})\| \le C(h^r + k^{\sigma_1} h^{-\sigma_2})$. Τελικά έχουμε

$$\max_{0\le n\le \ell_0} \|\tilde{u}_h^n - u(t^{N-\ell_0+n})\| \le C\big(h^r + k^{\sigma_1} h^{-\sigma_2} + k^{\tilde{\sigma}_1+1} h^{-\tilde{\sigma}_2}\big). \tag{B5.7}$$

Η τελική εκτίμηση προκύπτει από τις (B5.6) και (B5.7). Ανάλογη εκτίμηση προκύπτει όταν τα πρώτα ℓ_0 βήματα εκτελούνται με τη μιά μέθοδο και τα υπόλοιπα $N - \ell_0$ με την άλλη μέθοδο. □

Παρατήρηση B5.2. Στην περίπτωση που $\sigma_{\mathcal{N}} = \nu$ (όπως συμβαίνει π.χ. στις μεθόδους Crank–Nicolson και πεπλεγμένη Euler) το αποτέλεσμα της βέλτιστης σύγκλισης ως προς k προκύπτει χωρίς να χρησιμοποιηθεί η (H_2). □

§B6. Διαφορετικές συνοριακές συνθήκες και ειδικά προβλήματα.

§B6.1. Συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Αντικαθιστώντας την (B1.1b) με τη συνθήκη

$$u = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega \times (0, t^*]$$

και διαγράφοντας τις συνθήκες (B1.1f) και (B1.1g), προκύπτει το αντίστοιχο παραβολικό πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Dirichlet. Εδώ υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\{S_h\}_{h\in(0,h_\alpha)}$ αποτελείται από πεπερασμένης διάστασης υποχώρους του $H_0^1(\Omega)$ και έχει την ακόλουθη προσεγγιστική ιδιότητα:

$$(\mathrm{H}_{\mathcal{D}}) \quad \inf_{\chi\in S_h} (\|w-\chi\| + h\|w-\chi\|_1) \le C_{\tilde{F}} h^s \|w\|_s, \quad \forall w \in H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \quad \forall h \in (0, h_\alpha),$$

για κάθε $s \in \{2, \ldots, r\}$, ενώ δεν υποθέτουμε ότι ισχύει κάποια *αντίστροφη ανισότητα* (όπως π.χ. οι (H_2) και (H_2')).

Για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $h \in (0, h_\alpha)$ ορίζουμε την απεικόνιση $L_h(t) : S_h \longrightarrow S_h$ όπως στην (B2.1a). Ακόμα, για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ ορίζουμε $F_h : [0, t^*] \longrightarrow S_h$ όπως στην (B2.1b). Ακόμα, για κάθε $t \in [0, t^*]$, θεωρούμε επί πλέον τις διγραμμικές μορφές $B(t)$, $B^*(t)$, $\dot{B}(t)$ όπως αυτές ορίζονται στην (B2.2). Τα Λήμματα B2.1 και B2.2 εξακολουθούν, προφανώς, να ισχύουν. Αντί του Λήμματος B2.3, οι B, B^* και $\dot{B}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\text{(B6.1a)} \qquad B^*(t; v, w) = B(t; w, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, t^*],$$

$$\text{(B6.1b)} \qquad |\dot{B}(t; v, w)| \le C_{\dot{B}} \|v\| \|w\|_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall w \in H^2(\Omega), \quad \forall t \in [0, t^*],$$

των οποίων η απόδειξη είναι ανάλογη εκείνης των (B2.8) και (B2.9), αντίστοιχα.

Για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ ορίζουμε μία H^1 προβολή $R_h : [0, t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(H^1(\Omega); S_h)$ μέσω της (B2.12). Οι προσεγγιστικές ιδιότητες της R_h είναι διαφορετικές από εκείνες που περιγράφονται στις (B2.13) και (B2.17), στο ότι αυτή προσεγγίζει με τάξη s ως προς h συναρτήσεις του $H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega)$ και όχι του $H^s(\Omega)$. Αυτό οφείλεται στην υπόθεση $(\mathrm{H}_{\mathcal{D}})$, που είναι διαφορετική από την (H_1). Συγκεκριμένα έχουμε

$$\text{(B6.1c)} \qquad \|\partial_t^\ell w(t) - \partial_t^\ell (R_h w)(t)\| + h\|\partial_t^\ell w(t) - \partial_t^\ell (R_h w)(t)\|_1 \le C h^s \sum_{m=0}^{\ell} \|\partial_t^m w(t)\|_s,$$

για κάθε $w \in C^\ell([0, t^*], H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $s \in \{2, \ldots, r\}$, $t \in [0, t^*]$, $h \in (0, h_\alpha)$ και $\ell \in \{0, 1\}$. Η (B6.1c) αποδεικνύεται όπως οι (B2.13) και (B2.17), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η συνάρτηση σφάλματος e ανήκει στον $H_0^1(\Omega)$ και βασιζόμενοι στις (B6.1a), (B6.1b) και $(\mathrm{H}_{\mathcal{D}})$.

Σημείωση. Στην απόδειξη της L^2 εκτίμησης που περιέχεται στην (B6.1c), αντί του $\mathsf{T}_{\mathcal{N}}^*(t)$ χρησιμοποιούμε τον $\mathsf{T}_{\mathcal{D}}^*(t)$ ο οποίος ορίζεται ως ο περιορισμός του $\mathsf{T}^*(t)$ στον $\mathcal{X}_{\mathcal{D}} :=$

$H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Τότε οι (B2.5), (B2.7) και το Λήμμα Lax–Milgram εξασφαλίζουν ότι υπάρχει γραμμικός τελεστής $Z(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)$ τέτοιος ώστε $B^*(t; Z(t)\psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$ για κάθε $\psi \in L^2(\Omega)$ και $\varphi \in H^1_0(\Omega)$. (Για δοθέν $\psi \in L^2(\Omega)$, η $Z(t)\psi$ είναι η *ασθενής λύση* του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών Dirichlet: *ζητούμε* $\tilde{w} \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ *τέτοια ώστε* $\mathsf{T}^*(t)\tilde{w} = \psi$.) Το αποτέλεσμα ελλειπτικής ομαλότητας δίνει ότι $Z(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: $(\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}}(t)Z(t)\psi - \psi, \varphi) = 0$ για κάθε $\psi \in L^2(\Omega)$ και $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, που συνεπάγεται ότι $\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}}(t)Z(t)\psi = \psi$ για κάθε $\psi \in L^2(\Omega)$. Άρα ο $\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}}(t)$ είναι επί. Επειδή $(\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}}(t)\tilde{w}, \tilde{v}) = B^*(t; \tilde{w}, \tilde{v})$ για κάθε $\tilde{w} \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ και $\tilde{v} \in H^1_0(\Omega)$, η (B2.7) συνεπάγεται ότι ο $\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}}(t)$ είναι ένα προς ένα. Επομένως ο $\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}}(t)$ αντιστρέφεται, ενώ ο $(\mathsf{T}^*_{\mathcal{D}})^{-1}$ ικανοποιεί την (B2.22). □

Έστω

$$\sigma_{\mathcal{D}} := \max\Big\{\ell \in \mathbb{N}_0 : \boldsymbol{\alpha}_s(t) \in (\mathcal{X}_{\mathcal{D}})^q \ \text{ για κάθε } \ t \in [0, t^*_\epsilon] \ \text{ και } \ s \in \{0, \dots, \ell\}\Big\}.$$

Τότε από το Λήμμα B4.1 συμπεραίνουμε εύκολα ότι

$$\text{(B6.1d)} \qquad \begin{cases} \sigma_{\mathcal{D}} = \nu & \text{όταν } \ \nu \le p+1 \\ \sigma_{\mathcal{D}} \ge p+1 & \text{όταν } \ \nu > p+1 \end{cases}.$$

Τα αποτελέσματα ευστάθειας (B3.4) και (B3.11), και οι εκτιμήσεις (B4.12) και (B4.15) εξακολουθούν να ισχύουν. Θέτουμε $\sigma_1 = \sigma_{\mathcal{D}}$ στην Πρόταση B4.2. Οι εκτιμήσεις (B4.22) και (B4.30) είναι της μορφής $O\big(k(h^r + k^{\sigma_{\mathcal{D}}})\big)$. Έτσι, η ανάλυση της παραγράφου B5, δίνει

$$\max_{0 \le n \le N} \|u^n_h - u(t^n)\| \le C\big(h^r + k^{\sigma_{\mathcal{D}}}\big),$$

εφόσον ικανοποιείται η (IV).

Έστω ότι $\sigma_{\mathcal{D}} < \nu$ και $\sigma_1 = \sigma_{\mathcal{D}} + 1$. Τότε, εν γένει, οι συναρτήσεις $\big\{\alpha^n_{j\sigma_1}\big\}^q_{j=1}$ δεν ανήκουν στον $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$. Έτσι, ενώ δεν υπάρχει ο συνοριακός όρος που εκτιμήθηκε στην (B4.25d) (καθώς τα στοιχεία του S_h μηδενίζονται στο $\partial\Omega$), η παραπάνω εκτίμηση δεν φαίνεται να μπορεί να βελτιωθεί διότι η προβολή R_h προσεγγίζει μόνο ομαλές συναρτήσεις του $H^1_0(\Omega)$.

§*B6.2. Περιοδικές συνοριακές συνθήκες.*

Για $m \in \mathbb{N}_0$, ορίζουμε το χώρο

$$H^m_{\text{per}} := \big\{w \in H^m_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : w \ \text{ είναι 1–περιοδική}\big\}$$

με στάθμη την $\|\cdot\|_m$ πάνω σε διάστημα $I_\Omega := (x_\alpha, x_\beta)$, όπου $x_\beta - x_\alpha = 1$. Σημειώνουμε ότι κάθε συνάρτηση του H^m_{per} έχει 1–περιοδικές παραγώγους τάξης μικρότερης ή ίσης με m. Στη συνέχεια με $(\cdot,\cdot)$ θα συμβολίζουμε το $L^2(I_\Omega)$–εσωτερικό γινόμενο, ενώ με $\|\cdot\|$ την αντίστοιχη στάθμη.

Ας διατυπώσουμε το πρόβλημα. Ζητούμε μιά πραγματική συνάρτηση u που να ορίζεται στο $\mathbb{R} \times [0, t^*]$ και να ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
&\partial_t u - f = Lu \equiv (\gamma u_x)_x + \beta u_x + \gamma_0 u \;\; \text{στο} \;\; \mathbb{R} \times (0, t^*], \\
&u(t) \in H^2_{\mathrm{per}} \;\; \text{για κάθε} \;\; t \in (0, t^*], \\
&u(x, 0) = v^0(x) \;\; \text{για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

όπου v^0 είναι μιά 1–περιοδική συνάρτηση οριζόμενη στο $\mathbb{R}$ και γ, β, γ_0, f είναι 1–περιοδικές (ως προς τη μεταβλητή χώρου) συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R} \times [0, t^*]$. Επί πλέον υποθέτουμε ότι η γ είναι θετική στο $\mathbb{R} \times [0, t^*]$. Η διακριτοποίηση στο χώρο στηρίζεται σε μιά οικογένεια $\{S_h\}_{h \in (0, h_\alpha)}$ πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του H^1_{per} (π.χ. $\{S_h\}_{h \in (0, h_\alpha)}$ μπορεί να είναι ο χώρος των ομαλών 1–περιοδικών splines βαθμού $r-1$), τέτοιων ώστε

$$(\mathrm{H}_{\mathcal{P}}) \;\; \inf_{\chi \in S_h} (\|w - \chi\| + h\|w - \chi\|_1) \le C_{\tilde{P}} h^s \|w\|_s, \;\; \forall w \in H^s_{\mathrm{per}}, \;\; s = 2, \ldots, r, \;\; \forall h \in (0, h_\alpha).$$

Για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $h \in (0, h_\alpha)$, ορίζουμε μιά απεικόνιση $L_h(t) : S_h \longrightarrow S_h$, μέσω της απαίτησης $(L_h(t)\varphi, \chi) = -(\gamma(\cdot, t)\partial_x \varphi, \partial_x \chi) - (\beta(\cdot, t)\partial_x \varphi, \chi) - (\gamma_0(\cdot, t)\varphi, \chi)$, $\forall \varphi, \chi \in S_h$, και θέτουμε $F_h(t) := P_h(f(\cdot, t))$, όπου P_h είναι ο τελεστής της $L^2(I_\Omega)$–προβολής στον S_h.

Για κάθε $t \in [0, t^*]$ ορίζουμε, ακόμα, τις διγραμμικές μορφές $B(t)$, $B^*(t)$, $\dot{B}(t)$: $H^1(I_\Omega) \times H^1(I_\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, ως εξής: $B(t; v, w) := (\gamma(\cdot, t)\partial_x v, \partial_x w) + (\beta(\cdot, t)\partial_x v, w) + \mathcal{M}_0(v, w)$, $B^*(t; v, w) := (\gamma(\cdot, t)\partial_x v, \partial_x w) - (\beta(\cdot, t)\partial_x v, w) + ((\mathcal{M}_0 - \partial_x \beta(\cdot, t))v, w)$, $\dot{B}(t; v, w) := (\partial_t \gamma(\cdot, t)\partial_x v, \partial_x w) + (\partial_t \beta(\cdot, t)\partial_x v, w)$, όπου $\mathcal{M}_0$ θετική σταθερά ανάλογη εκείνης που ορίστηκε στην (B2.2d). Τα Λήμματα B2.1 και B2.2 εξακολουθούν προφανώς να ισχύουν (θέτοντας I_Ω στη θέση του Ω). Αντί του Λήμματος B2.3, οι B, B^* και $\dot{B}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(\text{B6.2a}) \qquad B^*(t; v, w) = B(t; w, v), \;\; \forall v, w \in H^1_{\mathrm{per}}, \;\; \forall t \in [0, t^*],$$

$$(\text{B6.2b}) \qquad |\dot{B}(t; v, w)| \le C_{\dot{B}} \|v\| \|w\|_2, \;\; \forall v \in H^1_{\mathrm{per}}, \;\; \forall w \in H^2_{\mathrm{per}}, \;\; \forall t \in [0, t^*],$$

των οποίων η απόδειξη είναι ανάλογη εκείνης των (B2.8) και (B2.9), αντίστοιχα.

Για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ ορίζουμε μία H^1 προβολή $R_h : [0, t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(H^1_{\mathrm{per}}; S_h)$, μέσω της απαίτησης: $B(t; R_h(t)w - w, \chi) = 0$, $\forall \chi \in S_h$, για οποιοδήποτε $w \in H^1_{\mathrm{per}}$ και $t \in [0, t^*]$. Η R_h έχει την ακόλουθη προσεγγιστική ιδιότητα

$$(\text{B6.2c}) \qquad \|\partial_t^\ell w(t) - \partial_t^\ell (R_h w)(t)\| + h\|\partial_t^\ell w(t) - \partial_t^\ell (R_h w)(t)\|_1 \le C h^s \sum_{m=0}^{\ell} \|\partial_t^m w(t)\|_s,$$

για κάθε $w \in C^\ell([0, t^*], H^s_{\mathrm{per}})$, $s \in \{2, \ldots, r\}$, $t \in [0, t^*]$, $h \in (0, h_\alpha)$ και $\ell \in \{0, 1\}$. Η (B6.2c) αποδεικνύεται όπως οι (B2.13) και (B2.17), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τώρα η συνάρτηση σφάλματος e ανήκει στον $H^1_{\rm per}$ και βασιζόμενοι στις (B6.2a), (B6.2b) και $(\mathrm{H}_{\mathcal{P}})$.

Σημείωση. Στην απόδειξη της (B6.2c) χρειαζόμαστε τον τελεστή

$$\mathsf{T}^* : [0,t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(H^2(I_\Omega); L^2(I_\Omega)),$$

οριζόμενο ως εξής

$$\mathsf{T}^*(t)\tilde{w} = -\partial_x(\gamma(\cdot,t)\partial_x\tilde{w}) - \beta(\cdot,t)\partial_x\tilde{w} + \big(\mathcal{M}_0 - \partial_x\beta(\cdot,t)\big)\tilde{w}, \quad \tilde{w} \in H^2(I_\Omega), \quad t \in [0,t^*],$$

και τον τελεστή $\mathsf{T}^*_{\rm per} : [0,t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(H^2_{\rm per}; H^0_{\rm per})$, ο οποίος περιγράφεται όπως ο T^*

Οι (B2.5), (B2.7) και το Λήμμα Lax–Milgram εξασφαλίζουν ότι υπάρχει γραμμικός τελεστής $Z(t) : H^0_{\rm per} \longrightarrow H^1_{\rm per}$ τέτοιος ώστε $B^*(t; Z(t)\psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$ για κάθε $\psi \in H^0_{\rm per}$ και $\varphi \in H^1_{\rm per}$. (Για δοθέν $\psi \in H^0_{\rm per}$, η $Z(t)\psi$ είναι η *ασθενής λύση* του ελλειπτικού προβλήματος περιοδικών συνοριακών τιμών: *ζητούμε* $\tilde{w} \in H^2_{\rm per}$ *τέτοια ώστε* $\mathsf{T}^*_{\rm per}(t)\tilde{w} = \psi$.)

Έστω $\psi \in H^0_{\rm per}$. Το αποτέλεσμα ελλειπτικής ομαλότητας δίνει ότι: $Z(t)\psi\,|_{I_\Omega} \in H^2(I_\Omega)$. Έτσι $(\mathsf{T}^*(t)(Z(t)\psi\,|_{I_\Omega}) - \psi, \varphi) = 0$ για κάθε $\varphi \in H^1_0(I_\Omega)$. Επειδή ο $H^1_0(I_\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(I_\Omega)$, αυτό συνεπάγεται ότι $\mathsf{T}^*(t)(Z(t)\psi\,|_{I_\Omega}) = \psi$ σχεδόν παντού στο I_Ω. Στη συνέχεια έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = (\mathsf{T}^*(t)(Z(t)\psi\,|_{I_\Omega}) - \psi, \varphi) &= B^*(t; Z(t)\psi, \varphi) - (\psi, \varphi) \\ &\quad - \big[\gamma(x_\beta,t)\partial_x(Z(t)\psi)(x_\beta)\varphi(x_\beta) - \gamma(x_\alpha,t)\partial_x(Z(t)\psi)(x_\alpha)\varphi(x_\alpha)\big] \\ &= -\,\gamma(x_\alpha,t)\varphi(x_\alpha)\big[\partial_x(Z(t)\psi)(x_\beta) - \partial_x(Z(t)\psi)(x_\alpha)\big], \quad \forall\varphi \in H^1_{\rm per}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\varphi \equiv 1$ παίρνουμε ότι $\partial_x(Z(t)\psi)(x_\beta) = \partial_x(Z(t)\psi)(x_\alpha)$. Καθώς $H^2(I_\Omega) \subset C^1(I_\Omega)$ και $Z(t)\psi \in H^1_{\rm per}$, έπεται ότι $Z(t)\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Έστω $I_\Omega + m := \{x + m : x \in I_\Omega\}$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Η 1–περιοδικότητα σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $Z(t)\psi\,|_{I_\Omega} \in H^2(I_\Omega)$, δίνουν ότι $Z(t)\psi\,|_{I_\Omega+m} \in H^2(I_\Omega + m)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Άρα $Z(t)\psi \in H^2_{\rm loc}(\mathbb{R})$ (βλ. π.χ. Théorème 1.4-3 στο βιβλίο [RavT]). Τελικά $Z(t)\psi \in H^2_{\rm per}$.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι $Z(t) : H^0_{\rm per} \longrightarrow H^2_{\rm per}$ και $\mathsf{T}^*_{\rm per}(t)Z(t)\psi = \psi$ για κάθε $\psi \in H^0_{\rm per}$. Άρα ο $\mathsf{T}^*_{\rm per}(t)$ είναι επί. Επειδή $(\mathsf{T}^*_{\rm per}(t)\tilde{w}, \tilde{v}) = B^*(t; \tilde{w}, \tilde{v})$ για κάθε $\tilde{w} \in H^2_{\rm per}$ και $\tilde{v} \in H^1_{\rm per}$, από την (B2.7) έπεται ότι ο $\mathsf{T}^*_{\rm per}(t)$ είναι ένα προς ένα. Επομένως ο $\mathsf{T}^*_{\rm per}(t)$ αντιστρέφεται και $(\mathsf{T}^*_{\rm per})^{-1}(t) = Z(t)$. Από το αποτέλεσμα ελλειπτικής ομαλότητας έχουμε επί πλέον ότι $\|(\mathsf{T}^*_{\rm per})^{-1}(t)\psi\|_2 \le C\|\psi\|$ για κάθε $\psi \in H^0_{\rm per}$ και $t \in [0,t^*]$. $\square$

Έστω

$$\sigma_{\rm per} := \max\big\{\ell \in \mathbb{N}_0 : \quad \boldsymbol{\alpha}_s(t) \in (H^2_{\rm per})^q, \quad t \in [0,t^*_\epsilon], \quad 0 \le s \le \ell\big\}.$$

Υποθέτοντας ότι η λύση u είναι αρκετά ομαλή, 1–περιοδικότητα ισχύει για υψηλής τάξης μεικτές (ως προς x και t) παραγώγους της. Έτσι χρησιμοποιώντας το Λήμμα B4.1 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_{\rm per} = \nu$. Θέτοντας $\sigma_1 = \sigma_{\rm per} = \nu$ και επιλέγοντας $v^0_h \in S_h$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (IV), η ανάλυση των παραγράφων B4–B5 δίνει την, βέλτιστης τάξης, εκτίμηση σφάλματος

$$\max_{0\leq n\leq N} \|u_h^n - u(t^n)\| \leq C(h^r + k^\nu).$$

§B6.3. Ειδικά προβλήματα.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\sigma_{\mathcal{BC}}$ και $\mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$ στη θέση των $\sigma_{\mathcal{N}}$, $\sigma_{\mathcal{D}}$ και $\mathcal{X}_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$, αντίστοιχα, ενώ κύριο αντικείμενο θα είναι ο προσδιορισμός των τιμών του $\sigma_{\mathcal{BC}}$ σε ειδικές περιπτώσεις, δηλ. υπό επί πλέον υποθέσεις για τους συντελεστές του διαφορικού τελεστή L, τον μη ομογενή όρο f και το χωρίο Ω.

Στην περίπτωση κατά την οποία $\nu \leq p+1$, το $\sigma_{\mathcal{BC}}$ παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή δηλ. $\sigma_{\mathcal{BC}} = \nu$. Γι' αυτό υποθέτουμε ότι $\nu > p+1$. Ακόμα, για κάποιο m_0, γράφοντας $w \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^{m_0}$, όπου $w : [0,t^*]\longrightarrow(H^2(\Omega))^{m_0}$, θα εννοούμε ότι $w(t) \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^{m_0}$ για κάθε $t \in [0,t^*]$. Επί πλέον, όταν $w \in C^\ell([0,t^*], H^2(\Omega))$ και $w \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$, τότε $\partial_t^m w \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$, $m = 0,\ldots,\ell$.

Είναι γνωστό (βλ. [Cr1], Chapitre 2) ότι έχουμε βέλτιστη τάξη σύγκλισης στο χρόνο (δηλ. ως προς k), όταν οι συντελεστές του L και ο μη ομογενής όρος f δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή χρόνου t. Στην πρόταση που ακολουθεί δίνουμε μιά περιορισμένη γενίκευση αυτού του αποτελέσματος.

Πρόταση B6.1. *Υποθέτουμε ότι $L(t) = g(t)\widetilde{L}$, όπου: g είναι μιά ομαλή και θετική συνάρτηση που ορίζεται στο $[0,t^*]$ και $\widetilde{L}w \equiv \nabla\cdot(\widetilde{\Gamma}(x)\nabla w) - \widetilde{\beta}(x)\nabla w - \widetilde{\gamma}_0(x)w$. Υποθέτουμε ακόμα ότι $f(x,t) = g(t)\widetilde{f}(x)$ για κάθε $(x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,t^*]$, όπου $\widetilde{f}$ είναι μιά συνάρτηση που ορίζεται και είναι αρκετά ομαλή στο $\overline{\Omega}$. Τότε $\sigma_{\mathcal{BC}} = \nu$.*

Απόδειξη. Από τη διαφορική εξίσωση και τον κανόνα του Leibniz καταλήγουμε στη σχέση

$$\text{(B6.3)}\qquad \widetilde{L}^{s+1}\partial_t^m u = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell}\ \partial_t^{m-\ell}\left(\frac{1}{g}\right)\widetilde{L}^s\partial_t^{\ell+1}u, \qquad m = 1,\ldots,\nu-1,\ \ s = 0,\ldots,\nu-p-1.$$

Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\text{(B6.4)}\qquad \widetilde{L}^s\partial_t^m u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}},\ \ m = 1,\ldots,\nu-s,\ \ s = 0,\ldots,\nu-p-1.$$

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση κάνοντας μαθηματική επαγωγή ως προς s. Όταν $s = 0$, τότε η (B6.4) ισχύει προφανώς λόγω των συνοριακών συνθηκών. Υποθέτουμε ότι η (B6.4) ισχύει για κάποιο $s \in \{0,\ldots,\nu-p-2\}$. Έστω $m \in \{1,\ldots,\nu-s-1\}$. Από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι $\widetilde{L}^s\partial_t^{\ell+1}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$ για $\ell = 0,\ldots,m$ (διότι $1 \leq \ell+1 \leq m+1 \leq \nu-s-1+1 = \nu-s$). Αυτό σε συνδυασμό με την (B6.3) δίνει ότι $\widetilde{L}^{s+1}\partial_t^m u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$. Επομένως δείξαμε ότι η (B6.4) ισχύει για $s+1$.

Για να εξασφαλίσουμε ότι $\sigma_{\mathcal{BC}} = \nu$, αρκεί να δείξουμε ότι

(B6.5) $\widetilde{L}^s \boldsymbol{\alpha}_m \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q$ και $\boldsymbol{\alpha}_{m+1} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q, \quad s = 1, \ldots, \nu - m, \quad m = p+1, \ldots, \nu - 1.$

Η απόδειξη της (B6.5) θα γίνει επαγωγικά. Έστω $m = p+1$. Από τις (B4.4) και (B6.4) έπεται ότι:

$$\widetilde{L}^s \boldsymbol{\alpha}_{p+1} = \frac{AT^p \boldsymbol{e}}{p!} \widetilde{L}^s \partial_t^{p+1} u \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q, \quad s = 1, \ldots, \nu - p - 1.$$

Χρησιμοποιώντας τις (B4.4) και (B4.5), παίρνουμε

$$\boldsymbol{\alpha}_{p+2} = \frac{AT^{p+1}\boldsymbol{e}}{(p+1)!} \partial_t^{p+2} u + gA \left[\frac{AT^p \boldsymbol{e}}{p!} - \frac{T^{p+1}\boldsymbol{e}}{(p+1)!} \right] \widetilde{L} \partial_t^{p+1} u. \tag{B6.6}$$

Από τις (B6.6) και (B6.4) προκύπτει ότι $\boldsymbol{\alpha}_{p+2} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q$. Υποθέτουμε τώρα ότι $m_0 \in \{p+1, \ldots, \nu - 2\}$ και ότι η (B6.5) ισχύει για $m = p+1, \ldots, m_0$. Η (B4.5) δίνει

$$\begin{aligned} \widetilde{L}^s \boldsymbol{\alpha}_{m_0+1} = & \frac{AT^{m_0}\boldsymbol{e}}{m_0!} \widetilde{L}^s \partial_t^{m_0+1} u \\ & + \sum_{\ell=p+1}^{m_0} \frac{AT^{m_0-\ell}}{(m_0-\ell)!} \partial_t^{m_0-\ell} g \left[\widetilde{L}^{s+1} \boldsymbol{\alpha}_\ell - \frac{T^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!} \widetilde{L}^{s+1} \partial_t^\ell u \right], \\ & \qquad s = 1, \ldots, \nu - m_0 - 1. \end{aligned} \tag{B6.7}$$

και

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{m_0+2} = & \frac{AT^{m_0+1}\boldsymbol{e}}{(m_0+1)!} \partial_t^{m_0+2} u \\ & + \sum_{\ell=p+1}^{m_0+1} \frac{AT^{m_0+1-\ell}}{(m_0+1-\ell)!} \partial_t^{m_0+1-\ell} g \left[\widetilde{L} \boldsymbol{\alpha}_\ell - \frac{T^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!} \widetilde{L} \partial_t^\ell u \right]. \end{aligned} \tag{B6.8}$$

Έστω $s \in \{1, \ldots, \nu - m_0 - 1\}$. Τότε $1 \le s < \nu - p - 1$ και $1 \le m_0 + 1 \le \nu - s$. Έτσι η (B6.4) δίνει $\widetilde{L}^s \partial_t^{m_0+1} u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$. Έστω $\ell \in \{p+1, \ldots, m_0\}$. Τότε $1 \le \ell \le m_0 \le \nu - (s+1)$, ενώ $2 \le s+1 \le \nu - p - 1$. Έτσι από την (B6.4) έπεται ότι $\widetilde{L}^{s+1} \partial_t^\ell u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$. Επειδή $1 < s+1 \le \nu - m_0 \le \nu - \ell$, η υπόθεση της επαγωγής εξασφαλίζει ότι $\widetilde{L}^{s+1} \boldsymbol{\alpha}_\ell \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$. Επομένως, η (B6.7) συνεπάγεται ότι

$$\widetilde{L}^s \boldsymbol{\alpha}_{m_0+1} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q, \quad s = 1, \ldots, \nu - m_0 - 1. \tag{B6.9}$$

Χρησιμοποιώντας, για $s = 1$, τις (B6.9), (B6.4) και την υπόθεση της επαγωγής, από την (B6.8) έπεται ότι

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_0+2} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q. \quad \blacksquare$$

Χρησιμοποιώντας την (B4.5) μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς την τιμή του $\sigma_{\mathcal{BC}}$ όταν είναι γνωστή η συμπεριφορά στο $\partial\Omega$ της λύσης u και ορισμένων υψηλής τάξης παραγώγων της, αλλά αυτό συμβαίνει σπάνια. Γι' αυτόν το λόγο, συνήθως μπορούμε να βρούμε μόνο ένα κάτω φράγμα για το $\sigma_{\mathcal{BC}}$. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μιά ικανή και αναγκαία συνθήκη τέτοια ώστε $\sigma_{\mathcal{BC}} \ge p + 2$.

Λήμμα B6.1. *Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος* B4.1, *τότε έχουμε*

$$\boldsymbol{\alpha}_{p+2} = \frac{AT^{p+1}\boldsymbol{e}}{(p+1)!}\partial_t^{p+2}u + A\left[\frac{AT^p\boldsymbol{e}}{p!} - \frac{T^{p+1}\boldsymbol{e}}{(p+1)!}\right]L\partial_t^{p+1}u, \tag{B6.10a}$$

και

$$\boldsymbol{\alpha}_{p+2} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q \ \text{ αν και μόνο αν } \ L\partial_t^{p+1}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}. \tag{B6.10b}$$

Απόδειξη. Η (B6.10a) προκύπτει εύκολα από τις (B4.4) και (B4.5). Η (B6.10b) είναι συνέπεια των (B6.10a) και (C). ■

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα B6.1, μπορούμε να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα της εργασίας [AvD1] σε πιό γενικές παραβολικές εξισώσεις με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Πρόταση B6.2. *Έστω ότι:* (a) *g είναι μιά συνάρτηση θετική και αρκετά ομαλή στο $\overline{\Omega} \times [0,t^*]$, $L(t)w \equiv g(x,t)\nabla\cdot(\Gamma(x)\nabla w) + \gamma_0(x,t)w$ και $\partial_t^{p+1}\left(\dfrac{f}{g}\right) = 0$ στο $\partial\Omega \times [0,t^*]$, ή* (b) *$d \geq 2$, $\Omega = (0,1)^d$, $\{g_j\}_{j=1}^d$ είναι συναρτήσεις θετικές και αρκετά ομαλές στο $\overline{\Omega} \times [0,t^*]$, $L(t)w \equiv \sum\limits_{j=1}^d g_j(x,t)\partial_{x_j}^2 w + \gamma_0(x,t)w$ και $\partial_t^{p+1}\left(\dfrac{f}{g_j}\right) = 0$ στο $\partial\Omega \times [0,t^*]$ για $j = 1,\dots,d$. Υποθέτουμε, ακόμα, ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες* Dirichlet*. Τότε: $\sigma_{\mathcal{D}} \geq p+2$.*

Απόδειξη.
(a) Από τις υποθέσεις και τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε $\partial_t^{p+1}\nabla\cdot(\Gamma\nabla u) \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$. Έτσι, $L\partial_t^{p+1}u = g\partial_t^{p+1}\left(\nabla\cdot(\Gamma\nabla u)\right) + \gamma_0\partial_t^{p+1}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ και το Λήμμα B6.1 δίνει αμέσως $\sigma_{\mathcal{D}} \geq p+2$.
(b) Έστω $\partial\Omega_j := \left\{x = (x_1,\dots,x_d) \in \partial\Omega : x_j = 0,1\right\}$ για $j = 1,\dots,d$. Από τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet παίρνουμε

$$L\partial_t^{p+1}u = \sum_{j=1}^d g_j\partial_t^{p+1}\partial_{x_j}^2 u \ \text{ στο } \ \partial\Omega \times [0,t^*], \tag{B6.11}$$

και

$$\partial_{x_\ell}^2 u = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j \times [0,t^*], \quad \ell \neq j, \quad \ell, j = 1,\dots,d. \tag{B6.12a}$$

Από τη διαφορική εξίσωση, τις συνοριακές συνθήκες και την (B6.12a) συμπεραίνουμε ότι $\partial_{x_j}^2 u = -\dfrac{f}{g_j}$ στο $\partial\Omega_j \times [0,t^*]$, για $j = 1\dots,d$. Άρα

$$\partial_t^{p+1}\partial_{x_j}^2 u = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j \times [0,t^*], \quad j = 1\dots,d. \tag{B6.12b}$$

Επειδή $\partial\Omega = \cup_{j=1}^d \partial\Omega_j$, από τις (B6.11) και (B6.12) έχουμε ότι $L\partial_t^{p+1}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$. Επομένως, το Λήμμα B6.1 δίνει $\sigma_{\mathcal{D}} \geq p+2$. ■

Σημείωση. Ο τελεστής L της προηγούμενης πρότασης γράφεται σε μορφή της (B1.1d) ως εξής: (a) $L(t)w = \nabla\cdot(g(x,t)\Gamma(x)\nabla w) - (\nabla g(x,t))^T\Gamma(x)\nabla w + \gamma_0(x,t)w$, και (b) $L(t)w = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(g_j(x,t)\partial_{x_j}w) - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}g_j(x,t)\partial_{x_j}w + \gamma_0(x,t)w$. □

Στην επόμενη πρόταση θα παρουσιάσουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα για την περίπτωση συνοριακών συνθηκών Neumann.

Πρόταση Β6.3. *Έστω* $\Omega = (0,1)^d$ *και* $L(t)w \equiv \sum_{s=1}^{d} g_s(t)\partial_{x_s}^2 w + \beta(x,t)\nabla w + \gamma_0(t)w$, *όπου* $\boldsymbol{n}\beta = 0$ *στο* $\partial\Omega \times [0,t^*]$ *και* $\{g_s\}_{s=1}^d$ *είναι συναρτήσεις θετικές και ομαλές στο* $[0,t^*]$. *Ακόμα, υποθέτουμε ότι* $\partial_t^{p+1}\left(\frac{\boldsymbol{n}\nabla f}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{g}}\right) = 0$ *στο* $\partial\Omega\times[0,t^*]$ (*όπου* $\boldsymbol{g} := (g_1,\dots,g_d)^T$), $\beta = \nabla\varphi$ *και ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες* Neumann. *Τότε* $\sigma_{\mathcal{N}} \geq p+2$.

Απόδειξη. Για $j = 1,\dots,d$, έστω $\partial\Omega_j$ υποσύνολο του $\partial\Omega$ που ορίζεται όπως στην απόδειξη της Πρότασης Β6.2. Τότε, έχουμε ότι

$$\mathcal{X}_{\mathcal{N}} = \big\{w \in H^2(\Omega) : \partial_{x_j} w = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j, \ \ j = 1,\dots,d\big\}.$$

Έστω $j \in \{1,\dots,d\}$. Χρησιμοποιώντας τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann και τις υποθέσεις για τη συνάρτηση β, παίρνουμε

$$\text{(B6.13a)} \qquad \partial_{x_s}^{\ell}\partial_{x_j} u = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j \times [0,t^*], \ \ s \neq j, \ \ s = 1,\dots,d, \ \ \ell = 0,1,2,$$

$$\text{(B6.13b)} \qquad \beta_j = \partial_{x_j}\varphi = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j \times [0,t^*],$$

και

$$\text{(B6.13c)} \qquad \partial_{x_j}\beta_s = \partial_{x_j}\partial_{x_s}\varphi = \partial_{x_s}\partial_{x_j}\varphi = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j \times [0,t^*], \ \ s \neq j, \ \ s = 1,\dots,d.$$

Από τη διαφορική εξίσωση, τη συνοριακή συνθήκη και τις (Β6.13a)–(Β6.13c) έχουμε: $\partial_{x_j}\partial_{x_j}^2 u = -\dfrac{\partial_{x_j} f}{g_j} = -\dfrac{\boldsymbol{n}\nabla f}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{g}}$ στο $\partial\Omega_j \times [0,t^*]$. Επομένως,

$$\text{(B6.13d)} \qquad \partial_t^{p+1}\partial_{x_j}\partial_{x_j}^2 u = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega_j \times [0,t^*].$$

Οι (Β6.13a)–(Β6.13d), εύκολα, δίνουν ότι: $\partial_{x_j} L\partial_t^{p+1}u = 0$ στο $\partial\Omega_j \times [0,t^*]$.

Άρα $L\partial_t^{p+1}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ και από το Λήμμα Β6.1 έπεται $\sigma_{\mathcal{N}} \geq p+2$. ■

Κλείνουμε την παράγραφο μ' ένα παράδειγμα, το οποίο δείχνει ότι το $\sigma_{\mathcal{BC}}$ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές μεταξύ $p+2$ και ν.

Πρόταση Β6.4. *Έστω* $d = 1$, $\Omega = (0,1)$, $L(t)w = \partial_x^2 w + \gamma_0(x,t)w$, *όπου* γ_0 *μιά συνάρτηση αρκετά ομαλή στο* $\overline{\Omega} \times [0,t^*]$, $f = 0$ *και* $m_0 \in \mathbb{N}_0$ *με* $m_0 \leq \nu - p - 2$. *Τότε*:

(1) *Για συνοριακές συνθήκες* Dirichlet:

$$\text{αν } \ \partial_x^{2j-1}\gamma_0 \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \ \text{ για } \ j = 1,\dots,m_0, \ \ \text{τότε } \ \sigma_{\mathcal{D}} = m_0 + p + 2,$$

(2) *Για συνοριακές συνθήκες* Neumann:

$$\text{αν } \ \partial_x^{2j}\gamma_0 \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}} \ \text{ για } \ j = 0,\dots,m_0, \ \ \text{τότε } \ \sigma_{\mathcal{N}} = m_0 + p + 2.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, αν $\varphi_1 \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ και $\varphi_2 \in C^2(\overline{\Omega})$, τότε $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$. Ακόμα, αν $\varphi_1 \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}} \cap H^3(\Omega)$ και $\varphi_2 \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}} \cap C^3(\overline{\Omega})$, τότε $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$ και $\partial_x\varphi_1\partial_x\varphi_2 \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}$.

Έστω $j_0 \in \mathbb{N}_0$ και συναρτήσεις $\psi \in H^{2j_0+2}(\Omega)$, $\varphi \in C^{2j_0+2}(\overline{\Omega})$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\partial_x^{2j_0}(\varphi\psi) = \sum_{\ell=0}^{2j_0} \binom{2j_0}{\ell} \partial_x^{\ell}\psi\partial_x^{2j_0-\ell}\varphi,$$

που προκύπτει εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz, έχουμε

$$\text{(B6.14a)}\qquad \begin{gathered}\text{αν } \left\{\partial_x^{2j}\psi\right\}_{j=0}^{j_0} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \text{ και } \left\{\partial_x^{2j-1}\varphi\right\}_{j=1}^{j_0} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \\ \text{τότε } \partial_x^{2j_0}(\varphi\psi) \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}},\end{gathered}$$

και

$$\text{(B6.14b)}\qquad \begin{gathered}\text{αν } \left\{\partial_x^{2j}\psi\right\}_{j=0}^{j_0} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{N}} \text{ και } \left\{\partial_x^{2j}\varphi\right\}_{j=0}^{j_0} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{N}} \\ \text{τότε } \partial_x^{2j_0}(\varphi\psi) \in \mathcal{X}_{\mathcal{N}}.\end{gathered}$$

Από τη διαφορική εξίσωση έπεται ότι

$$\text{(B6.15)}\qquad \partial_x^{2(j+1)}u = \partial_t\partial_x^{2j}u - \partial_x^{2j}(\gamma_0 u), \quad j = 0, \dots, m_0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\text{(B6.16)}\qquad \partial_x^{2j}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}, \quad j = 0, \dots, m_0 + 1.$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει με επαγωγή. Για $j = 0$, η (B6.16) ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε ότι η (B6.16) ισχύει για $j = 0, \dots, j_0$, όπου $j_0 \in \{0, \dots, m_0\}$. Από την υπόθεση της επαγωγής έπεται $\partial_t\partial_x^{2j_0} \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$. Η υπόθεση της επαγωγής, οι υποθέσεις για τη συνάρτηση γ_0 και η (B6.14) δίνουν $\partial_x^{2j_0}(u\gamma_0) \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$. Έτσι από την (B6.15) συμπεραίνουμε ότι $\partial_x^{2(j_0+1)}u \in \mathcal{X}_{\mathcal{BC}}$.

Από το Λήμμα B4.1 και την (B6.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\text{(B6.17)}\qquad \partial_x^{2j}\boldsymbol{\alpha}_\ell \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q, \quad j = 0, \dots, m_0 + 1, \quad \ell = 0, \dots, p + 1.$$

Τώρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{(B6.18)}\qquad \partial_x^{2j}\boldsymbol{\alpha}_\ell \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q, \quad j = 0, \dots, m_0 + p + 2 - \ell, \quad \ell = p + 1, \dots, p + 2 + m_0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα. Όταν $\ell = p+1$, οι (B6.18) και (B6.17) ταυτίζονται. Υποθέτουμε ότι η (B6.18) ισχύει για $\ell = p + 1, \dots, \tilde{\ell}$, όπου $p + 1 \le \tilde{\ell} \le p + 1 + m_0$. Από την (B4.2) λαμβάνουμε

$$\text{(B6.19)}\quad \partial_x^{2j}\boldsymbol{\alpha}_{\tilde{\ell}+1} = A\partial_x^{2(j+1)}\boldsymbol{\alpha}_{\tilde{\ell}} + \sum_{m=0}^{\tilde{\ell}} \frac{AT^{\tilde{\ell}-m}}{(\tilde{\ell}-m)!}\partial_x^{2j}\left(\partial_t^{\tilde{\ell}-m}\gamma_0\boldsymbol{\alpha}_m\right), \quad j = 0, \dots, m_0+p+1-\tilde{\ell}.$$

Έστω $j \in \{0, \ldots, m_0 + p + 1 - \tilde{\ell}\}$. Τότε $j + 1 \in \{1, \ldots, m_0 + p + 2 - \tilde{\ell}\}$ και επειδή έχουμε υποθέσει ότι η (B6.18) ισχύει για $\ell = \tilde{\ell}$, έπεται ότι $\partial_x^{2(j+1)} \boldsymbol{\alpha}_{\tilde{\ell}} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q$. Έστω $m \in \{0, \ldots, \tilde{\ell}\}$. Επειδή $m_0 + p + 1 - \tilde{\ell} \le m_0 + p + 2 - m$, από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι $\partial_x^{2j_0} \boldsymbol{\alpha}_m \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q$ για $j_0 = 0, \ldots, j$. Αυτό σε συνδυασμό με τις υποθέσεις για τη συνάρτηση γ_0 ($m_0 \ge m_0 + p + 1 - \tilde{\ell} \ge j$) και την (B6.14) συνεπάγεται ότι $\partial_x^{2j} (\partial_t^{\tilde{\ell} - m} \gamma_0 \boldsymbol{\alpha}_m) \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q$. Έτσι η (B6.19) δίνει ότι $\partial_x^{2j} \boldsymbol{\alpha}_{\tilde{\ell}+1} \in (\mathcal{X}_{\mathcal{BC}})^q$, δηλ. η (B6.18) ισχύει για $\ell = \tilde{\ell} + 1$. ∎

§B7. Γενικά σχόλια–Σύνδεση με τη βιβλιογραφία.

Ανάλυση μεθόδων Runge–Kutta, συνδυασμένων με κάποια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, για παραβολικά προβλήματα αρχικών τιμών (χωρίς ιδιαίτερη αναφορά στο είδος των συνοριακών συνθηκών) έγινε για πρώτη φορά από τον Crouzeix (1975) στη διατριβή του, [Cr1]. Εκεί, στην περίπτωση που ο τελεστής L και ο μη ομογενής όρος f δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή t αποδεικνύει τη βέλτιστη a priori εκτίμηση σφάλματος $O(k^\nu + h^r)$ ενώ στη γενική περίπτωση το αντίστοιχο αποτέλεσμα είναι $O(h^r + k^{\min\{p+1,\nu\}})$.

Αργότερα, ο Brocéhn (1980) στη διατριβή του, [Boe], εξετάζει προσεγγίσεις Runge–Kutta/πεπερασμένων στοιχείων της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Dirichlet, για μιά γενική γραμμική εξίσωση τύπου Schrödinger

$$\partial_t u - f = Lu \equiv i\nabla \cdot (\Gamma \nabla u + i\beta u) - \beta \nabla u - i\gamma u,$$

όπου $\{\beta_j\}_{j=1}^d$ και γ είναι πραγματικές συναρτήσεις, $\Gamma = \Gamma^* := (\overline{\Gamma})^T$ και $(\overline{\boldsymbol{\xi}})^T \Gamma(\boldsymbol{\xi}) \ge C|\boldsymbol{\xi}|^2$ για κάθε $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$. Στην περίπτωση που οι συντελεστές και η συνάρτηση f δεν εξαρτώνται από το χρόνο αποδεικνύει το βέλτιστο αποτέλεσμα $O(h^r + k^\nu)$. Στην περίπτωση που εξαρτώνται από το χρόνο αναλύει μόνο *ημιπεπλεγμένες* (*semi-implicit*) μέθοδους Runge–Kutta (δηλ. ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός μ' ένα τουλάχιστον μη μηδενικό διαγώνιο στοιχείο) και καταλήγει στην εκτίμηση σφάλματος $O(h^r + k^{\min\{\nu,p+1\}})$. Έπειτα, ακολουθώντας τις μεθόδους των αποδείξεων του Crouzeix, όταν $\nu = p + 2$ και $r \le 2\nu$, παίρνει εκτίμηση σφάλματος $O(h^r + k^\nu)$, υποθέτοντας ότι ισχύουν, επί πλέον, οι σχέσεις: $\frac{k}{h^2} \le C$, (H_2'), και ότι η λύση u ικανοποιεί τη συνθήκη $L(t_1)\partial_t^{\nu-1} u(t_2) \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ για κάθε $t_1, t_2 \in [0, t^*]$ (βλ. [Boe], Theorem 4.2, p. 109). Οι συνθήκες αυτές, σε ότι αφορά τις παραμέτρους διακριτοποίησης k και h, γενικά είναι αρκετά περιοριστικές. Για την 2–DIRK, π.χ., που είναι μιά ημιπεπλεγμένη μέθοδος Runge–Kutta με $\nu = p + 2 = 3$, σύμφωνα με την ανάλυση της §B6 (βλ. Λήμμα B6.1) η συνθήκη: $L(t)\partial_t^2 u(t) \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ για κάθε $t \in [0, t^*]$, είναι ικανή να οδηγήσει στην εκτίμηση $O(h^r + k^3)$ χωρίς πρόσθετη υπόθεση για τα k και h.

Ο Karakashian (1986) στην εργασία [Ka] θεωρεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Dirichlet για την παραβολική εξίσωση

$$\partial_t u = \nabla \cdot (\Gamma(x,t)\nabla u) - \gamma_0(x,t)u, \tag{B7.1}$$

και αναλύει πλήρως διακριτά σχήματα Runge–Kutta/Galerkin, συνδυασμένα με *προρρυθμισμένες* (*preconditioned*) επαναληπτικές μεθόδους με σκοπό την προσεγγιστική λύση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν (δηλ. των (Β3.2b)). Για το βασικό σχήμα η λαμβανόμενη τάξη σύγκλισης είναι ίδια μ' εκείνη που εξασφαλίζεται στην [Cr1].

Οι Akrivis & Dougalis (1991) στην [AvD1] αναλύουν πλήρως διακριτές προσεγγίσεις για τη λύση της εξίσωσης τύπου Schrödinger

$$\text{(B7.2)} \qquad \partial_t u = i\alpha\Delta u + i\gamma_0(x,t)u,$$

(όπου α μη μηδενική πραγματική σταθερά) που ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Η διακριτοποίηση γίνεται με τη μέθοδο Gauss–Legendre με q στάδια συνδυασμένη με τη συνήθη μέθοδο Galerkin/πεπερασμένων στοιχείων. Υποθέτοντας ότι ισχύει η (H_2'), αποδεικνύουν εκτίμηση σφάλματος $O(h^r + k^{\min\{2q,q+2\}})$ που είναι βέλτιστη όταν $q \le 2$. Η ανάλυση της [AvD1] οδηγεί στην εκτίμηση $O(h^r + k^{\min\{\nu,p+2\}})$ όταν η διακριτοποίηση στο χρόνο γίνει με μιά μέθοδο Runge–Kutta που ικανοποιεί τις ιδιότητες συνέπειας, ευστάθειας και θετικότητας που αναφέραμε στην §Β3 και επεκτείνεται χωρίς δυσκολίες στα παραβολικά προβλήματα της μορφής (Β7.1) με ίδιου τύπου συνοριακές συνθήκες, όπου ο πίνακας Γ εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x. Στην §Β6 (βλ. §Β6.1 και Πρόταση Β6.2) είδαμε ότι αυτή η εκτίμηση ισχύει για ορισμένες πιο γενικής μορφής εξισώσεις (σε ότι αφορά την εξάρτηση των συντελεστών από το χρόνο) και χωρίς να υποθέσουμε την (H_2').

Η δυσκολία ν' αποδειχθεί η βέλτιστη a priori εκτίμηση σφάλματος όταν οι συντελεστές της εξίσωσης και ο μη ομογενής όρος εξαρτώνται από το χρόνο, έστρεψε το ενδιαφέρον στην περίπτωση όπου μόνο ο μη ομογενής όρος f εξαρτάται από το χρόνο (καλούμενη στη συνέχεια ως πρόβλημα (E)) με κύριο άξονα την μελέτη των *ημιδιακριτών στο χρόνο προσεγγίσεων* Runge–Kutta, δηλ. προσεγγίσεων που παράγονται με την ακόλουθη διαδικασία (βλ. [Cr1], Chapitre 2, §2):

$$\text{(TS)} \qquad \begin{aligned} & w^0 := v^0, \\ & \text{για } n = 0,\dots,N-1, \text{ προσδιόρισε } \{w^{n,j}\}_{j=1}^q \subset \mathcal{X}_{\mathcal{BC}} \text{ τέτοια ώστε} \\ & \quad w^{n,j} = w^n + k\sum_{s=1}^q a_{js}(Lw^{n,s} + f(t^{n,s})), \quad j = 1,\dots,q, \\ & \text{και όρισε} \\ & \quad w^{n+1} := w^n + k\sum_{j=1}^q b_j(Lw^{n,j} + f(t^{n,j})). \end{aligned}$$

Ο Crouzeix (βλ. [Cr1], pp. 67–70) κατασκεύασε ένα παράδειγμα προβλήματος (E) με ομαλή λύση και συνοριακές συνθήκες Dirichlet για το οποίο δείχνει ότι: για τη μέθοδο Runge–Kutta Gauss–Legendre με 2 στάδια ισχύει $|E^n| \ge Ck^{3+\frac{1}{4}}$, όπου

$$E^n := \frac{1}{k}\big[u(t^{n+1}) - u(t^n) - k\sum_{j=1}^q b_j(L\zeta^{n,j} + f(t^{n,j}))\big]$$

και $\{\zeta^{n,j}\}_{j=1}^{q} \subset H_0^1(0,\infty)$ τέτοια ώστε

$$\zeta^{n,j} = u(t^n) + k \sum_{s=1}^{q} a_{js}(L\zeta^{n,s} + f(t^{n,s})), \quad j = 1, \ldots, q,$$

που σημαίνει ότι η συγκεκριμένη μέθοδος δεν είναι συνεπής τάξης 4 για το πρόβλημα (E), αντίθετα με ότι συμβαίνει στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (βλ. §A4). Ανάλογο παράδειγμα προβλήματος (E) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet (αλλά σε φραγμένο χωρίο δηλ. $\{\zeta^{n,j}\}_{j=1}^{q} \subset H_0^1(0,1)$) παρουσιάζει ο Brocéhn (βλ. [Boe], pp. 97–100) για μιά εξίσωση τύπου Schrödinger.

Η έρευνα οδήγησε σε καλύτερα αποτελέσματα για προβλήματα (E) (όπου ο $-L$ είναι αυτοσυζυγής και ισχυρά ελλειπτικός) σε σχέση με τη γενική περίπτωση. Οι Brenner, Crouzeix & Thomée (1982) στην εργασία [BCT] (βλ. επίσης [Th], Chapter 8) αναλύουν πλήρως διακριτά σχήματα, τα οποία βασίζονται σε κατάλληλες ρητές συναρτήσεις. Αποδεικνύουν ότι, αν το σχήμα είναι ευσταθές, *ακριβές* (*accurate*) *τάξης* p_0, *αυστηρά ακριβές* (*strictly accurate*) *τάξης* $p_0 - 1$ (για τους ορισμούς αυτών των εννοιών και για ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των, βλέπε [BCT], §1, p. 7, §2, Lemma 1) και ικανοποιούν τη συνθήκη (2.6) της [BCT], τότε ισχύει μιά εκτίμηση σφάλματος $O(h^r + k^{p_0})$ (βλ. [BCT], Theorem 2, Theorem 5 και [Th], Chapter 8, Theorem 4). Για παράδειγμα η μέθοδος Gauss–Legendre με 2 στάδια εφαρμοζόμενη σ' ένα πρόβλημα τύπου (E) ανήκει σ' αυτή την κατηγορία μεθόδων και ικανοποιεί όλες τις παραπάνω υποθέσεις με $p_0 = 4$, και επομένως η λαμβανόμενη εκτίμηση σφάλματος είναι η βέλτιστη.

Ακόμα, οι Ostermann & Roche (1992), [OsR], αναλύουν προσεγγίσεις (TS) του (E) χρησιμοποιώντας φασματικές τεχνικές και παίρνουν εκτίμηση σφάλματος

$$\max_{0 \le n \le N} \|w^n - u(t^n)\| = O(k^{\min\{\nu, p+2+\bar{\nu}\}}),$$

όταν η μέθοδος έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες (βλ. [OsR], (2.7) και (2.9) ή (2.10)). Εδώ $\bar{\nu}$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από την f, τον τελεστή L και το είδος των συνοριακών συνθηκών (βλ. [OsR], (3.6), (3.12)). Ανάλογα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην [LuO], από τους Lubich & Ostermann (1993), υπό ασθενέστερες υποθέσεις ομαλότητας. Επί πλέον, παρατηρούν ότι η τάξη του σφάλματος ως προς k για τις προσεγγίσεις (TS) είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Neumann απ' ότι στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet (κατά $\frac{1}{2}$) όταν $L = \Delta$ και το $\partial\Omega$ είναι ομαλό (βλ. [LuO], p. 116). Η ανάλυση και τα αποτελέσματα των εργασιών [BCT], [OsR] και [LuO] δεν φαίνεται να είναι εύκολο να επεκταθούν στην γενική περίπτωση όπου ο L εξαρτάται από το t.

Σ' αυτό το κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την μελέτη πλήρως διακριτών προσεγγίσεων της λύσης του (B1.1), όπου οι συντελεστές του τελεστή L και ο μη ομογενής όρος f εξαρτώνται από τη μεταβλητή t και οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Neumann. Η ανάλυση της συνέπειας, που έγινε στην §B4, στηρίζεται στην κατασκευή των σ–οιονεί ενδιαμέσων και σ–οιονεί επομένων βημάτων, και πρόκειται για μιά νέα τεχνική συνέπειας οι ρίζες της οποίας υπάρχουν στην εργασία [KaMc], και παρουσιάστηκε πρόσφατα από τους Karakashian, Akrivis & Dougalis (1993) στην εργασία [KAD], αναλύοντας μεθόδους Runge–Kutta για τη μη γραμμική εξίσωση του Schrödinger. Για να φτάσουμε στην κλασματική τάξη σύγκλισης, που περιγράφεται στο Θεώρημα Β5.1, εκμεταλευτήκαμε το γεγονός ότι η προβολή R_h προσεγγίζει ομαλές συναρτήσεις ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά τους στο σύνορο, και χρησιμοποιήσαμε την αντίστροφη ανισότητα (H_2) για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τον συνοριακό όρο που εμφανίζεται (βλ. (B4.25d)) λόγω του ότι τα σ_1–οιονεί ενδιάμεσα βήματα δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες Neumann. Η εκτίμηση (B5.1) παρουσιάζει ενδιαφέρον, διότι αφ' ενός είναι καλύτερη από τη γενική εκτίμηση $O(h^r + k^{\min\{\nu,p+1\}})$ που ισχύει για ένα τυχαίο παραβολικό πρόβλημα ανεξάρτητα από τη συνοριακή συνθήκη, και αφ' ετέρου καλύπτει μιά ευρεία κατηγορία μη ομογενών παραβολικών προβλημάτων με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann. Στην §B6.1 δώσαμε σύντομα μιά εξήγηση, για ποιούς λόγους δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε κάτι ανάλογο για συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Έτσι η τάξη σύγκλισης που μπορεί να αποδειχθεί είναι μεγαλύτερη για συνοριακές συνθήκες Neumann απ' ότι στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet, κάτι γενικά άγνωστο μέχρι την εργασία [LuO] (για ειδικά προβλήματα τύπου (E) και προσεγγίσεις (TS)). Παρ' όλα αυτά οι συνθήκες Dirichlet έχουν ένα πλεονέκτημα έναντι των συνθηκών Neumann που εντοπίζεται στο ότι το γινόμενο δύο συναρτήσεων, μία των οποίων έχει τιμή μηδέν στο $\partial\Omega$, μηδενίζεται στο $\partial\Omega$. Αντίθετα, όταν μιά συνάρτηση ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες Neumann δεν είναι σίγουρο ότι τις ικανοποιεί και το γινόμενό της με οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παίρνουμε $\sigma_{\mathcal{D}} > \sigma_{\mathcal{N}}$ για ορισμένα ομογενή προβλήματα ($f = 0$), όπως π.χ. για την εξίσωση (B7.2) έχουμε $\sigma_{\mathcal{D}} = p + 2$ και $\sigma_{\mathcal{N}} = p + 1$.

Η βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος (βλ. §B6.2) στην περίπτωση περιοδικών συνοριακών συνθηκών δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη καθώς ανάλογα αποτελέσματα είναι γνωστά από την μελέτη μη γραμμικών εξισώσεων, βλ. [KaMc] για την εξίσωση Korteweg–de Vries, [Ak2] για την εξίσωση Kuramoto–Sivashinsky, και [KAD].

Σημειώνουμε τέλος ότι η ανάλυση και τ' αποτελέσματα των παραγράφων που προηγήθηκαν ισχύουν για ανάλογα προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις τύπου Schrödinger, [Z], (που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη της διάδοσης του ήχου σε θαλάσσιο περιβάλλον, βλ. π.χ. [Tp]), εξισώσεις για τις οποίες δεν φαίνεται να ισχύουν τα αποτελέσματα που περιέχονται στις [OsR] και [LuO] λόγω των υποθέσεων για τον τελεστή L (βλ. [OsR], (3.1a), [LuO], (3.2)).

SOBOLEV–GALPERN
ME DIRICHLET

§Γ1. Εισαγωγή.

Έστω $d \in \mathbb{N}$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ένα φραγμένο χωρίο με σύνορο $\partial\Omega$. Για $t^* > 0$, ζητούμε να προσδιορίσουμε μιά μιγαδικών τιμών συνάρτηση u η οποία να ορίζεται στο $\overline{\Omega} \times [0, t^*]$ και να αποτελεί λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} &(1 - \gamma\mathcal{M}(x, t; \partial))\partial_t u = -i\xi\mathcal{M}(x, t; \partial)u + f(x, t) \quad \text{στο} \quad \Omega \times (0, t^*], \\ &u = 0 \quad \text{στο} \quad \partial\Omega \times (0, t^*], \\ &u(x, 0) = v^0(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{Γ1.1}$$

όπου

$$\mathcal{M}(x, t; \partial)w := -\nabla\cdot(\Gamma(x, t)\nabla w) - \gamma_0(x, t)w = -\sum_{j,m=1}^{d} \partial_{x_j}(\gamma_{jm}(x, t)\partial_{x_m} w) - \gamma_0(x, t)w.$$

Στο παραπάνω πρόβλημα, ξ είναι ένας πραγματικός αριθμός, γ είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός, f και γ_0 είναι συναρτήσεις μιγαδικών τιμών οι οποίες ορίζονται στο $\overline{\Omega} \times [0, t^*]$, ενώ v^0 είναι μία συνάρτηση μιγαδικών τιμών η οποία ορίζεται στο $\overline{\Omega}$. Ακόμα, $\{\gamma_{jm}\}_{j,m=1}^d$ είναι συναρτήσεις πραγματικών τιμών, οι οποίες ορίζονται στο $\overline{\Omega} \times [0, t^*]$, και υποθέτουμε ότι οι πίνακες $\Gamma(x, t) = (\gamma_{jm}(x, t))_{j,m=1}^d$ είναι συμμετρικοί και ομοιόμορφα θετικά ορισμένοι στο $\overline{\Omega} \times [0, t^*]$, δηλ. υπάρχει σταθερά $C_\Gamma > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j,m=1}^{d} \xi_j\gamma_{jm}(x, t)\xi_m \geq C_\Gamma \sum_{m=1}^{d} (\xi_m)^2, \quad \forall(\xi_1, \ldots, \xi_d)^T \in \mathbb{R}^d, \quad \forall(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t^*]. \tag{Γ1.2}$$

Η (Γ1.2) μας εξασφαλίζει ότι ο διαφορικός τελεστής $\mathcal{M}(x, t; \partial)$ είναι *ισχυρά ελλειπτικός*, ομοιόμορφα ως προς t (βλ. [Ag], Definition 4.1).

Παρατήρηση Γ1.1. Έστω ότι $(\xi_1, \ldots, \xi_d)^T \in \mathbb{C}^d$. Τότε έχουμε

$$\sum_{j,m=1}^{d} \overline{\xi_j}\gamma_{jm}\xi_m = \sum_{j,m=1}^{d} \gamma_{jm}\big[\mathrm{Re}(\xi_j)\,\mathrm{Re}(\xi_m) + \mathrm{Im}(\xi_j)\,\mathrm{Im}(\xi_m)\big]$$

$$
\begin{aligned}
&+ i \sum_{j,m=1}^{d} \gamma_{jm} \big[\mathrm{Re}(\xi_j)\,\mathrm{Im}(\xi_m) - \mathrm{Im}(\xi_j)\,\mathrm{Re}(\xi_m)\big] \\
= &\sum_{j,m=1}^{d} \gamma_{jm} \big[\mathrm{Re}(\xi_j)\,\mathrm{Re}(\xi_m) + \mathrm{Im}(\xi_j)\,\mathrm{Im}(\xi_m)\big] \\
&+ i \sum_{j,m=1}^{d} \gamma_{jm}\,\mathrm{Re}(\xi_j)\,\mathrm{Im}(\xi_m) - i \sum_{m,j=1}^{d} \gamma_{mj}\,\mathrm{Re}(\xi_m)\,\mathrm{Im}(\xi_j) \\
= &\sum_{j,m=1}^{d} \gamma_{jm} \big[\mathrm{Re}(\xi_j)\,\mathrm{Re}(\xi_m) + \mathrm{Im}(\xi_j)\,\mathrm{Im}(\xi_m)\big] \\
\geq &C_\Gamma \sum_{j=1}^{d} \Big[\big(\mathrm{Re}(\xi_j)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(\xi_j)\big)^2\Big].
\end{aligned}
$$

Τελικά, ισχύει ότι

$$
\sum_{j,m=1}^{d} \overline{\xi_j}\gamma_{jm}(x,t)\xi_m = \mathrm{Re}\Big[\sum_{j,m=1}^{d} \xi_j\gamma_{jm}(x,t)\xi_m\Big] \geq C_\Gamma \sum_{m=1}^{d} |\xi_m|^2, \tag{Γ1.3}
$$

για κάθε $(\xi_1,\ldots,\xi_d)^T \in \mathbb{C}^d$, και $(x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,t^*]$. $\square$

Υποθέτουμε, επί πλέον, ότι

$$
\mathrm{Im}(\xi\gamma_0) \geq 0 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}\times[0,t^*]. \tag{Γ1.4}
$$

Η συνθήκη (Γ1.4) προέρχεται από το φυσικό πρόβλημα (βλ. §Γ7), και δεν αποτελεί μέρος των υποθέσεων εκείνων που εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (Γ1.1) ή επηρεάζουν την ομαλότητά της (βλ. [Lag]). Όμως εξασφαλίζει καλές ιδιότητες ευστάθειας, όπως τη διατήρηση της $L^2(\Omega)$ στάθμης για το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα όταν η συνάρτηση γ_0 είναι πραγματική (βλ. (Γ2.20b)) και τη μη εκθετική εξάρτηση των σταθερών από τη χρονική μεταβλητή t, στις a–priori εκτιμήσεις είτε στη στάθμη του $H^s(\Omega)$ (βλ. (Γ2.20a)), είτε στη στάθμη του $C^s(\overline{\Omega})$ (βλ. (Γ2.22)). Επί πλέον, μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος Runge–Kutta χωρίς περιορισμό στο χρονικό βήμα (βλ. Λήμμα Γ4.1) και τελικά να εξασφαλίσουμε μη εκθετική εξάρτηση της σταθεράς από το t^* στην a–priori $L^2(\Omega)$–εκτίμηση σφάλματος μεταξύ της αριθμητικής προσέγγισης και της λύσης (βλ. Θεώρημα Γ6.2).

Αντικείμενο του Κεφ. Γ είναι ο ορισμός και η ανάλυση πλήρως διακριτών προσεγγίσεων της λύσης του (Γ1.1). Συγκεκριμένα, διακριτοποιούμε το πρόβλημά μας χρησιμοποιώντας μιά μέθοδο Galerkin–πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο και μιά πεπλεγμένη μέθοδο Runge–Kutta στο χρόνο. Έπειτα μελετώντας τη σύγκλιση της μεθόδου αποδεικνύουμε βέλτιστης τάξεως εκτιμήσεις σφάλματος της μορφής

$$
\max_{0\leq n\leq N} \|u(t^n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C(h^r + k^\nu), \tag{Γ1.5a}
$$

(Γ1.5b)
$$\max_{0\le n\le N}\|u(t^n)-u_h^n\|_{H^1(\Omega)}\le C(h^{r-1}+k^{\nu}).$$

Ειδικά όταν $d=1$ έχουμε

(Γ1.5c)
$$\max_{0\le n\le N}\|u(t^n)-u_h^n\|_{C^0(\overline{\Omega})}\le C(h^{r}+k^{\nu})$$

για ορισμένους χώρους προσέγγισης (βλ. §Γ3). Σ' αυτές τις εκτιμήσεις h είναι η παράμετρος διακριτοποίησης στο χώρο, r είναι η βέλτιστη τάξη σύγκλισης στο χώρο ως προς τη στάθμη του $L^2(\Omega)$ και $C^0(\overline{\Omega})$ (βλ. §Γ3), $r-1$ είναι η βέλτιστη τάξη σύγκλισης στο χώρο ως προς τη στάθμη του $H^1(\Omega)$ (βλ. §Γ3), $k:=\frac{t^*}{N}$ είναι το βήμα στο χρόνο, ν είναι η κλασική τάξη της μεθόδου Runge–Kutta, $t^n:=nk$ για $n=0,\dots,N$, και u_h^n είναι οι πλήρως διακριτές προσεγγίσεις της $u(t^n)$ (βλ. §Γ4).

Το κεφάλαιο Γ έχει την ακόλουθη δομή. Στη παράγραφο Γ2 παρουσιάζουμε γνωστά αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, στηριζόμενα στην εργασία του Lagnese [Lag]. Επί πλέον, αποδεικνύουμε a–priori εκτιμήσεις για τη u στη στάθμη του $H^s(\Omega)$ και, όταν $d=1$, στη στάθμη του $C^s(\overline{\Omega})$. Στην παράγραφο Γ3 παρουσιάζουμε τις υποθέσεις μας για τους χώρους πεπερασμένων στοιχείων $\{S_h\}_{h\in(0,h_\alpha)}$ και ορίζουμε ημιδιακριτές προσεγγίσεις $u_h\in S_h$ της λύσης. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε σύγκλιση (καθώς $h\to 0$) αυτών των προσεγγίσεων στις στάθμες των χώρων $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ και, όταν $d=1$, $C^0(\overline{\Omega})$, με την καλύτερη δυνατή τάξη. Στην §Γ4 παρουσιάζονται οι υποθέσεις μας για τις μεθόδους Runge–Kutta και ορίζεται το πλήρως διακριτό αριθμητικό σχήμα Runge–Kutta/Galerkin (βλ. (Γ4.2)). Έπειτα αποδεικνύονται ιδιότητες ευστάθειας του σχήματος στα Λήμματα Γ4.1 και Γ4.2. Η παράγραφος Γ5 περιέχει ένα αποτέλεσμα συνέπειας, ενώ η §Γ6 περιέχει το αποτέλεσμα σύγκλισης (Γ1.5). Τέλος, στην παράγραφο Γ7, παρουσιάζουμε τη φυσική προέλευση του (Γ1.1) καθώς και τη σχετική —με το πρόβλημα και το αποτέλεσμά μας— βιβλιογραφία.

Κλείνουμε, αυτή την παράγραφο, με μιά γενική παρατήρηση, η οποία αφορά τις σταθερές στις διάφορες ανισότητες. Στις παραγράφους του Κεφ. Γ που ακολουθούν συμβολίζουμε με C, $\widetilde{C}$ και $\widehat{C}$ (συνοδευόμενα συνήθως από άνω ή κάτω δείκτες περιέχοντες γράμματα, αριθμούς ή σύμβολα) ποσότητες οι οποίες δεν εξαρτώνται από τη λύση u, τον μη ομογενή όρο f και την αρχική συνθήκη v^0. Εξάρτηση των σταθερών αυτών από το t^* υφίσταται και οφείλεται μόνο σε εκείνη των συντελεστών του διαφορικού τελεστή $\mathcal{M}$ (όπως π.χ. στη σχέση (Γ2.7)). Γι' αυτόν το λόγο στις προκύπτουσες εκτιμήσεις οποιαδήποτε πρόσθετη επιρροή του t^* καταγράφεται χωριστά.

§Γ2. Το συνεχές πρόβλημα.

Στη συνέχεια, με στόχο την απλούστευση των συμβολισμών, θα παραλείπουμε τη δήλωση του συνόλου Ω, και όταν $s\ge 2$ θα γράφουμε X_0^s αντί $H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Επί πλέον θα γράφουμε $\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{C}^\ell$ και $\mathcal{C}_0^\ell$ αντί των $\|\cdot\|_{0,\infty}$, $C^\ell(\overline{\Omega})$ και $C^\ell(\overline{\Omega})\cap H_0^1$ (για κάθε $\ell\ge 2$), αντίστοιχα. Τέλος, με $|\Omega|$ θα συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue του συνόλου Ω.

Έστω $\mu, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}_0$ και $\lambda := \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Οι υποθέσεις μας για το σύνορο $\partial\Omega$, τους συντελεστές του $\mathcal{M}$, την αρχική συνάρτηση v^0 και τον μη ομογενή όρο f είναι

$$(\Gamma 2.1a)\quad \partial\Omega \in \mathsf{C}^{2+\mu}, \quad \gamma_{jm} \in C^{\mu+1,\lambda_1}(\overline{\Omega} \times [0,t^*]), \quad 1 \le j,m \le d, \quad \gamma_0 \in C^{\mu,\lambda_2}(\overline{\Omega} \times [0,t^*]),$$

$$(\Gamma 2.1b)\qquad v^0 \in X_0^{\mu+2} \;\text{ και }\; f \in C^{\lambda}([0,t^*], H^{\mu}).$$

Ορίζουμε, τώρα, τους τελεστές $M, \mathsf{T} : [0,t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(X_0^2; L^2)$, ως εξής:

$$(\Gamma 2.2a)\qquad M(t)w := -\nabla\cdot(\Gamma(\cdot,t)\nabla w) - \gamma_0(\cdot,t)w, \quad w \in X_0^2, \quad t \in [0,t^*],$$

και

$$(\Gamma 2.2b)\qquad \mathsf{T} := I - \gamma M,$$

όπου I είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον X_0^2.

Λόγω της (Γ2.1a), οι τελεστές M και T ανήκουν στον $C^{\lambda}([0,t^*], \mathcal{L}(X_0^2; L^2))$. Επί πλέον, για $\ell = 1, \dots, \lambda$, οι παράγωγοί τους τάξης ℓ προκύπτουν παραγωγίζοντας ℓ φορές τους συντελεστές ως προς t, δηλ.

$$(\Gamma 2.2c)\qquad \partial_t^{\ell} M(t)w = -\nabla\cdot(\partial_t^{\ell}\Gamma(\cdot,t)\nabla w) - \partial_t^{\ell}\gamma_0(\cdot,t)w, \quad w \in X_0^2, \quad t \in [0,t^*],$$

και

$$(\Gamma 2.2d)\qquad \partial_t^{\ell}\,\mathsf{T} = -\gamma\partial_t^{\ell} M.$$

Για $s = 0, \dots, \mu$ ορίζουμε επί πλέον τις απεικονίσεις $\mathsf{T}_s : [0,t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(X_0^{s+2}; H^s)$ και $\mathsf{T}_{\mathcal{C},s} : [0,t^*] \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^{s+2}; \mathcal{C}^s)$, ως εξής

$$\mathsf{T}_s(t) := \mathsf{T}(t)\Big|_{X_0^{s+2}} \quad \text{και} \quad \mathsf{T}_{\mathcal{C},s}(t) := \mathsf{T}(t)\Big|_{\mathcal{C}_0^{s+2}}, \quad t \in [0,t^*],$$

δηλ. $\mathsf{T}_s(t)$ και $\mathsf{T}_{\mathcal{C},s}(t)$ είναι οι περιορισμοί του $\mathsf{T}(t)$ στους χώρους X_0^{s+2} και $\mathcal{C}_0^{s+2}$, αντίστοιχα, και γι' αυτό $\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}$. Επί πλέον έχουμε ότι $\mathsf{T}_s \in C^{\lambda}([0,t^*], \mathcal{L}(X_0^{s+2}; H^s))$ και $\mathsf{T}_{\mathcal{C},s} \in C^{\lambda}([0,t^*], \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^{s+2}; \mathcal{C}^s))$, όπου

$$\partial_t^{\ell}\,\mathsf{T}_s(t) = \partial_t^{\ell}\,\mathsf{T}(t)\Big|_{X_0^{s+2}} \quad \text{και} \quad \partial_t^{\ell}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},s}(t) = \partial_t^{\ell}\,\mathsf{T}(t)\Big|_{\mathcal{C}_0^{s+2}}, \quad \ell = 1, \dots, \lambda, \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Λήμμα Γ2.1. *Ο τελεστής M ικανοποιεί μιά ανισότητα τύπου* Gårding *ομοιόμορφα ως προς t, δηλ. υπάρχουν πραγματικές σταθερές $C_G \ge 0$ και $C_E > 0$, τέτοιες ώστε*

$$\mathsf{Re}(M(t)w, w) + C_G\|w\|^2 \ge C_E\|w\|_1^2, \quad \forall w \in X_0^2, \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Απόδειξη. Έστω $w \in X_0^2$ και $t \in [0,t^*]$. Θέτουμε $C_G = 1 + \max\limits_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]} \mathsf{Re}\,\gamma_0$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (Γ2.2a), (Γ1.3) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathsf{Re}(M(t)w, w) + C_G\|w\|^2 &= (\Gamma(\cdot,t)\nabla w, \nabla w) - \mathsf{Re}(\gamma_0(\cdot,t)w, w) + C_G\|w\|^2 \\ &\ge C_\Gamma\|\nabla w\|^2 + \int_\Omega (C_G - \mathsf{Re}\,\gamma_0(x,t))|w|^2 dx \\ &\ge C_E\|w\|_1^2, \end{aligned}$$

όπου $C_E = \min\{1, C_\Gamma\}$. ■

Λήμμα Γ2.2. *Έστω $\sigma(M(t))$ το φάσμα του $M(t)$, για κάθε $t\in[0,t^*]$. Τότε ισχύει ότι*

$$\bigcup_{t\in[0,t^*]}\sigma(M(t))\cap\mathbb{R}\subsetneq\mathbb{R}. \tag{Γ2.3}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_E\in\mathbb{R}$, με $\lambda_E<-C_G$. Για κάθε $t\in[0,t^*]$, θεωρούμε τον ελλειπτικό τελεστή $E_{\lambda_E}(t):X_0^2\longrightarrow L^2$, για τον οποίο

$$E_{\lambda_E}(t)w:=-\nabla\boldsymbol{\cdot}(\Gamma(\cdot,t)\nabla w)-\gamma_0(\cdot,t)w-\lambda_E w=M(t)w-\lambda_E w,$$

για κάθε $w\in X_0^2$, και την αντίστοιχη συζυγογραμμική μορφή $B_{\lambda_E}(t):H^1\times H^1\longrightarrow\mathbb{C}$, οριζόμενη ως εξής:

$$B_{\lambda_E}(t;w_1,w_2):=(\Gamma(\cdot,t)\nabla w_1,\nabla w_2)-(\gamma_0(\cdot,t)w_1,w_2)-\lambda_E(w_1,w_2),$$

για κάθε $w_1,w_2\in H^1$.

Εύκολα βλέπουμε ότι η B_{λ_E} είναι φραγμένη ομοιόμορφα ως προς t, δηλ. υπάρχει πραγματική σταθερά C_{λ_E} τέτοια ώστε

$$|B_{\lambda_E}(t;w_1,w_2)|\le C_{\lambda_E}\|w_1\|_1\|w_2\|_1,\quad\forall w_1,w_2\in H^1,\quad\forall t\in[0,t^*].$$

Δουλεύοντας όπως στο Λήμμα Γ2.1 και χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις που έγιναν για το λ_E έχουμε επί πλέον ότι

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}\,B_{\lambda_E}(t;w,w)=&(\Gamma(\cdot,t)\nabla w,\nabla w)\\&+\int_\Omega(C_G-\mathsf{Re}\,\gamma_0(\cdot,t))|w|^2dx-(C_G+\lambda_E)\|w\|^2\\ \ge& C_E\|w\|_1,\quad\text{για κάθε}\ \ w\in H^1\ \ \text{και}\ \ t\in[0,t^*].\end{aligned}\tag{Γ2.4}$$

Οι παραπάνω ιδιότητες της B_{λ_E} και το Λήμμα Lax–Milgram εξασφαλίζουν ότι για κάθε $t\in[0,t^*]$, υπάρχει τελεστής $Z_{\lambda_E}(t):L^2\longrightarrow H_0^1$ τέτοιος ώστε

$$B_{\lambda_E}(t;Z_{\lambda_E}(t)\psi,\varphi)=(\psi,\varphi),\quad\forall\varphi\in H_0^1,\quad\forall\psi\in L^2,\tag{Γ2.5}$$

δηλ. για δοθέν $t\in[0,t^*]$ και $\psi\in L^2$, η $Z_{\lambda_E}(t)\psi$ είναι η *ασθενής λύση* του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών: *ζητούμε $w\in X_0^2$ τέτοιο ώστε $E_{\lambda_E}(t)w=\psi$.*

Έστω $t\in[0,t^*]$. Από την θεωρία των ελλειπτικών προβλημάτων (αποτέλεσμα ελλειπτικής ομαλότητας) έχουμε ότι $Z_{\lambda_E}(t)\in\mathcal{L}(L^2;X_0^2)$ (βλ., π.χ. [Ag], [LoM], [GiT]). Επομένως η (Γ2.5) δίνει

$$(E_{\lambda_E}(t)Z_{\lambda_E}(t)\psi-\psi,\varphi)=0,\quad\forall\varphi\in H_0^1,\quad\forall\psi\in L^2.$$

Επειδή ο H_0^1 είναι πυκνός στον L^2, έπεται ότι $E_{\lambda_E}(t)Z_{\lambda_E}(t)\psi = \psi$ για κάθε $\psi \in L^2$, που σημαίνει ότι ο $E_{\lambda_E}(t)$ είναι *επί*. Καθώς ο $E_{\lambda_E}(t)$ είναι γραμμικός και $(E_{\lambda_E}(t)w, w) = B(t; w, w)$ για κάθε $w \in X_0^2$, από την (Γ2.4) εύκολα συμπεραίνουμε ότι είναι *ένα προς ένα*. Έτσι ο $E_{\lambda_E}(t) : X_0^2 \longrightarrow L^2$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $E_{\lambda_E}^{-1}(t) = Z_{\lambda_E}(t)$. Επί πλέον ο $E_{\lambda_E}^{-1}(t) : L^2 \longrightarrow X_0^2$ είναι φραγμένος.

Το τελικό συμπέρασμα, απ' όλα αυτά, είναι ότι $\lambda_E \notin \sigma(M(t))$ για κάθε $t \in [0, t^*]$, και έτσι η (Γ2.3) ισχύει. ■

Συμπληρώνουμε τις υποθέσεις για τα δεδομένα του προβλήματος, δεχόμενοι ότι

$$\text{(Γ2.1c)} \qquad \frac{1}{\gamma} \notin \bigcup_{t \in [0, t^*]} \sigma(M(t)),$$

γεγονός που έχει νόημα λόγω της (Γ2.3).

Οι (Γ2.1a), (Γ2.1c) και το αποτέλεσμα ελλειπτικής ομαλότητας εξασφαλίζουν ότι οι τελεστές $\mathsf{T}_s^{-1}(t) : H^s \longrightarrow X_0^{s+2}$ υπάρχουν για $t \in [0, t^*]$ και $s = 0, \ldots, \mu$. Επί πλέον, έχουμε ότι

$$\text{(Γ2.6)} \qquad \mathsf{T}_s^{-1} \in C^\lambda([0, t^*], \mathcal{L}(H^s; X_0^{s+2})), \quad \text{για} \quad s = 0, \ldots, \mu,$$

(βλ. [Lag], Lemma 4.1), η οποία εξασφαλίζει την ύπαρξη σταθερών $C_{s,\ell}$ τέτοιων ώστε

$$\text{(Γ2.7)} \qquad \|\partial_t^\ell \, \mathsf{T}_s^{-1}(t) w\|_{s+2} \le C_{s,\ell} \|w\|_s, \quad \forall w \in H^s, \quad \forall t \in [0, t^*],$$

για $s = 0, \ldots, \mu$ και $\ell = 0, \ldots, \lambda$, όπου

$$\text{(Γ2.8)} \qquad \partial_t^\ell \, \mathsf{T}_s^{-1} = - \sum_{m=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{m} \mathsf{T}_s^{-1} \, \partial_t^{\ell-m} \, \mathsf{T}_s \, \partial_t^m \, \mathsf{T}_s^{-1}, \quad \ell = 1, \ldots, \lambda.$$

Σημείωση Γ2.1. Προφανώς $\mathsf{T}_s^{-1}(t) = \mathsf{T}^{-1}(t)\,|_{H^s}$ για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $s = 0, \ldots, \mu$. □

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το πρόβλημα (Γ1.1) με διαφορετικό τρόπο (βλ. [Lag]): ζητούμε συνάρτηση $u \in C^1((0, t^*], X_0^2) \cap C([0, t^*], X_0^2)$, τέτοια ώστε

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} \mathsf{T}(t) \partial_t u(t) &= -i \frac{\xi}{\gamma} (I - \mathsf{T}(t)) u(t) + f(t), \quad t \in (0, t^*], \\ u(0) &= v^0. \end{aligned}$$

Είναι γνωστό από την εργασία του Lagnese, [Lag], ότι οι υποθέσεις (Γ2.1) και η (Γ2.3) (η ισχύς της οποίας στηρίζεται στην (Γ1.2)) εξασφαλίζουν ότι το πρόβλημα (P) έχει μοναδική λύση

$$(\mathcal{R}_1) \qquad u \in C^{\lambda+1}([0, t^*], X_0^{\mu+2}).$$

Ορίζοντας $L \in C^\lambda([0,t^*],\mathcal{L}(X_0^2;X_0^2))$ και $F \in C^\lambda([0,t^*],X_0^{\mu+2})$ ως εξής

$$L(t) := -i\frac{\xi}{\gamma}\,\mathsf{T}^{-1}(t)\,[I-\mathsf{T}(t)] = i\frac{\xi}{\gamma}\left[I-\mathsf{T}^{-1}(t)\right], \tag{Γ2.9}$$

$$F(t) := \mathsf{T}^{-1}(t)f(t) = \mathsf{T}_\mu^{-1}(t)f(t), \tag{Γ2.10}$$

από το (P) παίρνουμε

$$\partial_t u(t) = L(t)u(t) + F(t), \quad t \in [0,t^*], \tag{Γ2.11a}$$

$$u(0) = v^0. \tag{Γ2.11b}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τους τελεστές $M^*, \mathsf{T}^* \in C^\lambda([0,t^*],\mathcal{L}(X_0^2;L^2))$, ως εξής

$$M^*(t)w := -\nabla\cdot(\Gamma(\cdot,t)\nabla w) - \overline{\gamma_0}(\cdot,t)w, \quad w \in X_0^2, \quad t \in [0,t^*], \tag{Γ2.12a}$$

και

$$\mathsf{T}^* := I - \gamma M^*. \tag{Γ2.12b}$$

Λήμμα Γ2.3. *Ο T^* αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του $(\mathsf{T}^*)^{-1}$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

$$(\mathsf{T}^*)^{-1} \in C([0,t^*],\mathcal{L}(L^2;X_0^2)) \tag{Γ2.13a}$$

και

$$\|(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)w\|_2 \le C_{0,0}\|w\|, \quad \forall w \in L^2, \quad \forall t \in [0,t^*]. \tag{Γ2.13b}$$

Απόδειξη. Έστω $t \in [0,t^*]$. Επειδή $\gamma \in \mathbb{R}$ και τα στοιχεία του πίνακα Γ είναι πραγματικές συναρτήσεις, από τις (Γ2.12) και (Γ2.2a) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathsf{T}^*(t)\overline{\psi} = \overline{\mathsf{T}(t)\psi}, \quad \forall \psi \in X_0^2. \tag{Γ2.14}$$

Θέτοντας $\psi = \mathsf{T}^{-1}(t)\overline{w}$ στην (Γ2.14), όπου $w \in L^2$, παίρνουμε

$$\mathsf{T}^*(t)\overline{\mathsf{T}^{-1}(t)\overline{w}} = \overline{\mathsf{T}(t)\,\mathsf{T}^{-1}(t)\overline{w}} = \overline{\overline{w}} = w.$$

Βασιζόμενοι πάλι στην (2.14), έχουμε τα ακόλουθα

$$\overline{\mathsf{T}^{-1}(t)\overline{\mathsf{T}^*(t)\psi}} = \overline{\mathsf{T}^{-1}(t)\overline{\overline{\mathsf{T}(t)\overline{\psi}}}} = \overline{\mathsf{T}^{-1}(t)\,\mathsf{T}(t)\overline{\psi}} = \overline{\overline{\psi}} = \psi, \quad \forall \psi \in X_0^2.$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο T^* είναι αντιστρέψιμος και ειδικώτερα έχουμε

$$(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)w = \overline{\mathsf{T}^{-1}(t)\overline{w}}, \quad \forall w \in L^2, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Γ2.15}$$

Από τις (Γ2.15) και (Γ2.6) έπεται ότι $\frac{1}{\gamma} \notin \sigma(M^*(t))$ για κάθε $t \in [0, t^*]$. Επομένως ο τελεστής T^* έχει τις ιδιότητες εκείνες του T οι οποίες εξασφαλίζουν την (Γ2.6). Παίρνοντας T^* στη θέση του T, οδηγούμαστε στην (Γ2.13a). Η (Γ2.13b) είναι συνέπεια των (Γ2.15) και (Γ2.7). ■

Έστω $d = 1$. Τότε, για κάθε $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$, το *Λήμμα του Sobolev* (βλ., π.χ. [Wl], §6) δίνει

$$H^{\ell_0+1} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\ell_0}, \tag{Γ2.16}$$

και κατά συνέπεια υπάρχει πραγματική σταθερά C_{V,ℓ_0} τέτοια ώστε

$$\|w\|_{\ell_0,\infty} \le C_{V,\ell_0} \|w\|_{\ell_0+1}, \quad \forall w \in H^{\ell_0+1}. \tag{Γ2.17}$$

Χρησιμοποιώντας τις $(\mathcal{R}_1)$ και (Γ2.16), κατά προφανή τρόπο έχουμε

$$u \in C^{\lambda+1}([0, t^*], \mathcal{C}_0^{\mu+1}). \tag{$\mathcal{R}_2$}$$

Επί πλέον, λόγω της (Γ2.1a), για $s = 0, \dots, \mu$ έχουμε ότι ο τελεστής $\mathsf{T}_{\mathcal{C},s}^{-1}(t) : \mathcal{C}^s \longrightarrow \mathcal{C}_0^{s+2}$ υπάρχει για κάθε $t \in [0, t^*]$ (βλ. [Mk], Chapter IV§2), και ικανοποιεί

$$\mathsf{T}_{\mathcal{C},s}^{-1} \in C^\lambda([0, t^*], \mathcal{L}(\mathcal{C}^s; \mathcal{C}_0^{s+2})).$$

Έτσι, για κάθε $\ell = 0, \dots, \lambda$ και $s = 0, \dots, \mu$ υπάρχει μιά σταθερά $C_{\mathcal{C},\ell,s}$, τέτοια ώστε

$$\|\partial_t^\ell \, \mathsf{T}_{\mathcal{C},s}^{-1}(t) w\|_{s+2,\infty} \le C_{\mathcal{C},\ell,s} \|w\|_{s,\infty}, \quad \forall w \in \mathcal{C}^s, \quad \forall t \in [0, t^*], \tag{Γ2.18}$$

όπου ο τελεστής $\partial_t^\ell \, \mathsf{T}_{\mathcal{C},s}^{-1}$ περιγράφεται από σχέση ανάλογη της (Γ2.8).

Σημείωση Γ2.2. Προφανώς $\mathsf{T}_{\mathcal{C},s}^{-1}(t) = \mathsf{T}^{-1}(t)\,|_{\mathcal{C}^s}$ για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $s = 0, \dots, \mu$. □

Λήμμα Γ2.4. *Για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $w \in X_0^2$, ισχύει ότι*

$$\mathsf{Re}(L(t)w, w) \le 0. \tag{Γ2.19}$$

Απόδειξη. Έστω $t \in [0, t^*]$ και $w \in X_0^2$. Τότε θέτουμε $\psi := \mathsf{T}^{-1}(t)w$. Επομένως $\psi \in X_0^2$ και $w = \mathsf{T}(t)\psi$. Βασιζόμενοι στις (Γ2.9), (Γ2.2b) και (Γ1.3), έχουμε τα ακόλουθα:

$$\mathsf{Re}(L(t)w, w) = \mathsf{Re}\Big[i\frac{\xi}{\gamma}\|w\|^2 - i\frac{\xi}{\gamma}(\mathsf{T}^{-1}(t)w, w)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\xi}{\gamma}\,\mathrm{Im}(\psi, \mathsf{T}(t)\psi) = -\frac{\xi}{\gamma}\,\mathrm{Im}(\mathsf{T}(t)\psi,\psi)\\
=&-\frac{\xi}{\gamma}\,\mathrm{Im}\Big[\|\psi\|^2 - \gamma(M(t)\psi,\psi)\Big]\\
=&\xi\,\mathrm{Im}\Big[(\Gamma(\cdot,t)\nabla\psi,\nabla\psi) - (\gamma_0(\cdot,t)\psi,\psi)\Big]\\
=&-\xi\int_\Omega \mathrm{Im}(\gamma_0(x,t))|\psi|^2(x)dx.
\end{aligned}
$$

Η (Γ2.19) έπεται από την πιό πάνω ισότητα και την (Γ1.4). ■

Παρατήρηση Γ2.1. Όταν $\mathrm{Im}(\xi\gamma_0) = 0$ στο $\overline{\Omega}\times[0,t^*]$, τότε $\mathrm{Re}(L(t)w,w)=0$, για κάθε $t\in[0,t^*]$ και $w\in X_0^2$. □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε διάφορα αποτελέσματα ευστάθειας για τη λύση του προβλήματος (P).

Πρόταση Γ2.1. *Έστω u η λύση του* (P). *Τότε, για κάθε $s\in\{0,\dots,\mu+2\}$, υπάρχουν πραγματικές σταθερές $C_{1,s,H}$ και $C_{2,s,H}$ (ανεξάρτητες των u, v^0 και f) τέτοιες ώστε*

$$
\|u(t)\|_s \le (1+C_{1,s,H}t)^{\left[\frac{s+1}{2}\right]}\Big[\|v^0\|_s + C_{2,s,H}\int_0^t \|f(\tau)\|_{\max\{0,s-2\}}d\tau\Big], \tag{Γ2.20a}
$$

για κάθε $t\in[0,t^*]$. Αν, επί πλέον, η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν και είτε $\xi=0$ είτε *η* συνάρτηση γ_0 *είναι πραγματικών τιμών, τότε*

$$
\|u(t)\| = \|v^0\|, \quad \forall t\in[0,t^*]. \tag{Γ2.20b}
$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (Γ2.11a) με $\overline{u}$. Έπειτα ολοκληρώνοντας στο Ω, παίρνοντας ισότητα πραγματικών μερών και χρησιμοποιώντας την (Γ2.19), την ανισότητα Cauchy–Schwarz και την (Γ2.7), έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 =&2\,\mathrm{Re}(L(t)u(t),u(t)) + 2\,\mathrm{Re}(F(t),u(t))\\
\le&2\,\mathrm{Re}(\mathsf{T}^{-1}(t)f(t),u(t))\\
\le&2\|\,\mathsf{T}^{-1}(t)f(t)\|\|u(t)\|\\
\le&2C_{0,0}\|f(t)\|\|u(t)\|, \quad \forall t\in[0,t^*].
\end{aligned} \tag{Γ2.21}
$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης Α3.2, από την (Γ2.21) καταλήγουμε στη σχέση

$$
\|u(t)\| \le \|v^0\| + 2C_{0,0}\int_0^t \|f(\tau)\|d\tau, \quad \forall t\in[0,t^*],
$$

που σημαίνει ότι η (Γ2.20a) ισχύει για $s=0$ (όπου $C_{2,0,H}:=2C_{0,0}$ και $C_{1,0,H}:=0$). Όταν $f\equiv 0$ και είτε η συνάρτηση γ_0 είναι πραγματική είτε $\xi=0$, λόγω της Παρατήρησης Γ2.1, αντί της (Γ2.21) έχουμε $\dfrac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 0,\ \ \forall t\in[0,t^*]$, από την οποία έπεται η (Γ2.20b).

Υποθέτουμε ότι η (Γ2.20a) ισχύει για $0,\dots,s_0$, όπου $s_0 \le \mu+1$. Τότε, παίρνουμε το $(\cdot,\cdot)_{s_0+1}$ εσωτερικό γινόμενο της (Γ2.11a) με τη u, και στη συνέχεια την ισότητα των πραγματικών μερών. Χρησιμοποιώντας τις (Γ2.9), (Γ2.10) και (Γ2.7), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{s_0+1}^2 =& 2\frac{\xi}{\gamma}\,\mathsf{Im}(\mathsf{T}^{-1}_{\max\{0,s_0-1\}}(t)u(t),u(t))_{s_0+1}+2\,\mathsf{Re}(\mathsf{T}^{-1}_{\max\{0,s_0-1\}}(t)f(t),u(t))_{s_0+1}\\ \le& 2C_{\max\{0,s_0-1\},0}\Big(\frac{|\xi|}{|\gamma|}\|u(t)\|_{\max\{0,s_0-1\}}+\|f(t)\|_{\max\{0,s_0-1\}}\Big)\|u(t)\|_{s_0+1},\end{aligned}$$

για κάθε $t\in[0,t^*]$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση Α3.2 και την επαγωγική υπόθεση, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{s_0+1}\le&\|v^0\|_{s_0+1}+2C_{\max\{0,s_0-1\},0}\int_0^t\|f(\tau)\|_{\max\{0,s_0-1\}}d\tau\\ &+2C_{\max\{0,s_0-1\},0}\frac{|\xi|}{|\gamma|}\int_0^t\|u(\tau)\|_{\max\{0,s_0-1\}}d\tau\\ \le&\|v^0\|_{s_0+1}+2C_{\max\{0,s_0-1\},0}\int_0^t\|f(\tau)\|_{\max\{0,s_0-1\}}d\tau\\ &+2C_{\max\{0,s_0-1\},0}\frac{|\xi|}{|\gamma|}t(1+C_{1,\max\{0,s_0-1\},H}t)^{[\frac{s_0}{2}]}\\ &\quad\Big(\|v^0\|_{\max\{0,s_0-1\}}+C_{2,\max\{0,s_0-1\},H}\int_0^t\|f(\tau)\|_{\max\{0,s_0-3\}}d\tau\Big)\\ \le&(1+C_{1,s_0+1,H}t)^{[\frac{s_0+2}{2}]}\Big[\|v^0\|_{s_0+1}+C_{2,s_0+1,H}\int_0^t\|f(\tau)\|_{\max\{0,s_0-1\}}d\tau\Big],\end{aligned}$$

για κάθε $t\in[0,t^*]$, όπου

$$C_{1,s_0+1,H}:=\max\big\{2C_{\max\{0,s_0-1\},0}\frac{|\xi|}{|\gamma|},C_{1,\max\{0,s_0-1\},H}\big\}$$

και

$$C_{2,s_0+1,H}:=\max\big\{2C_{\max\{0,s_0-1\},0},C_{2,\max\{0,s_0-1\},H}\big\}.$$

Έτσι δείξαμε ότι η (Γ2.20a) ισχύει για s_0+1. ■

Παρατήρηση Γ2.2. Έστω ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Στην περίπτωση που $\xi=0$, από την (Γ2.11a) έχουμε $\partial_t u(t)=0$ για κάθε $t\in[0,t^*]$. Παίρνοντας το $(\cdot,\cdot)_s$ εσωτερικό γινόμενο με τη u και ισότητα των πραγματικών μερών, αυτή η σχέση δίνει $\|u(t)\|_s=\|v^0\|_s$, για κάθε $t\in[0,t^*]$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\xi\neq0$, ότι η γ_0 είναι πραγματική και ανεξάρτητη της χωρικής μεταβλητής x, και ότι οι συναρτήσεις $\{\gamma_{jm}\}_{j,m=1}^d$ είναι ανεξάρτητες της χρονικής μεταβλητής t. Έπειτα παίρνουμε το L^2–εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης του (P) με την $\partial_t u$ και ισότητα φανταστικών μερών, σημειώνοντας ότι λόγω της $(\mathcal{R}_1)$ ισχύει $\partial_t u\in C([0,t^*],X_0^2)$. Έτσι έχουμε

$$\mathsf{Im}\Big[\|\partial_t u\|^2+\gamma\gamma_0(t)\|\partial_t u\|^2+\gamma\big(\nabla\cdot(\Gamma\nabla\partial_t u,\partial_t u)\big)\Big]=\xi\,\mathsf{Re}\Big[\big(\nabla\cdot(\Gamma\nabla u),\partial_t u\big)+\gamma_0(u,\partial_t u)\Big],$$

οπότε ο τύπος ολοκλήρωσης του Green δίνει

$$-\gamma\,\mathrm{Im}\big(\Gamma\nabla\partial_t u,\nabla\partial_t u\big)=\xi\,\mathrm{Re}\Big[-\big(\Gamma\nabla u,\nabla\partial_t u\big)+\gamma_0(u,\partial_t u)\Big].$$

Λόγω της (Γ1.3) και της (Γ2.20b), από την τελευταία σχέση έπεται

$$\mathrm{Re}\big(\Gamma\nabla u,\nabla\partial_t u\big)=\gamma_0\,\mathrm{Re}(\partial_t u,u)=\frac{1}{2}\gamma_0\frac{d}{dt}\|u\|^2=0.$$

Στηριζόμενοι στην συμμετρία του πίνακα Γ, συμπεραίνουμε εύκολα ότι $\mathrm{Re}(\Gamma\nabla u,\nabla\partial_t u)=\mathrm{Re}(\Gamma\nabla\partial_t u,\nabla u)$ και $\frac{d}{dt}(\Gamma\nabla u,\nabla u)=2\,\mathrm{Re}(\Gamma\nabla\partial_t u,\nabla u)$. Άρα $\frac{d}{dt}(\Gamma\nabla u,\nabla u)=0$, και έτσι

$$(\Gamma 2.20c)\qquad (\Gamma\nabla u(t),\nabla u(t))=(\Gamma\nabla v^0,\nabla v^0),\quad \forall t\in[0,t^*].$$

Παρατηρώντας ότι η $(\Gamma\nabla\cdot,\nabla\cdot)$ ορίζει μια στάθμη στον H_0^1, η (Γ2.20c) περιγράφει ένα αποτέλεσμα ανάλογο εκείνου της (Γ2.20b). □

Πρόταση Γ2.2. *Έστω ότι $d=1$ και u η λύση του* (P). *Για κάθε $s\in\{0,\dots,\mu+1\}$, υπάρχουν πραγματικές σταθερές $C_{1,s,\infty}$ και $C_{2,s,\infty}$ (ανεξάρτητες των u, v^0 και f) τέτοιες ώστε*

$$(\Gamma 2.22a)\qquad \|u(t)\|_{s,\infty}\le(1+C_{1,s,\infty}t)\Big[\|v^0\|_{s,\infty}+C_{2,s,\infty}\int_0^t\|f(\tau)\|d\tau\Big],\quad s=0,1,$$

και

$$(\Gamma 2.22b)\quad \|u(t)\|_{s,\infty}\le(1+C_{1,s,\infty}t)^{[\frac{s}{2}]+1}\Big[\|v^0\|_{s,\infty}+C_{2,s,\infty}\int_0^t\|f(\tau)\|_{s-2,\infty}d\tau\Big],\quad s\ge 2,$$

για κάθε $t\in[0,t^*]$.

Απόδειξη. Για κάθε $j\in\{0,\dots,s\}$, παίρνουμε την j–παράγωγο της (Γ2.11a) ως προς x. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε τη σχέση που προκύπτει με $\overline{\partial_x^j u}$ και παίρνουμε ισότητα πραγματικών μερών. Έτσι, έχουμε

$$(\Gamma 2.23)\quad \partial_t|\partial_x^j u(t)|^2=2\frac{\xi}{\gamma}\,\mathrm{Im}\Big[\partial_x^j\,\mathsf{T}^{-1}(t)u(t)\overline{\partial_x^j u(t)}\Big]+2\,\mathrm{Re}\Big[\partial_x^j\,\mathsf{T}^{-1}(t)f(t)\overline{\partial_x^j u(t)}\Big]\quad\text{στο}\ \ \overline{\Omega},$$

για κάθε $t\in[0,t^*]$. Έστω ότι $s=0$ ή 1. Χρησιμοποιώντας τις $(\mathcal{R}_1)$, $(\mathcal{R}_2)$, (Γ2.17) και (Γ2.7), η (Γ2.23) μας δίνει

$$\begin{aligned}\partial_t|\partial_x^j u(t)|^2\le&2\Big[\frac{|\xi|}{|\gamma|}\|\,\mathsf{T}^{-1}(t)u(t)\|_{s,\infty}+\|\,\mathsf{T}^{-1}(t)f(t)\|_{s,\infty}\Big]|\partial_x^j u(t)|\\ (\Gamma 2.24a)\qquad\le&2C_{V,s}\Big[\frac{|\xi|}{|\gamma|}\|\,\mathsf{T}^{-1}(t)u(t)\|_{s+1}+\|\,\mathsf{T}^{-1}(t)f(t)\|_{s+1}\Big]|\partial_x^j u(t)|\\ \le&2C_{V,s}C_{0,0}\Big[\frac{|\xi|}{|\gamma|}\|u(t)\|+\|f(t)\|\Big]|\partial_x^j u(t)|\quad\text{στο}\ \ \overline{\Omega},\end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $j = 0, \ldots, s$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση Α3.2 και χρησιμοποιώντας την (Γ2.20a), από την (Γ2.24a) έπεται

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{s,\infty} \leq & \|v^0\|_{s,\infty} + 2C_{V,s}C_{0,0}\int_0^t \|f(\tau)\|d\tau \\
& + 2C_{V,s}C_{0,0}\frac{|\xi|}{|\gamma|}t\Big(\|v^0\| + 2C_{0,0}\int_0^t \|f(\tau)\|d\tau\Big) \\
\leq & (1 + 2C_{V,s}C_{0,0}\sqrt{|\Omega|}\frac{|\xi|}{|\gamma|}t)\|v^0\|_{s,\infty} \\
& + 2C_{V,s}C_{0,0}(1 + 2C_{0,0}\frac{|\xi|}{|\gamma|}t)\int_0^t \|f(\tau)\|d\tau,
\end{aligned}
\tag{Γ2.24b}
$$

για κάθε $t \in [0, t^*]$. Από την (Γ2.24b) προκύπτει η (Γ2.22a), όπου

$$C_{1,s,\infty} = 2C_{V,s}C_{0,0}\sqrt{|\Omega|}\frac{|\xi|}{|\gamma|}$$

και

$$C_{2,s,\infty} = 2C_{0,0}\max\big\{\tfrac{1}{\sqrt{|\Omega|}}, C_{V,s}\big\}.$$

Έστω $s \geq 2$. Χρησιμοποιώντας τις (Γ2.18) και (Γ2.23), προκύπτει επίσης ότι

$$
\begin{aligned}
\partial_t|\partial_x^j u(t)|^2 \leq & 2\Big[\frac{|\xi|}{|\gamma|}\| \mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)u(t)\|_{s,\infty} + \| \mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)f(t)\|_{s,\infty}\Big]|\partial_x^j u(t)| \\
\leq & 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\Big[\frac{|\xi|}{|\gamma|}\|u(t)\|_{s-2,\infty} + \|f(t)\|_{s-2,\infty}\Big]|\partial_x^j u(t)| \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega},
\end{aligned}
$$

για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $j = 0, \ldots, s$. Τότε η Πρόταση Α3.2 δίνει

$$\|u(t)\|_{s,\infty} \leq \|v^0\|_{s,\infty} + 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\Big[\frac{|\xi|}{|\gamma|}\int_0^t \|u(\tau)\|_{s-2,\infty}d\tau + \int_0^t \|f(\tau)\|_{s-2,\infty}d\tau\Big], \tag{Γ2.25}$$

για κάθε $t \in [0, t^*]$. Η απόδειξη της (Γ2.22b) θα γίνει επαγωγικά. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $s = 2$ ή 3. Τότε από τις (Γ2.25) και (Γ2.22a) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{s,\infty} \leq & \|v^0\|_{s,\infty} + 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\int_0^t \|f(\tau)\|_{s-2,\infty}d\tau \\
& + 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\frac{|\xi|}{|\gamma|}t(1 + C_{1,s-2,\infty}t)\Big[\|v^0\|_{s-2,\infty} + C_{2,s-2,\infty}\int_0^t \|f(\tau)\|d\tau\Big] \\
\leq & \Big[1 + 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\frac{|\xi|}{|\gamma|}t(1 + C_{1,s-2,\infty}t)\Big]\|v^0\|_{s,\infty} \\
& + 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\Big[1 + \frac{|\xi|}{|\gamma|}t(1 + C_{1,s-2,\infty}t)C_{2,s-2,\infty}\sqrt{|\Omega|}\Big]\int_0^t \|f(\tau)\|_{s-2,\infty}d\tau
\end{aligned}
$$

$$\leq (1 + C_{1,s,\infty} t)^2 \Big[\|v^0\|_{s,\infty} + C_{2,s,\infty} \int_0^t \|f(\tau)\|_{s-2,\infty} d\tau \Big],$$

όπου $C_{1,s,\infty} = \max\{C_{1,s-2,\infty}, 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\frac{|\xi|}{|\gamma|}\}$ και $C_{2,s,\infty} = \max\{C_{2,s-2,\infty}\sqrt{|\Omega|}, 2C_{\mathcal{C},0,s-2}\}$. Άρα ισχύει η (Γ2.22b) για $s = 2, 3$. Υποθέτουμε, τώρα, ότι η (Γ2.22b) ισχύει για $s = 2, \dots, s_0 - 1$, όπου $s_0 \geq 4$ και $s_0 \leq \mu + 1$. Τότε η (Γ2.25) και η υπόθεση της επαγωγής δίνουν

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{s_0,\infty} \leq & \|v^0\|_{s_0,\infty} + 2C_{\mathcal{C},0,s_0-2} \Bigg\{ \int_0^t \|f(\tau)\|_{s_0-2,\infty} d\tau + \frac{|\xi|}{|\gamma|} t (1 + C_{1,s_0-2,\infty} t)^{[\frac{s_0-2}{2}]+1} \\
& \Big[\|v^0\|_{s_0-2,\infty} + C_{2,s_0-2,\infty} \int_0^t \|f(\tau)\|_{s_0-4,\infty} d\tau \Big] \Bigg\} \\
\leq & \Big[1 + 2C_{\mathcal{C},0,s_0-2} \frac{|\xi|}{|\gamma|} t (1 + C_{1,s_0-2,\infty} t)^{[\frac{s_0}{2}]} \Big] \|v^0\|_{s_0,\infty} \\
& + 2C_{\mathcal{C},0,s_0-2} \Big[1 + \frac{|\xi|}{|\gamma|} t (1 + C_{1,s_0-2,\infty} t)^{[\frac{s_0}{2}]} C_{2,s_0-2,\infty} \Big] \int_0^t \|f(\tau)\|_{s_0-2,\infty} d\tau \\
\leq & (1 + C_{1,s_0,\infty} t)^{[\frac{s_0}{2}]+1} \Big[\|v^0\|_{s_0,\infty} + C_{2,s_0,\infty} \int_0^t \|f(\tau)\|_{s_0-2,\infty} d\tau \Big],
\end{aligned}$$

όπου

$$C_{1,s_0,\infty} = \max\{C_{1,s_0-2,\infty}, 2C_{\mathcal{C},0,s_0-2}\frac{|\xi|}{|\gamma|}\}$$

και

$$C_{2,s_0,\infty} = \max\{C_{2,s_0-2,\infty}, 2C_{\mathcal{C},0,s_0-2}\}.$$

Επομένως η (Γ2.22b) ισχύει για $s = s_0$. ■

Παρατήρηση Γ2.3. Έστω ότι στις υποθέσεις που γίνονται στις (Γ2.1) και (Γ1.2) για τα δεδομένα έχουμε διάστημα $[-s^*, t^*]$ στη θέση του $[0, t^*]$. Τότε σύμφωνα με την εργασία [Lag], το αντίστοιχο πρόβλημα (P) έχει επίσης μοναδική λύση $u \in C^{\lambda+1}([-s^*, t^*], X_0^{\mu+2})$. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν ισχύουν οι εκτιμήσεις των Προτάσεων Γ2.1 και Γ2.2 στο $[-s^*, t^*]$, των οποίων η μορφή επηρεάζεται από την ισχύ της (Γ1.4). Η απάντηση είναι αρνητική γενικά. Ας δούμε γιατί. Κατ' αρχήν, έστω $w(t) = u(-t)$ για κάθε $t \in [0, s^*]$. Τότε $(1 - \gamma\mathcal{M}(x, -t; \partial))\partial_t w = -i(-\xi)\mathcal{M}(x, -t; \partial)w - f$ στο $\Omega \times [0, s^*]$, $w = 0$ στο $\partial\Omega \times [0, s^*]$ και $w(x, 0) = v^0$ για κάθε $x \in \Omega$, δηλ. η w είναι λύση ενός προβλήματος της μορφής (Γ1.1). Όμως η (Γ1.4) ικανοποιείται εφόσον $\mathrm{Im}(\xi\gamma_0(x, t)) \leq 0$ για κάθε $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [-s^*, 0]$. Όταν αυτό συμβαίνει (όπως π.χ. στην περίπτωση που η γ_0 έχει πραγματικές τιμές) για την w ισχύουν εκτιμήσεις ανάλογες μ' αυτές που παρουσιάστηκαν σ' αυτή την παράγραφο. □

§Γ3. Διακριτοποίηση στο χώρο–Ημιδιακριτό πρόβλημα.

Έστω $r \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε
$$2 \le r \le \mu + 2,$$
και $\{S_h\}_{h\in(0,h_\alpha)}$ μια οικογένεια υποχώρων —πεπερασμένης διάστασης— του H_0^1, έχουσα την ακόλουθη προσεγγιστική ιδιότητα: υπάρχει πραγματική σταθερά $\widehat{C}_F$ τέτοια ώστε

$$\text{(H)} \quad \inf_{\chi\in S_h} (\|w-\chi\| + h\|w-\chi\|_1) \le \widehat{C}_F h^s \|w\|_s, \quad \forall w \in X_0^s, \quad s = 2, \dots, r, \quad \forall h \in (0, h_\alpha).$$

Στη μία διάσταση ($d = 1$) το σύνολο Ω είναι ένα ανοικτό διάστημα (x_a, x_b). Σ' αυτή την περίπτωση, όταν ενδιαφερόμαστε για εκτιμήσεις σφαλμάτων στη στάθμη του $\mathcal{C}^0$, θα υποθέτουμε ότι τα στοιχεία των χώρων S_h είναι συνεχείς και κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις. Ειδικώτερα, για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$, θεωρούμε $J_h \in \mathbb{N}$ και μια διαμέριση του Ω με κόμβους $x_a = x_0^h < x_1^h < \cdots < x_{J_h+1}^h = x_b$, τέτοιους ώστε $h = \max_{1\le j\le J_h+1}(x_j^h - x_{j-1}^h)$. Τότε θέτουμε:

$$(\mathrm{H}_\infty) \qquad S_h := \Big\{ v \in C(\overline{\Omega}) : v \Big|_{[x_{j-1}^h, x_j^h]} \in \mathbb{P}_{r-1}([x_{j-1}^h, x_j^h]), \quad j = 1, \dots, J_h + 1 \Big\} \cap H_0^1,$$

όπου ο χώρος $\mathbb{P}_{r-1}(G)$ αποτελείται από τους περιορισμούς στο $G \subset \mathbb{R}$, των πολυωνύμων βαθμού το πολύ $r-1$. Είναι γνωστό ότι αυτή η οικογένεια υποχώρων ικανοποιεί την υπόθεση (H) (βλ. π.χ. [Ci]).

Για κάθε $t \in [0, t^*]$ και $h \in (0, h_\alpha)$, ορίζουμε τους τελεστές $M_h(t)$, $\mathsf{T}_h(t) : S_h \longrightarrow S_h$ ως εξής:

$$(\Gamma3.1\mathrm{a}) \qquad (M_h(t)\varphi, \chi) = (\Gamma(\cdot,t)\nabla\varphi, \nabla\chi) - (\gamma_0(\cdot,t)\varphi, \chi), \quad \forall \varphi, \chi \in S_h,$$

$$(\Gamma3.1\mathrm{b}) \qquad \mathsf{T}_h(t) := I_h - \gamma M_h(t),$$

όπου I_h είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον S_h, και θέτουμε

$$(\Gamma3.1\mathrm{c}) \qquad f_h(t) := P_h(f(t)),$$

όπου P_h είναι ο τελεστής της L^2–προβολής στον S_h. Για κάθε $t \in [0, t^*]$, ορίζουμε επί πλέον τις συζυγογραμμικές μορφές $B(t), B^*(t) : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, ως εξής:

$$(\Gamma3.2\mathrm{a}) \qquad B(t; v, w) := (\Gamma(\cdot,t)\nabla v, \nabla w) - ((\gamma_0(\cdot,t) + \frac{1}{\gamma})v, w),$$

και

$$(\Gamma3.2\mathrm{b}) \qquad B^*(t; v, w) := (\Gamma(\cdot,t)\nabla v, \nabla w) - ((\overline{\gamma_0}(\cdot,t) + \frac{1}{\gamma})v, w),$$

για κάθε $v, w \in H^1$.

Λήμμα Γ3.1. *Υπάρχουν πραγματικές σταθερές $\widehat{C}_{0,B} > 0$, $\widehat{C}_G \geq 0$ και $\widehat{C}_E > 0$, τέτοιες ώστε*

$$|B(t;v,w)| \leq \widehat{C}_{0,B}\|v\|_1\|w\|_1, \quad \forall v,w \in H^1, \quad \forall t \in [0,t^*], \tag{Γ3.3a}$$

και

$$\mathsf{Re}\, B(t;w,w) + \widehat{C}_G\|w\|^2 \geq \widehat{C}_E\|w\|_1^2, \quad \forall w \in H_0^1, \quad \forall t \in [0,t^*]. \tag{Γ3.3b}$$

Απόδειξη. Έστω $w, v \in H^1$ και $t \in [0,t^*]$. Τότε η (Γ3.2a) και η ανισότητα Cauchy–Schwarz δίνουν

$$\begin{aligned}|B(t;w,v)| \leq& \max_{1\leq j,m\leq d}\Big\{\max_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\gamma_{jm}|\Big\}\sum_{j,m=1}^{d}\int_\Omega|\partial_{x_m}w||\partial_{x_j}v|dx\\ &+\Big(\frac{1}{|\gamma|}+\max_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\gamma_0|\Big)\int_\Omega|v||w|dx \leq \frac{\widehat{C}_{0,B}}{d+1}\sum_{j,m=0}^{d}\int_\Omega|\partial_{x_m}w||\partial_{x_j}v|dx\\ \leq&\frac{\widehat{C}_{0,B}}{d+1}\Big(\sum_{m=0}^{d}\|\partial_{x_m}w\|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{d}\|\partial_{x_j}v\|\Big) \leq \widehat{C}_{0,B}\|w\|_1\|v\|_1,\end{aligned}$$

όπου $\widehat{C}_{0,B} := (d+1)\max\Big\{\max_{1\leq j,m\leq d}\big(\max_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\gamma_{jm}|\big),(\frac{1}{|\gamma|}+\max_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}|\gamma_0|)\Big\}$.

Επιλέγουμε $\widehat{C}_G \geq 0$, τέτοιο ώστε $\widehat{C}_G \geq \dfrac{1}{\gamma} + \max_{\overline{\Omega}\times[0,t^*]}\mathsf{Re}\,\gamma_0$. Έστω $w \in H_0^1$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (Γ3.2a) και (Γ1.3), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}\, B(t;w,w) + \widehat{C}_G\|w\|^2 =&(\Gamma(\cdot,t)\nabla w,\nabla w) + \int_\Omega\Big(\widehat{C}_G - \mathsf{Re}\,\gamma_0(\cdot,t) - \frac{1}{\gamma}\Big)|w|^2dx\\ \geq& C_\Gamma\|\nabla w\|^2, \quad \forall t\in[0,t^*].\end{aligned} \tag{Γ3.3c}$$

Η ανισότητα (Α1.1) και η (Γ3.3c) οδηγούν στην (Γ3.3b) με $\widehat{C}_E = \frac{C_\Gamma}{1+C_{PF}}$. ∎

Στο λήμμα που ακολουθεί, παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες των B και B^*.

Λήμμα Γ3.2. *Για κάθε $t \in [0,t^*]$ και $0 < h < h_\alpha$, ισχύει ότι*

$$B^*(t;v,w) = \overline{B(t;w,v)}, \quad \forall v,w \in H^1, \tag{Γ3.4a}$$

$$(\mathsf{T}(t)w,v) = -\gamma B(t;w,v), \quad \forall w \in X_0^2, \quad \forall v \in H_0^1, \tag{Γ3.4b}$$

$$(\mathsf{T}^*(t)w,v) = -\gamma B^*(t;w,v), \quad \forall w \in X_0^2, \quad \forall v \in H_0^1, \tag{Γ3.4c}$$

$$(\Gamma 3.4\mathrm{d}) \qquad (\mathsf{T}_h(t)\varphi,\chi) = -\gamma B(t;\varphi,\chi), \quad \forall \varphi,\chi\in S_h.$$

Απόδειξη. Έστω $v,w{\in}H^1$. Τότε από τις (Γ3.2a), (Γ3.2b) και την συμμετρία του πίνακα Γ έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{B(t;w,v)} =&(\nabla v,\Gamma(\cdot,t)\nabla w)-(v,(\gamma_0(\cdot,t)+\frac{1}{\gamma})w)\\ =&(\Gamma(\cdot,t)\nabla v,\nabla w)-((\overline{\gamma_0}(\cdot,t)+\frac{1}{\gamma})v,w)=B^*(t;v,w).\end{aligned}$$

Έστω $w\in X_0^2$ και $v\in H_0^1$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (Γ2.2), (Γ2.12) και τον τύπο ολοκλήρωσης του Green έχουμε

$$\begin{aligned}(\mathsf{T}(t)w,v) =&(w,v)+\gamma(\nabla\cdot(\Gamma(\cdot,t)\nabla w),v)+\gamma(\gamma_0(\cdot,t)w,v)\\ =&-\gamma(\Gamma(\cdot,t)\nabla w,\nabla v)+((\gamma\gamma_0(\cdot,t)+1)w,v)=-\gamma B(t;w,v).\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(\mathsf{T}^*(t)w,v) =&(w,v)+\gamma(\nabla\cdot(\Gamma(\cdot,t)\nabla w),v)+\gamma(\overline{\gamma_0}(\cdot,t)w,v)\\ =&-\gamma(\Gamma(\cdot,t)\nabla w,\nabla v)+((\gamma\overline{\gamma_0}(\cdot,t)+1)w,v)=-\gamma B^*(t;w,v).\end{aligned}$$

Η (Γ3.4d) έπεται εύκολα από τις (Γ3.1b), (Γ3.1a) και (Γ3.2a). ■

Βλέποντας τον T_h ως διακριτό ανάλογο του T, μας ενδιαφέρει να εξασφαλίσουμε γι' αυτόν ιδιότητες οι οποίες να είναι διακριτά ανάλογα ιδιοτήτων του T. Το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι να αποδείξουμε ότι ο τελεστής T_h αντιστρέφεται για μικρό h, και ότι ο $\mathsf{T}_h^{-1}P_h$ προσεγγίζει με βέλτιστο τρόπο τον T^{-1}, στις στάθμες των χώρων L^2 και H^1. Αυτά εξασφαλίζονται στην εργασία [Sch] του Schatz, όταν οι συντελεστές του T είναι πραγματικοί. Εδώ όμως ο συντελεστής γ_0 είναι γενικά μιγαδικός. Σ' αυτή την περίπτωση η απόδειξη είναι ανάλογη και για πληρότητα την παραθέτουμε στο λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα Γ3.3. *Υπάρχει $h_0\in(0,h_\alpha]$, τέτοιο ώστε ο τελεστής $\mathsf{T}_h^{-1}(t):S_h{\longrightarrow}S_h$ υπάρχει για κάθε $h\in(0,h_0)$ και $t\in[0,t^*]$. Επί πλέον,*

$$(\Gamma 3.5) \qquad \|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw-\mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w\|+h\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw-\mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w\|_1\le\widehat{C}_0h^s\|w\|_{s-2},$$

για κάθε $w\in H^{s-2}$, $s\in\{2,\dots,r\}$, $t\in[0,t^*]$ και $h\in(0,h_0)$.

Απόδειξη. Έστω $t\in[0,t^*]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $w_h^*\in S_h$ τέτοιο ώστε $\mathsf{T}_h(t)w_h^*=0$. Τότε η (Γ3.4d) δίνει

$$(\Gamma 3.6) \qquad B(t;w_h^*,\chi)=0, \quad \forall\chi\in S_h.$$

Θέτοντας $\chi = w_h^*$ στην (Γ3.6) και παίρνοντας στη συνέχεια ισότητα πραγματικών μερών, καταλήγουμε στη σχέση $\mathsf{Re}\, B(t; w_h^*, w_h^*) = 0$. Τότε η (Γ3.3b) δίνει

$$\|w_h^*\|_1 \le \widehat{C}_{1,*}\|w_h^*\|, \tag{Γ3.7a}$$

όπου $\widehat{C}_{1,*} := \sqrt{\frac{\widehat{C}_G}{\widehat{C}_E}}$. Από τις (Γ3.4c), (Γ3.4a) και (Γ3.6) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|w_h^*\|^2 &= -\,\gamma\, \mathsf{Re}\, B^*(t; (\mathsf{T}^*)^{-1} w_h^*, w_h^*) \\ &= -\,\gamma\, \mathsf{Re}\, B(t; w_h^*, (\mathsf{T}^*)^{-1} w_h^*) \\ &= -\,\gamma\, \mathsf{Re}\, B(t; w_h^*, (\mathsf{T}^*)^{-1} w_h^* - \chi), \quad \forall \chi \in S_h. \end{aligned} \tag{Γ3.8}$$

Οι σχέσεις (Γ3.8), (Γ3.3a), (H) για $s = 2$, και (Γ2.13b) δίνουν

$$\begin{aligned} \|w_h^*\|^2 \le& |\gamma|\widehat{C}_{0,B}\|w_h^*\|_1 \inf_{\chi\in S_h} \|(\mathsf{T}^*)^{-1} w_h^* - \chi\|_1 \\ \le& |\gamma|\widehat{C}_{0,B}\widehat{C}_F h\|w_h^*\|_1\|(\mathsf{T}^*)^{-1} w_h^*\|_2 \\ \le& |\gamma|\widehat{C}_{0,B}\widehat{C}_F C_{0,0} h\|w_h^*\|_1\|w_h^*\|, \end{aligned}$$

άρα

$$\|w_h^*\| \le \widehat{C}_{2,*} h \|w_h^*\|_1, \tag{Γ3.7b}$$

όπου $\widehat{C}_{2,*} := |\gamma|\widehat{C}_{0,B}\widehat{C}_F C_{0,0} > 0$. Όταν $\widehat{C}_{1,*} = 0$, η (Γ3.7a) δίνει $w_h^* = 0$. Έστω ότι $\widehat{C}_{1,*} > 0$. Από τις (Γ3.7a) και (Γ3.7b) έπεται ότι

$$\|w_h^*\|_1\big(\widehat{C}_{1,*} - h\widehat{C}_{2,*}\big) \le 0. \tag{Γ3.9}$$

Όταν, λοιπόν, $0 < h < \frac{\widehat{C}_{1,*}}{\widehat{C}_{2,*}}$, η (Γ3.9) δίνει αμέσως ότι $w_h^* = 0$. Στη συνέχεια, θα γράφουμε $\widetilde{h} := h_\alpha$ όταν $\widehat{C}_{1,*} = 0$, διαφορετικά $\widetilde{h} := \min\{h_\alpha, \frac{\widehat{C}_{1,*}}{\widehat{C}_{2,*}}\}$.

Έστω ότι $0 < h < \widetilde{h}$. Επειδή ο $\mathsf{T}_h(t)$ είναι γραμμικός, όσα είπαμε παραπάνω εξασφαλίζουν ότι είναι, επί πλέον, ένα προς ένα. Τότε υπάρχει ο $\mathsf{T}_h^{-1}(t)$ από το πεδίο τιμών του $\mathsf{T}_h(t)$ στον S_h. Αυτό, σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι ο S_h έχει πεπερασμένη διάσταση, δίνει ότι το πεδίο τιμών του $\mathsf{T}_h(t)$ (που είναι ένα υποσύνολο του S_h) έχει την ίδια διάσταση με τον S_h που είναι το πεδίο ορισμού του $\mathsf{T}_h(t)$, άρα οι δύο χώροι ταυτίζονται. Έτσι ο $\mathsf{T}_h^{-1}(t)$ όριζεται σε ολόκληρο τον S_h.

Έστω $s \in \{2, \ldots, r\}$, $h \in (0, \widetilde{h})$ και $w \in H^{s-2}$. Τότε ορίζουμε $e : [0, t^*] \longrightarrow H_0^1$, ως εξής: $e(t) := \mathsf{T}_h^{-1}(t) P_h w - \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t) w$ για κάθε $t \in [0, t^*]$. Από τις (Γ3.4b) και (Γ3.4d) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$B(t; e(t), \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Γ3.10}$$

Από τις (Γ3.4c), (Γ3.4a) και (Γ3.10) (δουλεύοντας όπως στην (Γ3.8)) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\|e(t)\|^2 = -\gamma \operatorname{Re} B(t; e(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e(t) - \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Οι σχέσεις (Γ3.3a), (H) για $s = 2$, (Γ2.13b) και η παραπάνω δίνουν

$$\begin{aligned}\|e(t)\|^2 \leq& |\gamma|\widehat{C}_{0,B}\|e(t)\|_1 \inf_{\chi\in S_h} \|(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e(t) - \chi\|_1\\ \leq& |\gamma|\widehat{C}_{0,B}\widehat{C}_F h\|e(t)\|_1\|(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e(t)\|_2\\ \leq& \widehat{C}_{2,*}h\|e(t)\|_1\|e(t)\|, \quad \forall t \in [0, t^*],\end{aligned}$$

δηλ.

$$\|e(t)\| \leq \widehat{C}_{2,*}h\|e(t)\|_1, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Γ3.11}$$

Από τις (Γ3.3b) και (Γ3.10b) έχουμε

$$\begin{aligned}\|e(t)\|_1^2 \leq& \frac{\widehat{C}_G}{\widehat{C}_E}\|e(t)\|^2 + \frac{1}{\widehat{C}_E} \operatorname{Re} B(t; e(t), \chi - \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w)\\ \leq& (\widehat{C}_{1,*})^2\|e(t)\|^2 + \frac{\widehat{C}_{0,B}}{\widehat{C}_E}\|e(t)\|_1\| \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w - \chi\|_1, \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0, t^*].\end{aligned}$$

Βασιζόμενοι στην (Γ3.11), στην (H) και στην (Γ2.7), από την πιό πάνω σχέση έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}\|e(t)\|_1^2 \leq& (\widehat{C}_{1,*}\widehat{C}_{2,*})^2h^2\|e(t)\|_1^2 + \frac{\widehat{C}_{0,B}}{\widehat{C}_E}\|e(t)\|_1 \inf_{\chi\in S_h} \| \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w - \chi\|_1\\ \leq& (\widehat{C}_{1,*}\widehat{C}_{2,*})^2h^2\|e(t)\|_1^2 + \frac{\widehat{C}_{0,B}}{\widehat{C}_E}\widehat{C}_F\|e(t)\|_1 h^{s-1}\| \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w\|_s\\ \leq& (\widehat{C}_{1,*}\widehat{C}_{2,*})^2h^2\|e(t)\|_1^2 + \frac{\widehat{C}_{0,B}}{\widehat{C}_E}\widehat{C}_F C_{s-2,0}h^{s-1}\|e(t)\|_1\|w\|_{s-2}, \quad \forall t \in [0, t^*],\end{aligned}$$

ή

$$\big(1 - (\widehat{C}_{1,*}\widehat{C}_{2,*})^2h^2\big)\|e(t)\|_1 \leq \frac{\widehat{C}_{0,B}}{\widehat{C}_E}\widehat{C}_F C_{s-2,0}h^{s-1}\|w\|_{s-2}, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Γ3.12a}$$

Όταν $\widehat{C}_{1,*} = 0$, τότε θέτουμε $h_0 := h_\alpha$ και $\varepsilon_0 := 1$. Διαφορετικά ορίζουμε $h_0 := \min\{\widetilde{h}, \frac{\sqrt{1-\varepsilon_0}}{\widehat{C}_{1,*}\widehat{C}_{2,*}}\}$, όπου $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. Τότε, από την (Γ3.12a) έχουμε

$$\|e(t)\|_1 \leq \frac{\widehat{C}_{0,B}}{\varepsilon_0\widehat{C}_E}\widehat{C}_F C_{s-2,0}h^{s-1}\|w\|_{s-2}, \quad \forall t \in [0, t^*], \quad \forall h \in (0, h_0). \tag{Γ3.12b}$$

Έτσι η (Γ3.5) είναι συνέπεια των (Γ3.11) και (Γ3.12b). ■

Λόγω των υποθέσεων ομαλότητας (Γ2.1a), για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ έχουμε $M_h, \mathsf{T}_h \in C^\lambda([0,t^*], \mathcal{L}(S_h; S_h))$ και ισχύει

$$(\text{Γ3.13}) \qquad \begin{aligned}(\partial_t^\ell M_h(t)\varphi, \chi) =& \partial_t^\ell (M_h(t)\varphi, \chi) \\ =& (\partial_t^\ell \Gamma(\cdot, t)\nabla\varphi, \nabla\chi) - (\partial_t^\ell \gamma_0(\cdot, t)\varphi, \chi), \quad \forall \varphi, \chi \in S_h.\end{aligned}$$

Επί πλέον, εξασφαλίζεται ότι

$$(\text{Γ3.14a}) \qquad \mathsf{T}_h^{-1} \in C^\lambda([0,t^*], \mathcal{L}(S_h; S_h)), \quad 0 < h < h_0.$$

Παίρνοντας, στη συνέχεια, την παράγωγο τάξης ℓ ως προς t των δύο μελών της ισότητας $\mathsf{T}_h\, \mathsf{T}_h^{-1} = I_h$ καταλήγουμε στη σχέση

$$(\text{Γ3.14b}) \qquad \partial_t^\ell\, \mathsf{T}_h^{-1} = -\sum_{m=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{m} \mathsf{T}_h^{-1}\, \partial_t^{\ell-m}\, \mathsf{T}_h\, \partial_t^m\, \mathsf{T}_h^{-1}, \quad \ell = 1, \ldots, \lambda,$$

η οποία αποτελεί διακριτό ανάλογο της (Γ2.8).

Για $t \in [0, t^*]$ και $\ell = 1, \ldots, \lambda$, ορίζουμε τις συζυγογραμμικές μορφές: $\partial_t^\ell B(t)$, $\partial_t^\ell B^*(t) : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, ως εξής

$$(\text{Γ3.15a}) \qquad \partial_t^\ell B(t; v, w) := (\partial_t^\ell \Gamma(\cdot, t)\nabla v, \nabla w) - (\partial_t^\ell (\gamma_0(\cdot, t) + \frac{1}{\gamma})v, w),$$

$$(\text{Γ3.15b}) \qquad \partial_t^\ell B^*(t; v, w) := (\partial_t^\ell \Gamma(\cdot, t)\nabla v, \nabla w) - (\partial_t^\ell (\overline{\gamma_0}(\cdot, t) + \frac{1}{\gamma})v, w),$$

για κάθε $v, w \in H^1$. Δουλεύοντας όπως στο Λήμμα Γ3.1, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\ell \in \{1, \ldots, \lambda\}$ υπάρχει σταθερά $\widehat{C}_{\ell,B}$ τέτοια ώστε

$$(\text{Γ3.15c}) \qquad |\partial_t^\ell B(t; v, w)| \le \widehat{C}_{\ell,B} \|v\|_1 \|w\|_1, \quad \forall v, w \in H^1, \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Ενώ το Λήμμα Γ3.2 επεκτείνεται ως εξής

Λήμμα Γ3.4. *Για κάθε $\ell \in \{1, \ldots, \lambda\}$, $t \in [0, t^*]$ και $h \in (0, h_\alpha)$ έχουμε*

$$(\text{Γ3.16a}) \qquad (\partial_t^\ell\, \mathsf{T}(t)w, v) = -\gamma \partial_t^\ell B(t; w, v), \quad \forall w \in X_0^2, \quad \forall v \in H_0^1,$$

$$(\text{Γ3.16b}) \qquad (\partial_t^\ell\, \mathsf{T}_h(t)\varphi, \chi) = -\gamma \partial_t^\ell B(t; \varphi, \chi), \quad \forall \varphi, \chi \in S_h,$$

$$(\text{Γ3.16c}) \qquad \partial_t^\ell B^*(t; v, w) = \overline{\partial_t^\ell B(t; w, v)}, \quad \forall v, w \in H^1,$$

$$(\Gamma 3.16\mathrm{d}) \qquad (\partial_t^\ell\, \mathsf{T}^*(t)w,v) = -\gamma\partial_t^\ell B^*(t;w,v), \quad \forall w\in X_0^2, \quad \forall v\in H_0^1,$$

Απόδειξη. Έστω $w \in X_0^2$ και $v \in H_0^1$. Τότε βασιζόμενοι στις (Γ2.2d), (Γ2.2c), (Γ3.15a) και τον τύπο ολοκλήρωσης Green, παίρνουμε

$$\begin{aligned}(\partial_t^\ell\, \mathsf{T}(t)w,v) =&- \gamma(\partial_t^\ell M(t)w,v) = -\gamma\Big[-(\nabla\cdot(\partial_t^\ell\Gamma(\cdot,t)\nabla w),v) - (\partial_t^\ell\gamma_0(\cdot,t)w,v)\Big]\\ =&-\gamma\partial_t^\ell B(t;w,v).\end{aligned}$$

Δείξαμε, λοιπόν, την (Γ3.16a). Η (Γ3.16d) προκύπτει δουλεύοντας όμοια. Έστω, τώρα, $\varphi,\chi\in S_h$. Τότε, οι (Γ3.1b), (Γ3.13) και (Γ3.15a) δίνουν

$$\begin{aligned}(\partial_t^\ell\, \mathsf{T}_h(t)\varphi,\chi) =&\partial_t^\ell(\mathsf{T}_h(t)\varphi,\chi) = \partial_t^\ell((I_h-\gamma M_h(t))\varphi,\chi) = -\gamma\partial_t^\ell(M_h(t)\varphi,\chi)\\ =&-\gamma\partial_t^\ell B(t;\varphi,\chi).\end{aligned}$$

Τέλος, η (Γ3.16c) αποδεικνύεται όπως η (Γ3.4a) λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο πίνακας $\partial_t^\ell\Gamma$ είναι συμμετρικός. ■

Συνδυάζοντας τεχνικές που περιέχονται στις εργασίες [Sch] και [HuT], επεκτείνουμε (στην Πρόταση που ακολουθεί) το αποτέλεσμα του Λήμματος Γ3.3, στις ως προς το χρόνο παραγώγους του T_h^{-1}.

Πρόταση Γ3.1. *Για κάθε $\ell\in\{0,\dots,\lambda\}$ υπάρχουν $h_\ell\in(0,h_\alpha]$ και μιά πραγματική σταθερά $\widehat{C}_\ell$ τέτοια ώστε*

$$(\Gamma 3.17) \quad \|\partial_t^\ell\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw - \partial_t^\ell\mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w\| + h\|\partial_t^\ell\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw - \partial_t^\ell\mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w\|_1 \le \widehat{C}_\ell h^s\|w\|_{s-2},$$

για κάθε $w\in H^{s-2}$, $s\in\{2,\dots,r\}$, $t\in[0,t^*]$ και $h\in(0,h_\ell)$. Επί πλέον $h_{\ell+1}\le h_\ell$, για $\ell=0,\dots,\lambda-1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με μαθηματική επαγωγή.

Έστω $s\in\{2,\dots,r\}$ και $w\in H^{s-2}$. Όταν $\ell=0$, οι σχέσεις (Γ3.17) και (Γ3.5) ταυτίζονται. Υποθέτουμε ότι η (Γ3.17) ισχύει για $0,\dots,\ell$, όπου $0\le\ell\le\lambda-1$. Έστω $h\in(0,h_\ell)$. Ορίζουμε τότε τις συναρτήσεις σφάλματος $e^j:[0,t^*]\longrightarrow H_0^1$ ως εξής:

$$e^j(t) := \partial_t^j\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw - \partial_t^j\, \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w, \quad t\in[0,t^*], \quad j=0,\dots,\ell+1.$$

Από τις (Γ3.4d), (Γ3.14b) και (Γ3.16b) έχουμε

$$\begin{aligned}B(t;\partial_t^{\ell+1}\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw,\chi) =&-\frac{1}{\gamma}(\mathsf{T}_h(t)\partial_t^{\ell+1}\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw,\chi)\\ =&\frac{1}{\gamma}\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}(\partial_t^{\ell+1-m}\, \mathsf{T}_h(t)\partial_t^m\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw,\chi)\\ =&-\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\partial_t^{\ell+1-m}B(t;\partial_t^m\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_hw,\chi),\end{aligned} \qquad (\Gamma 3.18\mathrm{a})$$

για κάθε $\chi \in S_h$ και $t \in [0, t^*]$. Από τις (Γ3.4b), (Γ2.8) και (Γ3.16a) έχουμε

$$
\begin{aligned}
B(t; \partial_t^{\ell+1} \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w, \chi) &= -\frac{1}{\gamma}(\mathsf{T}_{s-2}(t)\partial_t^{\ell+1} \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w, \chi) \\
&= \frac{1}{\gamma}\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}(\partial_t^{\ell+1-m} \mathsf{T}_{s-2}(t)\partial_t^m \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w, \chi) \\
&= -\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\partial_t^{\ell+1-m} B(t; \partial_t^m \mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w, \chi),
\end{aligned}
\tag{Γ3.18b}
$$

για κάθε $\chi \in S_h$ και $t \in [0, t^*]$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (Γ3.18a) και (Γ3.18b) έχουμε

$$
B(t; e^{\ell+1}(t), \chi) = -\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\partial_t^{\ell+1-m} B(t; e^m(t), \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Γ3.19}
$$

Οι (Γ3.4c), (Γ3.4a), (Γ3.19), (Γ3.16c) και (Γ3.16d) δίνουν

$$
\begin{aligned}
\|e^{\ell+1}(t)\|^2 &= -\gamma\overline{B^*(t; (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t), e^{\ell+1}(t))} \\
&= -\gamma B(t; e^{\ell+1}(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t)) \\
&= -\gamma B(t; e^{\ell+1}(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t) - \chi) \\
&\quad -\gamma\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\Big[\partial_t^{\ell+1-m} B(t; e^m(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t) - \chi) \\
&\quad -\partial_t^{\ell+1-m} B(t; e^m(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t))\Big] \\
&= -\gamma B(t; e^{\ell+1}(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t) - \chi) \\
&\quad -\gamma\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\Big[\partial_t^{\ell+1-m} B(t; e^m(t), (\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t) - \chi) \\
&\quad +\frac{1}{\gamma}\big(e^m(t), \partial_t^{\ell+1-m} \mathsf{T}^*(t)(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t)\big)\Big], \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0, t^*].
\end{aligned}
$$

Εν συνεχεία, η (Γ3.15c) δίνει

$$
\begin{aligned}
\|e^{\ell+1}(t)\|^2 \le \widehat{C}\Big[&\inf_{\chi \in S_h}\|(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t) - \chi\|_1 \sum_{m=0}^{\ell+1}\|e^m(t)\|_1 \\
&+ \|(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t)\|_2 \sum_{m=0}^{\ell}\|e^m(t)\|\Big], \quad \forall t \in [0, t^*].
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας την (H) για $s = 2$, και χρησιμοποιώντας τις (Γ2.13b) καθώς και την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned}\|e^{\ell+1}(t)\|^2 &\le \widehat{C}\|(\mathsf{T}^*)^{-1}(t)e^{\ell+1}(t)\|_2\Big[h\sum_{m=0}^{\ell+1}\|e^m(t)\|_1+\sum_{m=0}^{\ell}\|e^m(t)\|\Big]\\ &\le \widehat{C}\|e^{\ell+1}(t)\|\Big[h\|e^{\ell+1}(t)\|_1+h^s\|w\|_{s-2}\Big],\quad \forall t\in[0,t^*].\end{aligned} \tag{Γ3.20}$$

Από τις (Γ3.3b) και (Γ3.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|e^{\ell+1}(t)\|_1^2 \le&\frac{\widehat{C}_G}{\widehat{C}_E}\|e^{\ell+1}(t)\|^2+\frac{1}{\widehat{C}_E}\,\mathsf{Re}\Big[B(t;e^{\ell+1}(t),e^{\ell+1}(t)-\chi)\\ &+\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\partial_t^{\ell+1-m}B(t;e^m(t),e^{\ell+1}(t)-\chi)\\ &-\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell+1}{m}\partial_t^{\ell+1-m}B(t;e^m(t),e^{\ell+1}(t))\Big],\quad \forall\chi\in S_h,\quad \forall t\in[0,t^*].\end{aligned} \tag{Γ3.21}$$

Αντικαθιστώντας την (Γ3.20) στην (Γ3.21), και χρησιμοποιώντας τις (Γ3.3a), (Γ3.15c), (H), (Γ2.7) και την επαγωγική υπόθεση, παίρνουμε επί πλέον

$$\begin{aligned}\|e^{\ell+1}(t)\|_1^2 \le&\widehat{C}\Big[\widehat{C}_G\|e^{\ell+1}(t)\|\big(h\|e^{\ell+1}(t)\|_1+h^s\|w\|_{s-2}\big)\\ &+\inf_{\chi\in S_h}\|e^{\ell+1}(t)-\chi\|_1\sum_{m=0}^{\ell+1}\|e^m(t)\|_1+\|e^{\ell+1}(t)\|_1\sum_{m=0}^{\ell}\|e^m(t)\|_1\Big]\\ \le&\widehat{C}\Big[\|e^{\ell+1}(t)\|_1\big(\widehat{C}_Gh\|e^{\ell+1}(t)\|_1+h^s\|w\|_{s-2}+\sum_{m=0}^{\ell}\|e^m(t)\|_1\\ &+\inf_{\chi\in S_h}\|e^{\ell+1}(t)-\chi\|_1\big)+\inf_{\chi\in S_h}\|e^{\ell+1}(t)-\chi\|_1\sum_{m=0}^{\ell}\|e^m(t)\|_1\Big]\\ \le&\widehat{C}\|e^{\ell+1}(t)\|_1\Big[\widehat{C}_Gh\|e^{\ell+1}(t)\|_1+h^{s-1}\|w\|_{s-2}+\inf_{\chi\in S_h}\|\partial_t^{\ell+1}\,\mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w-\chi\|_1\Big]\\ \le&\widehat{C}\|e^{\ell+1}(t)\|_1\Big[\widehat{C}_Gh\|e^{\ell+1}(t)\|_1+h^{s-1}\|w\|_{s-2}+h^{s-1}\|\partial_t^{\ell+1}\,\mathsf{T}_{s-2}^{-1}(t)w\|_s\Big]\\ \le&\widehat{C}\|e^{\ell+1}(t)\|_1\Big[\widehat{C}_Gh\|e^{\ell+1}(t)\|_1+h^{s-1}\|w\|_{s-2}\Big],\end{aligned}$$

δηλ.

$$(1-\widehat{C}\widehat{C}_Gh)\|e^{\ell+1}(t)\|_1\le\widehat{C}h^{s-1}\|w\|_{s-2},\quad \forall t\in[0,t^*]. \tag{Γ3.22a}$$

Όταν $\widehat{C}_G = 0$ ορίζουμε $h_{\ell+1} := h_\ell$. Διαφορετικά θέτουμε $h_{\ell+1} := \min\{h_\ell, \frac{\varepsilon_0}{\widehat{C}_G\widehat{C}}\}$ για κάποιο $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. Έτσι, από την (Γ3.22a) έχουμε

$$\|e^{\ell+1}(t)\|_1\le\widehat{C}h^{s-1}\|w\|_{s-2},\quad \forall t\in[0,t^*],\quad \forall h\in(0,h_{\ell+1}). \tag{Γ3.22b}$$

Από τις (Γ3.22b) και (Γ3.20), συμπεραίνουμε ότι η (Γ3.17) ισχύει για $\ell+1$. ■

Σημείωση. Όταν $\widehat{C}_G = 0$ τότε $h_\ell = h_\alpha$ για $\ell = 0, \ldots, \lambda$. □

Η προηγούμενη πρόταση οδηγεί στο ακόλουθο διακριτό ανάλογο της (Γ2.7).

Πόρισμα Γ3.1. *Για κάθε $\ell \in \{0, \ldots, \lambda\}$ υπάρχει μιά σταθερά $\widehat{C}_{T,\ell}$ τέτοια ώστε*

$$\|\partial_t^\ell \mathsf{T}_h^{-1}(t)\chi\|_1 \le \widehat{C}_{T,\ell}\|\chi\|, \quad \forall \chi \in S_h, \quad \forall t \in [0, t^*], \quad \forall h \in (0, h_\ell). \tag{Γ3.23}$$

Απόδειξη. Έστω $\chi \in S_h$, $t \in [0, t^*]$ και $h \in (0, h_\ell)$. Από την (Γ3.17) για $w = \chi$ και $s = 2$ λαμβάνουμε $\|\partial_t^\ell \mathsf{T}_h^{-1}(t)\chi - \partial_t^\ell \mathsf{T}^{-1}(t)\chi\|_1 \le \widehat{C}_\ell h\|\chi\|$. Η προηγούμενη σχέση και η (Γ2.7) για $s = 0$ δίνουν

$$\|\partial_t^\ell \mathsf{T}_h^{-1}(t)\chi\|_1 \le \|\partial_t^\ell \mathsf{T}^{-1}(t)\chi\|_1 + \widehat{C}_\ell h\|\chi\| \le (C_{0,\ell} + \widehat{C}_\ell h_\alpha)\|\chi\|.$$

Έτσι καταλήγουμε στην (Γ3.23), όπου $\widehat{C}_{T,\ell} = C_{0,\ell} + \widehat{C}_\ell h_\alpha$. ■

Για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ και $t \in [0, t^*]$, ορίζουμε τους τελεστές *ελλειπτικής προβολής* $R_{0,h}, R_{1,h}(t) \in \mathcal{L}(H_0^1; S_h)$ μέσω των απαιτήσεων

$$(\nabla R_{0,h}w, \nabla\chi) = (\nabla w, \nabla\chi), \quad \forall \chi \in S_h, \tag{Γ3.24a}$$

$$(\Gamma(\cdot, t)\nabla R_{1,h}(t)w, \nabla\chi) = (\Gamma(\cdot, t)\nabla w, \nabla\chi), \quad \forall \chi \in S_h, \tag{Γ3.24b}$$

για οποιοδήποτε $w \in H_0^1$. Βασιζόμενοι στην (H) μπορούμε να αποδείξουμε (βλ., π.χ., [HuT] και [Th]) ότι έχουν τις ακόλουθες προσεγγιστικές ιδιότητες:

$$\|w - R_{0,h}w\| + h\|w - R_{h,0}w\|_1 \le \widehat{C}_{0,E}h^s\|w\|_s, \tag{Γ3.25a}$$

$$\|w - R_{1,h}(t)w\| + h\|w - R_{1,h}(t)w\|_1 \le \widehat{C}_{1,E}h^s\|w\|_s, \tag{Γ3.25b}$$

για κάθε $w \in X_0^s$, $s \in \{2, \ldots, r\}$, $h \in (0, h_\alpha)$ και $t \in [0, t^*]$.

Παρατήρηση Γ3.1. Οι ελλειπτικές προβολές $R_{0,h}$ και $R_{1,h}$ είναι καλά ορισμένες μέσω των (Γ3.24a) και (Γ3.24b), αντίστοιχα, επειδή τα $(\nabla\cdot, \nabla\cdot)$ και $(\Gamma(\cdot, t)\nabla\cdot, \nabla\cdot)$ είναι εσωτερικά γινόμενα στον H_0^1. Η απόδειξη των (Γ3.25a) και (Γ3.25b) περιέχεται σ' εκείνη του Λήματος Γ3.3. Συγκεκριμένα, έστω ότι $\gamma_0 + \frac{1}{\gamma} = 0$. Τότε η (Γ3.3b) ισχύει με $\widehat{C}_G = 0$, ενώ οι τελεστές T και T^* αντιστρέφονται και έχουν τις ιδιότητες που περιγράψαμε στην §Γ2. Θέτοντας $e(t) = R_{1,h}(t)w - w$ για κάθε $t \in [0, t^*]$, παρατηρούμε ότι $B(t; e(t), \chi) = 0$, $\forall \chi \in S_h$, $\forall t \in [0, t^*]$. Ακολουθώντας την απόδειξη του Λήμματος Γ3.3 (ειδικά το τμήμα μετά από την (Γ3.10)) καταλήγουμε στην (Γ3.25b). Η (Γ3.25a) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας Γ είναι ο μοναδιαίος. □

Όταν η οικογένεια $\{S_h\}_{h \in (0, h_\alpha)}$ ικανοποιεί την (H_∞), η ανάλυση της Wheeler, [Wh], η οποία χρησιμοποιεί την (Γ3.25), δίνει

$$\|R_{0,h}w - w\|_\infty \le \widehat{C}_{0,E,\infty}h^s\|w\|_{s,\infty}, \tag{Γ3.26a}$$

$$\|R_{1,h}(t)w - w\|_\infty \le \widehat{C}_{1,E,\infty}h^s\|w\|_{s,\infty}, \tag{Γ3.26b}$$

για κάθε $w \in \mathcal{C}_0^s$, $s \in \{2, \ldots, r\}$, $h \in (0, h_\alpha)$, $t \in [0, t^*]$, καθώς και μιά επέκταση της (Γ3.5) στην στάθμη $\|\cdot\|_\infty$, η οποία περιγράφεται στην πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση Γ3.2. *Υποθέτουμε ότι $d=1$ και ότι ισχύει η* (H_∞). *Τότε υπάρχει σταθερά $\widehat{C}_\infty$, τέτοια ώστε*

$$\| \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h w - \mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)w\|_\infty \le \widehat{C}_\infty h^s \|w\|_{s-2,\infty}, \tag{Γ3.27}$$

για κάθε $w \in \mathcal{C}^{s-2}$, $s \in \{2,\dots,r\}$, $t \in [0,t^*]$ και $h \in (0,h_0)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, θέτουμε $\widehat{\eta}(t) := R_{1,h}(t)\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)w - \mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)w$ και $\widehat{\eta}_h(t) := R_{1,h}(t)\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)w - \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h w$. Τότε, οι (Γ3.26b) και (Γ2.18) δίνουν

$$\|\widehat{\eta}(t)\|_\infty \le \widehat{C}_{1,E,\infty}h^s \|\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)w\|_{s,\infty} \le \widehat{C}_{1,E,\infty}C_{\mathcal{C},0,s-2}h^s\|w\|_{s-2,\infty}. \tag{Γ3.28}$$

Έστω $\widehat{e}(t) = \mathsf{T}_{\mathcal{C},s-2}^{-1}(t)w - \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h w$. Είναι προφανές ότι

$$\widehat{\eta}_h(t) = R_{1,h}(t)\widehat{e}(t), \tag{Γ3.29a}$$

ενώ από τις (Γ3.4b) και (Γ3.4d) έπεται ότι

$$B(t;\widehat{e}(t),\chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h. \tag{Γ3.29b}$$

Από τις (Γ1.3), (Γ3.29a), (Γ3.24b), (Γ3.2a), (Γ3.29b) και (Γ3.5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
C_\Gamma\|\widehat{\eta}_h(t)\|_1^2 &\le (\Gamma(\cdot,t)\nabla\widehat{\eta}_h(t), \nabla\widehat{\eta}_h(t))\\
&= \mathsf{Re}(\Gamma(\cdot,t)\nabla\widehat{\eta}_h(t), \nabla\widehat{\eta}_h(t))\\
&= \mathsf{Re}(\Gamma(\cdot,t)\nabla R_{1,h}(t)\widehat{e}(t), \nabla\widehat{\eta}_h(t))\\
&= \mathsf{Re}(\Gamma(\cdot,t)\nabla\widehat{e}(t), \nabla\widehat{\eta}_h(t))\\
&= \mathsf{Re}\,B(t;\widehat{e}(t),\widehat{\eta}_h(t)) + \mathsf{Re}((\gamma_0(\cdot,t)+\frac{1}{\gamma})\widehat{e}(t),\widehat{\eta}_h(t))\\
&= \mathsf{Re}((\gamma_0(\cdot,t)+\frac{1}{\gamma})\widehat{e}(t),\widehat{\eta}_h(t))\\
&\le \widehat{C}\|\widehat{e}(t)\|\|\widehat{\eta}_h(t)\|\\
&\le \widehat{C}h^s\|\widehat{\eta}_h(t)\|\|w\|_{s-2},
\end{aligned}$$

δηλ.

$$\|\widehat{\eta}_h(t)\|_1 \le \widehat{C}h^s\|w\|_{s-2}. \tag{Γ3.30}$$

Εν συνεχεία, από τις (Γ3.30) και (Γ2.17) έχουμε

$$\|\widehat{\eta}_h(t)\|_\infty \le \widehat{C}h^s\|w\|_{s-2}. \tag{Γ3.31}$$

Η (Γ3.27) είναι άμεση συνέπεια των (Γ3.28) και (Γ3.31). ■

Για κάθε $h \in (0, h_0)$ και $t \in [0, t^*]$, έστω

$$F_h(t) := \mathsf{T}_h^{-1}(t) f_h(t), \tag{Γ3.32a}$$

και $L_h(t) : S_h \longrightarrow S_h$ οριζόμενη ως εξής

$$L_h(t) := -i\frac{\xi}{\gamma}\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)\Big[I_h - \mathsf{T}_h(t)\Big] = i\frac{\xi}{\gamma}\Big[I_h - \mathsf{T}_h^{-1}(t)\Big]. \tag{Γ3.32b}$$

Είμαστε, τώρα, έτοιμοι να διατυπώσουμε το πρόβλημα της *ημιδιακριτής* προσέγγισης της λύσης u του (P). Για κάθε $h \in (0, h_\alpha)$ ζητούμε $u_h \in C^1((0,t^*], S_h) \cap C([0,t^*], S_h)$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_h\, \partial_t u_h &= -i\frac{\xi}{\gamma}(I_h - \mathsf{T}_h)u_h + f_h \quad \text{στο} \quad (0, t^*], \\ u_h(0) &= v_h^0, \end{aligned} \tag{P_h}$$

όπου $v_h^0 \in S_h$ είναι κατάλληλη προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης v^0. Όταν $h \in (0, h_0)$, τότε το (P_h) γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$\partial_t u_h = L_h u_h + F_h \quad \text{στο} \quad (0, t^*], \tag{Γ3.33a}$$

$$u_h(0) = v_h^0. \tag{Γ3.33b}$$

Επειδή ο S_h έχει πεπερασμένη διάσταση, η (Γ3.33) ισοδυναμεί με ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με άγνωστες συναρτήσεις τους συντελεστές του u_h ως προς κάποια βάση του S_h. Οι υποθέσεις ομαλότητας (Γ2.1a) και (Γ2.1b) εγγυώνται ότι

$$F_h \in C^\lambda([0, t^*], S_h) \quad \text{και} \quad L_h \in C^\lambda([0, t^*], \mathcal{L}(S_h; S_h))$$

για κάθε $h \in (0, h_0)$. Έτσι η θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων δίνει ότι το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση u_h, για την οποία ισχύει

$$u_h \in C^{\lambda+1}([0, t^*], S_h), \tag{$\mathcal{R}_h$}$$

για κάθε $h \in (0, h_0)$.

Παρουσιάζουμε τώρα ένα διακριτό ανάλογο της (Γ2.19).

Λήμμα Γ3.5. *Για οποιοδήποτε $h \in (0, h_0)$ και $t \in [0, t^*]$ έχουμε*

$$\mathsf{Re}(L_h(t)\varphi, \varphi) \le 0, \quad \forall \varphi \in S_h. \tag{Γ3.34}$$

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στις (Γ3.32b), (Γ3.4d) και (Γ3.2a) λαμβάνουμε

$$\mathsf{Re}(L_h(t)\varphi, \varphi) = -\frac{\xi}{\gamma}\, \mathrm{Im}(\varphi, \mathsf{T}_h^{-1}(t)\varphi) = \xi\, \mathrm{Im}\, B(t; \mathsf{T}_h^{-1}(t)\varphi, \mathsf{T}_h^{-1}(t)\varphi)$$

$$= -\,\xi\,\mathrm{Im}(\gamma_0(\cdot,t)\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)\varphi, \mathsf{T}_h^{-1}(t)\varphi).$$

Η (Γ3.34) έπεται από την παραπάνω ισότητα και την (Γ1.4). ■

Παρατήρηση Γ3.2. Όταν $\mathrm{Im}(\xi\gamma_0) = 0$ στο $\overline{\Omega}\times[0,t^*]$, τότε $\mathrm{Re}(L(t)\varphi,\varphi) = 0$, για κάθε $h \in (0,h_0)$, $\varphi \in S_h$ και $t \in [0,t^*]$. Αυτό αποτελεί διακριτό ανάλογο της Παρατήρησης Γ2.1. □

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη σύγκλιση (σε διάφορες στάθμες) των ημιδιακριτών προσεγγίσεων u_h όταν το h τείνει στο 0. Συγκεκριμένα θα δούμε ότι κατάλληλη επιλογή των v_h^0, ώστε αυτά να συγκλίνουν σε κάποια στάθμη στη v^0 με βέλτιστη τάξη ως προς h, έχει ως συνέπεια τη σύγκλιση, στην ίδια στάθμη, των u_h στη λύση u, με επίσης βέλτιστη τάξη ως προς h.

Πρόταση Γ3.3. *Έστω u και u_h οι λύσεις των προβλημάτων* (P) *και* (P_h), *αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι*

$$(\mathrm{IV}_0) \qquad \|v_h^0 - v^0\| \le \widehat{C}_{IV,0} h^r \|v^0\|_r, \quad 0 < h < h_0.$$

Τότε

$$(\Gamma3.35) \quad \sup_{t\in[0,t^*]} \|u_h(t) - u(t)\| \le \widehat{C} h^r (1+t^*)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_r + \int_0^{t^*} \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau\Big], \quad 0 < h < h_0.$$

Απόδειξη. Έστω $\vartheta_h(t) := u_h(t) - P_h u(t)$ για $t \in [0,t^*]$ και $0 < h < h_0$. Εφαρμόζουμε τον τελεστή P_h και στα δύο μέλη της (Γ2.11), και έπειτα την αφαιρούμε κατά μέλη από την (Γ3.33). Έτσι λαμβάνουμε

$$(\Gamma3.36\mathrm{a}) \qquad \partial_t\vartheta_h(t) = L_h(t)\vartheta_h(t) + (\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - P_h\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))(-i\frac{\xi}{\gamma}u(t) + f(t)),$$

$$(\Gamma3.36\mathrm{b}) \qquad \vartheta_h(0) = v_h^0 - P_h v^0.$$

Παίρνοντας το L^2 εσωτερικό γινόμενο της (Γ3.36a) με την $\vartheta_h(t)$, η ισότητα πραγματικών μερών και η (Γ3.34) δίνουν

$$(\Gamma3.37) \qquad \frac{d}{dt}\|\vartheta_h(t)\|^2 \le 2\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - P_h\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))(-i\frac{\xi}{\gamma}u(t) + f(t))\|\|\vartheta_h(t)\|.$$

Επί πλέον, χρησιμοποιώντας τις (H), (Γ3.5) και (Γ2.7), έχουμε

$$\begin{aligned}\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - P_h\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))(-i\frac{\xi}{\gamma}u(t) + f(t))\|&\\ \le \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - \mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))(-i\frac{\xi}{\gamma}u(t) + f(t))\|&\end{aligned}$$

$$+ \|(\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t) - P_h\, \mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))(-i\frac{\xi}{\gamma}u(t) + f(t))\|$$

$$\leq \widehat{C}h^r \Big[\|u(t)\|_{r-2} + \|f(t)\|_{r-2} + \|\, \mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t)(-i\frac{\xi}{\gamma}u(t) + f(t))\|_r\Big]$$

$$\leq \widehat{C}h^r \big(\|u(t)\|_{r-2} + \|f(t)\|_{r-2}\big).$$

Από την (Γ3.37) και την προηγούμενη σχέση έπεται αμέσως ότι

$$\frac{d}{dt}\|\vartheta_h(t)\|^2 \leq \widehat{C}h^r \big(\|u(t)\|_{r-2} + \|f(t)\|_{r-2}\big)\|\vartheta_h(t)\|.$$

Τότε η Πρόταση Α3.2 δίνει

$$\text{(Γ3.38a)} \qquad \|\vartheta_h(t)\| \leq \|\vartheta_h(0)\| + \widehat{C}h^r \int_0^t \big[\|u(\tau)\|_{r-2} + \|f(\tau)\|_{r-2}\big]d\tau.$$

Χρησιμοποιώντας τις (IV_0) και (H) μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\|\vartheta_h(0)\|$ ως εξής

$$\text{(Γ3.38b)} \qquad \|\vartheta_h(0)\| \leq \|v_h^0 - v^0\| + \|v^0 - P_h v^0\| \leq \widehat{C}h^r\|v^0\|_r.$$

Από τις (Γ3.38) και (Γ2.20a) έχουμε τα ακόλουθα

$$\text{(Γ3.39a)} \qquad \begin{aligned} \|\vartheta_h(t)\| \leq& \widehat{C}h^r \Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2}d\tau \\ &+ t(1+t)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\big(\|v^0\|_{r-2} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{\max\{0,r-4\}}d\tau\big)\Big] \\ \leq& \widehat{C}h^r(1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}\Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2}d\tau\Big]. \end{aligned}$$

Ακόμα, από τις (H) και (Γ2.20a) προκύπτει ότι

$$\text{(Γ3.39b)} \qquad \begin{aligned} \|P_h u(t) - u(t)\| \leq& \widehat{C}_F h^r\|u(t)\|_r \\ \leq& \widehat{C}h^r(1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}\Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2}d\tau\Big]. \end{aligned}$$

Η (Γ3.35) είναι συνέπεια των (Γ3.39a) και (Γ3.39b). ■

Πρόταση Γ3.4. *Έστω u και u_h οι λύσεις των προβλημάτων* (P) *και* (P_h)*, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι*

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad \|v_h^0 - v^0\|_1 \leq \widehat{C}_{IV,1}h^{r-1}\|v^0\|_r, \quad 0 < h < h_0.$$

Τότε

$$\text{(Γ3.40)} \quad \sup_{t\in[0,t^*]}\|u_h(t) - u(t)\|_1 \leq \widehat{C}h^{r-1}(1+ht^*)(1+t^*)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}\Big[\|v^0\|_r + \int_0^{t^*}\|f(\tau)\|_{r-2}d\tau\Big],$$

για κάθε $h \in (0, h_0)$.

Απόδειξη. Έστω $\psi_h(t) := u_h(t) - R_{0,h}u(t)$ για $t \in [0, t^*]$ και $0 < h < h_0$. Εφαρμόζουμε τον τελεστή $R_{0,h}$ και στα δύο μέλη της (Γ2.11), και έπειτα την αφαιρούμε κατά μέλη από την (Γ3.33). Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\text{(Γ3.41a)} \qquad \partial_t \psi_h(t) =& L_h(t)\psi_h(t) - i\frac{\xi}{\gamma}(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h} - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))u(t)\\
&+ (\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))f(t),\\
\text{(Γ3.41b)} \qquad \psi_h(0) =& v_h^0 - R_{0,h}v^0.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας το H^1 εσωτερικό γινόμενο της (Γ3.41a) με την $\psi_h(t)$, η ισότητα πραγματικών μερών δίνει

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\psi_h(t)\|_1^2 =& 2\frac{\xi}{\gamma}\Big[\mathrm{Im}\big(\mathsf{T}_h^{-1}(t)\psi_h(t), \psi_h(t)\big)_1\\
&+ \mathrm{Im}\big((\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h} - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))u(t), \psi_h(t)\big)_1\Big]\\
&+ 2\,\mathrm{Re}\big((\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))f(t), \psi_h(t)\big)_1.
\end{aligned} \tag{Γ3.42}$$

Βασιζόμενοι στις (Γ3.23), (Γ3.5), (Γ3.25a), (H) και (Γ2.7), καταλήγουμε στις ακόλουθες εκτιμήσεις

$$\begin{aligned}
\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h} - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))u(t)\|_1 \le& \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h} - \mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h)u(t)\|_1\\
&+ \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - \mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))u(t)\|_1 + \|(\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t) - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))u(t)\|_1\\
\le& \widehat{C}_{T,0}\|R_{0,h}u(t) - P_hu(t)\| + \widehat{C}_0 h^{r-1}\|u(t)\|_{r-2}\\
&+ \widehat{C}_{0,E}h^{r-1}\|\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t)u(t)\|_r\\
\le& \widehat{C}h^{r-1}\Big[\|u(t)\|_{r-2} + h\|u(t)\|_r\Big],
\end{aligned} \tag{Γ3.43a}$$

και

$$\begin{aligned}
\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))f(t)\|_1 \le& \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - \mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))f(t)\|_1\\
&+ \|(\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t) - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}(t))f(t)\|_1\\
\le& \widehat{C}_0 h^{r-1}\|f(t)\|_{r-2} + \widehat{C}_{0,E}h^{r-1}\|\,\mathsf{T}_{r-2}^{-1}\,f(t)\|_r\\
\le& \widehat{C}h^{r-1}\|f(t)\|_{r-2}.
\end{aligned} \tag{Γ3.43b}$$

Τώρα, από τις (Γ3.42), (Γ3.43) και (Γ3.23) έπεται ότι

$$\frac{d}{dt}\|\psi_h(t)\|_1^2 \le \widehat{C}\Big[\|\psi_h(t)\| + h^{r-1}(\|u(t)\|_{r-2} + h\|u(t)\|_r + \|f(t)\|_{r-2})\Big]\|\psi_h(t)\|_1. \tag{Γ3.44}$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να εξασφαλίσουμε μία εκτίμηση για την ποσότητα $\|\psi_h(t)\|$. Κατ' αρχήν, οι υποθέσεις (IV$_1$) και (H) δίνουν

$$\|v_h^0 - P_h v^0\| \le \|v_h^0 - v^0\|_1 + \|v^0 - P_h v^0\| \le \widehat{C} h^{r-1} \|v^0\|_r. \tag{Γ3.45a}$$

Τότε, ακολουθώντας την ανάλυση της Πρότασης Γ3.3, με την (Γ3.45a) στη θέση της (IV$_0$), αντί της (Γ3.39a) έχουμε

$$\|u_h(t) - P_h u(t)\| \le \widehat{C} h^{r-1} (1+ht)(1+t)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau \Big]. \tag{Γ3.45b}$$

Από τις (Γ3.25a) και (H) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\psi_h(t)\| \le & \|u_h(t) - P_h u(t)\| + \|P_h u(t) - R_{0,h} u(t)\| \\ \le & \|u_h(t) - P_h u(t)\| + \|P_h u(t) - u(t)\| + \|u(t) - R_{0,h} u(t)\| \\ \le & \|u_h(t) - P_h u(t)\| + \widehat{C} h^r \|u(t)\|_r. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|\psi_h(t)\| + h^{r-1} \big(\|u(t)\|_{r-2} + h \|u(t)\|_r \big) \le \|u_h(t) - P_h u(t)\| + \widehat{C} h^r \|u(t)\|_r + h^{r-1} \|u(t)\|_{r-2},$$

και χρησιμοποιώντας τις (Γ3.45a) και (Γ2.20a) έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \|\psi_h(t)\| + & h^{r-1} \big(\|u(t)\|_{r-2} + h \|u(t)\|_r \big) \\ & \le \widehat{C} h^{r-1} (1+ht)(1+t)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau \Big]. \end{aligned} \tag{Γ3.45c}$$

Βασιζόμενοι στις (IV$_1$) και (Γ3.25a), μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\psi_h(0)$ στη στάθμη $\|\cdot\|_1$, ως εξής

$$\|\psi_h(0)\|_1 \le \|v_h^0 - v^0\|_1 + \|v^0 - R_{0,h} v^0\|_1 \le \widehat{C} h^{r-1} \|v^0\|_r. \tag{Γ3.46}$$

Εφαρμόζουμε την Πρόταση Α3.2 στην (Γ3.44). Τότε οι σχέσεις (Γ3.45c) και (Γ3.46) δίνουν

$$\|\psi_h(t)\|_1 \le \widehat{C} h^{r-1} (1+ht)(1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau \Big]. \tag{Γ3.47a}$$

Οι (Γ3.25a) και (Γ2.20a) δίνουν ακόμα

$$\begin{aligned} \|R_{0,h} u(t) - u(t)\|_1 \le & \widehat{C}_{0,E} h^{r-1} \|u(t)\|_r \\ \le & \widehat{C} h^{r-1} (1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_r + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau \Big]. \end{aligned} \tag{Γ3.47b}$$

Η (Γ3.40) είναι άμεση συνέπεια των (Γ3.47a) και (Γ3.47b). ■

Πρόταση Γ3.5. *Έστω u και u_h οι λύσεις των προβλημάτων* (P) *και* (P_h), *αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι*

$$(\mathrm{IV}_\infty) \qquad d=1, \quad 2\le r\le \mu+1, \quad \textit{και} \quad \|v_h^0-v^0\|_\infty \le \widehat{C}_{IV,\infty}h^r\|v^0\|_{r,\infty}, \quad 0<h<h_0.$$

Τότε

$$(\Gamma3.48) \qquad \sup_{t\in[0,t^*]}\|u_h(t)-u(t)\|_\infty \le \widehat{C}h^r(1+t^*)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]+1}\Big[\|v^0\|_{r,\infty}+\int_0^{t^*}\|f(\tau)\|_{r-2,\infty}d\tau\Big],$$

για κάθε $h\in(0,h_0)$.

Απόδειξη. Έστω $\psi_h(t):=u_h(t)-R_{0,h}u(t)$ για $t\in[0,t^*]$ και $0<h<h_0$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (Γ3.41a) με $\overline{\psi_h(t)}$, η ισότητα των πραγματικών μερών και οι σχέσεις (Γ2.17) και (Γ3.23) δίνουν

$$(\Gamma3.49) \qquad \begin{aligned}
\partial_t|\psi_h(t)|^2 =&2\frac{\xi}{\gamma}\,\mathrm{Im}\Big[\big(\mathsf{T}_h^{-1}(t)\psi_h(t)\overline{\psi_h(t)}\big)\\
&\qquad+\big((\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h}-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\overline{\psi_h(t)}\big)\Big]\\
&+2\,\mathsf{Re}\big((\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)\overline{\psi_h(t)}\big)\\
\le&\widehat{C}\Big[\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)\psi_h(t)\|_\infty+|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h}-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)|\\
&\qquad+|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)|\Big]|\psi_h(t)|\\
\le&\widehat{C}\Big[\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)\psi_h(t)\|_1+\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h}-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\|_\infty\\
&\qquad+\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)\|_\infty\Big]|\psi_h(t)|\\
\le&\widehat{C}\Big[\|\psi_h(t)\|+\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h}-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\|_\infty\\
&\qquad+\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)\|_\infty\Big]|\psi_h(t)| \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.
\end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να εκτιμηθούν οι όροι στο δεξιό μέλος της (Γ3.49). Χρησιμοποιώντας τις (Γ2.17) (για $\ell_0=0,r-2$), (Γ3.27), (Γ3.26a), (Γ3.23), (Γ2.18), (Η) και (Γ3.25a), έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)R_{0,h}-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\|_\infty \le& \|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)(R_{0,h}-P_h)u(t)\|_\infty\\
&+\|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h-\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\|_\infty+\|(\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t)-R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\|_\infty\\
\le&\widehat{C}\Big[\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)(R_{0,h}-P_h)u(t)\|_1+h^r\|u(t)\|_{r-2,\infty}+h^r\|\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t)u(t)\|_{r,\infty}\Big]\\
\le&\widehat{C}\Big[\|R_{0,h}u(t)-u(t)\|+\|u(t)-P_hu(t)\|+h^r\|u(t)\|_{r-2,\infty}\Big]
\end{aligned}$$

$$\leq \widehat{C} h^r \Big[\|u(t)\|_r + \|u(t)\|_{r-2,\infty}\Big] \leq \widehat{C} h^r \Big[\|u(t)\|_r + \|u(t)\|_{r-1}\Big],$$

δηλ.

$$\text{(Γ3.50a)} \qquad \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t) R_{0,h} - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))u(t)\|_\infty \leq \widehat{C} h^r \|u(t)\|_r,$$

και

$$\text{(Γ3.50b)} \qquad \begin{aligned} \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)\|_\infty &\leq \|(\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h - \mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)\|_\infty \\ &\quad + \|(\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t) - R_{0,h}\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t))f(t)\|_\infty \\ &\leq \widehat{C} h^r \Big[\|f(t)\|_{r-2,\infty} + \|\,\mathsf{T}_{\mathcal{C},r-2}^{-1}(t)f(t)\|_{r,\infty}\Big] \leq \widehat{C} h^r \|f(t)\|_{r-2,\infty}. \end{aligned}$$

Οι υποθέσεις (IV_∞) και (H) δίνουν

$$\begin{aligned} \|v_h^0 - P_h v^0\| &\leq \sqrt{|\Omega|}\|v_h^0 - v^0\|_\infty + \|v^0 - P_h v^0\| \\ &\leq \widehat{C} h^r (\|v^0\|_{r,\infty} + \|v^0\|_r) \leq \widehat{C} h^r \|v^0\|_{r,\infty}. \end{aligned}$$

Τότε, η ανάλυση της Πρότασης Γ3.3 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\text{(Γ3.51)} \qquad \|u_h(t) - P_h u(t)\| \leq \widehat{C} h^r (1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_{r,\infty} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau\Big].$$

Η εκτίμηση της $\|\psi_h(t)\|$ γίνεται μέσω των (H), (Γ3.25a), (Γ3.51) και (Γ3.51), ως εξής

$$\text{(Γ3.52)} \qquad \begin{aligned} \|\psi_h(t)\| &\leq \|u_h(t) - P_h u(t)\| + \|P_h u(t) - R_{0,h} u(t)\| \\ &\leq \|u_h(t) - P_h u(t)\| + \widehat{C} h^r \|u(t)\|_r \\ &\leq \widehat{C} h^r (1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \Big[\|v^0\|_{r,\infty} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2} d\tau\Big]. \end{aligned}$$

Από τις (IV_∞) και (Γ3.26a) έπεται ότι

$$\text{(Γ3.53)} \qquad \|\psi_h(0)\|_\infty \leq \|v_h^0 - v^0\|_\infty + \|v^0 - R_{0,h} v^0\|_\infty \leq \widehat{C} h^r \|v^0\|_{r,\infty}.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση Α3.2 και χρησιμοποιώντας τις (Γ3.50a) και (Γ3.50b), από την (Γ3.49) έχουμε

$$\text{(Γ3.54)} \qquad |\psi_h(t)| \leq |\psi_h(0)| + \widehat{C} \int_0^t \Big[\|\psi_h(\tau)\| + h^r \big(\|u(\tau)\|_r + \|f(\tau)\|_{r-2,\infty}\big)\Big] d\tau \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Εν συνεχεία, από τις (Γ3.54), (Γ3.53), (Γ3.52) και (Γ2.20b) λαμβάνουμε

$$\text{(Γ3.55)} \qquad \|\psi_h(t)\|_\infty \leq \widehat{C} h^r (1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]+1} \Big[\|v^0\|_{r,\infty} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{r-2,\infty} d\tau\Big].$$

Τελικά, οι (Γ3.26a), (Γ3.55) και (2.22b) δίνουν

$$\begin{aligned}\|u_h(t)-u(t)\|_\infty \leq&\|\psi_h(t)\|_\infty+\|R_{0,h}u(t)-u(t)\|_\infty\\ \leq&\|\psi_h(t)\|_\infty+\widehat{C}_{0,E,\infty}h^r\|u(t)\|_{r,\infty}\\ \leq&\widehat{C}h^r(1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]+1}\Big[\|v^0\|_{r,\infty}+\int_0^t\|f(\tau)\|_{r-2,\infty}d\tau\Big],\end{aligned}$$

(καθώς $\left[\frac{r}{2}\right]+1\leq\left[\frac{r+1}{2}\right]+1$), και η (Γ3.48) έπεται τετριμμένα. ■

Παρατήρηση Γ3.3. Στην (IV_∞) μπορούμε να επιλέξουμε $v_h^0=P_hv^0$, όταν η διαμέριση του $\overline{\Omega}$ είναι *σχεδόν ομοιόμορφη* (quasiuniform), δηλ. υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε: $\max\limits_{1\leq j,\ell\leq J_h+1}\frac{x_j^h-x_{j-1}^h}{x_\ell^h-x_{\ell-1}^h}\leq C$ για κάθε $h\in(0,h_\alpha)$ (βλ. [DlDW]). □

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε a–priori εκτιμήσεις για τις παραγώγους της ημιδιακριτής προσέγγισης u_h στις στάθμες των χώρων L^2, H^1 και $\mathcal{C}^0$.

Πρόταση Γ3.6. *Έστω u_h η λύση του προβλήματος (P_h) και $\ell\in\{0,\dots,\lambda+1\}$. Υποθέτοντας ότι η (IV_j) ισχύει για κάποιο $j\in\{0,1\}$, έχουμε*

$$\sup_{t\in[0,t^*]}\|\partial_t^\ell u_h(t)\|_j\leq\widehat{C}(1+t^*)^j\Big[\|v^0\|_r+\|f\|_{[0,t^*],L^2,\ell}\Big],\quad 0<h<h_{\max\{0,\ell-1\}}. \tag{Γ3.56a}$$

Ακόμα, υποθέτοντας ότι η (IV_∞) ισχύει, έχουμε

$$\sup_{t\in[0,t^*]}\|\partial_t^\ell u_h(t)\|_\infty\leq\widehat{C}(1+t^*)\Big[\|v^0\|_{r,\infty}+\|f\|_{[0,t^*],L^2,\ell}\Big],\quad 0<h<h_{\max\{0,\ell-1\}}. \tag{Γ3.56b}$$

Απόδειξη. Έστω $h\in(0,h_0)$. Παίρνοντας το L^2 εσωτερικό γινόμενο της (Γ3.33a) με την $u_h(t)$, η ισότητα των πραγματικών μερών και οι (Γ3.34) και (Γ3.23) δίνουν

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|^2\leq\widehat{C}\|P_hf(t)\|\|u_h(t)\|\leq\widehat{C}\|f(t)\|\|u_h(t)\|.$$

Τότε από την Πρόταση Α3.2 και την (IV_0) έχουμε

$$\begin{aligned}\|u_h(t)\|\leq&\|v_h^0\|+\widehat{C}\|f\|_{[0,t],L^2,0}\leq\|v_h^0-v^0\|+\|v^0\|+\widehat{C}\|f\|_{[0,t],L^2,0}\\ \leq&\widehat{C}\Big[h^r\|v^0\|_r+\|v^0\|+\|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big]\\ \leq&\widehat{C}\Big[\|v^0\|_r+\|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big],\end{aligned}\tag{Γ3.57a}$$

Παίρνοντας το H^1 εσωτερικό γινόμενο της (Γ3.33a) με την $u_h(t)$, η ισότητα των πραγματικών μερών και η (Γ3.23) δίνουν

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_1^2\leq\widehat{C}\Big[\|\mathsf{T}_h^{-1}(t)u_h(t)\|_1+\|\mathsf{T}_h^{-1}(t)f_h(t)\|_1\Big]\|u_h(t)\|_1$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \widehat{C}\Big[\|u_h(t)\| + \|P_h f(t)\|\Big]\|u_h(t)\|_1\\
&\leq \widehat{C}\Big[\|u_h(t)\| + \|f(t)\|\Big]\|u_h(t)\|_1.
\end{aligned}
$$

Τώρα από την Πρόταση Α3.2 και τις (IV_1) και (Γ3.57a) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\|u_h(t)\|_1 &\leq \|v_h^0\|_1 + \widehat{C}\Big[\|f\|_{[0,t],L^2,0} + \int_0^t \|u_h(\tau)\|d\tau\Big]\\
&\leq \widehat{C}(1+t)\Big[\|v_h^0\|_1 + \|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big]\\
&\leq \widehat{C}(1+t)\Big[h^{r-1}\|v^0\|_r + \|v^0\|_1 + \|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big]\\
&\leq \widehat{C}(1+t)\Big[\|v^0\|_r + \|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big].
\end{aligned}
\tag{Γ3.57b}
$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την (Γ3.33a) με την $\overline{u_h(t)}$. Τότε η ισότητα των πραγματικών μερών και οι (Γ2.17) και (Γ3.23) δίνουν

$$
\begin{aligned}
\partial_t |u_h(t)|^2 &\leq \widehat{C}\Big[\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)u_h(t)\|_\infty + \|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)f_h(t)\|_\infty\Big]|u_h(t)|\\
&\leq \widehat{C}\Big[\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)u_h(t)\|_1 + \|\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)f_h(t)\|_1\Big]|u_h(t)|\\
&\leq \widehat{C}\Big[\|u_h(t)\| + \|P_h f(t)\|\Big]|u_h(t)|\\
&\leq \widehat{C}\Big[\|u_h(t)\| + \|f(t)\|\Big]|u_h(t)| \quad \text{στο} \ \ \overline{\Omega}.
\end{aligned}
$$

Εν συνεχεία, η Πρόταση Α3.2 και οι (IV_∞) και (Γ3.57a) οδηγούν στα ακόλουθα

$$
\begin{aligned}
|u_h(t)| &\leq |v_h^0| + \widehat{C}\Big[\|f\|_{[0,t],L^2,0} + \int_0^t \|u_h(\tau)\|d\tau\Big]\\
&\leq \widehat{C}(1+t)\Big[\|v_h^0\|_\infty + \|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big]\\
&\leq \widehat{C}(1+t)\Big[h^r\|v^0\|_{r,\infty} + \|v^0\|_\infty + \|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big]\\
&\leq \widehat{C}(1+t)\Big[\|v^0\|_{r,\infty} + \|f\|_{[0,t],L^2,0}\Big] \quad \text{στο} \ \ \overline{\Omega}.
\end{aligned}
\tag{Γ3.57c}
$$

Από την (Γ3.57) έπεται η (Γ3.56) για $\ell = 0$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η (Γ3.56) ισχύει για $\ell = 0, \dots, \ell_0$, όπου $\ell_0 \leq \lambda$. Παραγωγίζοντας την (Γ3.33a) ως προς t λαμβάνουμε

$$
\partial_t^{\ell_0+1}u_h(t) = i\frac{\xi}{\gamma}\partial_t^{\ell_0}u_h(t) + \sum_{m=0}^{\ell_0}\binom{\ell_0}{m}\partial_t^{\ell_0-m}\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)\Big[-i\frac{\xi}{\gamma}\partial_t^m u_h(t) + P_h\partial_t^m f(t)\Big].
\tag{Γ3.58}
$$

για κάθε $h \in (0, h_{\ell_0})$. Έστω $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ μία από τις στάθμες $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|_1$ και $\| \cdot \|_\infty$. Τότε, από τις (Γ3.58), (Γ3.23) και (Γ2.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\!|\!|\partial_t^{\ell_0+1} u_h(t)|\!|\!| \leq & \widehat{C}\Big[|\!|\!|\partial_t^{\ell_0} u_h(t)|\!|\!| + \sum_{m=0}^{\ell_0} |\!|\!|\partial_t^{\ell_0-m}\, \mathsf{T}_h^{-1}(t)\big(-i\frac{\xi}{\gamma}\partial_t^m u_h(t) + P_h \partial_t^m f(t)\big)|\!|\!|\Big] \\
\leq & \widehat{C}\Big[|\!|\!|\partial_t^{\ell_0} u_h(t)|\!|\!| + \sum_{m=0}^{\ell_0} \big(\|\partial_t^m u_h(t)\| + \|P_h \partial_t^m f(t)\|\big)\Big] \\
\leq & \widehat{C}\Big[\sum_{m=0}^{\ell_0} \big(|\!|\!|\partial_t^m u_h(t)|\!|\!| + \|\partial_t^m f(t)\|\big)\Big] \leq \widehat{C}\Big[\|f\|_{[0,t],L^2,\ell_0+1} + \sum_{m=0}^{\ell_0} |\!|\!|\partial_t^m u_h(t)|\!|\!|\Big].
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση και η υπόθεση της επαγωγής οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η (Γ3.56) ισχύει για $\ell = \ell_0 + 1$. ■

Οι αποδείξεις των εκτιμήσεων που περιέχονται στις Προτάσεις Γ3.3 και Γ3.4 στηρίζονται στην εκτίμηση των διαφορών $u - \psi_h$ και $\psi_h - u_h$, όπου ψ_h είναι μιά κατάλληλη προσέγγιση της u. Στη συνέχεια θα σχολιάσουμε την επιλογή του ψ_h.

Η απόδειξη της (Γ3.35) βασίζεται στην εκτίμηση της διαφοράς $u_h - P_h u$ στην στάθμη του L^2. Αυτό είναι ασυνήθιστο, καθώς ανάλογα αποτελέσματα σε προβλήματα παραβολικού τύπου $u_t = \Lambda u + f$ (όπου $-\Lambda$ είναι ένας ελλειπτικός τελεστής, βλ. π.χ. §Β2) στηρίζονται στην εκτίμηση (στη στάθμη του L^2) της διαφοράς της ημιδιακριτής προσέγγισης της λύσης από κάποια κατάλληλη ελλειπτική προβολή της λύσης. Αυτό συμβαίνει διότι η επιρροή του διαφορικού τελεστή (ως προς τις μεταβλητές χώρου) Λ παραμένει ισχυρή στη διατύπωση του ημιδιακριτού προβλήματος και παράλληλα δεν μπορούμε να πούμε πολλά για τις προσεγγιστικές ιδιότητες του P_h στην H^1–στάθμη. Στο πρόβλημα (Γ1.1) τα πράγματα είναι διαφορετικά. Εκεί έχουμε $\Lambda = L$ (σύμφωνα με τη διατύπωση (Γ2.11)) που σημαίνει ότι ο διαφορικός τελεστής $\mathcal{M}$ έχει σχεδόν εξαφανιστεί. Βέβαια μπορούμε να εκτιμήσουμε την διαφορά $u_h - R_{0,h}u$ στη στάθμη του L^2, δουλεύοντας όπως στην απόδειξη της Πρότασης Γ3.4. Τότε καταλήγουμε σε εκτίμηση η οποία συγκρινόμενη με την (Γ3.35), είναι ίδιας τάξης ως προς h αλλά ο όρος $(1+t^*)$ έχει μεγαλύτερο εκθέτη. Ας δούμε σύντομα πώς συμβαίνει αυτό. Κατ' αρχήν αναγκαζόμαστε να εκτιμήσουμε τον όρο $\|(\mathsf{T}_h^{-1}\, R_{0,h} - R_{0,h}\, \mathsf{T}_{r-2}^{-1})u\|$ αντί του $\|(\mathsf{T}_h^{-1}\, P_h - P_h\, \mathsf{T}_{r-2}^{-1})u\|$. Αυτό έχει ως συνέπεια να έχουμε $\|u(\tau)\|_r$ αντί του $\|u(\tau)\|_{r-2}$ στο δεξιό μέλος της (Γ3.38a) (όπου $\vartheta_h = u_h - R_{0,h}u$). Έτσι έχουμε $(1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]+1}$ αντί $(1+t)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}$ στην (Γ3.39a), άρα και στην (Γ3.35).

Στην Πρόταση 3.4 η εκτίμηση (Γ3.40) στηρίζεται στην εκτίμηση της διαφοράς $u_h - R_{0,h}u$ επειδή, όπως αναφέραμε πιό πάνω, δεν μπορούμε να πούμε πολλά για την προσεγγιστική συμπεριφορά του P_h στη στάθμη $\| \cdot \|_1$. Πιό φυσιολογικό θα ήταν να γίνει εκτίμηση της διαφοράς $\vartheta_h = u_h - R_{1,h}u$ αντί της παραπάνω, καθώς η $R_{1,h}$ είναι πιο κοντά στο πρόβλημα από ότι η $R_{0,h}$. Κάτι τέτοιο οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα σε ότι αφορά την τάξη ως προς h, αλλά απαιτεί επί πλέον ομαλότητα ως προς t για τις συναρτήσεις $\{\gamma_{jm}\}_{j,m=1}^d$. Συγκεκριμένα επειδή η $R_{1,h}$ εξαρτάται από το χρόνο, για να έχει νόημα η $\partial_t \vartheta_h$, χρειαζόμαστε την παραγωγισιμότητα της $R_{1,h}$ ως προς t. Αυτό δεν μπορούμε να το εξασφαλίσουμε παρά μόνο υποθέτοντας ότι $\lambda_1 \geq 1$. (Σ' αυτήν την περίπτωση ανάλυση ανάλογη μ' εκείνη της §B2 δίνει την εκτίμηση $\|\partial_t R_{1,h}(t)u(t)\|_1 \leq Ch^{r-1}\|u(t)\|_r$. Τότε στο δεξιό μέλος της (Γ3.44) έχουμε $h^{r-1}\|u(t)\|_r$ αντί $h^{r-1}(\|u(t)\|_{r-2} + h\|u(t)\|_r)$ με αποτέλεσμα να έχουμε $(1+t)^{[\frac{r+1}{2}]+1}$ αντί $(1+ht)(1+t)^{[\frac{r+1}{2}]}$ στην (Γ3.47a).) Αντίθετα όλα τα αποτελέσματα σύγκλισης των ημιδιακριτών προσεγγίσεων αυτής της παραγράφου ισχύουν όταν $\lambda = 0$. Και σ' αυτό το σημείο υπάρχει διαφοροποίηση σε ότι είναι γνωστό από τα παραβολικά προβλήματα, όπου χρειαζόμαστε οι συντελεστές των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης να είναι τουλάχιστον μιά φορά συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς το χρόνο (βλ. π.χ. [Th], §B2).

Ένα σημαντικό (για την ανάλυση των μεθόδων Runge–Kutta) αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι τα ομοιόμορφα ως προς h φράγματα της Πρότασης Γ3.6. Τέτοιες εκτιμήσεις δεν είναι εφικτές στα παραβολικά προβλήματα χωρίς επί πλέον πληροφορίες για την συμπεριφορά της λύσης στο $\partial\Omega$ (βλ. π.χ. [Th], Chapter 3).

§Γ4. Πλήρως διακριτές προσεγγίσεις–Ευστάθεια.

Η διακριτοποίηση στο χρόνο θα γίνει με μιά μέθοδο Runge–Kutta q σταδίων και με παραμέτρους $A = (a_{js})_{j,s=1}^q$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_q)^T$ και $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_q)^T$ (βλ. §A4, §B3). Επί πλέον, συμβολίζουμε $T := \operatorname{diag}(\tau_1, \dots, \tau_q) \in \mathbb{R}^{q\times q}$ και $\boldsymbol{e} := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^q$.

Όπως στο Κεφάλαιο B, ενδιαφερόμαστε για τις μεθόδους Runge–Kutta οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες *συνέπειας*:

$$(B) \qquad \boldsymbol{b}^T T^\ell \boldsymbol{e} = \frac{1}{\ell+1}, \quad \ell = 0, \dots, \nu - 1,$$

$$(C) \qquad AT^\ell \boldsymbol{e} = \frac{1}{(\ell+1)} T^{\ell+1}\boldsymbol{e}, \quad \ell = 0, \dots, p-1,$$

$$(D) \qquad \boldsymbol{b}^T T^\ell A = \frac{1}{(\ell+1)} \boldsymbol{b}^T (I - T^{\ell+1}), \quad \ell = 0, \dots, \varrho - 1,$$

για κάποιους μη αρνητικούς ακεραίους p, ϱ και $\nu \geq 1$, τέτοιους ώστε

$$(Γ4.1) \qquad \nu \leq p + \varrho + 1,$$

όπου p είναι η *τάξη σταδίου* και ν είναι η *κλασική τάξη* της μεθόδου.

Επί πλέον, ζητούμε από τη μέθοδο Runge–Kutta να είναι *αλγεβρικά ευσταθής*, δηλ.

$$(S) \qquad \begin{array}{c} \textit{ο } q\times q \textit{ πίνακας με στοιχεία } \ m_{j\ell} := a_{j\ell} bj + a_{\ell j} b_\ell - b_j b_\ell, \quad j, \ell = 1, \dots, q, \\ \textit{είναι θετικά ημιορισμένος, και } \ b_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, q, \end{array}$$

και να έχει την ιδιότητα *θετικότητας*

$$(P) \qquad \begin{array}{c} \textit{ο } \ A \ \textit{ είναι αντιστρέψιμος και υπάρχει} \\ \textit{ένας } q\times q \textit{ διαγώνιος πίνακας } \ D \ \textit{ με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία,} \\ \textit{τέτοιος ώστε ο πίνακας } \ \widetilde{\Pi} := DA^{-1}D^{-1} \ \textit{ να είναι θετικά ορισμένος.} \end{array}$$

Στη συνέχεια θα γράφουμε $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_q)$, $\widetilde{\Pi} = (\widetilde{\pi}_{j\ell})_{j,\ell=1}^q$ και θα συμβολίζουμε τον αντίστροφο του A με $A^{-1} = (a_{js}^{-1})_{j,s=1}^q$.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι Runge–Kutta οι οποίες ικανοποιούν όλες τις συνθήκες που περιγράψαμε πιό πάνω, ενώ η ανάλυση που θα ακολουθήσει καλύπτει και τη μέθοδο 3–DIRK (βλ. §Β3).

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $k := \frac{t^*}{N}$, $t^n := nk$ για $n = 0, \ldots, N$, και $t^{n,j} := t^n + \tau_j k$ για $j = 1, \ldots, q$ και $n = 0, \ldots, N-1$. Για δοθέν $h \in (0, h_0)$, οι προσεγγίσεις Runge–Kutta $\{u_h^n\}_{n=0}^N \subset S_h$ των $\{u_h(t^n)\}_{n=0}^N$ (όπου u_h είναι η λύση του προβλήματος (P_h)) κατασκευάζονται με την ακόλουθη διαδικασία. Πρώτα, θέτουμε

$$u_h^0 := v_h^0. \tag{Γ4.2a}$$

Έπειτα, για $n = 0, \ldots, N-1$, ζητούμε ενδιάμεσα βήματα $\{u_h^{n,j}\}_{j=1}^q \subset S_h$, τα οποία ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$u_h^{n,j} = u_h^n + k \sum_{s=1}^q a_{js} (L_h(t^{n,s}) u_h^{n,s} + F_h(t^{n,s})), \quad j = 1, \ldots, q, \tag{Γ4.2b}$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε την προσέγγιση $u_h^{n+1} \in S_h$ της u_h στο επόμενο χρονικό βήμα t^{n+1} ως εξής

$$u_h^{n+1} = u_h^n + k \sum_{j=1}^q b_j (L_h(t^{n,j}) u_h^{n,j} + F_h(t^{n,j})). \tag{Γ4.2c}$$

Παρατήρηση Γ4.1. Στην Παρατήρηση Β3.1 συζητήσαμε το πρόβλημα που δημιουργείται στην υλοποίηση της μεθόδου όταν $\tau_{\max} := \max_{1 \le j \le q} \tau_j > 1$ ή $\tau_{\min} := \min_{1 \le j \le q} \tau_j < 0$. Ισχύουν και εδώ ανάλογα σχόλια. Η μόνη διαφορά από την περίπτωση των παραβολικών προβλημάτων είναι ότι δεν αποκλείεται η περίπτωση επέκτασης της λύσης u σε αρνητικό χρόνο (βλ. Παρατήρηση Γ2.3). Στη συνέχεια θα γράφουμε $I_\epsilon^* := [-\delta^*, t^* + \epsilon^*]$ και $t_\epsilon^* = t^* + \epsilon^*$ όπου $\epsilon^* \ge 0$, $\delta^* \ge 0$ και $\delta^* \le \epsilon^*$ έχοντας υπ' όψιν την περίπτωση στην οποία θεωρούμε επέκταση των δεδομένων και της λύσης μέχρι το $t^* + \epsilon^*$ ή το $-\delta^*$. $\square$

Στο υπόλοιπο τμήμα αυτής της παραγράφου θα μελετήσουμε τις ιδιότητες ευστάθειας αυτών των μεθόδων, ως προς τις στάθμες των χώρων L^2 και H^1 όταν οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων έχουν την προσεγγιστική ιδιότητα (Η), και ως προς τη στάθμη του $\mathcal{C}^0$ όταν $d = 1$ και οι χώροι S_h ικανοποιούν την (H_∞).

Λήμμα Γ4.1. *Υπάρχουν σταθερές $\widetilde{C}_{1,0}$, $\widetilde{C}_{1,1}$, $\widetilde{C}_{1,\infty}$, $\widetilde{C}_{2,0}$, $\widetilde{C}_{2,1}$ και $\widetilde{C}_{2,\infty}$ τέτοιες ώστε, για οποιαδήποτε $h \in (0, h_0)$, $k \in (0, t^*]$, $\{\tau^s\}_{s=1}^q \subset I_\epsilon^*$, και για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $\{Y_j\}_{j=1}^q$, $\{\Phi_j\}_{j=1}^q$, Y και Φ του S_h, που ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\Phi_j = Y_j + k \sum_{s=1}^q a_{js} L_h(\tau^s) \Phi_s, \quad j = 1, \ldots, q, \tag{Γ4.3a}$$

$$(\Gamma4.3\text{b}) \qquad \Phi = Y + k\sum_{j=1}^{q} b_j L_h(\tau^j)\Phi_j,$$

να ισχύει ότι

$$(\Gamma4.4\text{a}) \qquad \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\| \le \widetilde{C}_{1,0}\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|,$$

$$(\Gamma4.4\text{b}) \qquad \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_1 \le \widetilde{C}_{1,1}(1+k)\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|_1,$$

$$(\Gamma4.4\text{c}) \qquad \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_\infty \le \widetilde{C}_{1,\infty}(1+k)\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|_\infty, \quad \textit{όταν} \quad d=1,$$

και

$$(\Gamma4.5\text{a}) \qquad \|\Phi\| \le \|Y\| + \widetilde{C}_{2,0}\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|,$$

$$(\Gamma4.5\text{b}) \qquad \|\Phi\|_1 \le \|Y\|_1 + \widetilde{C}_{2,1}(1+k)\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|_1,$$

$$(\Gamma4.5\text{c}) \qquad \|\Phi\|_\infty \le \|Y\|_\infty + \widetilde{C}_{2,\infty}(1+k)\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|_\infty, \quad \textit{όταν} \quad d=1.$$

Απόδειξη. Δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του Λήμματος Β3.1, από τις (Γ4.3a) και (P) καταλήγουμε στη σχέση

$$(\Gamma4.6) \qquad \sum_{s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js} d_s\Phi_s = k d_j L_h(\tau^j)\Phi_j + d_j\sum_{s=1}^{q} a_{js}^{-1}Y_s, \quad j=1,\dots,q.$$

Παίρνουμε το L^2 εσωτερικό γινόμενο της (Γ4.6) με την $d_j\Phi_j$, εξισώνουμε τα πραγματικά μέρη και αθροίζουμε ως πρός j. Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Γ3.5, έχουμε

$$(\Gamma4.7\text{a}) \qquad \sum_{j,s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js}\,\mathsf{Re}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j) \le \sum_{j,s=1}^{q}(d_j)^2 a_{js}^{-1}\,\mathsf{Re}(Y_s,\Phi_j).$$

Επειδή ο πίνακας $\widetilde{\Pi}$ είναι θετικά ορισμένος, υπάρχει σταθερά $C_{\widetilde{\Pi}} > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j,s=1}^{q} x_s\tilde{\pi}_{js}x_j \ge C_{\widetilde{\Pi}}\sum_{j=1}^{q}(x_j)^2, \quad \forall (x_1,\dots,x_q)^T \in \mathbb{R}^q.$$

Επομένως

$$\sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js} \operatorname{Re}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j) = \sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js} \int_\Omega \Big[\operatorname{Re}(d_s\Phi_s) \operatorname{Re}(d_j\Phi_j) + \operatorname{Im}(d_s\Phi_s) \operatorname{Im}(d_j\Phi_j) \Big] dx$$
$$\geq C_{\widetilde{\Pi}} \sum_{j=1}^{q} \int_\Omega \Big[(\operatorname{Re}(d_j\Phi_j))^2 + (\operatorname{Im}(d_j\Phi_j))^2 \Big] dx = C_{\widetilde{\Pi}} \sum_{j=1}^{q} \|d_j\Phi_j\|^2,$$

από την οποία τελικά έχουμε

$$\sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js} \operatorname{Re}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j) \geq \widetilde{C}_{M_1} \Big(\sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\| \Big)^2, \tag{Γ4.7b}$$

όπου $\widetilde{C}_{M_1} = \frac{1}{q} C_{\widetilde{\Pi}} \min_{1\leq j\leq q} (d_j)^2$. Χρησιμοποιώντας, τώρα, τις (Γ4.7a), (Γ4.7b) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\Big(\sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\| \Big)^2 \leq \frac{\widetilde{C}_{M_2}}{\widetilde{C}_{M_1}} \Big(\sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\| \Big) \Big(\sum_{s=1}^{q} \|Y_s\| \Big), \tag{Γ4.8}$$

όπου $\widetilde{C}_{M_2} = \max_{1\leq j\leq q} (d_j)^2 \max_{1\leq j,s\leq q} |a_{js}^{-1}|$. Η (Γ4.4a) προκύπτει αμέσως από την (Γ4.8) για $\widetilde{C}_{1,0} = \frac{\widetilde{C}_{M_2}}{\widetilde{C}_{M_1}}$.

Τώρα, παίρνουμε το $(\cdot,\cdot)_1$ εσωτερικό γινόμενο της (Γ4.6) με την $d_j\Phi_j$, αθροίζουμε ως πρός j και εξισώνουμε τα πραγματικά μέρη. Τότε, η ανισότητα Cauchy–Schwarz, η (Γ3.23) και η (Γ4.4a) δίνουν

$$\sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js} \operatorname{Re}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j)_1 = k\frac{\xi}{\gamma} \sum_{j=1}^{q} (d_j)^2 \operatorname{Im}(\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j, \Phi_j)_1 + \sum_{j,s=1}^{q} (d_j)^2 a_{js}^{-1} \operatorname{Re}(Y_s, \Phi_j)_1$$
$$\leq \widetilde{C} \Big[k \sum_{j=1}^{q} \| \mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\|_1 + \sum_{s=1}^{q} \|Y_s\|_1 \Big] \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_1$$
$$\leq \widetilde{C} \Big[k\widehat{C}_{T,0} \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\| + \sum_{s=1}^{q} \|Y_s\|_1 \Big] \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_1$$
$$\leq \widetilde{C} \Big[k\widetilde{C}_{1,0} \sum_{j=1}^{q} \|Y_j\| + \sum_{s=1}^{q} \|Y_s\|_1 \Big] \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_1,$$

δηλ.

$$\sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js} \operatorname{Re}(d_s\Phi_s, d_j\Phi_j)_1 \leq \widetilde{C}(1+k) \sum_{j=1}^{q} \|Y_j\|_1 \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_1. \tag{Γ4.9a}$$

Δουλεύοντας όπως στη (Γ4.7b), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j,s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js}\,\mathsf{Re}(d_s\Phi_s,d_j\Phi_j)_1 =& \sum_{j,s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js}\int_\Omega\Big[\,\mathsf{Re}(d_s\Phi_s)\,\mathsf{Re}(d_j\Phi_j)+\mathsf{Im}(d_s\Phi_s)\,\mathsf{Im}(d_j\Phi_j)\Big]dx\\ &+\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{j,s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js}\int_\Omega\Big[\,\mathsf{Re}(d_s\partial_{x_\ell}\Phi_s)\,\mathsf{Re}(d_j\partial_{x_\ell}\Phi_j)+\mathsf{Im}(d_s\partial_{x_\ell}\Phi_s)\,\mathsf{Im}(d_j\partial_{x_\ell}\Phi_j)\Big]dx\\ \ge& C_{\widetilde{\Pi}}\sum_{j=1}^{q}\int_\Omega\Big[\big(\mathsf{Re}(d_j\Phi_j)\big)^2+\big(\mathsf{Im}(d_j\Phi_j)\big)^2\Big]dx\\ &+C_{\widetilde{\Pi}}\sum_{j=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{d}\int_\Omega\Big[\big(\mathsf{Re}(d_j\partial_{x_\ell}\Phi_j)\big)^2+\big(\mathsf{Im}(d_j\partial_{x_\ell}\Phi_j)\big)^2\Big]dx\\ \ge& C_{\widetilde{\Pi}}\min_{1\le j\le q}(d_j)^2\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|_1^2.\end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε

$$\sum_{j,s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js}\,\mathsf{Re}(d_s\Phi_s,d_j\Phi_j)_1\ge\frac{C_{\widetilde{\Pi}}}{q}\min_{1\le j\le q}(d_j)^2\Big(\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|_1\Big)^2. \tag{Γ4.9b}$$

Από τις (Γ4.9a) και (Γ4.9b) έπεται αμέσως η (Γ4.4b).

Έστω $d=1$. Πολλαπλασιάζουμε την (Γ4.6) με $d_j\overline{\Phi_j}$. Έπειτα αθροίζουμε ως προς j και παίρνουμε πραγματικά μέρη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz και τις σχέσεις (Γ2.17), (Γ3.23) και (Γ4.4a) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j,s=1}^{q}\widetilde{\pi}_{js}\,\mathsf{Re}[(d_s\Phi_s)\overline{(d_j\Phi_j)}] =& k\frac{\xi}{\gamma}\sum_{j=1}^{q}(d_j)^2\,\mathsf{Im}(\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\overline{\Phi_j})+\sum_{j,s=1}^{q}(d_j)^2a_{js}^{-1}\,\mathsf{Re}(Y_s\overline{\Phi_j})\\ \le&\widetilde{C}\Big[k\sum_{j=1}^{q}\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\|_\infty+\sum_{s=1}^{q}\|Y_s\|_\infty\Big]\sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|\\ \le&\widetilde{C}\Big[kC_{V,0}\sum_{j=1}^{q}\|\,\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\|_1+\sum_{s=1}^{q}\|Y_s\|_\infty\Big]\sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|\\ \le&\widetilde{C}\Big[k\widehat{C}_{T,0}\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|+\sum_{s=1}^{q}\|Y_s\|_\infty\Big]\sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|\\ \le&\widetilde{C}\Big[k\widetilde{C}_{1,0}\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|+\sum_{s=1}^{q}\|Y_s\|_\infty\Big]\sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|\\ \le&\widetilde{C}\Big[k\sqrt{|\Omega|}\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|_\infty+\sum_{s=1}^{q}\|Y_s\|_\infty\Big]\sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|\quad\text{στο}\quad\overline{\Omega},\end{aligned}$$

δηλ.

$$(\Gamma4.10\text{a}) \qquad \sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js}\, \mathsf{Re}[(d_s\Phi_s)\overline{(d_j\Phi_j)}] \le \widetilde{C}(1+k)\sum_{j=1}^{q}\|Y_j\|_\infty \sum_{j=1}^{q}|\Phi_j| \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Δουλεύοντας όπως στην (Γ4.7b) έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js}\, \mathsf{Re}[(d_s\Phi_s)\overline{(d_j\Phi_j)}] =& \sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js}\Big[\mathsf{Re}(d_s\Phi_s)\,\mathsf{Re}(d_j\Phi_j) + \mathsf{Im}(d_s\Phi_s)\,\mathsf{Im}(d_j\Phi_j)\Big]\\ \ge& C_{\widetilde{\Pi}} \sum_{j=1}^{q}\Big[\big(\mathsf{Re}(d_j\Phi_j)\big)^2 + \big(\mathsf{Im}(d_j\Phi_j)\big)^2\Big]\\ \ge& C_{\widetilde{\Pi}} \min_{1\le j\le q}(d_j)^2 \sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|^2 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.\end{aligned}$$

Έτσι

$$(\Gamma4.10\text{b}) \qquad \sum_{j,s=1}^{q} \widetilde{\pi}_{js}\, \mathsf{Re}[(d_s\Phi_s)\overline{(d_j\Phi_j)}] \ge \frac{C_{\widetilde{\Pi}}}{q} \min_{1\le j\le q}(d_j)^2 \Big(\sum_{j=1}^{q}|\Phi_j|\Big)^2 \quad \text{στο} \quad \overline{\Omega}.$$

Από τις (Γ4.10a) και (Γ4.10b) εύκολα καταλήγουμε στην (Γ4.4c).

Από τις (Γ4.3a) και (Γ4.3b) (όπως στην απόδειξη του Λήμματος B3.1) συμπεραίνουμε ότι

$$(\Gamma4.11) \qquad \Phi = Y + \sum_{j,s=1}^{q} b_j a_{js}^{-1}(\Phi_s - Y_s).$$

Η (Γ4.11) μαζί με την (Γ4.4) (που μόλις αποδείξαμε) δίνουν την (Γ4.5). ■

Η σχέση (Γ4.4a) έχει μιά σημαντική συνέπεια. Εξασφαλίζει ότι η αριθμητική μέθοδος που περιγράφεται στην (Γ4.2) είναι καλά ορισμένη για κάθε $h \in (0,h_0)$ και χωρίς κάποιον περιορισμό στο χρονικό βήμα k (βλ. επίσης Πόρισμα B3.1).

Λήμμα Γ4.2. *Υπάρχουν σταθερές $\widetilde{C}_{3,1}$ και $\widetilde{C}_{3,\infty}$ τέτοιες ώστε, για οποιαδήποτε $h \in (0,h_0)$, $k \in (0,t^*]$ και $\{\tau^s\}_{s=1}^q \subset I_\epsilon^*$ και για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $\{\Phi_j\}_{j=1}^q$, Φ, Y του S_h οι οποίες ικανοποιούν, για $Y_j = Y$, $j=1,\dots,q$, την (Γ4.3), να ισχύει ότι*

$$(\Gamma4.12\text{a}) \qquad \|\Phi\| \le \|Y\|,$$

$$(\Gamma4.12\text{b}) \qquad \|\Phi\|_1 \le (1+\widetilde{C}_{3,1}k)\|Y\|_1,$$

$$(\Gamma4.12\text{c}) \qquad \|\Phi\|_\infty \le (1+\widetilde{C}_{3,\infty}k)\|Y\|_\infty, \quad \textit{όταν} \quad d=1.$$

Απόδειξη. Από την (Γ4.3b) έχουμε

$$\text{(Γ4.13a)}\qquad \begin{aligned}\|\Phi\|_\ell^2 =&\|Y\|_\ell^2 + k^2 \sum_{j,s=1}^{q} b_j b_s \,\mathsf{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j)_\ell\\ &+ 2k\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathsf{Re}(Y, L_h(\tau^j)\Phi_j)_\ell, \quad \ell = 0, 1,\end{aligned}$$

και

$$\text{(Γ4.13b)}\qquad \begin{aligned}|\Phi|^2 =&|Y|^2 + k^2 \sum_{j,s=1}^{q} b_j b_s \,\mathsf{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s\overline{L_h(\tau^j)\Phi_j})\\ &+ 2k\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathsf{Re}(Y\overline{L_h(\tau^j)\Phi_j}) \ \ \text{στο } \overline{\Omega}, \quad \text{όταν} \ \ d = 1.\end{aligned}$$

Από τις (Γ4.3a) και (Γ3.34) έπεται ότι

$$\text{(Γ4.14)}\qquad \begin{aligned}\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathsf{Re}(Y, L_h(\tau^j)\Phi_j) =&\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathsf{Re}(\Phi_j, L_h(\tau^j)\Phi_j)\\ &- k\sum_{j,s=1}^{q} b_j a_{js} \,\mathsf{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j)\\ &\le -\frac{k}{2}\sum_{j,s=1}^{q} (b_j a_{js} + b_s a_{sj}) \,\mathsf{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j),\end{aligned}$$

καθώς —λόγω της (S)— τα $\{b_j\}_{j=1}^q$ είναι μη αρνητικά. Αντικαθιστώντας την (Γ4.14) στην (Γ4.13a) για $\ell = 0$ λαμβάνουμε

$$\text{(Γ4.15)}\qquad \begin{aligned}\|\Phi\|^2 \le&\|Y\|^2 - k^2 \sum_{j,s=1}^{q} m_{js} \,\mathsf{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j)\\ =&\|Y\|^2 - k^2 \sum_{j,s=1}^{q} m_{js} \int_\Omega \Big[\mathsf{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s)\,\mathsf{Re}(L_h(\tau^j)\Phi_j)\\ &+ \mathsf{Im}(L_h(\tau^s)\Phi_s)\,\mathsf{Im}(L_h(\tau^j)\Phi_j)\Big]dx.\end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας $\{m_{js}\}_{j,s=1}^q$ είναι θετικά ημιορισμένος, έχουμε ότι

$$\text{(Γ4.16)}\qquad \sum_{j,s=1}^{q} x_s m_{js} x_j \ge 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_q)^T \in \mathbb{R}^q.$$

Έτσι η (Γ4.12a) προκύπτει αμέσως από τις (Γ4.15) και (Γ4.16).

Από τις (Γ4.3a) και (Γ3.32b) λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathrm{Re}(Y, L_h(\tau^j)\Phi_j)_1 = {} & \frac{\xi}{\gamma}\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathrm{Im}(\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j, \Phi_j)_1 \\
& - \frac{k}{2}\sum_{j,s=1}^{q} (b_j a_{js} + b_s a_{sj})\,\mathrm{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j)_1.
\end{aligned}
\tag{Γ4.17}
$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την (Γ4.17) στην (Γ4.13a) για $\ell = 1$. Έπειτα, οι (Γ4.16), (Γ3.23), (Γ4.4a) και (Γ4.4b) δίνουν

$$
\begin{aligned}
\|\Phi\|_1^2 = {} & \|Y\|_1^2 + 2k\frac{\xi}{\gamma}\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathrm{Im}(\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j, \Phi_j)_1 - k^2 \sum_{j,s=1}^{q} m_{js}\,\mathrm{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s, L_h(\tau^j)\Phi_j)_1 \\
= {} & \|Y\|_1^2 + 2k\frac{\xi}{\gamma}\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathrm{Im}(\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j, \Phi_j)_1 \\
& - k^2 \sum_{j,s=1}^{q} m_{js}\int_\Omega \Big[\mathrm{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s)\,\mathrm{Re}(L_h(\tau^j)\Phi_j) + \mathrm{Im}(L_h(\tau^s)\Phi_s)\,\mathrm{Im}(L_h(\tau^j)\Phi_j)\Big]dx \\
& - k^2 \sum_{\tilde\ell=1}^{d}\sum_{j,s=1}^{q} m_{js}\int_\Omega \Big[\mathrm{Re}(\partial_{x_{\tilde\ell}} L_h(\tau^s)\Phi_s)\,\mathrm{Re}(\partial_{x_{\tilde\ell}} L_h(\tau^j)\Phi_j) \\
& \qquad\qquad + \mathrm{Im}(\partial_{x_{\tilde\ell}} L_h(\tau^s)\Phi_s)\,\mathrm{Im}(\partial_{x_{\tilde\ell}} L_h(\tau^j)\Phi_j)\Big]dx \\
\le {} & \|Y\|_1^2 + 2k\frac{|\xi|}{|\gamma|}\sum_{j=1}^{q} b_j \|\,\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\|_1 \|\Phi_j\|_1 \le \|Y\|_1^2 + \widetilde{C}k\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|\|\Phi_j\|_1 \\
\le {} & \|Y\|_1^2 + \widetilde{C}k\Big(\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{q}\|\Phi_j\|_1\Big) \le \|Y\|_1^2 + \widetilde{C}k(1+k)\|Y\|\|Y\|_1 \\
\le {} & \big(1 + \widetilde{C}k(k+1)\big)\|Y\|_1^2,
\end{aligned}
$$

από την οποία έπεται η (Γ4.12b).

Έστω $d = 1$. Από την (Γ4.13b) —δουλεύοντας με τρόπο ανάλογο— συμπεραίνουμε ότι

$$
|\Phi|^2 = |Y|^2 + 2k\frac{\xi}{\gamma}\sum_{j=1}^{q} b_j \,\mathrm{Im}(\mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\overline{\Phi_j}) - k^2 \sum_{j,s=1}^{q} m_{js}\,\mathrm{Re}(L_h(\tau^s)\Phi_s\overline{L_h(\tau^j)\Phi_j}).
$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα, τις (Γ4.16), (Γ2.17), (Γ3.23), (Γ4.4c) και (Γ4.4a) έχουμε

$$
\begin{aligned}
|\Phi|^2 \leq & |Y|^2 + \widetilde{C}k \sum_{j=1}^{q} \| \mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\|_\infty |\Phi_j| \leq \|Y\|_\infty^2 + \widetilde{C}k \sum_{j=1}^{q} \| \mathsf{T}_h^{-1}(\tau^j)\Phi_j\|_1 \|\Phi_j\|_\infty \\
\leq & \|Y\|_\infty^2 + \widetilde{C}k \Big(\sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\|_\infty\Big) \leq \|Y\|_\infty^2 + \widetilde{C}k(k+1)\|Y\|_\infty \sum_{j=1}^{q} \|\Phi_j\| \\
\leq & \|Y\|_\infty^2 + \widetilde{C}k(k+1)\|Y\|_\infty \|Y\| \leq (1+\widetilde{C}k(k+1))\|Y\|_\infty^2.
\end{aligned}
$$

Έτσι, $\|\Phi\|_\infty^2 \leq (1+\widetilde{C}k(k+1))\|Y\|_\infty^2$, από την οποία προκύπτει αμέσως η (Γ4.12c). ■

Παρατήρηση Γ4.2. Θεωρούμε την περίπτωση όπου είτε $\xi = 0$, είτε η συνάρτηση γ_0 είναι πραγματική. Έστω ότι η μέθοδος Runge–Kutta είναι η q–σταδίων Gauss–Legendre, η οποία ικανοποιεί την (S) με $m_{js} = 0$. Τότε ισχύει ισότητα στις (Γ3.34) (βλ. Παρατήρηση Γ3.2), (Γ4.14) και κατά συνέπεια στην (Γ4.15). Από την (Γ4.15) παίρνουμε αμέσως $\|\Phi\| = \|Y\|$, που αποτελεί πλήρως διακριτό ανάλογο της (Γ2.20b). □

§Γ5. Συνέπεια.

Από τώρα και στο εξής θα υποθέτουμε ότι

$$\lambda \geq \nu.$$

Για κάθε $h \in (0, h_0)$ ορίζουμε επαγωγικά συναρτήσεις $\alpha_{h,j,\ell} \in C([0,t^*], S_h)$ ως εξής

$$
(\Gamma5.1a) \qquad \begin{cases} \alpha_{h,j,0} := u_h, \quad j = 1,\dots,q, \\ \alpha_{h,j,\ell+1} := \displaystyle\sum_{s=1}^{q} a_{js} \left(\sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L_h \alpha_{h,s,\ell-m} + \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell F_h \right), \\ \qquad\qquad j = 1,\dots,q, \quad \ell = 0,\dots,\nu-1. \end{cases}
$$

Συμβολίζοντας $\boldsymbol{\alpha}_{h,\ell} := (\alpha_{h,1,\ell},\dots,\alpha_{h,q,\ell})^T$, για κάθε $\ell \in \{0,\dots,\nu\}$ και $h \in (0,h_0)$, η (Γ5.1a) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$
(\Gamma5.1b) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{h,0} := u_h \boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{\alpha}_{h,\ell+1} := A \left(\displaystyle\sum_{m=0}^{\ell} \frac{T^m}{m!} \partial_t^m L_h \boldsymbol{\alpha}_{h,\ell-m} + \frac{T^\ell \boldsymbol{e}}{\ell!} \partial_t^\ell F_h \right), \quad \ell = 0,\dots,\nu-1. \end{cases}
$$

Οι διανυσματικές συναρτήσεις $\boldsymbol{\alpha}_{h,\ell}$, που μόλις ορίσαμε, έχουν την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα

Πρόταση Γ5.1. *Υποθέτουμε ότι η μέθοδος Runge–Kutta ικανοποιεί τις* (B), (C), (D) *και* (Γ4.1), *ή είναι η 3–DIRK. Τότε*

$$\boldsymbol{b}^T A^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{h,\ell} = \frac{1}{\ell!}\partial_t^\ell u_h, \quad \ell = 1, \ldots, \nu, \quad 0 < h < h_0. \quad \square \tag{Γ5.2}$$

Σημείωση. Η (Γ5.2) αποδεικνύεται ακολουθώντας τις βασικές γραμμές της απόδειξης του Πορίσματος Β4.1, γι' αυτό η απόδειξη παραλείπεται. □

Για κάθε $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ και $h \in (0, h_0)$, θέτουμε

$$\boldsymbol{\alpha}_{h,\ell}^n := (\alpha_{h,1,\ell}^n, \ldots, \alpha_{h,q,\ell}^n)^T := (\alpha_{h,1,\ell}(t^n), \ldots, \alpha_{h,q,\ell}(t^n))^T = \boldsymbol{\alpha}_{h,\ell}(t^n)$$

και ορίζουμε το διάνυσμα των *οιονεί–ενδιαμέσων βημάτων* $\mathcal{W}_h^n := (w_h^{n,1}, \ldots, w_h^{n,q})^T$ καθώς και το *οιονεί–επόμενο βήμα* w_h^{n+1}, ως εξής:

$$\mathcal{W}_h^n := \sum_{\ell=0}^{\nu} k^\ell \boldsymbol{\alpha}_{h,\ell}^n, \tag{Γ5.3a}$$

$$w_h^{n+1} := u_h(t^n) + \boldsymbol{b}^T A^{-1} \left(\mathcal{W}_h^n - u_h(t^n)\boldsymbol{e}\right). \tag{Γ5.3b}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις που ορίστηκαν στην (Γ5.1) είναι ομοιόμορφα φραγμένες στις στάθμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ και επί πλέον στη στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ όταν $d = 1$.

Λήμμα Γ5.1. *Έστω* $\ell \in \{0, \ldots, \nu\}$ *και* $j \in \{0, 1\}$. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η* (IV_j). *Τότε υπάρχει σταθερά* C_ℓ^j *τέτοια ώστε*

$$\max_{1 \le m \le q} \sup_{t \in [0,t^*]} \|\alpha_{h,m,\ell}(t)\|_j \le C_\ell^j (1 + t_\epsilon^*)^j \Big[\|v^0\|_r + \|f\|_{I_\epsilon^*, L^2, \ell}\Big], \quad \forall h \in (0, h_{\nu-1}). \tag{Γ5.4a}$$

Όταν ισχύει η (IV_∞) *υπάρχει, επί πλέον, σταθερά* C_ℓ^2 *τέτοια ώστε*

$$\max_{1 \le m \le q} \sup_{t \in [0,t^*]} \|\alpha_{h,m,\ell}(t)\|_\infty \le C_\ell^2 (1 + t_\epsilon^*) \Big[\|v^0\|_{r,\infty} + \|f\|_{I_\epsilon^*, L^2, \ell}\Big], \quad \forall h \in (0, h_{\nu-1}). \tag{Γ5.4b}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Έστω $\ell = 0$. Τότε η (Γ5.4) έπεται από τις (Γ5.1a) και (Γ3.56). Υποθέτουμε ότι η (Γ5.4) ισχύει για $\ell = 0, \ldots, \ell_0$, όπου $\ell_0 \le \nu - 1$. Χρησιμοποιώντας τις (Γ5.1a) και (Γ3.23), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\max_{1 \le m \le q} \|\alpha_{h,m,\ell_0+1}\|_j &\le C \sum_{m_0=0}^{\ell_0} \Big(\sum_{s=1}^{q} \|\partial_t^{m_0} L_h \alpha_{h,s,\ell_0-m_0}\|_j \\
&\qquad + \|\partial_t^{\ell_0-m_0}\, \mathsf{T}_h^{-1} P_h \partial_t^{m_0} f\|_j\Big) \\
&\le C \sum_{m_0=0}^{\ell_0} \Big(\sum_{s=1}^{q} \|\alpha_{h,s,m_0}\|_j + \|\partial_t^{m_0} f\|\Big), \quad 0 < h < h_{\nu-1}.
\end{aligned} \tag{Γ5.5a}$$

Όταν ισχύει η (IV_∞), οι (Γ5.1a), (Γ2.17) και (Γ3.23) δίνουν ότι

$$
\begin{aligned}
\max_{1\le m\le q}\|\alpha_{h,m,\ell_0+1}\|_\infty &\le C\sum_{m_0=0}^{\ell_0}\Big(\sum_{s=1}^{q}\|\partial_t^{m_0}L_h\alpha_{h,s,\ell_0-m_0}\|_\infty \\
&\qquad + \|\partial_t^{\ell_0-m_0}\,\mathsf{T}_h^{-1}\,P_h\partial_t^{m_0}f\|_\infty\Big) \\
&\le C\sum_{m_0=0}^{\ell_0}\Big(\sum_{s=1}^{q}\|\alpha_{h,s,m_0}\|_\infty + \|\partial_t^{m_0}f\|\Big),\quad 0<h<h_{\nu-1}.
\end{aligned}
\tag{Γ5.5b}
$$

Η επαγωγική υπόθεση και η (Γ5.5) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η (Γ5.4) ισχύει για $\ell=\ell_0+1$. ■

Βασιζόμενοι στην (Γ3.56) και στην Πρόταση Γ5.1, θα δείξουμε ότι το οιονεί–επόμενο βήμα w_h^{n+1} προσεγγίζει την $u_h(t^{n+1})$ με βέλτιστη τάξη ως προς k και ομοιόμορφα ως προς h.

Πόρισμα Γ5.1. *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης* 5.1. *Για κάθε* $j\in\{0,1\}$*, όταν ισχύει επί πλέον η* (IV_j)*, έχουμε*

$$
\max_n\|u_h(t^{n+1})-w_h^{n+1}\|_j \le Ck^{\nu+1}(1+t^*)^j\big[\|v^0\|_r+\|f\|_{[0,t^*],L^2,\nu+1}\big],\quad \forall h\in(0,h_\nu).
\tag{Γ5.6a}
$$

Όταν ισχύει η (IV_∞)*, έχουμε επί πλέον ότι*

$$
\begin{aligned}
\max_n\|u_h(t^{n+1})-w_h^{n+1}\|_\infty& \\
&\le Ck^{\nu+1}(1+t^*)\big[\|v^0\|_{r,\infty}+\|f\|_{[0,t^*],L^2,\nu+1}\big],\quad \forall h\in(0,h_\nu).
\end{aligned}
\tag{Γ5.6b}
$$

Απόδειξη. Από τις (Γ5.1a), (Γ5.3) και (Γ5.2) έπεται ότι

$$
w_h^{n+1}=u_h(t^n)+\sum_{\ell=1}^{\nu}k^\ell\boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{h,\ell}^n = u_h(t^n)+\sum_{\ell=1}^{\nu}\frac{k^\ell}{\ell!}\partial_t^\ell u_h(t^n)=\sum_{\ell=0}^{\nu}\frac{k^\ell}{\ell!}\partial_t^\ell u_h(t^n).
\tag{Γ5.7}
$$

Τότε ο τύπος του Taylor και η (Γ5.7) δίνουν

$$
w_h^{n+1}=u_h(t^{n+1})-\frac{1}{\nu!}\int_{t^n}^{t^{n+1}}(t^{n+1}-t)^\nu\partial_t^{\nu+1}u_h(t)dt.
\tag{Γ5.8}
$$

Χρησιμοποιώντας τις (Γ5.8) και (Γ3.56) καταλήγουμε εύκολα στην (Γ5.6). ■

Στην πρόταση που ακολουθεί, θα δείξουμε ότι αν στις (Γ4.2b) και (Γ4.2c) θέσουμε $u_h(t^n)$, $\{w_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ και $u_h(t^{n+1})$ αντί u_h^n, $\{u_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ και u_h^{n+1}, αντίστοιχα, τότε το σφάλμα σε κάθε σχέση είναι τάξης ν ως προς k ομοιόμορφα ως προς h. Αυτό είναι ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα συνέπειας, το οποίο σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα ευστάθειας της §Γ4 οδηγεί στο κύριο αποτέλεσμα συνέπειας που περιέχεται στην Πρόταση Γ5.3.

Πρόταση Γ5.2. *Για κάθε $n \in \{0, \dots, N-1\}$ και $h \in (0, h_\nu)$ θεωρούμε τις συναρτήσεις σφάλματος $\{e_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ και e_h^{n+1} του S_h, οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις*

$$w_h^{n,j} = u_h(t^n) + k \sum_{s=1}^{q} a_{js} \left(L_h(t^{n,s}) w_h^{n,s} + F_h(t^{n,s})\right) + e_h^{n,j}, \quad j = 1, \dots, q, \tag{Γ5.9a}$$

και

$$u_h(t^{n+1}) = u_h(t^n) + k \sum_{j=1}^{q} b_j \left(L_h(t^{n,j}) w_h^{n,j} + F_h(t^{n,j})\right) + e_h^{n+1}. \tag{Γ5.9b}$$

Ακόμα δεχόμαστε την ισχύ των υποθέσεων της Πρότασης Γ5.1. Τότε, για κάθε $m_0 \in \{0, 1\}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\max_n \Big(\sum_{j=1}^{q} \|e_h^{n,j}\|_{m_0} + \|e_h^{n+1}\|_{m_0} \Big) \\ &\le C k^{\nu+1} \max\{1, k\}^\nu (1 + t_\epsilon^*)^{m_0} \left[\|v^0\|_r + \|f\|_{I_\epsilon^*, L^2, \nu+1}\right], \quad \forall h \in (0, h_\nu), \end{aligned} \tag{Γ5.10a}$$

εφ' όσον ισχύει η (IV_{m_0}). *Επί πλέον έχουμε*

$$\begin{aligned} &\max_n \Big(\sum_{j=1}^{q} \|e_h^{n,j}\|_\infty + \|e_h^{n+1}\|_\infty \Big) \\ &\le C k^{\nu+1} \max\{1, k\}^\nu (1 + t_\epsilon^*) \left[\|v^0\|_{r,\infty} + \|f\|_{I_\epsilon^*, L^2, \nu+1}\right], \quad \forall h \in (0, h_\nu), \end{aligned} \tag{Γ5.10b}$$

όταν ισχύει η (IV_∞).

Απόδειξη. Κατ' αρχήν η εφαρμογή του τύπου του Taylor δίνει τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$F_h(t^{n,s}) = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} k^\ell \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell F_h(t^n) + \frac{1}{(\nu-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s} - t)^{\nu-1} \partial_t^\nu F_h(t) dt \tag{Γ5.11}$$

και

$$\begin{aligned} L_h(t^{n,s}) w_h^{n,s} &= \sum_{\ell=0}^{\nu-1} k^\ell \frac{(\tau_s)^\ell}{\ell!} \partial_t^\ell L_h(t^n) w_h^{n,s} \\ &\quad + \frac{1}{(\nu-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s} - t)^{\nu-1} \partial_t^\nu L_h(t) w_h^{n,s} dt \\ &= \sum_{\ell=0}^{\nu-1} k^\ell \left(\sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L_h(t^n) \alpha_{h,s,\ell-m}^n \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(Γ5.12)} \qquad & + \sum_{\ell=\nu}^{2\nu-2} k^{\ell} \left(\sum_{m=\ell-\nu+1}^{\nu-1} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L_h(t^n) \alpha_{h,s,\ell-m}^n \right) \\
& + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} k^{\ell+\nu} \frac{(\tau_s)^{\ell}}{\ell!} \partial_t^{\ell} L_h(t^n) \alpha_{h,s,\nu}^n \\
& + \frac{1}{(\nu-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s}-t)^{\nu-1} \partial_t^{\nu} L_h(t) w_h^{n,s} dt,
\end{aligned}
$$

για $s = 1, \ldots, q$. Έπειτα αντικαθιστούμε τις (Γ5.11) και (Γ5.12) στην (Γ5.9a). Τότε χρησιμοποιώντας την (Γ5.1a) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
e_h^{n,j} = & -k \sum_{s=1}^{q} a_{js} \Bigg\{ \frac{1}{(\nu-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s}-t)^{\nu-1} \partial_t^{\nu} F_h(t) dt \\
& + \sum_{\ell=\nu}^{2\nu-2} k^{\ell} \sum_{m=\ell-\nu+1}^{\nu-1} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L_h(t^n) \alpha_{h,s,\ell-m}^n \\
& + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} k^{\ell+\nu} \frac{(\tau_s)^{\ell}}{\ell!} \partial_t^{\ell} L_h(t^n) \alpha_{h,s,\nu}^n \\
& + \frac{1}{(\nu-1)!} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s}-t)^{\nu-1} \partial_t^{\nu} L_h(t) w_h^{n,s} dt \Bigg\} \\
= & -k \sum_{s=1}^{q} a_{js} \Bigg\{ \frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu} \int_{t^n}^{t^{n,s}} (t^{n,s}-t)^{\nu-1} \Big[\binom{\nu}{\ell} \partial_t^{\nu-\ell} \mathsf{T}_h^{-1}(t) P_h \partial_t^{\ell} f(t) \\
& \qquad + k^{\ell} \partial_t^{\nu} L_h(t) \alpha_{h,s,\ell}^n \Big] dt \\
& + \sum_{\ell=\nu}^{2\nu-2} k^{\ell} \sum_{m=\ell-\nu+1}^{\nu-1} \frac{(\tau_s)^m}{m!} \partial_t^m L_h(t^n) \alpha_{h,s,\ell-m}^n \\
& + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} k^{\ell+\nu} \frac{(\tau_s)^{\ell}}{\ell!} \partial_t^{\ell} L_h(t^n) \alpha_{h,s,\nu}^n \Bigg\}, \quad j = 1, \ldots, q.
\end{aligned}
$$

Η εκτίμηση των $\{e_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ γίνεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης και των (Γ3.23), (Γ2.17) και (Γ5.4), ως εξής

$$
\begin{aligned}
\|e_h^{n,j}\|_{m_0} \le & C k^{\nu} \sum_{s=1}^{q} \sum_{\ell=0}^{\nu} \left[\left| \int_{t^n}^{t^{n,s}} \|\partial_t^{\nu-\ell} \mathsf{T}_h^{-1}(t) P_h \partial_t^{\ell} f(t)\|_{m_0} dt \right| + k \max\{1,k\}^{\nu} \|\alpha_{h,s,\ell}^n\|_{m_0} \right] \\
\le & C k^{\nu} \sum_{s=1}^{q} \sum_{\ell=0}^{\nu} \left[k \max\{1,k\}^{\nu} \|\alpha_{h,s,\ell}^n\|_{m_0} + \left| \int_{t^n}^{t^{n,s}} \|\partial_t^{\ell} f(t)\| dt \right| \right]
\end{aligned}
$$

$$\le Ck^{\nu+1}\sum_{\ell=0}^{\nu}\big[\max\{1,k\}^\nu(1+t_\epsilon^*)^{m_0}\big(\|v^0\|_r+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\ell}\big)+\sup_{t\in I_\epsilon^*}\|\partial_t^\ell f(t)\|\big]$$
$$\le Ck^{\nu+1}\big[\max\{1,k\}^\nu(1+t_\epsilon^*)^{m_0}\big(\|v^0\|_r+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu}\big)+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big]$$
$$\le Ck^{\nu+1}\max\{1,k\}^\nu(1+t_\epsilon^*)^{m_0}\big(\|v^0\|_r+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big),\quad j=1,\dots,q,$$

όταν ισχύει η (IV$_{m_0}$), και

$$\|e_h^{n,j}\|_\infty \le Ck^\nu\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\nu}\left[\left|\int_{t^n}^{t^{n,s}}\|\partial_t^{\nu-\ell}\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h\partial_t^\ell f(t)\|_\infty dt\right|+k\max\{1,k\}^\nu\|\alpha_{h,s,\ell}^n\|_\infty\right]$$
$$\le Ck^\nu\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\nu}\left[\left|\int_{t^n}^{t^{n,s}}\|\partial_t^{\nu-\ell}\,\mathsf{T}_h^{-1}(t)P_h\partial_t^\ell f(t)\|_1 dt\right|+k\max\{1,k\}^\nu\|\alpha_{h,s,\ell}^n\|_\infty\right]$$
$$\le Ck^\nu\sum_{s=1}^{q}\sum_{\ell=0}^{\nu}\left[\left|\int_{t^n}^{t^{n,s}}\|\partial_t^\ell f(t)\|dt\right|+k\max\{1,k\}^\nu\|\alpha_{h,s,\ell}^n\|_\infty\right]$$
$$\le Ck^{\nu+1}\sum_{\ell=0}^{\nu}\big[\max\{1,k\}^\nu(1+t_\epsilon^*)\big(\|v^0\|_{r,\infty}+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\ell}\big)+\sup_{t\in I_\epsilon^*}\|\partial_t^\ell f(t)\|\big]$$
$$\le Ck^{\nu+1}\big[\max\{1,k\}^\nu(1+t_\epsilon^*)\big(\|v^0\|_{r,\infty}+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu}\big)+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big]$$
$$\le Ck^{\nu+1}\max\{1,k\}^\nu(1+t_\epsilon^*)\big(\|v^0\|_{r,\infty}+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big),\quad j=1,\dots,q,$$

όταν ισχύει η (IV$_\infty$). Εν συνεχεία οι (Γ5.9a), (Γ5.9b) και (Γ5.3b) δίνουν

$$e_h^{n+1}=\boldsymbol{b}^TA^{-1}\mathbf{e}_h^n+u_h(t^{n+1})-w_h^{n+1}, \tag{Γ5.13}$$

όπου $\mathbf{e}_h^n:=(e_h^{n,1},\dots,e_h^{n,q})^T$. Έτσι η (Γ5.10) έπεται εύκολα από την (Γ5.13), τις πιό πάνω εκτιμήσεις και την (Γ5.6). ■

Από τώρα και στο εξής, για να απλοποιηθούν οι τύποι, θα υποθέτουμε ότι $k\le 1$.

Πρόταση Γ5.3 (Συνέπεια). *Για κάθε $h\in(0,h_0)$ και $n\in\{0,\dots,N-1\}$, υπάρχουν συναρτήσεις $\{v_h^{n,j}\}_{j=1}^q$ του S_h τέτοιες ώστε*

$$v_h^{n,j}=u_h(t^n)+k\sum_{s=1}^{q}a_{js}(L_h(t^{n,s})v_h^{n,s}+F_h(t^{n,s})),\quad j=1,\dots,q. \tag{Γ5.14a}$$

Ορίζουμε συναρτήσεις σφάλματος $E_h^n\in S_h$, ως εξής

$$u_h(t^{n+1})=u_h(t^n)+k\sum_{j=1}^{q}b_j(L_h(t^{n,j})v_h^{n,j}+F_h(t^{n,j}))+E_h^n. \tag{Γ5.14b}$$

Τότε, αν ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης Γ5.1, *για $m_0=0,1$, έχουμε*

$$\max_n\|E_h^n\|_{m_0}\le Ck^{\nu+1}(1+t_\epsilon^*)^{m_0}\big[\|v^0\|_r+\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big],\quad \forall h\in(0,h_\nu), \tag{Γ5.15a}$$

εφ' όσον ισχύει η (IV_{m_0}). *Επί πλέον έχουμε*

$$\max_n \|E_h^n\|_\infty \le Ck^{\nu+1}(1+t_\epsilon^*)\big[\|v^0\|_{r,\infty} + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \quad \forall h \in (0,h_\nu), \tag{Γ5.15b}$$

όταν ισχύει η (IV_∞).

Απόδειξη. Για δοθέν $h \in (0,h_0)$ και $n \in \{0,\dots,N-1\}$, το Λήμμα Γ4.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη των συναρτήσεων $\{v_h^{n,j}\}_{j=1}^q$.

Έστω $\omega_h^{n,j} := w_h^{n,j} - v_h^{n,j}$ για $j = 1,\dots,q$, $n = 0,\dots,N-1$ και $0 < h < h_0$. Τότε, αφαιρώντας κατά μέλη την (Γ5.14) από την (Γ5.9), έχουμε

$$\begin{aligned}
\omega_h^{n,j} =& e_h^{n,j} + k\sum_{s=1}^q a_{js} L_h(t^{n,s})\omega_h^{n,s}, \quad j=1,\dots,q,\\
E_h^n =& e_h^{n+1} + k\sum_{j=1}^q b_j L_h(t^{n,j})\omega_h^{n,j}.
\end{aligned}$$

Εν συνεχεία το Λήμμα Γ4.1 δίνει

$$\begin{aligned}
\|E_h^n\| \le& \|e_h^{n+1}\| + \widetilde{C}_{2,0}\sum_{j=1}^q \|e_h^{n,j}\|,\\
\|E_h^n\|_1 \le& \|e_h^{n+1}\|_1 + 2\widetilde{C}_{2,1}\sum_{j=1}^q \|e_h^{n,j}\|_1,\\
\|E_h^n\|_\infty \le& \|e_h^{n+1}\|_\infty + 2\widetilde{C}_{2,\infty}\sum_{j=1}^q \|e_h^{n,j}\|_\infty, \quad \text{όταν } \ d=1.
\end{aligned} \tag{Γ5.16}$$

Η (Γ5.16) και η (Γ5.10) δίνουν αμέσως την (Γ5.15). ■

§Γ6. Σύγκλιση.

Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι οι προσεγγίσεις Runge–Kutta συγκλίνουν με την καλύτερη δυνατή τάξη ως προς k και ομοιόμορφα ως προς h στη λύση u_h του ημιδιακριτού προβλήματος.

Θεώρημα Γ6.1. *Έστω* u_h *η λύση του* (P_h) *και* $\{u_h^n\}_{n=0}^N$ *οι προσεγγίσεις Runge–Kutta, όπως αυτές ορίστηκαν στην* (Γ4.2). Ακόμα, *δεχόμαστε ότι ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης* Γ5.1. *Τότε, έχουμε*

$$\max_{0\le n\le N} \|u_h^n - u_h(t^n)\| \le Ck^\nu t^*\big[\|v^0\|_r + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \quad \forall h \in (0,h_\nu), \tag{Γ6.1}$$

όταν ικανοποιείται η (IV$_0$)*. Ακόμα, για κάθε* $h \in (0, h_\nu)$*, ισχύει ότι*

$$\max_{0\le n\le N} \|u_h^n - u_h(t^n)\|_1 \le Ck^\nu(1+t_\epsilon^*)\exp(\widetilde{C}_{3,1}t^*)\big[\|v^0\|_r + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \tag{Γ6.2}$$

όταν ικανοποιείται η (IV$_1$)*, και*

$$\max_{0\le n\le N} \|u_h^n - u_h(t^n)\|_\infty \le Ck^\nu(1+t_\epsilon^*)\exp(\widetilde{C}_{3,\infty}t^*)\big[\|v^0\|_{r,\infty} + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \tag{Γ6.3}$$

όταν ικανοποιείται η (IV$_\infty$)*.*

Απόδειξη. Έστω $z_h^{n,j} := u_h^{n,j} - v_h^{n,j}$ για $j = 1, \dots, q$, $n = 0, \dots, N-1$ και $h \in (0, h_0)$. Ακόμα θέτουμε $z_h^n := u_h^n - u_h(t^n)$ για $n = 0, \dots, N$ και $h \in (0, h_0)$, και σημειώνουμε ότι $z_h^0 = 0$. Αφαιρώντας κατά μέλη την (Γ5.14) από την (Γ4.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} z_h^{n,j} &= z_h^n + k\sum_{s=1}^q a_{js}L_h(t^{n,s})z_h^{n,s}, \quad j = 1, \dots, q,\\ z_h^{n+1} + E_h^n &= z_h^n + k\sum_{j=1}^q b_j L_h(t^{n,j})z_h^{n,j}. \end{aligned}$$

Τώρα, βασιζόμενοι στο Λήμμα Γ4.2 και στην (Γ5.15) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|z_h^{n+1}\| \le& \|z_h^n\| + \|E_h^n\|\\ \le& \|z_h^n\| + Ck^{\nu+1}\big[\|v^0\|_r + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \end{aligned} \tag{Γ6.4a}$$

$$\begin{aligned} \|z_h^{n+1}\|_1 \le& (1+\widetilde{C}_{3,1}k)\|z_h^n\|_1 + \|E_h^n\|_1\\ \le& (1+\widetilde{C}_{3,1}k)\|z_h^n\|_1 + Ck^{\nu+1}(1+t_\epsilon^*)\big[\|v^0\|_r + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \end{aligned} \tag{Γ6.4b}$$

$$\begin{aligned} \|z_h^{n+1}\|_\infty \le& (1+\widetilde{C}_{3,\infty}k)\|z_h^n\|_\infty + \|E_h^n\|_\infty\\ \le& (1+\widetilde{C}_{3,\infty}k)\|z_h^n\|_\infty\\ &+ Ck^{\nu+1}(1+t_\epsilon^*)\big[\|v^0\|_{r,\infty} + \|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1}\big], \quad \text{όταν} \ \ d = 1, \end{aligned} \tag{Γ6.4c}$$

για $n = 0, \dots, N-1$ και για κάθε $h \in (0, h_\nu)$.

Η (Γ6.1) έπεται από τις (Γ6.4a) και το Λήμμα A3.1. Ενώ οι (Γ6.2) και (Γ6.3) προκύπτουν από τις (Γ6.4b) και (Γ6.4c), αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα A3.2. ■

Είμαστε τώρα έτοιμοι να παρουσιάσουμε το κύριο αποτέλεσμα σύγκλισης, δηλαδή τη σύγκλιση των προσεγγίσεων Runge–Kutta στη λύση u του συνεχούς προβλήματος.

Θεώρημα Γ6.2. *Έστω u η λύση του* (P) *και* $\{u_h^n\}_{n=0}^N$ *οι προσεγγίσεις Runge–Kutta, όπως αυτές ορίστηκαν στην* (Γ4.2). *Ακόμα, δεχόμαστε ότι ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης* Γ5.1. *Τότε, έχουμε*

$$\max_{0\le n\le N}\|u_h^n-u(t^n)\| \le C(h^r+k^\nu)(1+t_\epsilon^*)^{[\frac{r+1}{2}]} \Big[\|v^0\|_r+\max\{\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1},\|f\|_{I_\epsilon^*,H^{r-2},0}\}\Big],\quad \forall h\in(0,h_\nu),$$

όταν ικανοποιείται η (IV_0). *Ακόμα,*

$$\max_{0\le n\le N}\|u_h^n-u(t^n)\|_1 \le C(h^{r-1}+k^\nu)\max\Big\{(1+t_\epsilon^*)\exp(\widetilde{C}_{3,1}t^*),(1+ht_\epsilon^*)(1+t_\epsilon^*)^{[\frac{r+1}{2}]}\Big\} \Big[\|v^0\|_r+\max\{\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1},\|f\|_{I_\epsilon^*,H^{r-2},0}\}\Big],\quad \forall h\in(0,h_\nu),$$

όταν ικανοποιείται η (IV_1), *και*

$$\max_{0\le n\le N}\|u_h^n-u(t^n)\|_\infty \le C(h^r+k^\nu)(1+t_\epsilon^*)\max\Big\{\exp(\widetilde{C}_{3,\infty}t^*),(1+t_\epsilon^*)^{[\frac{r+1}{2}]}\Big\} \Big[\|v^0\|_{r,\infty}+\max\{\|f\|_{I_\epsilon^*,L^2,\nu+1},\|f\|_{I_\epsilon^*,\mathcal{C}^{r-2},0}\}\Big],\quad \forall h\in(0,h_\nu),$$

όταν ικανοποιείται η (IV_∞).

Απόδειξη. Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα με την τριγωνική ανισότητα συνδυάζοντας τα αποτελέσματα που περιέχονται στο Θεώρημα Γ6.1 και στις Προτάσεις Γ3.3 έως Γ3.5. ■

§Γ7. Γενικά σχόλια–Σύνδεση με τη βιβλιογραφία.

§Γ7.1. Εξισώσεις Sobolev–Galpern.

O S. L. Sobolev (1954), [Sob], ανήγαγε τη μελέτη ενός συστήματος εξισώσεων (σχετικού με πρόβλημα της μηχανικής ρευστών) στην αναζήτηση των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$(\Gamma7.1.1)\qquad \Delta_3 u_{tt}+u_{x_3x_3}=0,$$

(βλ. [Sob], (48)). Η εξίσωση αυτή προκάλεσε το ενδιαφέρον αρκετών Ρώσων μαθηματικών, μεταξύ των οποίων του S. A. Galpern (1958), [Gal], ο οποίος μελέτησε γραμμικά συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$(\Gamma7.1.2)\qquad \widetilde{M}(t,\frac{1}{i}\partial_{x_1},\dots,\frac{1}{i}\partial_{x_d})\partial_t\mathbf{u}=\widetilde{L}(t,\frac{1}{i}\partial_{x_1},\dots,\frac{1}{i}\partial_{x_d})\mathbf{u},$$

(όπου $\mathbf{u}:=(u_1,\dots,u_d)$ και $\widetilde{M}$, $\widetilde{L}$ είναι πίνακες με στοιχεία πολυώνυμα των $\{\frac{1}{i}\partial_{x_j}\}_{j=1}^d$ με συντελεστές εξαρτώμενους μόνο από το t) η οποία περιέχει ως ειδική περίπτωση την εξίσωση (Γ7.1.1), καθώς αυτή μπορεί να γραφεί σε μορφή συστήματος πρώτης τάξης ως εξής

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \Delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\partial_{x_3}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

όπου $v = u$ και $w = u_t$.

Έτσι διαφορικές εξισώσεις ή συστήματα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$(\mathrm{SG}_m) \qquad A(t)\partial_t^m u + \sum_{j=0}^{m-1} B_j(t)\partial_t^j u = f,$$

όπου $m \in \mathbb{N}$ και A, $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ είναι διαφορικοί τελεστές, ως προς τις μεταβλητές του χώρου με συντελεστές εξαρτώμενους από το χώρο και το χρόνο, ή πίνακες με στοιχεία τέτοιους τελεστές (όπως το (Γ7.1.2)) καλούνται στη βιβλιογραφία κυρίως ως εξισώσεις τύπου Sobolev ή τύπου Sobolev–Galpern (ειδικά όταν $m = 1$) (βλ. π.χ [Prok], [KoE], [Ze], [Sh]).

Στη δύση εκδηλώνεται ενδιαφέρον για εξισώσεις Sobolev–Galpern τύπου (SG_1) επειδή τέτοιες εμφανίζονται σε διάφορες φυσικές εφαρμογές (βλ. [Ru], [CaS])

Η εξίσωση στο πρόβλημα (Γ1.1), σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι τύπου Sobolev–Galpern και αποτελεί μιά πιο γενική μόρφη εξισώσεων που εμφανίζονται στην υποβρύχια ακουστική και είναι γνωστές ως εξισώσεις ευρείας γωνίας.

§*Γ7.2. Εξισώσεις ευρείας γωνίας στην υποβρύχια ακουστική.*

Το πεδίο της ακουστικής πίεσης P που παράγεται από μιά σημειακή χρονοαρμονική πηγή μέσα σε θαλάσσιο περιβάλλον, περιγράφεται, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, από, ένα *εξωτερικό* πρόβλημα για μιά ομογενή εξίσωση Helmholtz $\Delta P + K^2 P = 0$, όπου $K := \frac{2\pi f}{c}$, f η συχνότητα της πηγής και c η ταχύτητα του ήχου μέσα στο θαλάσσιο περιβάλλον. Λόγω των υπολογιστικών δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά την αριθμητική επίλυση αυτού του προβλήματος, στη δεκαετία του '70 προτάθηκε η προσέγγιση της πιο πάνω εξίσωσης (μετά από αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από καρτεσιανές (x, y, z) σε κυλινδρικές (r, θ, z)) από εξισώσεις τύπου Schrödinger (βλ. π.χ. [JK], [Tp], [Bok], [Le], [LeM]), γνωστές και ως 'παραβολικές' προσεγγίσεις ('parabolic' approximations). Η ιδέα χρήσης τέτοιων προσεγγίσεων προέρχεται από τη σεισμολογία, [Cl1], και τη μελέτη διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, [Foc]. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν ικανοποιητικά (σε μεγάλη απόσταση από την πηγή) μόνο την προς τα έξω διάδοση του ακουστικού κύματος σε μικρές γωνίες από την οριζόντια διεύθυνση (βλ. [LeM], §2.2) αδιαφορώντας για επιστροφές (backscattering). Με στόχο την περιγραφή της κυματικής διάδοσης σε μεγαλύτερες γωνίες (wide angle capability) προτάθηκαν νέες προσεγγίσεις της εξίσωσης Helmholtz γνωστές ως '*παραβολικές*' *προσεγγίσεις ευρείας γωνίας* (wide angle 'parabolic' approximations).

Στην περίπτωση που υποθέτουμε αξονική συμμετρία (ανεξαρτησία από τη μεταβλητή θ) η κατασκευή αυτών των εξισώσεων (βλ. [DaWC], [Gre], [LeM], [St2], [KnLS], [StLB]) στηρίζεται σε ρητές προσεγγίσεις $Q_2(x) = \frac{\widetilde{q}_1(x)}{\widetilde{q}_2(x)}$ της συνάρτησης $g_2(x) := \sqrt{1+x}$ γύρω από το μηδέν (ιδέα που φαίνεται ότι οφείλεται στον Claerbout για προβλήματα σεισμολογίας, βλ. [Cl2], p. 206, Exercice 2). Ζητώντας τα πολυώνυμα $\widetilde{q}_1$, $\widetilde{q}_2$ να είναι πρώτου βαθμού ως προς x και να ισχύει $Q_2(0) = g_2(0) = 1$, παίρνουμε $Q_2(x) = \frac{1+p_0 x}{1+q_0 x}$ και οι αντίστοιχες εξισώσεις ευρείας γωνίας έχουν τη μορφή

$$(1 + q_0\beta(z,r))w_r + q_0\alpha w_{zzr} = i\lambda_0\alpha w_{zz} + i\lambda_0\beta(z,r)w, \tag{Γ7.2.1}$$

όπου $\alpha = \frac{1}{(k_0)^2}$, $\lambda_0 = k_0(p_0 - q_0)$, $k_0 := \frac{2\pi f}{c_0}$, $\beta(z,r) = \eta_1(z,r) + i\eta_2(z,r)$, $\eta_1(z,r) = (\frac{c_0}{c(z,r)})^2 - 1$, c_0 είναι η ταχύτητα ήχου αναφοράς (συνήθως η μέση τιμή της c) ενώ $\eta_2(z,r) = (\eta_1(z,r)+1)b_1(z,r) + b_2(z,r)$ με b_1, b_2 μη αρνητικές συναρτήσεις που περιγράφουν διάφορους μηχανισμούς απόσβεσης. Ζητώντας επί πλέον $\partial_x^j Q_2(0) = \partial_x^j g_2(0)$ για $j = 1,2$, καταλήγουμε στις τιμές $p_0 = \frac{3}{4}$ και $q_0 = \frac{1}{4}$ (δηλ. η Q_2 είναι η (1,1) Padé προσέγγιση της g_2) και τότε η (Γ7.2.1) είναι γνωστή ως *διδιάστατη εξίσωση ευρείας γωνίας του Claerbout*.

Στην τριδιάστατη περίπτωση η κατασκευή αυτών των εξισώσεων (βλ. [SiKL], [LeSS], [ColC]) στηρίζεται σε ρητές προσεγγίσεις $Q_3(x) = \frac{\widehat{q}_1(x,y)}{\widehat{q}_2(x,y)}$, γύρω από το $(0,0)$, της συνάρτησης $g_3(x) := \sqrt{1+x+y}$. Ζητώντας τα πολυώνυμα $\widehat{q}_1$, $\widehat{q}_2$ να είναι πρώτου βαθμού ως προς x και y, και να ισχύει $Q_3(0,0) = g_3(0,0) = 1$, παίρνουμε $Q_3(x) = \frac{1+p_0x+p_1y}{1+q_0x+q_1y}$ και οι αντίστοιχες εξισώσεις ευρείας γωνίας (βλ. [SiKL]) έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}(1+&q_0\beta(z,\theta,r))w_r + q_1\frac{\alpha}{r^2}w_{\theta\theta r} + q_0\alpha w_{zzr}\\ &= ik_0\big[(p_0-q_0)\alpha w_{zz} + (p_1-q_1)\frac{\alpha}{r^2}w_{\theta\theta} + (p_0-q_0)\beta(z,\theta,r)w\big], \quad r \ge r_0 > 0,\end{aligned} \tag{Γ7.2.2}$$

όπου α και β περιγράφονται όπως παραπάνω με τη διαφορά ότι οι συναρτήσεις c, b_1 και b_2 εξαρτώνται γενικά από την μεταβλητή θ. Ζητώντας επί πλέον τα αναπτύγματα Taylor των Q_3 και g_3 γύρω από το $(0,0)$ να συμπίπτουν σε ότι αφορά τους όρους μέχρι και δεύτερης τάξης (δηλ. $\partial_x^j Q_3(0,0) = \partial_x^j g_3(0,0)$, $\partial_y^j Q_3(0,0) = \partial_y^j g_3(0,0)$ για $j = 1,2$, και $\partial_{xy}^2 Q_3(0,0) = \partial_{xy}^2 g_3(0,0)$) καταλήγουμε στις τιμές $p_0 = p_1 = \frac{3}{4}$ και $q_0 = q_1 = \frac{1}{4}$. Τότε η (Γ7.2.2) είναι γνωστή ως *τριδιάστατη εξίσωση ευρείας γωνίας του Claerbout*.

Από τις εξισώσεις (Γ7.2.1) και (Γ7.2.2), εκείνες που χρησιμοποιούνται κυρίως είναι οι εξισώσεις ευρείας γωνίας του Claerbout, οι οποίες αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης που περιγράψαμε στην §Γ1 και μελετήσαμε σ' αυτό το κεφάλαιο. Στην κατηγορία των εξισώσεων που μελετήσαμε υπάγονται, γενικά, εκείνες της (Γ7.2.1) όταν $q_0 \neq 0$ (διαφορετικά δεν είναι τύπου (SG_1)) και $p_0 - q_0 > 0$, καθώς και αυτές της (Γ7.2.2) όταν $q_0q_1 > 0$ (για να είναι τύπου (SG_1) και να ισχύει η (Γ1.2)), $p_0 - q_0 > 0$ και $\frac{p_1-q_1}{p_0-q_0} = \frac{q_1}{q_0}$.

§Γ7.3. Ανάλυση αριθμητικών μεθόδων.

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για εξισώσεις τύπου (SG_1) έχουν παρουσιαστεί και αναλυθεί από τους Ewing, [Ew1], Ford & Ting, [ForT1], [ForT2], ενώ ειδικά για εξισώσεις (Γ7.2.1) και (Γ7.2.2), από τους St. Mary & Lee, [StL], St. Mary, [St1], Akrivis & Dougalis, [AvD2], και Akrivis, Dougalis & Zouraris, [AvDZ].

Ο Ford, [For], αναλύει ημιδιακριτά και πλήρως διακριτά σχήματα τύπου Crank–Nicolson/Galerkin και *πρόβλεψης–διόρθωσης*/Galerkin για προβλήματα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Dirichlet για μη γραμμικές εξισώσεις τύπου Sobolev της μορφής

$$\gamma_0(x,t)u_t - \nabla\cdot(\Gamma(x,t)\nabla u_t) = \nabla\cdot(B(x,t,u)\nabla u) + f(x,t,u),$$

όπου γ_0 είναι μιά θετική συνάρτηση και Γ, B είναι πίνακες συναρτήσεων. Ειδικώτερα ο Γ είναι συμμετρικός και ομοιόμορφα θετικά ορισμένος. Γι' αυτά τα σχήματα αποδεικνύει βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος στη στάθμη του H^1.

Ο Wahlbin, [Wah], μελετά ένα διβηματικό πλήρως διακριτό σχήμα πεπερασμένων στοιχείων, το οποίο εφαρμόζεται σ' ένα μονοδιάστατο περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών για την μη γραμμική εξίσωση

$$\partial_t(u - (a(x)u_x)_x) + (f(x,u))_x = 0$$

όπου η a είναι θετική και μαζί με την f 1–περιοδική ως προς x. Αποδεικνύει βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος στις στάθμες L^2, H^1 και L^∞ όταν οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων αποτελούνται από ομαλές, περιοδικές και κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις πάνω σε μιά σχεδόν ομοιόμορφη διαμέριση.

Ο Ewing, [Ew2], μελετά ημιδιακριτές προσεγγίσεις καθώς και μιά extrapolated Crank–Nicolson/Galerkin πλήρως διακριτή μέθοδο για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Neumann για μιά πιο γενική (σε ότι αφορά τη μη γραμμικότητα) εξίσωση

$$\gamma_0(x,u)u_t - \nabla\cdot\Big[g_1(x,u,\nabla u)\nabla u_t + g_2(x,u)\nabla u\Big] = f(x,t,u,\nabla u),$$

όπου γ_0 και g_1 θετικές συναρτήσεις, ενώ μελετά και μιά περίπτωση εκφυλισμού σε παραβολικό πρόβλημα επιτρέποντας $g_1 \ge 0$. Γι' αυτές, αποδεικνύει βέλτιστες εκτιμήσεις στην στάθμη του H^1.

Οι Arnold, Douglas & Thomée, [AwDT], θεωρούν, στη μία διάσταση, ένα περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών για την μη γραμμική εξίσωση

$$-(\gamma_1(x)u_{xt})_x + \gamma_2(x)u_t = -(\beta_1(x,t,u)u_x)_x + \beta_2(x,t,u)u_x + f(x,t,u), \tag{Γ7.3.1}$$

όπου οι συναρτήσεις γ_1, γ_2 είναι θετικές και μαζί με τις β_1, β_2 και f είναι 1–περιοδικές ως προς x. Αναλύουν ημιδιακριτές προσεγγίσεις και μιά άμεση Euler/Galerkin πλήρως διακριτή μέθοδο αποδεικνύοντας βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος στην L^2 και H^1 στάθμη.

Αργότερα ο Nakao, [Nak], μελετά ένα περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών στη μία διάσταση για μιά γενικώτερη (από την (Γ7.3.1)) μη γραμμική εξίσωση τύπου Sobolev

$$\begin{aligned}-(\gamma_2(x,t,u)u_{tx})_x + \gamma_1(x,t,u)u_{tx} &+ \gamma_0(x,t,u)u_t \\ &= -\,(\beta_2(x,t,u)u_x)_x + \beta_1(x,t,u)u_x + f(x,t,u),\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις γ_0, γ_1, γ_2, β_1, β_2 και f είναι 1–περιοδικές και η γ_2 θετική. Επί πλέον γίνεται η υπόθεση ότι ο τελεστής που δρα στην u_t οδηγεί σε μιά H^1_{per}–ελλειπτική διγραμμική μορφή (βλ. [Nak], (2.4)). Αναλύοντας ημιδιακριτές προσεγγίσεις αποδεικνύει βέλτιστες εκτιμήσεις στην L^p στάθμη όπου $2 \leq p \leq \infty$, και για χώρους πεπερασμένων στοιχείων αποτελούμενους από συνεχείς, περιοδικές και κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ο Lin, [Li], αποδεικνύει βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος στη στάθμη L^2 για ημιδιακριτές και πλήρως διακριτές προσεγγίσεις Crank–Nicolson/Galerkin και extrapolated Crank–Nicolson/Galerkin, για ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών Dirichlet για μιά διδιάστατη μη γραμμική εξίσωση τύπου Sobolev της μορφής

$$\gamma(u) - \nabla\cdot[A(u)\nabla u_t] = \nabla\cdot[B(u)\nabla u] + \sum_{j=1}^{2} b_j(u)\partial_{x_j}u + b_0(u)u + f(u),$$

όπου $\gamma > 0$ και A, B είναι 2×2 πίνακες συναρτήσεων. Επί πλέον ο A είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένος.

Οι Lin, Thomée & Wahlbin, [LnTW], αναλύουν ημιδιακριτές προσεγγίσεις για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών Dirichlet για τη γραμμική εξίσωση

$$A(t)u_t + B(t)u = f,$$

όπου $A(t)$ είναι ένας δεύτερης τάξης, αυτοσυζυγής, θετικός, ελλειπτικός τελεστής και $B(t)$ είναι ένας γενικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης. Αποδεικνύουν βέλτιστες εκτιμήσεις στη στάθμη του L^p, $2 \leq p < \infty$, χρησιμοποιώντας μιά τεχνική βασισμένη σε εκτιμήσεις για προβολές τύπου Ritz–Volterra.

Οι Akrivis, Dougalis & Kampanis, [AvDK1], [AvDK2], εφαρμόζουν και αναλύουν, για πρώτη φορά, μεθόδους Runge–Kutta για εξισώσεις της μορφής (Δ7.2.1), όταν $q_0 \neq 0$ και $p_0 - q_0 > 0$. Ακολουθώντας τεχνική ανάλογη μ' εκείνη της [AvD1] αποδεικνύουν βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος $O(h^r + k^4)$ στη στάθμη του L^2, για ένα πλήρως διακριτό σχήμα όπου η διακριτοποίηση στο χρόνο γίνεται με τη μέθοδο Gauss–Legendre 2 σταδίων και η διακριτοποίηση στο χώρο με μιά μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Η ίδια απόδειξη οδηγεί στην εκτίμηση $O(h^r + k^{\min\{2q,q+2\}})$ για τις μεθόδους Runge–Kutta Gauss–Legendre. Επί πλέον αποδεικνύουν βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος για τις ημιδιακριτές προσεγγίσεις της λύσης και για μιά πλήρως διακριτή μέθοδο Crank–Nicolson.

Το πρόβλημα που μας απασχόλησε καθώς και εκείνο της [AvDK2], διαφέρουν από εκείνα των εργασιών, [For], [Wah], [Ew2], [AwDT], [Nak], [Li], πέρα από το θέμα της γραμμικότητας, στο ότι ο τελεστής που δρα στην u_t δεν ικανοποιεί την ανισότητα Gårding με $C_G = 0$ (βλ. Λήμμα Γ2.1). Αυτό απαιτεί ένα διαφορετικό χειρισμό των διακριτών τελεστών βασιζόμενο στην εργασία [Sch].

Η ανάλυση των προηγουμένων παραγράφων αυτού του κεφαλαίου βελτιώνει το αποτέλεσμα της εργασίας [AvDK2], οδηγώντας στην βέλτιστη L^2 εκτίμηση σφάλματος $O(h^r + k^\nu)$, για μιά γενικώτερη μη ομογενή εξίσωση. Επίσης παρουσιάζουμε μιά διαφορετική ανάλυση για το ημιδιακριτό πρόβλημα μαζί με βέλτιστες εκτιμήσεις στη στάθμη $\|\cdot\|_1$ και επί πλέον στη στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ στη μονοδιάστατη περίπτωση. Αυτές οι εκτιμήσεις είναι βέλτιστες όχι μόνο για το ημιδιακριτό πρόβλημα αλλά και για τις πλήρως διακριτές προσεγγίσεις (Γ4.2).

SCHRÖDINGER
ME DIRICHLET

§Δ1. Εισαγωγή.

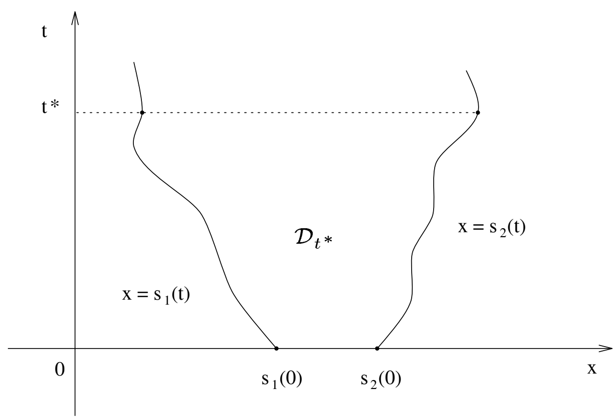
Έστω $t^* > 0$ και δύο συναρτήσεις $s_1, s_2 \in C^1([0,t^*],\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε

(Δ1.1a) $$s_1(t) < s_2(t) \quad \forall t \in [0,t^*].$$

Επίσης ορίζουμε:

(Δ1.1b) $$s(t) := s_2(t) - s_1(t) \;\; \text{και} \;\; I(t) := (s_1(t), s_2(t)), \quad \forall t \in [0,t^*],$$

(Δ1.1c) $$\mathcal{D}_A := \bigcup_{t\in A} \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in I(t)\big\}, \quad \forall A \subset [0,t^*] \;\; \text{και} \;\; \mathcal{D}_{t^*} := \mathcal{D}_{(0,t^*]}.$$



Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών Dirichlet για την εξίσωση του Schrödinger σε μη κυλινδρικό χωρίο: ζητούμε συνάρτηση $u : \overline{\mathcal{D}_{t^*}} \longrightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

(Δ1.2a) $$u_t = i\alpha u_{xx} + i\beta(x,t)u + f(x,t) \;\; \text{στο} \;\; \mathcal{D}_{t^*},$$

(Δ1.2b) $$u(s_1(\cdot),\cdot) = u(s_2(\cdot),\cdot) = 0 \;\; \text{στο} \;\; (0,t^*],$$

(Δ1.2c) $$u(x,0) = v^0(x) \;\; \text{για κάθε} \;\; x \in I(0),$$

όπου $f:\overline{\mathcal{D}_{t^*}}\longrightarrow\mathbb{C}$, $v^0:I(0)\longrightarrow\mathbb{C}$, $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\beta:\overline{\mathcal{D}_{t^*}}\longrightarrow\mathbb{C}$ με

$$\mathrm{Im}\,\beta\geq 0. \tag{Δ1.2d}$$

Στις εφαρμογές (βλ. §Δ4), ο μη ομογενής όρος f είναι συνήθως ίσος με μηδέν και τότε (βλ. §Δ2) για τη λύση u του (Δ1.2) έχουμε

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(I(t))}\leq\|v^0\|_{L^2(I(0))},\quad\forall t\in[0,t^*]. \tag{Δ1.3}$$

Επί πλέον, όταν στην (Δ1.2d) ισχύει ισότητα το ίδιο συμβαίνει και στην (Δ1.3).

Αντικείμενο του Κεφ. Δ είναι ο ορισμός και η ανάλυση μιάς οικογένειας μεθόδων πεπερασμένων διαφορών, τύπου Crank–Nicolson, για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος (Δ1.2). Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στην κατασκευή κατάλληλων προσεγγίσεων των συνοριακών συναρτήσεων s_1 και s_2, έχουν καλές ιδιότητες ευστάθειας και ικανοποιούν ένα διακριτό ανάλογο της (Δ1.3) (βλ. Πόρισμα Δ3.2.2). Μελετώντας τη σύγκλιση των προσεγγίσεων αποδεικνύουμε βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος της μορφής

$$\max_{0\leq n\leq N}\|U^n-u^n\|_{\mathrm{d},I(t^n)}\leq C(k^2+h^2). \tag{Δ1.4}$$

Σ' αυτή την εκτίμηση $N\in\mathbb{N}$ είναι ο αριθμός των βημάτων στο χρόνο, $k:=\frac{t^*}{N}$ είναι το αντίστοιχο βήμα, $t^n:=nk$ για $n=0,\dots,N$, και για κάποιο $t\in[0,t^*]$ συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{\mathrm{d},I(t)}$ μιά διακριτή στάθμη ανάλογη της $L^2(I(t))$ (βλ. §Δ3.2). Ακόμα u^n και U^n είναι, αντίστοιχα, το διάνυσμα των τιμών της u και το διάνυσμα των προσεγγίσεών της, στους κόμβους του πλέγματος διαφορών που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή t^n. Τέλος, $h:=\frac{1}{J+1}$ είναι μιά παράμετρος διακριτοποίησης στο χώρο, όπου $J\in\mathbb{N}$ το πλήθος των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος σε κάθε χρονική στιγμή.

Εν συνεχεία, δίνουμε μιά εικόνα του περιεχομένου του υπολοίπου του κεφαλαίου Δ. Στην §Δ2 παρουσιάζουμε μιά a–priori εκτίμηση για τη u στην εξαρτώμενη από το χρόνο στάθμη $L^2(I(t))$. Στην §Δ3 ορίζουμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, παρουσιάζουμε ιδιότητες ευστάθειας της μεθόδου, αναλύουμε τη συνέπειά της και αποδεικνύουμε την εκτίμηση σφάλματος (Δ1.4). Στην παράγραφο Δ4, κλείνοντας το κεφάλαιο, αναφερόμαστε σύντομα στην προέλευση του προβλήματος και σχολιάζουμε τη σχετική βιβλιογραφία.

§Δ2. Το συνεχές πρόβλημα.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $(\cdot,\cdot)_{I(t)}$ το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(I(t))$ και με $\|\cdot\|_{I(t)}$ την παραγόμενη απ' αυτό στάθμη. Ακόμα απλοποιούμε τον συμβολισμό γράφοντας $w(t)$ αντί $w(\cdot,t)$ για συναρτήσεις του (x,t), και $\dot{g}$ αντί $\frac{dg}{dt}$ για συναρτήσεις του t.

Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα του προβλήματος (Δ1.2) είναι αρκετά ομαλά και συμβιβαστά έτσι ώστε η u να είναι όσο χρειάζεται ομαλή στο $\overline{\mathcal{D}_{t^*}}$. (Σημειώνουμε ότι η ομαλότητα της u στο σύνορο του $\mathcal{D}_{t^*}$ επηρεάζεται από εκείνη των συνοριακών συναρτήσεων s_1 και s_2.)

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα ευστάθειας για τη λύση του προβλήματος (Δ1.2).

Πρόταση Δ1.1 (L^2 – ευστάθεια). *Έστω u η λύση του προβλήματος* (Δ1.2). *Τότε ισχύει ότι*

$$\|u(t)\|_{I(t)} \leq \|v^0\|_{I(0)} + 2\int_0^t \|f(\tau)\|_{I(\tau)} d\tau, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Δ2.1a}$$

Όταν $f = 0$ και $\operatorname{Im}\beta = 0$, τότε έχουμε

$$\|u(t)\|_{I(t)} = \|v^0\|_{I(0)}, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Δ2.1b}$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (Δ1.2a) με $\overline{u}$ και έπειτα ολοκληρώνουμε ως προς x στο $I(t)$. Έτσι έχουμε

$$\int_{I(t)} u_t(t)\overline{u}(t)dx = -i\alpha\int_{I(t)} |u_x(t)|^2 dx + i\int_{I(t)} \beta(t)|u(t)|^2 dx + \int_{I(t)} f(t)\overline{u}(t)dx, \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Η ισότητα των πραγματικών μερών, η (Δ1.2d) και η ανισότητα Cauchy–Schwarz δίνουν

$$\begin{aligned}\int_{I(t)} \partial_t |u(t)|^2 dx = &-2\int_{I(t)} \operatorname{Im}\beta(t)|u(t)|^2 dx + 2\operatorname{Re}\int_{I(t)} f(t)\overline{u}(t)dx \\ \leq &2\|f(t)\|_{I(t)}\|u(t)\|_{I(t)}, \forall t \in [0, t^*].\end{aligned} \tag{Δ2.2}$$

Επί πλέον, λόγω των συνοριακών συνθηκών Dirichlet, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{s_1(t)}^{s_2(t)} |u(t)|^2 dx = &\dot{s}_2(t)|u(s_2(t), t)|^2 - \dot{s}_1(t)|u(s_1(t), t)|^2 + \int_{I(t)} \partial_t |u(t)|^2 dx \\ = &\int_{I(t)} \partial_t |u(t)|^2 dx, \quad \forall t \in [0, t^*].\end{aligned} \tag{Δ2.3}$$

Από τις (Δ2.2) και (Δ2.3) έπεται ότι

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{I(t)}^2 \leq 2\|f(t)\|_{I(t)}\|u(t)\|_{I(t)}, \quad \forall t \in [0, t^*]. \tag{Δ2.4}$$

Η Πρόταση Α3.2 και η (Δ2.3) οδηγούν εύκολα στην (Δ2.1a).

Όταν $f = 0$ και $\operatorname{Im}\beta = 0$, οι (Δ2.2) και (Δ2.3) δίνουν ότι $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{I(t)}^2 = 0$ για κάθε $t \in [0, t^*]$, που συνεπάγεται προφανώς την (Δ2.1b). ■

§Δ3. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

§Δ3.1 Περιγραφή της μεθόδου.

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζουμε μιά ομοιόμορφη διαμέριση του $[0, t^*]$ με βήμα $k := \frac{t^*}{N}$ και κόμβους $t^n := nk$, $n = 0, \ldots, N$, και θέτουμε $t^{n+\frac{1}{2}} := t^n + \frac{k}{2}$ για $n = 0, \ldots, N-1$.

Έστω, ακόμα, συναρτήσεις $\ell_1, \ell_2 \in C([0, t^*], \mathbb{R})$ (προσεγγίσεις των s_1, s_2 αντίστοιχα) τέτοιες ώστε

$$\ell_j(t^n) = s_j(t^n), \quad n = 0, \ldots, N, \quad j = 1, 2, \tag{Δ3.1.1a}$$

$$\ell_1(t) < \ell_2(t), \quad \forall t \in [0, t^*], \tag{Δ3.1.1b}$$

και

$$\ell_j \Big|_{[t^n, t^{n+1}]} \in C^1([t^n, t^{n+1}], \mathbb{R}), \quad n = 0, \ldots, N-1, \quad j = 1, 2. \tag{Δ3.1.1c}$$

Τότε ορίζουμε συνάρτηση $\ell \in C([0, t^*], \mathbb{R})$ ως εξής $\ell := \ell_2 - \ell_1$.

Έστω $J \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζουμε την παράμετρο αναφοράς για τη διακριτοποίηση στο χώρο $h := \frac{1}{J+1}$, τη συνάρτηση χωρικού βήματος $h_* := h\ell$ και, για $j = 0, \ldots, J+1$, τις συναρτήσεις χωρικών κόμβων $x_j := \ell_1 + jh_*$.

Έστω

$$\mathbb{C}_0^{J+2} := \big\{(y_0, \ldots, y_{J+1})^T \in \mathbb{C}^{J+2} : y_0 = y_{J+1} = 0\big\}.$$

Για δοθέντα $\psi^0, \ldots, \psi^N \in \mathbb{C}_0^{J+2}$, συμβολίζουμε

$$\partial\psi^n := \frac{1}{k}(\psi^{n+1} - \psi^n) \;\text{ και }\; \psi^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(\psi^{n+1} + \psi^n),$$

για $n = 0, \ldots, N-1$.

Επιπλέον για κάθε $t \in [0, t^*]$ ορίζουμε απεικόνιση $\Delta_{h_*(t)} : \mathbb{C}_0^{J+2} \longrightarrow \mathbb{C}_0^{J+2}$, ως εξής:

$$\Delta_{h_*(t)} w_j := \frac{w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}}{h_*^2(t)}, \quad j = 1, \ldots, J,$$

για κάθε $w \in \mathbb{C}_0^{J+2}$.

Για $n = 0, \ldots, N$ θέτουμε $u^n := (u(x_0(t^n), t^n), \ldots, u(x_{J+1}(t^n), t^n))^T$, διάνυσμα το οποίο, λόγω των συνοριακών συνθηκών (Δ1.2b), ανήκει στον $\mathbb{C}_0^{J+2}$. Προσεγγίζουμε το διάνυσμα u^n με το $U^n \in \mathbb{C}_0^{J+2}$ το οποίο προσδιορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία:

$$U^n := \tfrac{1}{\sqrt{s(t^n)}} W^n, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{Δ3.1.2}$$

όπου $\{W^n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{C}_0^{J+2}$ προσδιοριζόμενα ως εξής:

$$W^0 := \sqrt{s(0)}u^0 \tag{Δ3.1.3a}$$

$$\begin{aligned}\partial W_j^n &= i\alpha\Delta_{h_*(t^{n+\frac12})} W_j^{n+\frac12} + \dot{x}_j(t^{n+\frac12})\tfrac{W_{j+1}^{n+\frac12} - W_{j-1}^{n+\frac12}}{2h_*(t^{n+\frac12})}\\
&\quad + \tfrac{\dot{\ell}(t^{n+\frac12})}{2\ell(t^{n+\frac12})}\tfrac{W_{j+1}^{n+\frac12} + W_{j-1}^{n+\frac12}}{2} + i\beta_j^{n+\frac12} W_j^{n+\frac12}\\
&\quad + \sqrt{\ell(t^{n+\frac12})}F_j^{n+\frac12}, \quad j = 1,\dots,J, \quad n = 0,\dots,N-1,\end{aligned} \tag{Δ3.1.3b}$$

όπου $\beta_j^{n+\frac12} := \beta(x_j(t^{n+\frac12}), t^{n+\frac12})$ για $j = 1,\dots,J$, $n = 0,\dots,N-1$, και $F^{n+\frac12} \in \mathbb{C}_0^{J+2}$ με $F_j^{n+\frac12} := f(x_j(t^{n+\frac12}), t^{n+\frac12})$ για $j = 1,\dots,J$, $n = 0,\dots,N-1$.

Ορισμός Δ3.1.1. Η μέθοδος (Δ3.1.3) λέμε ότι είναι *καλά ορισμένη* αν

$$(x_j(t), t) \in \overline{\mathcal{D}_{t^*}}, \quad \forall t \in [0, t^*], \quad \forall j \in \{1,\dots,J\}, \tag{$\mathcal{I}$}$$

και τα $\{W^n\}_{n=1}^N$ υπάρχουν και είναι μοναδικά. □

Θα περιγράψουμε σύντομα πώς προέκυψε το σχήμα (Δ3.1.3). Έστω ότι ικανοποιείται η $(\mathcal{I})$. Για $n \in \{0,\dots,N-1\}$ ορίζουμε συναρτήσεις

$$w_j(t) := \sqrt{\ell(t)}u(x_j(t), t), \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}], \quad j = 1,\dots,J, \tag{Δ3.1.4a}$$

και

$$w(x,t) = \sqrt{\ell(t)}u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{\mathcal{D}_{[t^n, t^{n+1}]}}. \tag{Δ3.1.4b}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sqrt{\ell(t)}u_t(x_j(t), t) = \dot{w}_j(t) - \frac{\dot{\ell}(t)}{2\ell(t)}w(x_j(t), t) - \dot{x}_j(t)w_x(x_j(t), t), \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}],$$

για $j = 1,\dots,J$. Τότε, πολλαπλασιάζοντας την διαφορική εξίσωση (Δ1.2a) με $\sqrt{\ell(t)}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\dot{w}_j(t) =& i\alpha w_{xx}(x_j(t), t) + \dot{x}_j(t)w_x(x_j(t), t) + i\beta(x_j(t), t)w_j(t)\\
&+ \frac{\dot{\ell}(t)}{2\ell(t)}w(x_j(t), t) + \sqrt{\ell(t)}f(x_j(t), t), \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}],\end{aligned} \tag{Δ3.1.5}$$

για $j = 1,\dots,J$. Διακριτοποιώντας κατάλληλα την τελευταία σχέση στο σημείο $t = t^{n+\frac12}$ καταλήγουμε στην (Δ3.1.3).

§*Δ3.2 Ευστάθεια.*

Στον $\mathbb{C}_0^{J+2}$ ορίζουμε εσωτερικά γινόμενα $(\cdot,\cdot)_h$ και $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{d},I(t)}$ (διακριτό ανάλογο του $(\cdot,\cdot)_{I(t)}$) ως εξής

$$(\omega,v)_h := h\sum_{j=1}^{J}\omega_j\overline{v_j}, \quad \forall \omega, v\in\mathbb{C}_0^{J+2},$$

και

$$(\omega,v)_{\mathrm{d},I(t)} := hs(t)\sum_{j=1}^{J}\omega_j\overline{v_j}, \quad \forall \omega, v\in\mathbb{C}_0^{J+2}, \quad \forall t\in[0,t^*],$$

ενώ με $\|\cdot\|_h$, $\|\cdot\|_{\mathrm{d},I(t)}$ θα συμβολίζουμε, αντίστοιχα, τις παραγόμενες απ' αυτά στάθμες. Ακόμα, $\|\cdot\|_\infty$ θα είναι η διακριτή στάθμη μεγίστου

$$\|\omega\|_\infty := \max_{1\le j\le J}|\omega_j|, \quad \forall \omega\in\mathbb{C}_0^{J+2}.$$

Λήμμα Δ3.2.1. *Για κάθε $t\in[0,t^*]$ και $W\in\mathbb{C}_0^{J+2}$ ισχύει ότι:*

$$\mathrm{Im}(\Delta_{h_*(t)}W,W)_h = 0. \tag{Δ3.2.1}$$

Απόδειξη. Έστω $W\in\mathbb{C}_0^{J+2}$ και $t\in[0,t^*]$. Τότε

$$\begin{aligned}(\Delta_{h_*(t)}W,W)_h =&\frac{h}{h_*^2(t)}\sum_{j=1}^{J}(W_{j+1}-2W_j+W_{j-1})\overline{W_j}\\ =&\frac{h}{h_*^2(t)}\Big\{\sum_{j=1}^{J}(W_{j+1}-W_j)\overline{W_j}+\sum_{j=1}^{J}(W_{j-1}-W_j)\overline{W_j}\Big\}\\ =&\frac{h}{h_*^2(t)}\Big\{\sum_{j=0}^{J}(W_{j+1}-W_j)\overline{W_j}+\sum_{j=0}^{J-1}(W_j-W_{j+1})\overline{W_{j+1}}\Big\}\\ =&-h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{W_{j+1}-W_j}{h_*(t)}\right|^2\in\mathbb{R}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Πρόταση Δ3.2.2. *Έστω $Z^0, Z^1, Y\in\mathbb{C}_0^{J+2}$, $\varrho\in\mathbb{C}_0^{J+2}$ με $\mathrm{Im}(\varrho_j)\ge 0$ για $j=1,\dots,J$, και $t_0\in[t^{n_0},t^{n_0+1}]$ για κάποιο $n_0\in\{0,\dots,N-1\}$, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}\partial Z_j^0 =&i\alpha\Delta_{h_*(t_0)}Z_j^{1/2}+\dot{x}_j(t_0)\tfrac{Z_{j+1}^{1/2}-Z_{j-1}^{1/2}}{2h_*(t_0)}\\ &+\tfrac{\dot{\ell}(t_0)}{2\ell(t_0)}\tfrac{Z_{j+1}^{1/2}+Z_{j-1}^{1/2}}{2}+i\varrho_jZ_j^{1/2}+Y_j, \quad j=1,\dots,J,\end{aligned} \tag{Δ3.2.2}$$

όπου $Z^{1/2}=\frac{Z^1+Z^0}{2}$. *Τότε*

$$\|Z^1\|_h \le \|Z^0\|_h + k\|Y\|_h. \tag{Δ3.2.3a}$$

Όταν $Y=0$ *και* $\varrho_j\in\mathbb{R}$ *για* $j=1,\dots,J$, *έχουμε επιπλέον*

$$\|Z^1\|_h = \|Z^0\|_h. \tag{Δ3.2.3b}$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε την (Δ3.2.2) με $h\overline{Z_j^{1/2}}$ και έπειτα αθροίζουμε ως προς j από 1 έως J. Έτσι καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned}(\partial Z^0, Z^{1/2})_h =& i\alpha(\Delta_{h_*(t_0)}Z^{1/2}, Z^{1/2})_h\\ &+\frac{h}{2h_*(t_0)}\sum_{j=1}^J \dot x_j(t_0)(Z_{j+1}^{1/2}-Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}}\\ &+\frac{h}{4}\frac{\dot h_*(t_0)}{h_*(t_0)}\sum_{j=1}^J (Z_{j+1}^{1/2}+Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}}\\ &+h\sum_{j=1}^J\big(i\,\mathrm{Re}(\varrho_j)-\mathrm{Im}(\varrho_j)\big)|Z_j^{1/2}|^2+(Y,Z^{1/2})_h.\end{aligned} \tag{Δ3.2.4}$$

Επί πλέον, έχουμε

$$(\partial Z^0, Z^{1/2})_h = \frac{1}{2k}\Big[\|Z^1\|_h^2-\|Z^0\|_h^2+2i\,\mathrm{Im}(Z^1,Z^0)_h\Big], \tag{Δ3.2.5a}$$

ενώ

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^J \dot x_j(t_0)(Z_{j+1}^{1/2}-Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}}\\ &=\sum_{j=1}^J \dot x_{j+1}(t_0)Z_{j+1}^{1/2}\overline{Z_j^{1/2}}-\sum_{j=1}^J \dot x_{j-1}(t_0)Z_{j-1}^{1/2}\overline{Z_j^{1/2}}-\dot h_*(t_0)\sum_{j=1}^J(Z_{j+1}^{1/2}+Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}}\\ &=-\sum_{j=1}^J \dot x_j(t_0)(\overline{Z_{j+1}^{1/2}}-\overline{Z_{j-1}^{1/2}})Z_j^{1/2}-\dot h_*(t_0)\sum_{j=1}^J(Z_{j+1}^{1/2}+Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}},\end{aligned}$$

η οποία δίνει

$$\mathrm{Re}\Bigg\{\sum_{j=1}^J \dot x_j(t_0)(Z_{j+1}^{1/2}-Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}}\Bigg\}=-\frac12\dot h_*(t_0)\sum_{j=1}^J(Z_{j+1}^{1/2}+Z_{j-1}^{1/2})\overline{Z_j^{1/2}}. \tag{Δ3.2.5b}$$

Η ισότητα πραγματικών μερών στην (Δ3.2.4), το Λήμμα Δ3.2.1, η (Δ3.2.5) και η ανισότητα Cauchy–Schwarz δίνουν

$$\|Z^1\|_h^2-\|Z^0\|_h^2\le k\,\mathrm{Re}(Y,Z^0+Z^1)_h\le k\|Y\|_h(\|Z^1\|_h+\|Z^0\|_h). \tag{Δ3.2.6}$$

Η (Δ3.2.3a) έπεται αμέσως από την (Δ3.2.6).

Όταν $Y=0$ και $\{\varrho_j\}_{j=1}^J\subset\mathbb{R}$ αντί της (Δ3.2.6) έχουμε $\|Z^1\|_h^2-\|Z^0\|_h^2=0$, η οποία οδηγεί προφανώς στην (Δ3.2.3b). ■

Πόρισμα Δ3.2.1. *Όταν ικανοποιείται η* $(\mathcal{I})$, *τότε η μέθοδος* (Δ3.1.3) *είναι καλά ορισμένη.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει εύκολα από την εκτίμηση (Δ3.2.3a) και επιχειρηματολογώντας όπως στο Πόρισμα §B3.1. ■

Πόρισμα Δ3.2.2. *Όταν ικανοποιείται η* $(\mathcal{I})$, *τα* $\{U^n\}_{n=0}^N$ *είναι καλά ορισμένα και ικανοποιούν τη σχέση*

$$\|U^{n+1}\|_{\mathrm{d},I(t^{n+1})} \le \|U^n\|_{\mathrm{d},I(t^n)} + k\frac{\sqrt{\ell(t^{n+\frac12})}}{\sqrt{s(t^{n+\frac12})}}\|F^{n+\frac12}\|_{\mathrm{d},I(t^{n+\frac12})}, \tag{Δ3.2.7a}$$

για $n=0,\dots,N-1$. *Όταν* $f=0$ *και* $\mathrm{Im}\,\beta=0$, *τότε ισχύει επί πλέον ότι*

$$\|U^n\|_{\mathrm{d},I(t^n)} = \|u^0\|_{\mathrm{d},I(0)}, \quad n=0,\dots,N. \tag{Δ3.2.7b}$$

Απόδειξη. Το Πόρισμα Δ3.2.1 και η (Δ3.1.2) εξασφαλίζουν ότι τα $\{U^n\}_{n=0}^N$ είναι καλά ορισμένα.

Από την (Δ3.1.3) και την Πρόταση Δ3.2.2 έπεται ότι

$$\|W^{n+1}\|_h \le \|W^n\|_h + k\sqrt{\ell(t^{n+\frac12})}\|F^{n+\frac12}\|_h, \quad n=0,\dots,N-1,$$

και

$$\|W^{n+1}\|_h = \|W^n\|_h,$$

όταν $f=0$ και $\mathrm{Im}\,\beta=0$. Χρησιμοποιώντας, στη συνέχεια, την (Δ3.1.2) καταλήγουμε στην (Δ3.2.7). ■

Σημείωση. Η (Δ3.2.7) αποτελεί ένα διακριτό ανάλογο της (Δ2.1). □

§Δ3.3 Συνέπεια.

Οι συναρτήσεις ℓ_1 και ℓ_2 εξαρτώνται γενικά από τη διαμέριση του $[0,t^*]$. Για το αποτέλεσμα συνέπειας, που θα παρουσιάσουμε πιο κάτω, χρειαζόμαστε αυτές να είναι τοπικά ομαλές και κατάλληλα φραγμένες ανεξάρτητα από το N.

Υπόθεση Δ3.3.1. *Υποθέτουμε ότι*

$$\ell_j\big|_{[t^n,t^{n+1}]} \in C^3([t^n,t^{n+1}],\mathbb{R}), \quad n=0,\dots,N-1, \quad j=1,2, \tag{Y$_1$}$$

και ότι υπάρχουν σταθερές C_{B_1} και $C_{B_2}>0$, *ανεξάρτητες* του N, τέτοιες *ώστε*

$$\max_{0\le n\le N-1}\sup_{[t^n,t^{n+1}]}\left|\partial_t^m\big(\ell_j\big|_{[t^n,t^{n+1}]}\big)\right| \le C_{B_1}, \quad j=1,2, \quad m=0,1,2,3, \tag{Y$_2$}$$

και

$$\inf_{t\in[0,t^*]}\ell(t) \ge C_{B_2}. \;\square \tag{Y$_3$}$$

Λήμμα Δ3.3.1. *Έστω ότι ισχύουν οι* (Y_3) *και* (Y_2) *για* $m = 1$. *Τότε υπάρχει σταθερά* $C_{\mathcal{I}} > 0$ *τέτοια ώστε: όταν*

$$\frac{k}{h} \leq C_{\mathcal{I}},$$

τότε η ($\mathcal{I}$) *ικανοποιείται και η μέθοδος* (Δ3.1.3) *είναι καλά ορισμένη.*

Απόδειξη. Η ($\mathcal{I}$) ικανοποιείται εφ' όσον $x_1 \geq s_1$ και $x_J \leq s_2$, ή ισοδύναμα $h_* \geq \max\{e_1, e_2\}$ όπου $e_1 := s_1 - \ell_1$ και $e_2 := \ell_2 - s_2$. Επειδή $e_1(t^n) = e_2(t^n) = 0$ για $n = 0, \ldots, N$, λόγω της (Y_2) για $m = 1$, έπεται ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \sup_{[t^n, t^{n+1}]} |e_j| \leq k \max_{0 \leq n \leq N-1} \sup_{[t^n, t^{n+1}]} \Big| \dot{s}_j - \partial_t(\ell_j \,|_{[t^n, t^{n+1}]}) \Big| \leq k C_D, \quad j = 1, 2,$$

όπου $C_D := (C_{B_1} + \max\limits_{j=1,2} \sup\limits_{[0,t^*]} |\dot{s}_j|)$. Από την ($\mathrm{Y}_3$) έπεται ότι $h_* = h\ell \geq h C_{B_2}$. Επομένως, όταν $\frac{k}{h} \leq C_{\mathcal{I}} := \frac{C_{B_2}}{C_D}$, η ($\mathcal{I}$) ισχύει και λόγω του Πορίσματος Δ3.2.1 η μέθοδος (Δ3.1.3) είναι καλά ορισμένη. ■

Πρόταση Δ3.3.1. *Υποθέτουμε ότι οι* ($\mathcal{I}$), (Y_1), (Y_2) *και* (Y_3) *ικανοποιούνται. Έστω* $w^n := \sqrt{s(t^n)} u^n$ *για* $n = 0, \ldots, N$. *Για* $n = 0, \ldots, N-1$, *ορίζουμε* $r^n \in \mathbb{C}_0^{J+2}$, *μέσω των σχέσεων*

$$\begin{aligned} \partial w_j^n = {} & i\alpha \Delta_{h_*(t^{n+\frac{1}{2}})} w_j^{n+\frac{1}{2}} + \dot{x}_j(t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{w_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - w_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h_*(t^{n+\frac{1}{2}})} \\ & + \frac{\dot{\ell}(t^{n+\frac{1}{2}})}{2\ell(t^{n+\frac{1}{2}})} \frac{w_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + w_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2} + i\beta_j^{n+\frac{1}{2}} w_j^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \sqrt{\ell(t^{n+\frac{1}{2}})} F_j^{n+\frac{1}{2}} + r_j^n, \quad j = 1, \ldots, J. \end{aligned} \tag{Δ3.3.1}$$

Τότε, ισχύει ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \|r^n\|_\infty \leq C(k^2 + h^2). \tag{Δ3.3.2}$$

Απόδειξη. Έστω $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ και $j \in \{1, \ldots, J\}$. Αν $\varphi \in C^3([t^n, t^{n+1}], \mathbb{C})$ τότε ο τύπος του Taylor δίνει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t^{n+1}) - \varphi(t^n)}{k} = {} & \partial_t \varphi(t^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2k} \Big\{ \int_{t^{n+\frac{1}{2}}}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)^2 \partial_t^3 \varphi(t) dt \\ & - \int_{t^{n+\frac{1}{2}}}^{t^n} (t^n - t)^2 \partial_t^3 \varphi(t) dt \Big\}, \end{aligned} \tag{Δ3.3.3a}$$

και

$$(\Delta 3.3.3\mathrm{b})\qquad \begin{aligned}\frac{\varphi(t^{n+1})+\varphi(t^n)}{2} =&\varphi(t^{n+\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}\Big\{\int_{t^{n+\frac{1}{2}}}^{t^{n+1}}(t^{n+1}-t)\partial_t^2\varphi(t)dt\\ &+\int_{t^{n+\frac{1}{2}}}^{t^n}(t^n-t)\partial_t^2\varphi(t)dt\Big\}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (Δ3.3.3) για $\varphi = w_j$ (βλ. (Δ3.1.4a)), και βασιζόμενοι στις υποθέσεις (Y_1)–(Y_3), συμπεραίνουμε ότι

$$(\Delta 3.3.4\mathrm{a})\qquad \partial w_j^n = \frac{w_j(t^{n+1})-w_j(t^n)}{k} = \dot{w}_j(t^{n+\frac{1}{2}})+O(k^2),$$

και

$$(\Delta 3.3.4\mathrm{b})\qquad w_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{w_j(t^{n+1})+w_j(t^n)}{2} = w_j(t^{n+\frac{1}{2}})+O(k^2).$$

Ο τύπος του Taylor δίνει ακόμα

$$(\Delta 3.3.5)\qquad \begin{aligned}w(x_j(t),t) =& \frac{w(x_{j+1}(t),t)+w(x_{j-1}(t),t)}{2}\\ &-\frac{1}{2}\Big\{\int_{x_j(t)}^{x_{j+1}(t)}(x_{j+1}(t)-z)\partial_x^2 w(z,t)dz\\ &+\int_{x_j(t)}^{x_{j-1}(t)}(x_{j-1}(t)-z)\partial_x^2 w(z,t)dz\Big\},\quad t\in\{t^n,t^{n+1}\},\end{aligned}$$

όπου w η συνάρτηση που ορίστηκε στην (Δ3.1.4b). Από τις (Δ3.3.5), (Y_2) για $m=0$, και (Δ3.3.4b) έπεται

$$(\Delta 3.3.4\mathrm{c})\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2}(w_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}+w_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) =&\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2}\big(w(x_{j+1}(t^n),t^n)+w(x_{j-1}(t^n),t^n)\big)\\ &+\frac{1}{2}\big(w(x_{j+1}(t^{n+1}),t^{n+1})+w(x_{j-1}(t^{n+1}),t^{n+1})\big)\Big\}\\ =&\frac{1}{2}\big[w_j(t^n)+w_j(t^{n+1})\big]+O(h^2)\\ =&w_j(t^{n+\frac{1}{2}})+O(k^2+h^2)\\ =&w(x_j(t^{n+\frac{1}{2}}),t^{n+\frac{1}{2}})+O(k^2+h^2).\end{aligned}$$

Έστω $t\in\{t^n,t^{n+1}\}$. Τότε ορίζουμε συνάρτηση $\widetilde{w}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$, ως εξής

$$\widetilde{w}(z) := w(\ell_1(t)+z\ell(t),t),\quad \forall z\in[0,1].$$

Εν συνεχεία ο τύπος του Taylor δίνει

$$
\begin{aligned}
\widetilde{w}'(jh) =& \frac{1}{2h}\big[\widetilde{w}((j+1)h) - \widetilde{w}((j-1)h)\big] - \frac{1}{4h}\Big\{\int_{jh}^{(j+1)h} ((j+1)h-z)^2 \widetilde{w}'''(z)dz \\
& - \int_{jh}^{(j-1)h} ((j-1)h-z)^2 \widetilde{w}'''(z)dz\Big\}.
\end{aligned}
$$

Λόγω της (Y_2) για $m=0$, έχουμε, τελικά, ότι

$$
(\Delta 3.3.6) \quad \ell(t)w_x(x_j(t),t) = \frac{1}{2h}\big[w(x_{j+1}(t),t) - w(x_{j-1}(t),t)\big] + O(h^2), \quad t \in \{t^n, t^{n+1}\}.
$$

Χρησιμοποιώντας τις (Δ3.3.6), (Δ3.3.3b) (για $\varphi(\cdot) = \ell(\cdot)w_x(x_j(\cdot),\cdot)$) και (Y_1)–(Y_3), έχουμε επί πλέον ότι

$$
\begin{aligned}
\frac{w_{j+1}^{n+\frac12} - w_{j-1}^{n+\frac12}}{2h_*(t^{n+\frac12})} =& \frac{1}{2h\ell(t^{n+\frac12})}\Big\{\frac12\big(w(x_{j+1}(t^{n+1}),t^{n+1}) - w(x_{j-1}(t^{n+1}),t^{n+1})\big) \\
& + \frac12\big(w(x_{j+1}(t^n),t^n) - w(x_{j-1}(t^n),t^n)\big)\Big\} \\
=& \frac{1}{2\ell(t^{n+\frac12})}\Big[\ell(t^{n+1})w_x(x_j(t^{n+1}),t^{n+1}) + \ell(t^n)w_x(x_j(t^n),t^n)\Big] + O(h^2) \\
=& \frac{1}{\ell(t^{n+\frac12})}\ell(t^{n+\frac12})w_x(x_j(t^{n+\frac12}),t^{n+\frac12}) + O(k^2+h^2),
\end{aligned}
$$

δηλ.

$$
(\Delta 3.3.4\mathrm{d}) \qquad \frac{w_{j+1}^{n+\frac12} - w_{j-1}^{n+\frac12}}{2h_*(t^{n+\frac12})} = w_x(x_j(t^{n+\frac12}),t^{n+\frac12}) + O(k^2+h^2).
$$

Ο τύπος Taylor δίνει επί πλέον

$$
\begin{aligned}
\widetilde{w}''(jh) =& \frac{1}{h^2}\big[\widetilde{w}((j+1)h) - 2\widetilde{w}(jh) + \widetilde{w}((j-1)h)\big] \\
& - \frac{1}{6h^2}\Big\{\int_{jh}^{(j+1)h} ((j+1)h-z)^3 \widetilde{w}''''(z)dz + \int_{jh}^{(j-1)h} ((j-1)h-z)^3 \widetilde{w}''''(z)dz\Big\},
\end{aligned}
$$

δηλ.

$$
(\Delta 3.3.7) \quad
\begin{aligned}
\ell^2(t)w_{xx}(x_j(t),t) = \frac{1}{h^2}\Big[& w(x_{j+1}(t),t) - 2w(x_j(t),t) \\
& + w(x_{j-1}(t),t)\Big] + O(h^2), \quad t \in \{t^n, t^{n+1}\}.
\end{aligned}
$$

Τελικά, από τις (Δ3.3.7), (Y_1)–(Y_3) και (Δ3.3.3b) (για $\varphi(\cdot) = \ell^2(\cdot) w_{xx}(x_j(\cdot), \cdot)$), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_*(t^{n+\frac12})} w_j^{n+\frac12} =& \frac{1}{2h^2\ell^2(t^{n+\frac12})}\Big[w(x_{j+1}(t^{n+1}), t^{n+1}) \\
&\qquad - 2w(x_j(t^{n+1}), t^{n+1}) + w(x_{j-1}(t^{n+1}), t^{n+1})\Big] \\
&+ \frac{1}{2h^2\ell^2(t^{n+\frac12})}\Big[w(x_{j+1}(t^n), t^{n+1}) \\
&\qquad - 2w(x_j(t^n), t^n) + w(x_{j-1}(t^n), t^n)\Big] \\
&= \frac{1}{2\ell^2(t^{n+\frac12})}\Big[\ell^2(t^{n+1}) w_{xx}(x_j(t^{n+1}), t^{n+1}) \\
&\qquad + \ell^2(t^n) w_{xx}(x_j(t^n), t^n)\Big] + O(h^2) \\
&= \frac{1}{\ell^2(t^{n+\frac12})}\ell^2(t^{n+\frac12}) w_{xx}(x_j(t^{n+\frac12}), t^{n+\frac12}) + O(k^2 + h^2),
\end{aligned}$$

δηλ.

$$\Delta_{h_*(t^{n+\frac12})} w_j^{n+\frac12} = w_{xx}(x_j(t^{n+\frac12}), t^{n+\frac12}) + O(k^2 + h^2). \tag{Δ3.3.4e}$$

Η (Δ3.3.2) είναι άμεση συνέπεια των (Δ3.3.4a)–(Δ3.3.4e) και της (Δ3.1.5). ■

§*Δ3.4 Σύγκλιση.*

Θεώρημα Δ3.4.1. *Έστω ότι ικανοποιούνται οι* $(\mathcal{I})$ *και* (Y_1)–(Y_3)*. Τότε*

$$\max_{0\le n\le N} \|w^n - W^n\|_h \le C(k^2 + h^2). \tag{Δ3.4.1}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $e^n := w^n - W^n$ για $n = 0, \dots, N$. Είναι προφανές ότι $e^n \in \mathbb{C}_0^{J+2}$ για $n = 0, \dots, N$ και $e^0 = 0$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (Δ3.1.3b) και (Δ3.3.1) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\partial e_j^n =& i\alpha\Delta_{h_*(t^{n+\frac12})} e_j^{n+\frac12} + \dot{x}_j(t^{n+\frac12}) \frac{e_{j+1}^{n+\frac12} - e_{j-1}^{n+\frac12}}{2h_*(t^{n+\frac12})} \\
&+ \frac{\dot\ell(t^{n+\frac12})}{2\ell(t^{n+\frac12})} \frac{e_{j+1}^{n+\frac12} + e_{j-1}^{n+\frac12}}{2} \\
&+ i\beta_j^{n+\frac12} e_j^{n+\frac12} + r_j^n, \quad j = 1, \dots, J, \quad n = 0, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{Δ3.4.2}$$

Από την (Δ3.4.2) και την Πρόταση Δ3.2.2 καταλήγουμε στη σχέση

$$\|e^{n+1}\|_h \le \|e^n\|_h + k\|r^n\|_h, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Τότε το Λήμμα Α3.1 δίνει

$$(\Delta 3.4.3) \qquad \|e^n\|_h \le nk \max_{0\le m\le N-1} \|r^m\|_h \le t^* \max_{0\le m\le N-1} \|r^m\|_\infty, \quad n = 0,\dots,N.$$

Η (Δ3.4.1) είναι άμεση συνέπεια των (Δ3.4.3) και (Δ3.3.2). ■

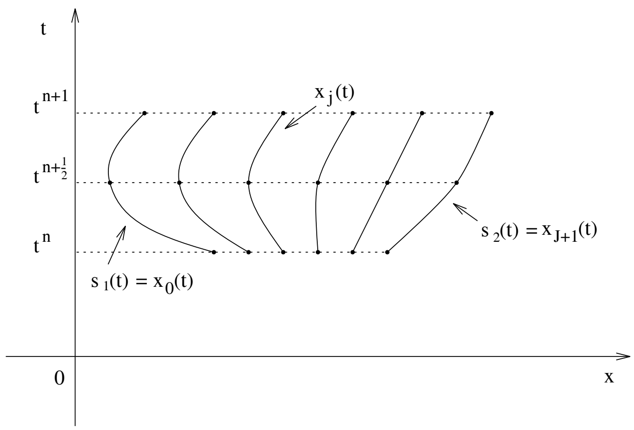
Από την (Δ3.4.1) και την (Δ3.1.2) συνεπάγεται ότι

Πόρισμα Δ3.4.1. *Έστω ότι ικανοποιούνται οι* $(\mathcal{I})$ *και* (Y_1)–(Y_3). *Τότε*

$$\max_{0\le n\le N} \|u^n - U^n\|_{\mathrm{d},I(t^n)} \le C(k^2+h^2). \quad \square$$

§*Δ3.5 Παραδείγματα.*

Παράδειγμα Δ3.5.1. Η πιο απλή επιλογή είναι $\ell_1 = s_1$ και $\ell_2 = s_2$ (βλ. Εικ. Δ1). Τότε οι υποθέσεις που έγιναν στην §Δ1 εξασφαλίζουν την (Δ3.1.1), την ιδιότητα $(\mathcal{I})$ και τις (Y_1)–(Y_3). □



Εικ. Δ1

Παράδειγμα Δ3.5.2. Για $j = 1,2$, συνδέουμε τις τιμές $\{s_j(t^n)\}_{n=0}^N$ με μιά κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση (βλ. Εικ. Δ2), δηλ.

$$\ell_j(t) := \frac{s_j(t^n)(t^{n+1}-t) + s_j(t^{n+1})(t-t^n)}{k}, \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}], \quad n = 0,\dots,N-1.$$

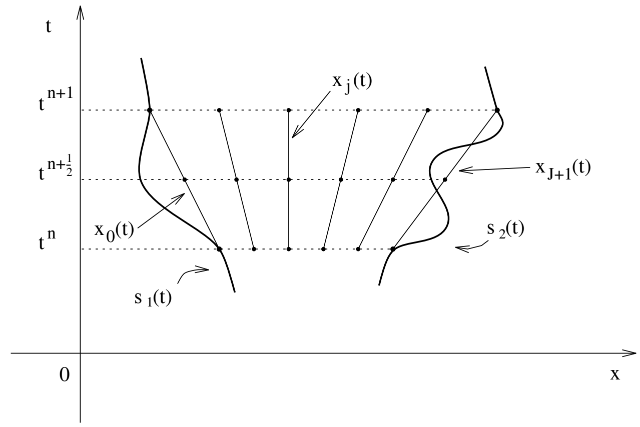
Οι (Δ3.1.1a), (Δ3.1.1c) και (Y_1) ισχύουν προφανώς. Έστω $n \in \{0,\dots,N-1\}$ και $t \in [t^n, t^{n+1}]$. Τότε $t = t^n + \theta k$ για κάποιο $\theta \in [0,1]$, και $\ell(t) = s(t^n)(1-\theta) + s(t^{n+1})\theta$. Επειδή $s > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\ell(t) > \min\{s(t^n), s(t^{n+1})\} \ge \inf_{[0,t^*]} s > 0$. Έτσι ικανοποιούνται οι (Δ3.1.1b), και (Y_3) για $C_{B_2} = \inf_{[0,t^*]} s$. Ακόμα, για $j = 1,2$ έχουμε

$$|\ell_j(t)| \le \max\{|s_j(t^n)|, |s_j(t^{n+1})|\} \le \sup_{[0,t^*]} |s_j|,$$

$$|\dot{\ell}_j(t)| = \frac{1}{k}|s_j(t^n) - s_j(t^{n+1})| \le \sup_{[0,t^*]} |\dot{s}_j|,$$

ενώ $\partial_t^m \ell_j(t) = 0$, $m = 2, 3$. Έτσι η (Y_2) ικανοποιείται για

$$C_{B_1} = \max_{j=1,2} \max\{\sup_{[0,t^*]} |s_j|, \sup_{[0,t^*]} |\dot{s}_j|\}.$$



Εικ. Δ2

Για να εξασφαλίσουμε την ιδιότητα ($\mathcal{I}$), δουλεύουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος Δ3.3.1. Επειδή η ℓ_j παρεμβάλει την s_j στα $\{t^n, t^{n+1}\}$ με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, είναι γνωστό (βλ. π.χ. [Ak3], Θεώρημα 4.3) ότι

$$\sup_{[t^n,t^{n+1}]} |e_j| \le C_\Psi k^2 \sup_{[0,t^*]} |\partial_t^2 s_j|.$$

Έτσι, η ($\mathcal{I}$) ισχύει, όταν

$$\frac{k^2}{h} \le \frac{C_{B_2}}{C_\Psi}. \tag{Δ3.5.1}$$

Το πλεονέκτημα της παραπάνω επιλογής για τα ℓ_1, ℓ_2, έναντι εκείνης του Παραδείγματος Δ3.5.1 είναι ότι δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τις τιμές των συναρτήσεων $\dot{s}_1$, $\dot{s}_2$ κατά την εφαρμογή του σχήματος (Δ3.1.3), ενώ η (Δ3.5.1) δεν είναι τόσο περιοριστική στην πράξη. □

§Δ4. Γενικά σχόλια–Σύνδεση με τη βιβλιογραφία.

Προβλήματα για την εξίσωση του Schrödinger σε μη κυλινδρικό χωρίο εμφανίζονται στην κβαντομηχανική και στην υποβρύχια ακουστική.

Στην κβαντομηχανική (βλ. π.χ. [MuBFF]) το μη κυλινδρικό χωρίο $\mathcal{D}_{t^*}$ αντιστοιχεί σε ένα *χρονομεταβαλόμενο πηγάδι δυναμικού*. Στην υποβρύχια ακουστική, ομογενείς εξισώσεις της μορφής (Δ1.2a) χρησιμοποιούνται ως προσεγγίσεις της εξίσωσης Helmholtz υποθέτοντας αξονική συμμετρία (βλ. [Tp], [LeM]) όπου οι συντελεστές α και β περιγράφονται συναρτήσει των φυσικών παραμέτρων όπως στην εξίσωση (Γ7.2.1). Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή t εκφράζει οριζόντια απόσταση από την πηγή, η μεταβλητή x εκφράζει κάθετη απόσταση από την επιφάνεια της θάλασσας, δηλ. βάθος, ενώ το $\mathcal{D}_{t^*}$ αντιστοιχεί στο θαλάσσιο περιβάλλον. Συνήθως $s_1 = 0$ που αντιστοιχεί στην επιφάνεια της θάλασσας. Ακόμα, η s_2 περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα, ενώ η συνοριακή συνθήκη Dirichlet εκφράζει ότι τόσο η επιφάνεια της θάλασσας όσο και ο πυθμένας είναι ιδανικά ανακλαστικές επιφάνειες (βλ. π.χ. [JF])

Ο Jamet (1980), [Ja], αναλύει ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών, τύπου Crank–Nicolson, για ένα πρόβλημα όπως το (Δ1.2), με την μη ομογενή εξίσωση της θερμότητας

$$u_t = u_{xx} + f,$$

στη θέση της (Δ1.2a). Το σχήμα αυτό προέρχεται από μιά μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για ένα πρόβλημα Stefan (βλ. [BoJ]). Αποδεικνύει βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος $O(k^2 + h^2)$ στην $\|\cdot\|_h$ στάθμη, υποθέτοντας ότι το k είναι αρκετά μικρό και ότι $\frac{k}{h} \leq C$, προκειμένου να εξασφαλίσει την ευστάθεια του σχήματος.

Αργότερα, οι Akrivis & Dougalis (1990), [AvD3], εφαρμόζουν τη μέθοδο του Jamet στο πρόβλημα (Δ1.2), επεκτείνοντάς την κατάλληλα για να διακριτοποιήσουν τον όρο βu. Η ευστάθεια του σχήματος εξασφαλίζεται, και εδώ, όταν το k είναι μικρό και έχει την ίδια τάξη με το h. Ακόμα, αποδεικνύουν βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος $O(k^2 + h^2)$ στη στάθμη $\|\cdot\|_h$.

Η οικογένεια μεθόδων πεπερασμένων διαφορών που κατασκευάστηκε και αναλύθηκε στην §Δ3 έχει το πλεονέκτημα ότι κάθε μέλος της είναι ευσταθές χωρίς συνθήκες στα h και k. Περιορισμοί στα k και h είναι δυνατό να προκύψουν από το αίτημα να ισχύει η $(\mathcal{I})$, δηλ. να εξασφαλιστεί ότι τα σημεία στα οποία προσεγγίζουμε τους όρους της διαφορικής εξίσωσης είναι πράγματι μέσα στο $\overline{\mathcal{D}_{t^*}}$. Σύμφωνα με το Λήμμα Δ3.3.1 μιά συνθήκη της μορφής $\frac{k}{h} \leq C$ είναι ικανή να εξασφαλίσει την ιδιότητα $(\mathcal{I})$. Αν οι συναρτήσεις ℓ_1 και ℓ_2 επιλεγούν όπως στο Παράδειγμα Δ3.5.2, τότε τα σημεία στα οποία προσεγγίζουμε τους όρους της διαφορικής εξίσωσης συμπίπτουν μ' εκείνα των εργασιών [Ja] και [AvD3]. Τότε, η ασθενέστερη συνθήκη $\frac{k^2}{h} \leq C$ εξασφαλίζει την $(\mathcal{I})$. Όταν για τις συναρτήσεις ℓ_1 και ℓ_2 γίνει η επιλογή του Παραδείγματος Δ3.5.1, τότε δεν χρειαζόμαστε καμμία επιπλέον συνθήκη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[Ad] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, Inc., New York, 1975.

[Ag] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.

[Ak1] . . , *:* , , , 1988.

[Ak2] G. D. AKRIVIS, *High–order finite element methods for the Kuramoto–Sivashinsky equation*, RAIRO–M^{2}AN.

[Ak3] . . , *I,* , , 1986.

[AvD1] G. D. AKRIVIS AND V. A. DOUGALIS, *On a class of conservative, highly accurate Galerkin methods for the Schrödinger equation*, RAIRO–M^{2}AN **25** (1991), 643–670.

[AvD2] G. D. AKRIVIS AND V. A. DOUGALIS, *On a conservative finite difference method for the third–order, wide–angle parabolic equation*, : Computational Acoustics: Acoustic Propagation (D. Lee, R. Vichnevetsky and A. R. Robinson, eds.), vol. 2, North–Holland, 1993, pp. 209–220.

[AvD3] G. D. AKRIVIS AND V. A. DOUGALIS, *Finite difference discretization with variable mesh of the Schrödinger equation in a variable domain*, Bulletin of the Greek Mathematical Society **31** (1990), 19–28.

[AvDK1] G. D. AKRIVIS, V. A. DOUGALIS AND N. A. KAMPANIS, *On Galerkin methods for the wide–angle parabolic equation*, Journal of Computational Acoustics **2** (1994), 99–112.

[AvDK2] G. D. AKRIVIS, V. A. DOUGALIS AND N. A. KAMPANIS, *Error estimates for finite element methods for a wide–angle parabolic equation*, Applied Numerical Mathematics **16** (1994), 81-100.

[AvDZ] G. D. AKRIVIS, V. A. DOUGALIS AND G. E. ZOURARIS, *Error estimates for finite difference methods for a wide–angle 'parabolic' equation*, SIAM Journal on Numerical Analysis.

[AwDT] D. N. ARNOLD, J. DOUGLAS AND V. THOMÉE, *Superconvergence of a finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable*, Math. Comp. **27** (1981), 53–63.

[BoJ] R. BONNEROT AND P. JAMET, *A second order finite element method for the one–dimensional Stefan problem*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **8** (1974), 811-820.

[BaH] J. H. BRAMBLE AND S. R. HILBERT, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. **7** (1970), 112–124.

[BCT] P. BRENNER, M. CROUZEIX AND V. THOMÉE, *Single step methods for inhomogeneous linear differential equations in Banach space*, RAIRO–M^{2}AN **16** (1982), 5–26.

[BeS] S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The mathematical theory of finite element methods*, Texts in Applied Mathematics 15, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Boe] A. BROCÉHN, *Galerkin nethods for approximation of solutions of second order partial differential equations of Schrödinger type*, Ph. D. Thesis, University of Göteborg, Sweden, 1980.

[Bok] H. K. BROCK, *The AESD parabolic equation model*, Techical Note 12 (1978), NORDA.

[BuB] K. BURRAGE AND J. C. BUTCHER, *Stability criteria for implicit Runge–Kutta methods*, SIAM J. Numer. Anal. **16** (1979), 46–57.

[Bu1] J. C. BUTCHER, *Implicit Runge–Kutta processes*, Math. Comp. **18** (1964), 50–64.

[Bu2] J. C. BUTCHER, *A stability property of implicit Runge–Kutta methods*, BIT **15** (1975), 358–361.

[Bu3] J. C. BUTCHER, *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge–Kutta and general linear methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.

[CaS] R. W. CARROLL AND R. E. SHOWALTER, *Singular and degenerate Cauchy problems*, Academic Press, Inc., New York, 1976.

[Ci] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[CiR] P. G. CIARLET AND P. A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 177–199.

[Cl1] J. F. CLAERBOUT, *Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with applications to delination of complicated seismic structure*, Geophysics **35** (1970), 407–418.

[Cl2] J. F. CLAERBOUT, *Foundamentals of geophysical data processing, with applications to petroleum prospecting*, McGraw–Hill, New York, 1976.

[CodL] E. A. CODDINGTON AND N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw–Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

[ColC] M. D. COLLINS AND S. A. CHIN–BING, *Three–dimensional sound propagation in shallow water including the effects of rough surfaces*, : Computational Acoustics: Seismo–Ocean Acoustics and Modeling (D. Lee, A. Cakmak and R. Vichnevetsky, eds.), vol. 3, North–Holland, 1990, pp. 247–259.

[Cor] C. CORDUNEANU, *Principles of differential and integral equations*, second edition, Chelsea Publishing Company, The Bronx, New York, 1977.

[Cr1] M. CROUZEIX, *Sur l'approximation des équations differentielles opérationelles linéaires par des méthodes de Runge–Kutta*, Thése d'État, Université Paris VI, France, 1975.

[Cr2] M. CROUZEIX, *Sur la B–stabilité des méthodes de Runge–Kutta*, Numer. Math. **32** (1979), 75–82.

[DaWC] A. DAVIS, D. WHITE AND R. C. CANAVAGH (eds.), *NORDA Parabolic Equation Workshop 1981*, Technical Note 143 (1982), NORDA.

[DekV] K. DEKKER AND J. G. VERWER, *Stability of Runge–Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*, CWI Monograph 2, North Holland, Amsterdam, 1984.

[Deu] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of mondern analysis*, Academic Press, Inc., New York, 1969.

[Dg] . . , , , , 1987.

[DlDW] J. DOUGLAS, T. DUPONT AND L. WAHLBIN, *Optimal L_∞ error estimates for Galerkin approximations to solutions of two–point boundary value problems*, Math. Comp. **29** (1975), 475–483.

[EvG] L. C. EVANS AND R. F. GARIEPY, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1992.

[Ew1] R. E. EWING, *Numerical solution of Sobolev partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. **12** (1975), 345–363.

[Ew2] R. E. EWING, *Time–stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), 1125–1150.

[For] W. H. FORD, *Galerkin approximations to non–linear pseudo–parabolic partial differential equations*, Aequationes Math. **14** (1976), 271–291.

[ForT1] W. H. FORD AND T. W. TING, *Stability and convergence of difference approximations to pseudo–parabolic partial differential equations*, Math. Comp. **27** (1973), 737–743.

[ForT2] W. H. FORD AND T. W. TING, *Uniform error estimates for difference approximations to nonlinear pseudo–parabolic partial differential equations*, SIAM. J. Numer. Anal. **11** (1974), 155–169.

[Foc] V. A. FOCK, *Electromagnetic diffraction and propagation problems*, Pergamon Press Ltd., London, 1965.

[Gal] С. А. ГАЛЬПЕРН, *Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными*, Доклады Академии Наук СССР 1958. Том **119**, № 4, 640.

[Gal] S. A. GALPERN, *Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations*, , Dokl. Akad. Nauk SSSR **119** (1958), 640–643.

[GiR] V. GIRAULT AND P. A. RAVIART, *Finite element approximation of the Navier–Stokes equations*, Lecture Notes in Mathematics 749, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1979.

[GiT] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, second edition, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

[Gre] R. R. GREENE, *The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction*, J. Acoust. Soc. Amer. **76** (1984), 1764–1773.

[HaNW] E. HAIRER, S. P. NØRSETT AND G. WANNER, *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems*, SCM 8, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

[HaW] E. HAIRER AND G. WANNER, *Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential–algebraic problems*, SCM 14, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[HuT] M. HUANG AND V. THOMÉE, *Some convergence estimates for semidiscrete type schemes for time–dependent nonselfadjoint parabolic equations*, Math. Comp. **37** (1981), 327–346.

[Ja] P. JAMET, *Stability and convergence of a generalized Crank–Nicolson scheme on a variable mesh for the heat equation*, SIAM J. Numer. Anal. **17** (1980), 530–539.

[JK] F. B. JENSEN AND H. KROL, *The use of the parabolic equation method in sound propagation modelling*, SACLANTCEN Memorandum (1975), no. 72, SACLANTCEN.

[JF] F. B. JENSEN AND C. M. FERLA, *Numerical solutions of range–dependent benchmark problems in ocean acoustics*, J. Acoust. Soc. Am. **87** (1990), 1499–1510.

[Ka] O. A. KARAKASHIAN, *On Runge–Kutta methods for parabolic problems with time–dependent coefficients*, Math. Comp. **47** (1986), 77–101.

[KAD] O. KARAKASHIAN, G. D. AKRIVIS AND V. A. DOUGALIS, *On optimal order error estimates for the nonlinear Schrödinger equation*, SIAM J. Numer. Anal. **30** (1993), 377–400.

[KaMc] O. A. KARAKASHIAN AND W. McKINNEY, *On optimal high order in time approximations for the Korteweg–de Vries equation*, Math. Comp. **55** (1990), 473–496.

[KnLS] G. H. KNIGHTLY, D. LEE AND D. F. St. MARY, *A higher–order parabolic wave equation*, J. Acoust. Soc. Am. **82** (1987), 580–587.

[KoE] A. G. KOSTACHENKO AND G. I. ESKIN, *Cauchy problem for Sobolev–Galpern equations*, , Trudy Moscow Mat. Obshch. **10** (1961), 273–284.

[Lad] O. A. LADYZHENSKAYA, *The boundary value problems of mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences 49, Springer–Verlag, New York, 1985.

[Lag] J. E. LAGNESE, *General boundary value problems for differential equations of Sobolev type*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), 105–119.

[LaM] P. D. LAX AND A. N. MILGRAM, *Parabolic equations*, Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. Math. Studies no. 33 (1954), Princeton University Press, 167–190.

[Le] D. LEE, *The state–of–the–art parabolic equation approximation as applied to underwater acoustic propagation with discussions on intensive computations*, Technical Document 7247 (1984), NUSC.

[LeM] D. LEE AND S. T. McDANIEL, *Ocean acoustic propagation by finite difference methods*, Comp. and Maths with Appls. **14** (1987), 305–423.

[LeSS] D. LEE, Y. SAAD AND M. H. SCHULTZ, *An efficient method for solving the three–dimensional wide angle wave equation*, : Computational Acoustics: Wave Propagation (D. Lee, R. L. Sternberg and M. H. Schultz, eds.), vol. 1, North–Holland, 1988, pp. 75–89.

[Li] Y. LIN, *Galerkin methods for nonlinear Sobolev equations*, Aequationes Mathematicae **40** (1990), 54–66.

[LnTW] Y. LIN, V. THOMÉE AND L. B. WAHLBIN, *Ritz-Volterra projections to finite–element spaces and applications to integrodifferential and related equations*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 1047–1070.

[LoM] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, vol. 2, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.

[LuO] C. LUBICH AND A. OSTERMANN, *Runge–Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature*, Math. Comp. **60** (1993), 105–131.

[Mk] V. P. MIKHAILOV, *Partial differential equations*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[MuBFF] A. MUNIER, J. R. BURGAN, M. FEIX AND E. FIJALKOW, *Schrödinger equation with time–dependent boundary conditions*, J. Math. Phys. **22** (1981), 1219–1223.

[Nak] M. T. NAKAO, *Error estimates of a Galerkin method for some nonlinear Sobolev equations in one space dimension*, Numer. Math. **47** (1985), 139–157.

[OsR] A. OSTERMANN AND M. ROCHE, *Runge–Kutta methods for partial differential equations and fractional orders of convergenece*, Math. Comp. **59** (1992), 403–420.

[Prok] Л. Н. ПРОКОПЕНКО, *Задача Коши для уравнения типа С. Л. Соболева*, Доклады Академии Наук СССР 1958. Том **122**, № 6, 990.

[Prok] L. N. PROKOPENKO, *Cauchy problem for equations of S. L. Sobolev type*, , Dokl. Akad. Nauk SSSR **122** (1958), 990–993.

[RavT] P. A. RAVIART AND J. M. THOMAS, *Introduction à l' analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1988.

[Ru] W. RUNDELL, *The solution of initial–boundary value problems for pseudoparabolic partial differential equations*, Proceedings of the Royal Society of Endiburgh A **74** (1974/75), 311–326.

[Sa] P. H. SAMMON, *Convergence estimates for semidiscrete parabolic equation approximations*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 68–92.

[Sch] A. H. SCHATZ, *An observation concerning Ritz–Galerkin methods with indefinite bilinear forms*, Math. Comp. **28** (1974), 959–962.

[Sh] R. E. SHOWALTER, *Partial differential equations of Sobolev–Galpern type*, Pacific Journal of Mathematics **31** (1969), 787–793.

[SiKL] W. L. SIEGMANN, G. A. KRIEGSMANN AND D. LEE, *A wide–angle three–dimensional parabolic wave equation*, J. Acoust. Soc. Am. **78** (1985), 659–664.

[Sob] С. Л. СОБОЛЕВ, *Об одной новой задаче математической физики*, Известия Академии Наук СССР, Серия математическая **18** (1954), 3–50.

[Sob] S. L. SOBOLEV, *On a new problem in mathematical physics*, , Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **18** (1954), 3–50.

[St1] D. F. St. MARY, *Analysis of an implicit finite–difference scheme for a third–order partial differential equation in three dimensions*, Comp. & Maths. with Appls. **11** (1985), 873–885.

[St2] D. F. St. MARY, *Analysis of an implicit finite difference scheme for very wide angle underwater acoustic propagation*, Proceedings 11th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation, vol. 2, 1985, pp. 153–156.

[StL] D. F. St. MARY AND D. LEE, *Analysis of an implicit finite difference solution to an underwater wave propagation problem*, J. Comp. Phys. **57** (1985), 378–390.

[StLB] D. F. St. MARY, D. LEE AND G. BOTSEAS, *A modified wide angle parabolic wave equation*, J. Comp. Phys. **71** (1987), 304–315.

[Tp] F. D. TAPPERT, *The parabolic approximation method*, : Wave Propagation and Underwater Acoustics (J. B. Keller and J. S. Papadakis, eds.), Lecture Notes in Physics 70, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977, pp. 224–287.

[Th] V. THOMÉE, *Galerkin finite–element methods for parabolic problems*, Lecture Notes in Mathematics 1054, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

[Wah] L. WAHLBIN, *Error estimates for a Galerkin method for a class of model equations for long waves*, Numer. Math. **23** (1975), 289–303.

[Wh] M. F. WHEELER, *An optimal L_∞ error estimate for Galerkin approximations to solutions of two–point boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 914–917.

[Wl] J. WLOKA, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, Inc., Cambridge, 1987.

[Ze] T. I. ZELENJAK, *A problem of S. L. Sobolev*, Soviet Math. Doklady **3** (1962), 1765–1759.

[Z] G. E. ZOURARIS, *Runge–Kutta/standard Galerkin approximations for the* 3D *parabolic equation*, 2nd Hellenic–European Conference on Mathematics and Informatics, Athens, 22–24 September 1994.