Τίτλος

Διδακτορική Διατριβή

Χρήστος Σαρόγλου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επιβλέπουσα καθηγήτρια : Σουζάννα Παπαδοπούλου

Σεπτέμβριος 2010

tittle

P.h.d. Thesis

Christos Saroglou

Department of Mathematics
University of Crete

Supervisor : Souzanna Papadopoulou

September 2010

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή ασχολούμαστε κυρίως με τα εξής αντικείμενα:

I. Συναρτησοειδή τύπου Sylvester

Διερευνούμε τις περιπτώσεις ισότητας σε ανισότητες που αφορούν σε συναρτησοειδή τύπου Sylvester. Συγκεκριμμένα, οι Campi, Colesanti και Gronchi έδειξαν ότι η ποσότητα

$$\int_{x_0\in K} ... \int_{x_n\in K} h(V(conv\{x_0,...,x_n\}))dx_0...dx_n \ , \ n\geq d, \quad p\geq 1$$

μεγιστοποιείται στα τρίγωνα, μεταξύ όλων των επίπεδων κυρτών σωμάτων K (παραλληλόγραμμα στην κεντρικά συμμετρική περίπτωση), όπου h είναι μία κυρτή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Δείχνουμε ότι αυτά είναι τα μόνα ακραία σώματα, γεγονός που είχε αποδειχθεί από τον Γιαννόπουλο για $h=id$.

Επιπλέον, αν $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ είναι οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα συνάρτηση και W_j είναι το j-στό quermassintegral στον $\mathbb{R}^d$, αποδεικνύουμε ότι το συναρτησοειδές

$$\int_{x_0\in K_0} ... \int_{x_n\in K_n} h(W_j(conv\{x_0,...,x_n\}))dx_0...dx_n \ , \ n\geq d$$

ελαχιστοποιείται μεταξύ όλων των $(n+1)$-άδων κυρτών σωμάτων $K_0,...,K_n$, δεδομένων όγκων, αν και μόνο αν τα $K_0,...,K_n$ είναι ομοιόθετα ελλειψοειδή, για $j=0$ (επεκτείνοντας ένα αποτέλεσμα του Groemer) και ευκλείδιες μπάλες ίδιου κέντρου, για $j>0$ (επεκτείνοντας ένα αποτέλεσμα των Χαρτζουλάκη και Παούρη). Ανάλογα αποτελέσματα αποδεικνύονται και για άλλα συναρτησοειδή αυτού του τύπου.

II. Όγκοι σωμάτων προβολών

Ο Schneider έθεσε το πρόβλημα του προσδιορισμού της μέγιστης τιμής του αφφινικού αναλλοίωτου $|\Pi K|/|K|^{d-1}$, όπου ΠK είναι το σώμα προβολών του d-διάστατου κυρτού σώματος K και έχει ως συνάρτηση στήριξης:

$$h_{\Pi K}(x)=\int_K |<x,y>|dS_K(y) \ , \ x\in\mathbb{R}^d \ .$$

Επιβεβαιώνουμε κάποιες 3-διάστατες εικασίες του Brannen, που σχετίζονται με το πρόβλημα του Schneider. Συγκεκριμμένα, προσδιορίζουμε τη μέγιστη τιμή του $|\Pi K|/|K|^2$ στην κλάση των 3-διάστατων ζωνοειδών, κώνων και διπλών κώνων. Διερευνόνται επίσης οι περιπτώσεις ισότητας.

Η εικασία του Petty λέει ότι το $|\Pi K|/|K|^{d-1}$ είναι ελάχιστο αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές. Αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα που συνδέονται με την αυτή την εικασία. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε ότι η απάντηση είναι αρνητική σε ένα ερώτημα των Martini και Mustafaev, αν δηλαδή ο όγκος του ΠK φθίνει από τη Steiner-συμμετρικοποίηση. Επιπλέον, αναφέρονται κλάσεις κυρτών σωμάτων για τα οποία ισχύει $|\Pi K|/|K|^2 > |\Pi E|/|E|^2$, όπου E είναι ελλειψοειδές, ενισχύοντας την πεποίθηση ότι η εικασία του Petty είναι σωστή. Τέλος, αποδεικνύονται κάποιες αφφινικές ισοπεριμετρικές ανισότητες που συνδέονται τυπικά με την εικασία του Petty.

III. Η θέση ελάχιστης επιφάνειας και η M-θέση

Ο Milman έδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 υπάρχει γραμμική εικόνα TK ίδιου όγκου, με την ιδιότητα:

$$V(TK + B_1^d)^{1/d} \leq c \ .$$

Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το TK είναι σε M-θέση. Οι Γιαννόπουλος και Milman έθεσαν το ερώτημα αν κάθε κυρτό σώμα σε θέση ελάχιστης επιφάνειας (δηλ. η επιφάνειά του είναι ελάχιστη μεταξύ όλων των ίδιου όγκου γραμμικών εικόνων του) είναι ταυτόχρονα σε M-θέση. Αποδεικνύουμε ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική.

Abstract

In this p.h.d. thesis we mostly deal with the following objects:

I. Sylvester-type functionals

We investigate equality cases in inequalities for Sylvester-type functionals. Namely, it was proven by Campi, Colesanti and Gronchi that the quantity

$$\int_{x_0 \in K} \dots \int_{x_n \in K} h(V(conv\{x_0, ..., x_n\}))dx_0...dx_n \ , \ n \geq d, \quad p \geq 1$$

is maximized by triangles among all planar convex bodies K (parallelograms in the symmetric case), where h is a convex strictly increasing function. We show that these are the only maximizers, a fact proven by Giannopoulos for $h = id$.

Moreover, if $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is any strictly increasing function and W_j is the j-th quermassintegral in $\mathbb{R}^d$, we prove that the functional

$$\int_{x_0 \in K_0} \dots \int_{x_n \in K_n} h(W_j(conv\{x_0, ..., x_n\}))dx_0...dx_n \ , \ n \geq d$$

is minimized among the $(n+1)$-tuples of convex bodies of fixed volumes if and only if $K_0, ..., K_n$ are homothetic ellipsoids when $j = 0$ (extending a result of Groemer) and Euclidean balls with the same center when $j > 0$ (extending a result of Hartzoulaki and Paouris). Similar results are also obtained for other functionals of the same type.

II. Volumes of projection bodies

Schneider posed the problem of determining the maximal value of the affine invariant $|\Pi K|/|K|^{d-1}$, where ΠK is the projection body of the d-dimensional convex body K, with support function:

$$h_{\Pi K}(x) = \int_K | < x, y > | dS_K(y) \ , \ x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Some three-dimensional conjectures of Brannen, related to Schneider's problem are confirmed. Namely, we determine the maximal value of $|\Pi K|/|K|^2$ in the class of three-dimensional zonoids, cones and double cones. Equality cases are also investigated.

Petty's conjecture states that $|\Pi K|/|K|^{d-1}$ is minimal if and only if K is an ellipsoid. Some results related to the conjecture of Petty are obtained. In particular, we provide a negative answer to a question of Martini and Mustafaev, asking if the volume of ΠK is decreasing under Steiner-symmetrization.

Moreover, classes of convex bodies for which $|\Pi K|/|K|^2 > |\Pi E|/|E|^2$, where E is an ellipsoid are obtained, providing evidence for the correctness of the conjecture of Petty. Finally, we establish some affine isoperimetric inequalities, formally related to Petty's conjecture.

III. The minimal surface position and the M-position

Milman showed that there exists an absolute constant $c > 0$, such that for each convex K body of volume 1 there exists a linear image TK of the same volume, with the property

$$V(TK + B_1^d)^{1/d} \leq c \ .$$

In that case, we say that TK is in M-position. Giannopoulos and Milman asked if every convex body in minimal surface area position (i.e. its surface area is minimal among its affine images of the same volume) is also in M-position. We prove that the answer to this question is negative.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Συναρτησοειδή τύπου Sylvester

Σε αυτή την εργασία, ο όγκος (δηλ. μέτρο Lebesque) σε έναν d-διάστατο διανυσματικό χώρο θα συμβολίζεται με $V_d(\cdot)$. Αν δεν υπάρχει περίπτωση παρανόησης, ο δείκτης θα παραλείπεται και θα γράφουμε απλώς $V(\cdot)$.

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $n \geq d$ κάποιος ακέραιος. Θέτουμε

$$S_h(K, n; d) := \int_{x_0 \in K} \ldots \int_{x_n \in K} h[V(conv\{x_0, ..., x_n\})] dx_0 ... dx_n \ , \tag{1.1}$$

όπου $conv\{x_0, ..., x_n\}$ είναι η κυρτή θήκη των σημείων $x_0, ..., x_n$. Στην περίπτωση, κατα την οποία $h(t) = t^p$, $p \geq 1$, και το K είναι όγκου 1, αυτός ο ορισμός ταυτίζεται με τον ορισμό του συναρτησοειδούς Sylvester.

Ένα κλασσικό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός εκείνων των κυρτών σωμάτων δεδομένου όγκου, για τα οποία το $S_h(K, n; d)$ επιτυγχάνει τις ακραίες τιμές του. Αναφερόμαστε στο [40] για μία πλήρη ιστορική αναδρομή πάνω σε αυτό το πρόβλημα.

Ο Blaschke [1] απέδειξε ότι αν $d = n = 2$ και h είναι η ταυτοτική, τότε το $S_h(K, n; d)$ είναι ελάχιστο αν και μόνο αν το K είναι έλλειψη. Ο Groemer [20] [21] απέδειξε ότι για κάθε n και d τα ελλειψοειδή είναι τα μόνα σώματα που ελαχιστοποιούν το $S_h(K, n; d)$, όταν επιπροσθέτως η h είναι κυρτή. Ο Schöpf [47] γενίκευσε το αποτέλεσμα του Groemer για κάθε γνησίως αύξουσα h, με την προϋπόθεση όμως ότι $n = d$ και οι Γιαννόπουλος και Τσολομύτης [19] απέδειξαν ότι τα ελλειψοειδή είναι όντως ελαχιστοποιητές στην γενική περίπτωση.

Ένα συναρτησοειδές συναφές με αυτό του Sylvester είναι αυτό του Busemann [9] (στην πραγματικότητα μία φυσιολογική γενίκευση):

$$B_h(K,n;d) := \int_{x_1\in K} ... \int_{x_n\in K} h[V(conv\{0,x_1,...,x_n\})]dx_1...dx_n \ . \tag{1.2}$$

Και πάλι όταν η h είναι κυρτή, το $B_h(K,n;d)$ είναι ελάχιστο μεταξύ όλων των κυρτών σωμάτων όγκου 1 αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Στην πραγματικότητα, ο Busemann [9] απέδειξε μία ανισότητα που παρέχει ακόμη περισσότερες πληροφορίες. Αν $K_1,...,K_d$ είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$, θέτουμε

$$B(K_1,...,K_d) := \int_{x_1\in K_1} ... \int_{x_d\in K_d} V(conv\{0,x_1,...,x_d\})dx_1...dx_d \ .$$

Τότε,

$$B(K_1,...,K_d) \geq B(B_1,...,B_d) \ , \tag{1.3}$$

όπου B_i είναι μπάλες κέντρου 0 και όγκου $V(B_i) = V(K_i)$, $i = 1,...,d$. Εδώ ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν K_i είναι ομοιόθετα ελλειψοειδή με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Οι Bourgain, Milman, Meyer και Pajor [4] εισήγαγαν μία άλλη παραλλαγή του $S_h(K,n;d)$: Αν $K_1,...,K_n$ είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$$I_h(K_1,...,K_n;d) := \int_{x_1\in K_1} ... \int_{x_n\in K_n} h[V(\sum_{i=1}^n [0,x_i])]dx_1...dx_n \ , \tag{1.4}$$

όπου με $\sum_{i=1}^n [0,x_i]$ συμβολίζουμε το άθροισμα Minkowski των ευθυγράμμων τμημάτων $[0,x_i]$, $i = 1,...,n$. Ας σημειωθεί ότι

$$V(\sum_{i=1}^d [0,x_i]) = d!V(conv\{0,x_1,...,x_d\}).$$

Εδώ ισχύει μία ανισότητα παρόμοια με την (1.3):

$$I_h(K_1,...,K_n;d) \geq I_h(B_1,...,B_n;d) \ , \tag{1.5}$$

όπου τα B_i είναι όπως στην (1.3).

Ορμώμενοι από τις (1.3) και (1.5), μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες εκδοχές των (1.1) και (1.2):

$$S_h(K_0,...,K_n;d) := \int_{x_0\in K_0} ... \int_{x_n\in K_n} h[V(conv\{x_0,...,x_n\})]dx_0...dx_n \tag{1.6}$$

$$B_h(K_1,...,K_n;d) := \int_{x_1\in K_1} ... \int_{x_n\in K_n} h[V(conv\{0,x_1,...,x_n\})]dx_0...dx_n \tag{1.7}$$

Μιμούμενοι το επιχείρημα στο [4] δεν είναι πολύ δύσκολο να παράγουμε ανισότητες ανάλογες της (1.5). Ο σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε τις περιπτώσεις ισότητας σε ανισότητες αυτού του τύπου.

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.1.1 *Αν $K_0,...,K_n$ είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$, τότε*

$$D_h(K_0,...,K_n;d) \geq D_h(B_0,...,B_n;d)\ , \tag{1.8}$$

όπου $D = S$, B ή I και B_i είναι μπάλες όγκου $V(B_i) = V(K_i)$ κέντρου 0, $i = 0,...,n$. Επιπλέον, όταν $D = S$ (αντ. $D = B$ ή I), η ισότητα ισχύει στην (1.8) αν και μόνο αν $K_0,...,K_n$ είναι ελλειψοειδή με το ίδιο κέντρο (αντ. με κέντρο την αρχή των αξόνων), ομοιόθετα το ένα στο άλλο. Κατά σύμβαση, θέτουμε $K_0 = \{0\}$, στην περίπτωση κατά την οποία $D = B$ ή I.

Διαπιστώνεται εύκολα ότι τα συναρτησοειδή που ορίζονται από την (1.6) (αντ. (1.7), (1.4)) είναι αναλλοίωτα από μετασχηματισμούς της μορφής $(\Phi,...,\Phi)$, όπου $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι αφφινική (αντ. γραμμική) απεικόνιση που διατηρεί τον όγκο. Άρα, από τη στιγμή που κάποιος έχει αποδείξει την (1.8), το γεγονός ότι η ισότητα ισχύει για ομοιόθετα ελλειψοειδή ίδιου κέντρου είναι άμεσο.

Μία γενίκευση του $S_h(K,n;d)$ όρισαν οι Χαρτζουλάκη και Παούρης [22], αντικαθιστώντας τον όγκο του τυχαίου πολυτόπου με το j-στό του quermass-integral (βλέπε Παράρτημα), $j = 0,1,...,n-1$. Στο ίδιο πνεύμα όπως στις (1.7), (1.4), (1.6), θέτουμε:

$$S_h(K_0,...,K_n;d;j) := \int_{x_0\in K_0} ... \int_{x_n\in K_n} h(W_j(conv\{x_0,...,x_n\}))dx_0...dx_n\ ,$$

$$B_h(K_1,...,K_n;d;j) := \int_{x_1\in K_1} ... \int_{x_n\in K_n} h(W_j(conv\{0,x_1,...,x_n\}))dx_1...dx_n\ ,$$

$$I_h(K_1,...,K_n;d;j) := \int_{x_1\in K_1} ... \int_{x_n\in K_n} h(W_j(\sum_{i=1}^{n}[0,x_i]))dx_1...dx_n\ .$$

Οι ίδιοι συγγραφείς απέδειξαν ότι το $S_h(K,...,K;d;j)$ είναι ελάχιστο όταν το K είναι μπάλα, ενώ αν η h είναι κυρτή, οι μπάλες είναι τα μόνα σώματα που ελαχιστοποιούν το $S_h(K,...,K;d;j)$. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι $W_0(\cdot) = V(\cdot)$, οπότε το $D_h(K_0,...,K_n;d;0)$ ταυτίζεται με το $D_h(K_0,...,K_n;d)$, $D = S$, B ή I.

Αποδεικνύουμε το εξής ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.1.

Θεώρημα 1.1.2 *Ισχύει η εξής ανισότητα:*

$$D_h(K_0,...,K_n;d;j) \geq D_h(B_0,...,B_n;d;j)\ ,\ j=1,...,d-1\ , \tag{1.9}$$

όπου $D=S$, B *ή* I *και* B_i *είναι μπάλες όγκου* $V(B_i)=V(K_i)$ *με το ίδιο κέντρο όταν* $D=S$ *(αντ. κέντρου* 0 *όταν* $D=B$ *ή* I*). Αν για κάποιο* j *ισχύει η ισότητα στην (1.9), τότε* $K_i=B_i,\ i=0,...,n$.

Η ουσιαστική καινοτομία των Θεωρημάτων 1.1.1 και 1.1.2 σε σχέση με τα ήδη γνωστά αποτελέσματα είναι ότι δεν απαιτούμε από την h να είναι απαραιτήτως κυρτή, σε ότι αφορά στο μονοσήμαντο. Η ομοιότητα των συναρτησοειδών S, B, I μας επιτρέπει να χειριστούμε και τις τρεις περιπτώσεις ταυτόχρονα. Οι ανισότητες για τα Θεωρήματα 1.1.1 και 1.1.2 θα αποδειχτούν στην Παράγραφο 2.3. Αποδείξεις που αφορούν στο μονοσήμαντο (που είναι και τα κύρια αποτελέσματα για τα Θεωρήματα 1.1.1 και 1.1.2) θα δωθούν στις Παραγράφους 2.4 και 2.5 αντιστοίχως.

Ελέγχεται εύκολα ότι τα συναρτησοειδή που ορίζονται από τις (1.4), (1.6) και (1.7) δεν είναι φραγμένα. Εντούτοις, η ' αρχική ' εκδοχή του πρώτου, $S_h(K,n;d)$, είναι αναλλοίωτο από αφφινικές απεικονίσεις που διατηρούν τον όγκο. Ομοίως, τα $B_h(K,n;d)$, $I_h(K,n;d) := I_h(K,...,K;d)$, είναι αναλλοίωτα από γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο. Επομένως, και αφού για κάθε ακολουθία κυρτών σωμάτων υπάρχουν αφφινικές εικόνες ίδιου όγκου, που περιέχονται σε μία συγκεκριμμένη μπάλα και περιέχουν μία συγκεκριμμένη μπάλα (γεγονός που προκύπτει π.χ. από ένα κλασσικό θεώρημα του F. John), ένα επιχείρημα συμπάγειας εξασφαλίζει την ύπαρξη μέγιστης τιμής στην κλάση όλων των κυρτών σωμάτων όγκου 1 για το $S_h(K,n;d)$. Ομοίως, προκύπτει η ύπαρξη μεγίστου μεταξύ όλων των κυρτών σωμάτων όγκου 1, που περιέχουν το 0 για τα $B_h(K,n;d)$ και $I_h(K,n;d)$.

Για κάθε ένα από αυτά τα συναρτησοειδή, το πρόβλημα του προσδιορισμού των σωμάτων που τα μεγιστοποιούν παραμένει ανοιχτό για $d \geq 3$. Παρόλαυτά, έχει λυθεί στο επίπεδο σε πολύ μεγάλο βαθμό. Συγκεκριμμένα, οι Δάλλα και Larman [14] απέδειξαν ότι το $S_h(K,n;2)$ μεγιστοποιείται στα τρίγωνα, όταν η h είναι η ταυτοτική. Ο Γιαννόπουλος [17] έδειξε ότι τα τρίγωνα είναι τα μόνα επίπεδα σώματα που το μεγιστοποιούν. Οι Campi, Colesanti και Gronchi έδειξαν στα [10], [11] ότι αν $h(t)=t^p,\ p\geq 1$, το $S_h(K,n;2)$ μεγιστοποιείται από τα τρίγωνα (παραλληλόγραμμα στην κεντρικά συμμετρική περίπτωση) και το $I_h(K,n;2)$ μεγιστοποιείται από τα τρίγωνα με μία κορυφή στο 0 (αντ. παραλληλόγραμμα με κέντρο την αρχή των αξόνων). Επιπλέον, αυτά είναι τα μόνα πολύγωνα με αυτές τις ιδότητες. Τα ίδια αποτελέσματα μπορεί να δείξει κάποιος και για το $B_h(K,n;2)$. Σημείωνουμε, επίσης, όπως θα φανεί και στην Παράγραφο 2.1, ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την t^p με οποιαδήποτε κυρτή h. Η ίδια προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη διαφόρων προβλημάτων βελτιστοποίησης (βλέπε Παράγραφο 2.2).

Το κλειδί για την απόδειξη είναι η αυστηρή κυρτότητα των εν λόγω συναρτησοειδών ως προς μία οικογένεια μετασχηματισμών κυρτών σωμάτων, τις λεγόμενες παράλληλες χορδικές κινήσεις (parallel chord movements). Στην Παράγραφο 2.2 δίνουμε έναν χαρακτηρισμό (Θεώρημα 2.2.1) των τριγώνων και των παραλληλογράμμων ως ακραίων σωμάτων για τα προαναφερθέντα συναρτησοειδή.

1.2 Σώματα Προβολών

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$, που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Η συνάρτηση στήριξης (support function) του K δίνεται από τον τύπο:

$$h_K(x) = max\{ < x, y > \ | \ y \in K \ \} \ , \ x \in \mathbb{R}^d \ ,$$

όπου $< \cdot, \cdot >$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$. Προφανώς, η h_K είναι κυρτή και θετικά ομογενής. Από την άλλη, είναι γνωστό ότι κάθε κυρτή και θετικά ομογενής συνάρτηση είναι η συνάρτηση στήριξης ενός μοναδικού κυρτού συνόλου. Επιπλέον, οι συναρτήσεις στήριξης είναι προσθετικές ως προς τα αθροίσματα Minkowski (δηλ. διανυσματικά αθροίσματα). Πιο συγκεκριμμένα, αν L είναι ένα άλλο κυρτό σώμα, τότε $h_{K+L} = h_k + h_L$.

Η συνάρτηση στήριξης ενός ευθύγραμμου τμήματος $[-y, y]$ με κέντρο το 0 μπορεί εύκολα να υπολογιστεί:

$$h_{[-y,y]}(x) = | < x, y > | \ , \ x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Άρα, αν Z είναι το άθροισμα Minkowski των ευθύγραμμων τμημάτων $[-y_i, y_i]$, $i = 1, ..., n$,

$$h_Z(x) = \sum_{i=1}^{n} | < x, y_i > | \ , \ x \in \mathbb{R}^d \ .$$

Παράλληλες μεταφορές τέτοιων σωμάτων ονομάζονται ζωνότοπα και τα σώματα που ανήκουν στην κλειστότητα του συνόλου όλων των ζωνοτόπων ως προς την Hausdorff μετρική, ονομάζονται ζωνοειδή.

Το σώμα προβολών (projection body) ΠK του K ορίζεται από την συνάρτηση στήριξης αυτού:

$$h_{\Pi K}(x) = V(K \mid x^{\perp}) = \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} | < x, y > | \ dS_K(y) \ , \ x \in S^{d-1} \ ,$$

όπου $V(\cdot) = V(\cdot)_d$ τον όγκο στον $\mathbb{R}^d$, $K \mid x^{\perp}$ είναι η προβολή του K στον υπόχωρο $x^{\perp}$, ορθογώνιο στο x και $dS_K(\cdot)$ είναι το επιφανειακό μέτρο του K

(βλέπε Παράρτημα), στην μοναδιαία σφαίρα S^{d-1}. Το τελευταίο μέρος της προηγούμενης ισότητας είναι ο τύπος του Cauchy.

Προφανώς, το σώμα προβολών ενός κυρτού σώματος είναι πάντα ζωνοειδές. Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε ζωνοειδές είναι το σώμα προβολών ενός κυρτού σώματος. Για την ακρίβεια, ο τελεστής Π είναι μία συνεχής και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από την κλάση των κεντρικά συμμετρικών κυρτών σωμάτων στην κλάση των ζωνοειδών. Αναφερόμαστε στο [16] ή στο [46] για αποδείξεις, γενικεύσεις και θέματα που σχετίζονται με τις συναρτήσεις στήριξης και σώματα προβολών.

Ένα από τα κεντρικά προβλήματα στην Κυρτή Γεωμετρία είναι ο προσδιορισμός των ακραίων τιμών του αφφινικού αναλλοίωτου $V(\Pi K)/V(K)^{d-1}$ (μία απόδειξη του γεγονότος ότι το εν λόγω συναρτησοειδές είναι όντως αναλλοίωτο από αφφινικούς μετασχηματισμούς υπάρχει στο [38]). Αρκετές παραλλαγές του προβλήματος έχουν λυθεί. Για παράδειγμα, ο Petty [39] έδειξε ότι η ποσότητα $V((\Pi K)^*) \cdot V(K)^{d-1}$ είναι μέγιστη, αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές και ο Zhang [51] έδειξε ότι λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του, αν και μόνο αν το K είναι simplex. Εδώ, αν A είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα,

$$A^* = \{y| < x, y > \leq 1, \ x \in A\}$$

είναι το πολικό σώμα του A. Άλλες τροποποιήσεις του προβλήματος μελετήθηκαν από τον Lutwak (βλέπε π.χ. [27], [29]). Δυστυχώς, πολύ λίγη πρόοδος έχει συντελεστεί προς την κατεύθυνση του να λυθεί το αρχικό πρόβλημα.

Ο Petty [39] διατύπωσε την εικασία ότι ο λόγος $V(\Pi K)/V(K)^{d-1}$ είναι ελάχιστος αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές (βλέπε [26] για εφαρμογές). Ο Schneider [45] διατύπωσε την εικασία ότι στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών κυρτών σωμάτων ισχύει

$$\frac{V(\Pi K)}{V(K)^{d-1}} \leq 2^d ,$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι αφφινική εικόνα καρτεσιανών γινομένων ευθύγραμμων τμημάτων ή κεντρικά συμμετρικών επίπεδων σωμάτων (στις τρεις διαστάσεις, αυτή η κλάση ταυτίζεται με την κλάση των κεντρικά συμμετρικών κυλίνδρων).

Και οι δύο εικασίες έχουν νόημα μόνο αν $d \geq 3$. Για την ακρίβεια, αν K είναι ένα επίπεδο κυρτό σώμα, είναι γνωστό ότι:

$$4 \leq \frac{V(\Pi K)}{V(K)} \leq 6 , \tag{1.10}$$

με ισότητα στην αριστερή ανισότητα αν και μόνο αν το K είναι κεντρικά συμμετρικό και στην δεξιά, αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο. Το γεγονός αυτό προκύπτει άμεσα από τις (3.1), (3.3) παρακάτω και την 2-διάστατη Rogers-Shephard ανισότητα (βλέπε Παράγραφο 4.2).

Αντιπαραδείγματα στην εικασία του Schneider δώθηκαν από τον Brannen [7]. Ο ίδιος συγγραφέας [7] [8] πρότεινε ότι η εικασία θα μπορούσε να είναι σωστή αν περιοριζόμασταν στην κλάση των ζωνοειδών. Αποδεικνύουμε αυτή την εικασία στις τρεις διαστάσεις. Ελπίζουμε ότι η μέθοδος που περιγράφεται παρακάτω μπορεί να αναπτυχθεί για να δουλέψει στις πολλές διαστάσεις.

Θεώρημα 1.2.1 *Αν Z είναι ένα 3-διάστατο ζωνοειδές, τότε*

$$V(\Pi Z) \leq 2^3 V(Z)^2 \; . \tag{1.11}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το Z μπορεί να γραφεί ως άθροισμα Minkowski πέντε ευθυγράμμων τμημάτων ή ως άθροισμα ενός κυλίνδρου και ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Χρησιμοποιώντας μία ανισότητα του Reisner [43] [44] για τον όγκο των πολικών σωμάτων προβολών, το Θεώρημα 1.2.1 συνεπάγεται ότι για κάθε 3-διάστατο ζωνοειδές ισχύει:

$$V\Big((\Pi Z)^*\Big) \cdot V(Z)^2 \geq \frac{4}{3} \; ,$$

με ισότητα αν και μόνο αν το Z είναι παραλληλεπίπεδο. Σημειώνουμε εδώ ότι το ελάχιστο της ποσότητας $V((\Pi K)^*) \cdot V(K)^2$ στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών σωμάτων είναι ακόμη άγνωστο. Οι Makai και Martini [30] διατύπωσαν την εικασία ότι αυτό το ελάχιστο επιτυγχάνεται αν και μόνο αν το K είναι παραλληλεπίπεδο.

Η απόδειξη της (1.11) και του χαρακτηρισμού των περιπτώσεων ισότητας θα γίνει στις παραγράφους 3.2 και 3.3, αντίστοιχα.

Θα ασχοληθούμε και με δύο άλλες κλάσεις 3-διάστατων σωμάτων. Πιο συγκεκριμμένα, θα προσδιορίσουμε τις ακραίες τιμές του $V(\Pi K)/V(K)^2$, στην ειδική περίπτωση, κατά την οποία το K είναι κώνος ή κεντρικά συμμετρικός διπλός κώνος.

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω $K = conv(P \cup \{e_3\})$ ένας 3-διάστατος κώνος, όπου P είναι ένα κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, εμβαδού 1 και $e_3 = (0,0,1)$. Τότε,*

$$V(\Pi K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} V(\Pi P) \; .$$

Πόρισμα 1.2.3 *Έστω K ένας κώνος του $\mathbb{R}^3$. Τότε,*

$$13.5 \leq \frac{V(\Pi K)}{V(K)^2} \leq 18 \; .$$

Η ισότητα ισχύει στην δεξιά ανισότητα αν και μόνο αν το K είναι simplex και στην αριστερή αν και μόνο αν το K έχει κεντρικά συμμετρική βάση.

Το Πόρισμα 1.2.3 προκύπτει απευθείας από την (1.10) και το Θεώρημα 1.2.2.

Πόρισμα 1.2.4 *Έστω K ένας κεντρικά συμμετρικός διπλός κώνος του $\mathbb{R}^3$. Τότε,*

$$\frac{V(\Pi K)}{V(K)^2} = 9 \ .$$

Τα Πορίσματα 1.2.3 και 1.2.4 επιβεβαιώνουν, επίσης, κάποιες εικασίες του Brannen [8]. Το Θεώρημα 1.2.2 και το Πόρισμα 1.2.4 αποδεικνύονται στην Παράγραφο 3.4. Αναφέρουμε σχετικά ότι ο Brannen διατύπωσε την εικασία ότι το $|\Pi K|/|K|^2$ μεγιστοποιείται στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών σωμάτων αν και μόνο αν το K είναι κεντρικά συμμετρικός διπλός κώνος και στην κλάση των γενικών κυρτών σωμάτων αν και μόνο αν το K είναι simplex.

Η Steiner συμμετρικοποίηση $S_\nu K$ ενός d-διάστατου κυρτού σώματος K ως προς την κατεύθυνση $\nu \in S^{d-1}$ ορίζεται ως το μοναδικό κυρτό σώμα με την ιδιότητα ότι για κάθε ευθεία l, παράλληλη στην ν, το ευθύγραμμο τμήμα $l \cap S_\nu K$ είναι συμμετρικό ως προς το υπερεπίπεδο $\nu^\perp$ και, επιπλέον, $V_1(l \cap S_\nu K) = V_1 l \cap K)$. Οι Martini και Mustafaev [31] έθεσαν το ερώτημα αν ισχύει η ανισότητα

$$V(\Pi(S_\nu K)) \leq V(\Pi K) \ , \tag{1.12}$$

για κάθε κατεύθυνση $\nu \in S^{n-1}$. Είναι ευρέως γνωστό ότι ο όγκος του K μένει αναλλοίωτος από την Steiner συμμετρικοποίηση και, επιπλέον, το K μπορεί πάντα να μετασχηματιστεί σε μπάλα μετά από διαδοχική εφαρμογή κατάλληλης ακολουθίας Steiner συμμετρικοποίησεων. Άρα, προφανώς η εικασία του Petty θα προέκυπτε από την ισχύ της (1.12). Δυστυχώς, αποδεικνύουμε ότι η (1.12) δεν είναι εν γένει σωστή. Το γεγονός αυτό, είναι μία απλή εφαρμογή του Πορίσματος 1.2.4.

Θεώρημα 1.2.5 *Για οποιοδήποτε $d \geq 3$, υπάρχει ένα κυρτό σώμα K και μία κατεύθυνση $\nu \in S^{d-1}$, τέτοια ώστε*

$$V(\Pi(S_\nu K)) > V(\Pi K) \ .$$

Απόδειξη. Σημειώνουμε, αρχικά ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα που περιέχεται σε κάποιον υπόχωρο, ορθογώνιο σε κάποια κατεύθυνση ν και I είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στην ν, τότε για οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα w από το $\nu^\perp$ ισχύει

$$S_w(K + I) = (S_w K) + I \ .$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ταυτότητα, τον απλό τύπο

$$V_d(\Pi(K \ \times \ [-1/2, 1/2])) = 2 \cdot V_{d-1}(\Pi K) \tag{1.13}$$

(όπου K κάποιο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^{d-1}$) και ένα επαγωγικό επιχείρημα, συμπεραίνουμε ότι αρκεί να κατασκευάσουμε αντιπαράδειγμα για την (1.12), μόνο στις τρεις διαστάσεις.

Έστω C ένας κύβος κέντρου 0, διάστασης 3 και όγκου 1. Διαλέγουμε τυχούσα κορυφή v του C και παίρνουμε ν να είναι ένα διάνυσμα παράλληλο στο $[-v, v]$. Ελέγχεται εύκολα ότι η Steiner συμμετρικοποίηση του C στην κατεύθυνση ν είναι ένας κεντρικά συμμετρικός διπλός κώνος, με βάση ένα κανονικό εξάγωνο, το οποίο περιέχεται στο επίπεδο $\nu^{\perp}$. Τότε, από το Πόρισμα 1.2.4, έχουμε:

$$V(\Pi C) = 8 < 9 = V(\Pi(S_\nu C)) \ . \ \Box$$

Ορισμένα επιπλέον σχόλια πάνω στην εικασία του Petty συμπεριλαμβάνονται στις Παραγράφους 3.5 και 3.6.

1.3 Η θέση ελάχιστης επιφάνειας

Έστω ένα σώμα K του $\mathbb{R}^d$. Ονομάζουμε ∂_K την επιφάνεια του K (δηλ. τον $(d-1)$-διάστατο όγκο του συνόρου K). Τότε, υπάρχει κάποιος γραμμικός μετασχηματισμός $T \in Sl_d$ (που δηλαδή διατηρεί τον όγκο), έτσι ώστε:

$$\partial_{TK} \leq \partial_{T'K} \ , \ \forall \ T' \in Sl_d \ .$$

Λέμε τότε ότι το TK είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας. Είναι γνωστό ότι η θέση ελάχιστης επιφάνειας για ένα σώμα K είναι μονοσήμαντα ορισμένη, μέχρις ορθογώνιου μετασχηματισμού. Ένας χαρακτηρισμός της θέσης ελάχιστης επιφάνειας δόθηκε από τον Petty [37]: Το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν και μόνο αν η ποσότητα

$$S^{d-1} \ni x \mapsto \int_{S^{d-1}} < x, y >^2 dS_K(y)$$

είναι σταθερή.

Χαρακτηρισμοί αυτού του τύπου δόθηκαν από τους Γιαννόπουλο-Milman στο [18] για προβλήματα ελαχιστοποίησης που αφορούν και στα υπόλοιπα quermassintegrals, όπου και μεταξύ άλλων αποδείχτηκε το εξής: Έστω ότι $d = 2$ και K είναι ένα κυρτό σώμα σε θέση ελάχιστης επιφάνειας. Τότε,

$$V(K + tB_1^d)^{\frac{1}{d}} = min\{V(TK + tB_1^d)^{\frac{1}{d}} : T \in Sl_d\} =: X(K, t) \ ,$$

για οποιοδήποτε θετικό t.

Οι ίδιοι συγγραφείς έθεσαν το ερώτημα του αν ισχύει ανάλογη πρόταση και στις περισσότερες διαστάσεις. Πιο συγκεκριμμένα, υπάρχει κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$, ώστε αν K είναι κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^d$ σε θέση ελάχιστης επιφάνειας, να προκύπτει ότι

$$V(K + B_1^d)^{1/d} < C \cdot X(K, 1) \ ;$$

Το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 4 (Θεώρημα 4.1.3) είναι ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική.

Ανάλογα με τη θέση ελάχιστης επιφάνειας ορίζεται και η ισοτροπική θέση για ένα (αστρόμορφο) σώμα K. Λέμε ότι το K είναι σε ισοτροπική θέση, αν η ποσότητα

$$\int_K < x, y >^2 \ dy$$

είναι σταθερή για $y \in S^{d-1}$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο αριθμός:

$$L_K := \frac{(\int_K < x, y >^2 \ dy)^{\frac{1}{2}}}{V(K)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}}$$

ονομάζεται ισοτροπική σταθερά του K. Αν K' είναι μία γραμμική εικόνα του K, ισχύει εξορισμού $L_{K'} = L_K$. Είναι προφανές ότι αν το K είναι ισοτροπικό όγκου 1 και $\{e_1, ..., e_d\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση, τότε

$$\int_K < x, e_i >< x, e_j > \ dx = L_K^2 \delta_{ij} \ , \ i, j = 1, ..., d \ .$$

Είναι ευρέως γνωστό (βλέπε π.χ. [35]) ότι υπάρχει πάντα ένας γραμμικός μετασχηματισμός T, έτσι ώστε το TK να είναι ισοτροπικό και να έχει όγκο ίσο με τον όγκο του K.

Ένα από τα κεντρικά ερωτήματα της περιοχής (ετέθη από τους Bourgain, Milman, Pajor [3] [35]) είναι αν η ισοτροπική σταθερά των κυρτών σωμάτων είναι άνω φραγμένη ανεξάρτητα από τη διάσταση (το γεγονός ότι είναι κάτω φραγμένη είναι γνωστό και εύκολο να αποδειχτεί). Η καλύτερη εκτίμηση αυτή τη στιγμή είναι $L_K < cd^{1/4}$ [24]. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, μία καταφατική απάντηση στο ερώτημα των Γιαννόπουλου-Milman, περιορισμένο σε μία ειδική κλάση κυρτών σωμάτων -τα λεγόμενα σώματα ελλειπτικού τύπου- είναι ισοδύναμη με το να είναι η ισοτροπική σταθερά φραγμένη.

Κεφάλαιο 2

Συναρτησοειδή τύπου **Sylvester** και Συστήματα Σκιών

2.1 Εισαγωγικά

Αν $A = \{x_i : i \in J\}$ είναι ένα φραγμένο σύνολο σημείων, ένα σύστημα σκιών (shadow system) στην κατεύθυνση $\nu \in S^{d-1}$ είναι μία οικογένεια κυρτών σωμάτων της μορφής:

$$K_t = conv\{x_i + \alpha_i t\nu : \ i \in J\} \ , \ t \in [t_0, t_1] \ ,$$

όπου J είναι οποιοδήποτε σύνολο δεικτών και $\{\alpha_i : i \in J\}$ είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο πραγματικός αριθμός α_i ονομάζεται ταχύτητα του σημείου x_i ως προς το σύστημα σκιών K_t. Προφανώς, ένα σύστημα σκιών είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός κυρτών σωμάτων ως προς την παράμετρο t. Επίσης, είναι ξεκάθαρο ότι η προβολή του K_t στο υπερεπίπεδο $\nu^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^d : < x, \nu >= 0\}$ είναι ανεξάρτητη του t.

Τα συστήματα σκιών ορίστηκαν και μελετήθηκαν από τους Rogers και Shephard στο [42], όπου αποδείχτηκε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα: Ο όγκος ενός συστήματος σκιών είναι κυρτή συνάρτηση της παραμέτρου. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι η τομή μίας ευθείας και του K_t, παράλληλης στην κατεύθυνση ως προς την οποία λαμβάνει χώρα η κίνηση, είναι επίσης κυρτή συνάρτηση του t. Αργότερα, ο Shephard [48] παρατήρησε ότι η ίδια ιδιότητα κυρτότητας ισχύει και για άλλες ποσότητες, όπως για παράδειγμα η διάμετρος, το μέσο πλάτος ή η επιφάνεια ενός κυρτού σώματος.

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι η προβολή ενός συστήματος σκιών στην κατεύθυνση ν, σε έναν αφφινικό υπόχωρο H είναι επίσης σύστημα σκιών ως προς την κατεύθυνση $\nu|\ H$, όπου με $\cdot|\cdot$ συμβολίζουμε την ορθογώνια προβολή ενός διανύσματος ή ενός συνόλου πάνω σε κάποιον υπόχωρο του $\mathbb{R}^d$. Επιπροσθέτως, αποδεικνύεται (βλέπε [11]) ότι αθροίσματα Minkowski συστημάτων σκιών ως προς την ίδια κατεύθυνση, είναι επίσης σύστημα σκιών.

Έστω K ένα κυρτό σώμα και $\alpha : K \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε συνάρτηση, που είναι σταθερή σε κάθε χορδή του K, η οποία είναι παράλληλη στην κατεύθυνση $\nu \in S^{d-1}$. Αν υπάρχει ένα διάστημα $[t_0, t_1]$, τέτοιο ώστε το σύνολο $K_t = \{x + \alpha(x)t\nu : \ x \in K\}$ είναι κυρτό σώμα, για κάθε $t \in [t_0, t_1]$, λέμε ότι η οικογένεια κυρτών σωμάτων $\{K_t\}_{t\in[t_0,t_1]}$ είναι μία παράλληλη χορδική κίνηση ως προς την κατεύθυνση ν. Η συνάρτηση $\alpha : K \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση ταχύτητας της κίνησης.

Προφανώς, οι παράλληλες χορδικές κινήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις συστημάτων σκιών. Συνήθη παραδείγματα τέτοιων κινήσεων είναι οι παράλληλες μεταφορές και η Steiner συμμετρικοποίηση. Η έννοια της παράλληλης χορδικής κίνησης εμφανίζεται για πρώτη φορά στο [10].

Μία σημαντική ιδότητα των παράλληλων χορδικών κινήσεων είναι ότι ο όγκος είναι σταθερός ως προς t. Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι είναι μονάδα η Ιακωβιανή της απεικόνισης

$$K \ni x \mapsto x + \alpha(x)t \in K_t \ .$$

Η απόδειξη του γεγονότος ότι τα τρίγωνα (αντ. παραλληλόγραμμα) μεγιστοποιούν τα εν λόγω συναρτησοειδή στο επίπεδο, βασίζεται στα εξής αποτελέσματα (βλέπε π.χ. [10] [11]):

1. Αν $\{K_t\}_{t\in[t_0,t_1]}$ είναι μία παράλληλη χορδική κίνηση, τότε το $S_h(K_t, n; d)$ (αντ. $B_h(K_t, n; d)$, $I_h(K_t, n; d)$) είναι κυρτή συνάρτηση του t και δεν μπορεί να είναι σταθερή, εκτός και αν έχει αφφινική (αντ. γραμμική) συνάρτηση ταχύτητας. Για να το δούμε αυτό, ας πάρουμε για παράδειγμα το $S_h(K, n; d)$.

Καταρχήν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in [t_0, t_1]$ και ότι $K_0 = K$. Κάνοντας μία αλλαγή μεταβλητής, έχουμε:

$$S_h(K_t, n; d) = \int_K ... \int_K h(V(conv\{x_0 + t\alpha(x_0)\nu, ..., x_n + t\alpha(x_n)\nu\}))dx_0...dx_n \ .$$

Άρα, αφού η συνάρτηση h είναι κυρτή και αύξουσα και η

$$t \mapsto V(conv\{x_0 + t\alpha(x_0)\nu, ..., x_n + t\alpha(x_n)\nu\})$$

είναι κυρτή, προκύπτει ότι και η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα, άρα και η $S_h(K_t, n; d)$ είναι κυρτή ως προς t.

Αν, τώρα, η $\alpha : K \to \mathbb{R}$ είναι αφφινική συνάρτηση, τότε και η απεικόνιση

$$K \ni x \mapsto x + t\alpha(x)\nu \in K_t$$

είναι αφφινική που διατηρεί τον όγκο (αφού, όπως αναφέρθηκε έχει Ιακωβιανή ίση με 1). Άρα, για κάθε t στο $[t_0, t_1]$, το K_t είναι αφφινική εικόνα του K και, μάλιστα, του ίδιου όγκου. Επομένως, η συνάρτηση $S_h(K_t, n; d)$ είναι σταθερή (ως συνάρτηση του t), λόγω του γεγονότος ότι το $S_h(K, n; d)$ είναι αναλλοίωτο από αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο.

Αντίστροφα, αν η συνάρτηση $t \mapsto S_h(K_t, n; d)$ είναι σταθερή στο $[t_0, t_1]$, από συνέχεια και από την υπόθεση για την h, η ποσότητα $V(conv\{x_0+t\alpha(x_0)\nu, ..., x_n +t\alpha(x_n)\nu\})$ οφείλει να είναι αφφινική ως προς t, για οποιαδήποτε επιλογή σημείων $x_0, , , x_n$ από το K. Διαλέγουμε τα $x_1, ..., x_d$ έτσι ώστε τα $x_1|\nu^\perp, ..., x_d|\nu^\perp$ να είναι αφφινικώς ανεξάρτητα, το x_0 να ανήκει στο υπερεπίπεδο που ορίζουν τα $x_1, ..., x_d$ και $x_{d+1} = ... = x_n = x_1$. Αφού η συνάρτηση

$$\varphi(t) := V(conv\{x_0 + t\alpha(x_0)\nu, ..., x_n + t\alpha(x_n)\nu\})$$

είναι αφφινική και μη αρνητική στο $[t_0, t_1]$, με $\varphi(0) = 0$, προκύπτει ότι

$$\varphi(t) = 0\ ,\ t \in [t_0, t_1]\ .$$

Άρα, για οποιοδήποτε t στο $[t_0, t_1]$, έχουμε

$$det(x_0 + t\alpha(x_0)\nu, ..., x_d + t\alpha(x_d)\nu) = 0\ ,$$

πράγμα που δείχνει ότι το σημείο $x_0|\nu^\perp + \alpha(x_0) = x_0|\nu^\perp + \alpha(x_0|\nu^\perp)$ περιέχεται στο υπερεπίπεδο που παράγουν τα σημεία $x_i|\nu^\perp + \alpha(x_i)$, $i = 1, ..., d$. Κατά συνέπεια, αφού το x_0 επελέγη τυχαία, η $\alpha(\cdot|\nu^\perp)$, άρα και η α είναι αφφινική.

2. Αν P είναι ένα κυρτό πολύγωνο που δεν είναι τρίγωνο, υπάρχει μία παράλληλη χορδική κίνηση που μετασχηματίζει το P σε πολύγωνο με λιγότερες κορυφές, χωρίς να μειώνεται το S_h. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και στην κενρικά συμμετρική περίπτωση. Περιγράφουμε εν συντομία αυτή την διαδικασία:

Έστω v_1, v_2, v_3 τρεις διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου P. Ορίζουμε την συνάρτηση $\alpha : P \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες: $\alpha(v_2) = 1$, $\alpha(v_1) = 0 = \alpha(v_3)$, η α είναι γραμμική στο τρίγωνο που παράγεται από τις κορυφές v_1, v_2, v_3 και $\alpha = 0$ παντού αλλού. Έστω ν η κατεύθυνση, παράλληλη στην χορδή $[v_1, v_3]$. Θέτουμε $P_t = \{x + \alpha(x)t\nu : x \in P\}$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι το $[t_0, t_1]$ είναι το μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο το P_t είναι κυρτό, για όλα τα t στο $[t_0, t_1]$. Ελέγχεται εύκολα ότι $t_0 < 0 < t_1$ και ότι η οικογένεια $\{P_t\}_{t\in[t_0,\ t_1]}$ είναι μία παράλληλη χορδική κίνηση. Προφανώς, τα P_{t_0}, P_{t_1} είναι πολύγωνα με λιγότερες κορυφές από αυτές του P. Τώρα, από το 1 και επειδή $P_0 = P$, συμπεραίνουμε:

$$S_h(P, n; 2) \leq max\{S_h(P_{t_0}, n, 2), S_h(P_{t_1}, n, 2)\}\ .$$

Το γεγονός ότι τα τρίγωνα πράγματι μεγιστοποιούν το S_h προκύπτει από την τελευταία ανισότητα. Ομοίως, αποδεικνύεται το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τα παραλληλόγραμμα.

2.2 Τρίγωνα και παραλληλόγραμμα

Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει το μονοσήμαντο για τα επίπεδα σώματα που μεγιστοποιούν τα S_h, B_h, I_h (για κυρτή h), όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω D ένα, αναλλοίωτο από αφφινικούς (αντ. γραμμικούς) μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο, συναρτησοειδές από την κλάση των επίπεδων κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}_+$, με τις εξής ιδιότητες:*
i) Αν K_t είναι παράλληλη χορδική κίνηση, $t_0 < 0 < t_1$, τότε η $D(K_t)$ είναι κυρτή συνάρτηση του t.
ii) Αν η συνάρτηση ταχύτητας α της κίνησης δεν είναι αφφινική (αντ. γραμμική), τότε η ποσότητα $D(K_t)$ δεν μπορεί να είναι σταθερή ως προς t.
Τότε, τα τρίγωνα (αντ. τρίγωνα που έχουν την αρχή των αξόνων ως κορυφή τους) είναι τα μόνα σώματα που μεγιστοποιούν το D στην κλάση όλων των κυρτών σωμάτων (αντ. που περιέχουν το 0) του $\mathbb{R}^2$ και τα παραλληλόγραμμα (αντ. παραλληλόγραμμα με κέντρο το 0) είναι τα μόνα σώματα που μεγιστοποιούν το D στην κλάση όλων των κεντρικά συμμετρικών επίπεδων σωμάτων.

Απόδειξη: Έστω K ένα κυρτό σώμα , που περιέχει το 0, μεγιστοποιεί το D και δεν είναι τρίγωνο. Για κάποια κατεύθυνση $\nu \in S^1$, γράφουμε:

$$K = \{x + y\nu : \ x \in K|\ \nu^{\perp}, \ f_\nu(x) \leq y \leq g_\nu(x)\} \ ,$$

όπου $f_\nu, -g_\nu : K|\ \nu^{\perp} \to \mathbb{R}$ είναι κάποιες κυρτές συναρτήσεις. Αρκέι να βρούμε μία κατεύθυνση $\nu \in S^1$ και κάποια μη αφφινική συνάρτηση $\alpha : K|\ \nu^{\perp} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η $f_\nu + t\alpha$ να είναι κυρτή και η $g_\nu + t\alpha$ να είναι κοίλη στο $[t_0, t_1]$.

Πράγματι, αν έχουμε βρει τέτοια α, για $t \in [t_0, t_1]$ θέτουμε:

$$K_t = \{x + \alpha(x|\nu^{\perp})t\nu : \ x \in K\}$$

$$= \{x + y\nu : \ x \in K|\nu^{\perp}, \ (f_\nu + t\alpha)(x) \leq y \leq (g_\nu + t\alpha)(x)\} \ .$$

Η συνάρτηση $\alpha(x|\nu^{\perp})$ είναι σταθερή σε κάθε χορδή παράλληλη στο ν, ενώ το K_t είναι κυρτό για όλα τα t στο $[t_0, t_1]$. Επομένως, η οικογένεια $\{K_t\}_{t\in[t_0,t_1]}$ είναι μία παράλληλη χορδική κίνηση, με μη αφφινική συνάρτηση ταχήτητας και από τις υποθέσεις (i) και (ii) συμπεραίνουμε:

$$D(K) = D(K_0) < max\{D(K_{t_0}), D(K_{t_1})\} \ ,$$

άρα το K δεν μπορεί να είναι ακραίο σώμα.
Ειδική περίπτωση: Υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη κανονικά σημεία (δηλ. οι ευθείες στήριξης σε αυτά τα σημεία δεν είναι μοναδικές) του συνόρου του K,

τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα του ∂K.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η χορδή που διέρχεται από τα δύο, αυτά, σημεία είναι παράλληλη στον άξονα x_2. Γράφουμε $[b,c] = K|\ \nu^{\perp}$, $f = f_{\nu}$, $g = g_{\nu}$, όπου $\nu = e_2 = (0,1)$.

Από υπόθεση, υπάρχει $x_0 \in (b,c)$ τέτοιο ώστε οι f, g να μην είναι παραγωγίσιμες στο x_0. Ορίζουμε: $\alpha(x) = \gamma(x)$ στο $[b,x_0]$ και $\alpha(x) = \delta(x)$ στο $[x_0,c]$, όπου $\gamma(x_0) = \delta(x_0)$ και γ, δ είναι αφφινικές συναρτήσεις με:

$$|\gamma' - \delta'| \leq min\{f'_+(x_0) - f'_-(x_0), g'_-(x_0) - g'_+(x_0)\}\ .$$

Τότε, η α είναι όπως την απαιτήσαμε.

Για να αποφύγουμε την περίπτωση το 0 να βρίσκεται έξω από το K_t (που θα μας ενοχλούσε αν το D δεν είναι αναλλοίωτο από μεταφορές), μπορούμε να πάρουμε α, τέτοια ώστε $\alpha(0) = 0$, αντικαθιστώντας την α με την $\alpha - \alpha(0)$ αν είναι απαραίτητο.

Γενική περίπτωση: Αφού το K έχει τουλάχιστον τέσσερα ακραία σημεία, μπορούμε να επιλέξουμε κανονικά σημεία x, y από το σύνορο του K, τέτοια ώστε αν G_1, G_2 είναι τα ανοιχτά ημιεπίπεδα που ορίζονται από τη χορδή $[x,y]$, να ισχύει το ακόλουθο:

$i)$ Το $[x,y]$ δεν περιέχεται στο σύνορο του K.

$ii)$ Οι εφαπτομένες e_x, e_y στα x, y δεν είναι παράλληλες, το σημείο τομής p αυτών περιέχεται στο G_1 και το 0 δεν περιέχεται στο G_1.

Τότε, υπάρχει μία ακολουθία κυρτών σωμάτων $\{K_n\}$, τέτοια ώστε $K_n \uparrow K$, $K_n \cap \overline{G_2} = K \cap \overline{G_2}$ και $K_n \cap \overline{G_1} = P_n$, όπου P_n είναι πολύγωνα, των οποίων μία ακμή είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[x,y]$.

Εφαρμόζουμε την παράλληλη χορδική κίνηση που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2.1 στις κορυφές του P_n που δεν ανήκουν στην e_x ή στην e_y. Αν δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές, απλώς δεν κάνουμε τίποτα. Μετακινούμε τις κορυφές του P έτσι ώστε να μην μειώνεται το D και σταματάμε την κίνηση είτε όταν μία κορυφή του P_n ' εξαφανιστεί ' είτε όταν η κινούμενη κορυφή ' ακουμπήσει ' μία από τις ευθείες e_x, e_y. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία όσες φορές χρειάζεται, βρίσκουμε για κάθε n ένα κυρτό σώμα K'_n τέτοιο ώστε: $V(K'_n) = V(K_n)$, $D(K'_n) \geq D(K_n)$ και, επιπλέον, το K'_n έχει ακριβώς ένα ή δύο ακραία σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του G_1.

Αφού $K'_n \subset conv(K \cup \{p\})$, υπάρχει μία υπακολουθία K'_{n_m} που συγκλίνει σε ένα κυρτό σώμα K'. Προφανώς, $D(K'_{n_m}) \geq D(K_{n_m}) \to D(K)$, γεγονός που δείχνει ότι $D(K') = D(K)$.

Έχουμε, λοιπόν, κατασκευάσει ένα κυρτό σώμα K' με $D(K') = D(K)$, το σύνορο του οποίου περιέχει τουλάχιστον ένα μη κανονικό σημείο που περιέχεται στο εσωτερικό του G_1, ενώ το K δεν περιέχεται στο κλειστό ημιεπίπεδο $\overline{G_1}$.

Αν το 0 είναι το μοναδικό ακραίο σημείο του K' στο G_2, είμαστε στην ειδική περίπτωση που συζητήθηκε πριν. Αν όχι, μπορούμε βρούμε μία χορδή $[z,w]$

που περιέχεται στο G_2 τέτοια ώστε τα δύο ανοιχτά ημιεπίπεδα G_1', G_2', που ορίζονται από τη χορδή $[z,w]$ έχουν ανάλογες ιδιότητες με τα G_1, G_2 και, επιπροσθέτως, τα x, y να περιέχονται στο G_2'. Επομένως, τα σύνολα $\overline{G_1} \cap K$ και $\overline{G_1'} \cap K$ είναι ξένα.

Εργαζόμενοι όπως πριν, κατασκευάζουμε ένα κυρτό σώμα K'' με $K'' \cap G_1 = K' \cap G_1$ και $D(K'') = D(K)$, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένα μη κανονικό σημείο q' στο σύνορο του K'', το οποίο να περιέχεται στο G_1'. Παρατηρούμε ότι τα q, q' ανοίκουν στην κυρτή γωνία που ορίζεται από τις e_x, e_y και περιέχει τα x, y, ενώ το q' δεν βρίσκεται πάνω σε καμμία από τις δύο αυτές ευθείες. Αφού οι e_x, e_y είναι, επίσης, ευθείες στήριξης του K'', τα q και q' δεν μπορούν να περιέχονται από κοινού σε κάποιο ευθύγραμμο τμήμα του συνόρου. Συνεπώς, το σύνορο του K'' έχει τουλάχιστον δύο μη κανονικά σημεία που δεν περιέχονται στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα του συνόρου του, ενώ $D(K'') = D(K) = maxD$. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, άρα το K πρέπει να είναι τρίγωνο. Ειδικότερα, αν το D δεν είναι αναλλοίωτο από μεταφορές και αφού οι παραλληλες μεταφορές είναι ειδικές περιπτώσεις παράλληλων χορδικών κινήσεων με μη γραμμική συνάρτηση ταχύτητας, μία από τις κορυφές του K πρέπει να είναι η αρχή των αξόνων. Η απόδειξη στην κεντρικά συμμετρική περίπτωση είναι ουσιαστικά όμοια και παραλλείπεται. Η μόνη διαφορά είναι ότι κάθε κίνηση ενός ακραίου σημείου αντικαθίσταται με την κίνηση του σημείου και του αντιδιαμετρικού του, με τρόπο τέτοιο ώστε τα σώματα που μετέχουν στην κίνηση να είναι όλα κεντρικά συμμετρικά.□

Σημειώνουμε ότι με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δείξει κάποιος ανάλογα αποτελέσματα και για μία συμμετρική εκδοχή του συναρτησοειδούς Sylvester [32]:

$$E_p(K) = \int_K ... \int_K V\Big(conv\{\pm x_1, ..., \pm x_n\}\Big)^p dx_1...dx_n \ \ , \ p \geq 1 \ .$$

Πριν κλείσουμε αυτή την παράγραφο αναφέρουμε μερικά συναρτησοειδή του επιπέδου, για τα οποία είχε αποδειχτεί ότι τα τρίγωνα (αντ. παραλληλόγραμμα) είναι ακραία σώματα στο επίπεδο και από το Θεώρημα 2.2.1 αποδεικνύεται το μονοσήμαντο.

Το L^p-σώμα προβολών (centroid body) του K ορίζεται ως το σώμα με συνάρτηση στήριξης:

$$h_{\Gamma_p(x)} = \Big(\frac{1}{V(K)} \int_K |<x,z>|^p dz\Big)^{\frac{1}{p}} \ , \ p \geq 1 \ .$$

Θέτουμε:

$$\Phi_p(K,x) = \frac{V(\Gamma_p(K-x))}{V(K)} \ .$$

Με βάση την ποσότητα $\Phi_p(K,x)$, ορίζονται τα εξής συναρτησοειδή:

$$l_p(K) = \Phi_p(K,0) \ , \ \textit{όταν } 0 \in K \ ,$$

$$m_p(K) = \Phi_p(K, c_k) \ , \ \textit{όπου } c_k \textit{ το βαρύκεντρο του } K \ ,$$

$$C_p(K) = min_{x \in K} \Phi_p(K, x) \ ,$$

$$M_p(K) = max_{x \in K} \Phi_p(K, x) \ ,$$

$$A(K, p, q) = \Big[\frac{1}{V(K)} \Phi_p(K, x)^q dx \Big]^{\frac{1}{q}} \ .$$

Συναρτησοειδή, που αφορούν στον όγκο του πολικού σώματος του $\Gamma_p(K)$, έχουν επίσης μελετηθεί:

$$G_p(K) = V(\Gamma_p^* K)^{-1} V(K)^{-1} \ ,$$

$$N_p(K) = min_{x \in K} G_p(K - x) \ .$$

Αυτές οι ποσότητες, έχει αποδειχτεί στα [11], [12], [13] ότι ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1. Ειδικά, για τα $G_p(K)$ και $N_p(K)$, κάποιος θα πρέπει να χρησιμοποιήσει συμπληρωματικά ένα αποτέλεσμα των Meyer και Reisner [33], για να δείξει την ιδιότητα (ii) του Θεωρήματος 2.2.1.

2.3 Απόδειξη ανισοτήτων κάτω φραγμάτων

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, κάθε κυρτό σώμα μπορεί να μετασχηματιστεί σε μπάλα μετά από διαδοχική εφαρμογή της διαδικασίας της Steiner συμμετρικοποίησης ως προς μία κατάλληλη ακολουθία κατευθύνσεων της S^{d-1}. Προφανώς, τα συναρτησοειδή D_h $(D = S, B, I)$ είναι συνεχή ως προς την Haussdorff μετρική, άρα αρκεί, απλώς, να δείξουμε ότι το $D_h(K_0, ..., K_n; d)$ δεν αυξάνει με την Steiner συμμετρικοποίηση των $K_0, ..., K_n$, ταυτόχρονα ως προς την ίδια κατεύθυνση ν στην S^{d-1}.

Για $X = (x_0, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^{d-1})^{n+1}$ και $t = (t_0, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, θέτουμε:

$$\Phi_{S,X,j}(t) := W_j(conv\{(x_0, t_0), ..., (x_n, t_n)\}) =$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,\ d-j}} V_{d-j}(conv\{(x_0, t_0), ..., (x_n, t_n)\}|\ E) \ d\mu(E) \ ,$$

$$\Phi_{B,X,j}(t) := W_j(conv\{0, (x_1, t_1), ..., (x_n, t_n)\}) =$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,\ d-j}} V_{d-j}(conv\{0, (x_1, t_1), ..., (x_n, t_n)\}|\ E) \ d\mu(E) \ ,$$

$$\Phi_{I,X,j}(t) := W_j(\sum_{i=1}^{n} [0, (x_i, t_i)])$$

$$= \frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,\ d-j}} V_{d-j}(\sum_{i=1}^{n}[0,(x_i,t_i)]|\ E)\ d\mu(E)\ .$$

Το τελευταίο μέρος κάθε μίας από τις παραπάνω ισότητες είναι ο τύπος του Kubota (βλέπε [46]), ω_d είναι ο όγκος της d-διάστατης μοναδιαίας μπάλας και μ είναι το Haar μέτρο πιθανότητας, ορισμένο στην Grassmanian $\mathcal{G}_{d,\ d-j}$ των $(d-j)$-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^d$. Ας σημειωθεί ότι $\mathcal{G}_{d,\ d} = \{\mathbb{R}^d\}$.

Η ιδιότητα κλειδί αυτών των συναρτήσεων είναι η κυρτότητα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι περιορισμοί των συναρτήσεων που ολοκληρώνονται (ως συναρτήσεις του $t := (t_0, ..., t_n)$) σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα J είναι ακριβώς οι όγκοι κάποιων συστημάτων σκιών στην κατεύθυνση της προβολής του άξονα x_d στο E. Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό και τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 2.1. Για παράδειγμα, αν $J = [t, t']$, το σύστημα σκιών που χρησιμοποιείται είναι το:

$$conv\{(x_0, t_0' + s(t_0 - t_0')), ..., (x_n, t_n' + s(t_n - t_n'))\}|\ E\ , s \in [-1, 1]\ .$$

Αν ν είναι οποιαδήποτε κατεύθυνση από την S^{d-1}, το K_i μπορεί να γραφτεί ως:

$$K_i = \{x + \theta\nu : x \in K_i|\ \nu^{\perp},\ f_{i,\ \nu}(x) \le \theta \le g_{i,\ \nu}(x)\}\ ,\ i = 0, ..., n\ ,$$

όπου $f_{i,\ \nu}$, $-g_{i,\ \nu}$ είναι κυρτές συναρτήσεις στο $K_i|\ \nu^{\perp}$. Η Steiner συμμετρικοποίηση του K_i ορίζεται ως:

$$S_\nu(K_i) = \{x + \theta\nu : x \in K_i|\ \nu^{\perp},\ -k_{i,\ \nu}(x) \le \theta \le k_{i,\ \nu}(x)\}\ ,$$

όπου $k_{i,\ \nu} = \frac{g_{i,\ \nu} - f_{i,\ \nu}}{2}$, $i = 0, ..., n$. Θέτουμε $u_{i,\ \nu} = \frac{g_{i,\ \nu} + f_{i,\ \nu}}{2}$. Τότε, για $i = 0, ..., n$, έχουμε:

$$K_i = \{x + \theta\nu : x \in K_i|\ \nu^{\perp},\ -k_{i,\ \nu}(x) + u_{i,\ \nu}(x) \le \theta \le k_{i,\ \nu}(x) + u_{i,\ \nu}(x)\}\ .$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu = e_d = (0, ..., 0, 1)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini, βρίσκουμε
$D_h(K_0, ..., K_n; d; j) =$

$$\int_{x_0 \in K_0|\nu^{\perp}} \cdots \int_{x_n \in K_n|\nu^{\perp}} \Big[\int_{-k_0+u_0}^{k_0+u_0} \cdots \int_{-k_n+u_n}^{k_n+u_n} h(\Phi_{D,X,j}(t))dt\Big] dX\ ,$$

όπου $k_i = k_{i,\ \nu}(x_i)$, $u_i = u_{i,\ \nu}(x_i)$, ι=0,...,ν και $X = (x_0, ..., x_n)$. Θέτουμε, επίσης, για απλότητα:

$$T = T_\nu(X) = [-k_{0,\ \nu}(x_0), k_{0,\ \nu}(x_0)] \times ... \times [-k_{n,\ \nu}(x_n), k_{n,\ \nu}(x_n)]$$

και

$$u = (u_0, ..., u_n) = u_\nu(X) = (u_{0,\ \nu}(x_0), ..., u_{n,\ \nu}(x_n)) \ .$$

Τώρα,
$D_h(K_0, ..., K_n; d; j)$

$$= \int_{x_0 \in K_0|\nu^\perp} ... \int_{x_n \in K_n|\nu^\perp} \int_0^\infty V(\ [T+u] \cap \{h(\Phi_{D,X,j}) \geq s\})\ ds\ dX \ .$$

Εργαζόμενοι παρόμοια για τις Steiner συμμετρικοποιήσεις των $K_0, ..., K_n$ λαμβάνουμε:
$D_h(S_\nu(K_0), ..., S_\nu(K_n); d; j) =$

$$\int_{x_0 \in K_0|\nu^\perp} ... \int_{x_n \in K_n|\nu^\perp} \int_0^\infty V(\ T \cap \{h(\Phi_{D,X,j}) \geq s\})\ ds\ dX \ .$$

Προφανώς,

$$V(\ (T+u) \cap \{h(\Phi_{D,X,j}) \geq s\}) = V(T) - V(\ (T+u) \cap \{\Phi_{D,X,j} < h^{-1}(s)\})$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$V(\ (T+y) \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}) \leq V(\ T \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}) \ , \qquad (2.1)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ και για κάθε $\zeta > 0$, όπου $m = n+1$, αν $D = S$ και $m = n$, αν $D = B$ ή I. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\eta(y) := V(\ (T+y) \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}) \ ,\ y \in \mathbb{R}^m \ .$$

Σημειώνουμε ότι τα T, $\{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}$ είναι κυρτά και κεντρικά συμμετρικά (το $\{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}$ είναι κυρτό λόγω της κυρτότητας της $\Phi_{D,X,j}$). Άρα, η η είναι άρτια συνάρτηση και, από την ανισότητα Brunn-Minkowski (βλέπε Παράρτημα), είναι και λογαριθμικά κοίλη. Επομένως, η η λαμβάνει μέγιστο στο 0 και οι (8), (9) έπονται.

2.4 Χαρακτηρισμοί καρτεσιανών γινομένων ομοιόθετων ελλειψοειδών

Πρώτα, θα χρειαστούμε ορισμένα γεωμετρικά λήμματα. Διατηρούμε τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου.

Λήμμα 2.4.1 . *Αν* $\nu = e_d$ *και*

$$D_h(S_\nu(K_0), ..., S_\nu(K_n); d; j) = D_h(K_0, ..., K_n; d; j) \ , \tag{2.2}$$

τότε για κάθε επιλογή $X \in K_0| \ \nu^\perp \times ... \times K_n| \ \nu^\perp$ *υπάρχει μία κορυφή* L *του παραλληλεπιπέδου* $T_\nu(X)$, *τέτοια ώστε η* $\Phi_{D,X,j}(L + su_\nu(X))$ *να είναι σταθερή στο* $[-1, 1]$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε, πρώτα, ότι αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό μας για όλες τις $(n+1)$-άδες $X \in R := int(K_0| \ \nu^\perp) \cap ... \cap int(K_n| \ \nu^\perp)$. Η γενική περίπτωση προκύπτει από το γεγονός ότι η $u_{i, \ \nu}$ είναι συνεχής μέχρι και το σύνορο σε κάθε χορδή του $K_i| \ \nu^\perp$ (λόγω της συνέχειας των $f_{i, \ \nu}$ και $g_{i, \ \nu}$ σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα).

Τώρα, αφού η $u_{i, \ \nu}$ είναι συνεχής στο R, η (2.2), μαζί με κάποια επιχειρήματα συμπάγειας, συνεπάγεται ότι η ισότητα στην (2.1) θα πρέπει να ισχύει για κάθε επιλογή $X \in R$ και για όλα τα $\zeta > 0$. Για κάθε $X \in R$ έχουμε:

$$V(\,(T+u)\cap\{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}) = V(\,T\cap\{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}) = V(\,(T-u)\cap\{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}), \tag{2.3}$$

όπου $T = T_\nu(X), \ u = u_\nu(X)$ (το δεξιό μέλος της ισότητας προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση η, που ορίστηκε παραπάνω είναι άρτια). Παρατηρούμε ότι το $\{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}$ περιέχει το T όταν το ζ είναι αρκετά μεγάλο. Από την επιλογή του X προκύπτει ότι $V(T) > 0$, οπότε υπάρχει κάποιο $\zeta_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\zeta_0 = inf\{\zeta > 0 : \ T \subseteq \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\} \ \} \ .$$

Προφανώς το σύνορο του $\{\Phi_{D,X,j} < \zeta_0\}$ ακουμπάει το σύνορο του T σε κάποια κορυφή L του T. Άρα, από την (2.3) προκύπτει άμεσα ότι, τα σημεία $L+u$ και $L-u$ περιέχονται στο $\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$ και, αφού η L ανήκει στο $\partial\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$, συμπεραίνουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[L-u, L+u]$ βρίσκεται πάνω στο σύνορο του $\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$. Συνεπώς, $\Phi_{D,X,j}(L + su) = \zeta_0$ για κάθε s στο $[-1, 1]$.□

Λήμμα 2.4.2 *i) Έστω ότι τα κυρτά σώματα* $K_0, ..., K_n$ *δεν έχουν όλα το ίδιο κέντρο βάρους και έστω* $n \geq 1$. *Τότε, υπάρχουν κατευθύνσεις* $\nu_0, ..., \nu_n \in S^{d-1}$, *τέτοιες ώστε τα κυρτά σώματα* $S_{\nu_n} \circ ... \circ S_{\nu_0}(K_i)$, $i = 0, ..., n$ *να περιέχουν την αρχή των αξόνων στο εσωτερικό τους και, ταυτόχρονα, να μην έχουν όλα το ίδιο κέντρο βάρους.*
ii) Αν τα $K_1, ..., K_n$ *δεν έχουν όλα το* 0 *ως κέντρο βάρους τους, τότε υπάρχουν κατευθύνσεις* $\nu_0, ..., \nu_n$, *τέτοιες ώστε το* 0 *να μην είναι το κέντρο βάρους καθενός από τα* $S_{\nu_n} \circ ... \circ S_{\nu_0}(K_i)$, $i = 0, ..., n$, *αλλά όλα να το περιέχουν στο εσωτερικό τους.*

Απόδειξη. $i)$ Από επαγωγή, αρκεί να το δείξουμε για $n = 1$. Αν a_i είναι το βαρύκεντρο του K_i, $i = 0,\ 1$, μπορούμε να διαλέξουμε μία κατεύθυνση ν, για την οποία να υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in int(K_0)$, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[0, x_0]$ να είναι παράλληλο στο ν, αλλά το ν να μην είναι παράλληλο στο $[a_0, a_1]$. Τότε, $a_0|\ \nu^{\perp} \neq a_1|\ \nu^{\perp}$.

Προφανώς, το κέντρο βάρους του $S_\nu(K_i)$ είναι το $a_i|\ \nu^{\perp}$, $i = 0,\ 1$ και $0 \in int(S_\nu(K_0))$. Επιπλέον, αφού η Steiner συμμετρικοποίηση του $S_\nu(K_0)$ περιέχει στο εσωτερικό του την αρχή των αξόνων, από τα παραπάνω, μπορούμε να βρούμε μία κατεύθυνση $u \in S^{d-1}$ ούτως ώστε τα βαρύκεντρα των $S_u \circ S_\nu(K_0)$, $S_u \circ S_\nu(K_1)$ να είναι διαφορετικά, αλλά και τα δύο να περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους.
$ii)$ Παίρνουμε, απλώς, το K_0 να είναι ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα και εφαρμόζουμε το (i) για τα κυρτά σώματα $K_0, ..., K_n$.□

Το προηγούμενο λήμμα μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι $0 \in int(K_i)$, $i = 0, ..., n$. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $D = S$, ότι η τομή όλων των K_i είναι κενή και ότι ισχύει η ισότητα στην (1.8). Αφού το S_h δεν αυξάνει με την Steiner συμμετρικοποίηση, από το Λήμμα 2.4.2 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα τυχαία $K_0, ..., K_n$ με σώματα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους, αλλά δεν έχουν όλα το ίδιο βαρύκεντρο. Ειδικότερα, αυτά τα σώματα δεν είναι ομοιόθετα ελλειψοειδή με το ίδιο κέντρο.

Λήμμα 2.4.3 . *Σχεδόν για κάθε κατεύθυνση* $\nu \in S^{d-1}$ *έχουμε:*

$$k_{0,\ \nu}(x) = ... = k_{n,\ \nu}(x) = 0, \ \text{για κάθε}\ x \in \partial(K_i|\ \nu^{\perp}),\ i = 0, ..., n\ . \quad (2.4)$$

Απόδειξη. Έστω y ένα σημείο του K_i και ν μία κατεύθυνση στην S^{d-1}. Αν $k_{i,\ \nu}(y|\ \nu^{\perp}) \neq 0$, τότε προφανώς το y περιέχεται σε κάποιο ευθύγραμμο τμήμα του συνόρου του K_i, παράλληλο στην ν. Παρολαυτά, από ένα κλασσικό αποτέλεσμα των Ewald, Larman και Rogers [15], προκύπτει ότι το σύνολο όλων αυτών των κατευθύνσεων είναι μέτρου μηδέν, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.□

Απόδειξη του μονοσημάντου στον Θεώρημα 1.1.1:

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η ισότητα στην (1.8). Τότε, ισχύει η (2.2) για κάθε $\nu \in S^{d-1}$. Διαλέγουμε μία κατεύθυνση ν, για την οποία ισχύει η (2.4). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu = e_d$. Διαλέγουμε τυχαία σημεία $x_i \in K_i|\ \nu^{\perp}$, $i = 1, ..., d-1$, έτσι ώστε να είναι αφφινικώς ανεξάρτητα με το 0.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $K_i|\ \nu^{\perp}$, $i = 0, ..., n$. Κατά συνέπεια, κάθε ευθεία του $\nu^{\perp}$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, διαπερνά το σύνορο του $K_i|\ \nu^{\perp}$, για $i = 0, ..., n$.

Άρα, μπορούμε να διαλέξουμε σημεία $x_i \in \partial(K_i|\ \nu^\perp)$, $i = 0, d, d+1, ..., n$, συνευθειακά με το 0. Επιπλέον, η επιλογή μπορεί να γίνει έτσι ώστε το x_0 να είναι άκρο του ευθύγραμμου τμήματος που παράγεται από τα σημεία $x_0, x_d, ..., x_n$.

Έστω υ το άλλο άκρο του ευθύγραμμου τμήματος $conv\{x_i : i = 0, d, ..., n\}$, όταν $D = S$, B ή το άκρο, διαφορετικό του 0, του τμήματος $\sum_{i=d}^{n}[0, x_i]$ όταν $D = I$. Το Λήμμα 2.4.1 εγγυάται την ύπαρξη μίας κορυφής $L = (l_0, ..., l_n)$ του $T = T_\nu(X)$, τέτοια ώστε η $\Phi_{D,X,0}(L + su_\nu(X))$ να είναι σταθερή στο $[-1, 1]$ (όπου $X = (x_0, ..., x_n)$). Σημειώνουμε ότι $l_i = \pm k_i$, άρα $l_i = 0$ για $i = 0, d, ..., n$.

Ονομάζουμε, επίσης, β την ταχύτητα του σημείου $(\upsilon, 0)$ ως προς το σύστημα σκιών

$$conv\{(x_i, l_i + su_i) : i = 0, ..., n\} \quad (\textit{όταν } D = S,\ B) \qquad ή$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[0, (x_i, l_i + su_i)\Big] \quad (\textit{όταν } D = I).$$

Τώρα, για $D = S$ ή B έχουμε:

$$V\Big(conv(\{(x_i, l_i + su_i) : i = 0, 1, ..., d-1\} \cup \{(\upsilon, s\beta)\})\Big)$$

$$\leq V\Big(conv\{(x_i, l_i + su_i) : i = 0, ..., n\}\Big) \equiv \sigma\tau\alpha\vartheta\ ,$$

με ισότητα για $s = 0$. Το αριστερό μέλος είναι ο όγκος ενός συστήματος σκιών, οπότε κυρτή συνάρτηση του s. Κατά συνέπεια, η ισότητα θα πρέπει να ισχύει παντού στο $[-1, 1]$. Ομοίως και για την περίπτωση $D = I$.

Έχουμε δείξει το εξής:

$$V\Big(conv(\{(x_i, l_i + su_i) : i = 0, 1, ..., d-1\} \cup \{(\upsilon, s\beta)\})\Big) \equiv \sigma\tau\alpha\vartheta\ , \qquad (2.5)$$

$$V\Big(\sum_{i=0}^{d-1}[0, (x_i, l_i + su_i)] + [0, (\upsilon, s\beta)]\Big) \equiv \sigma\tau\alpha\vartheta\ . \qquad (2.6)$$

Παρατηρούμε ότι $x_0 = 0$ και $u_0 = l_0 = 0$, όταν $D = B$ ή I. Άρα, οι (2.5) και (2.6) δίνουν:

$$|\ det\Big[(x_0, l_0 + su_0, 1), ..., (x_{d-1}, l_{d-1} + su_{d-1}, 1), (\upsilon, s\beta, 1)\Big]| \equiv \sigma\tau\alpha\vartheta\ ,$$

συνεπώς

$$det\Big[(x_0, u_0, 1), ..., (x_{d-1}, u_{d-1}, 1), (\upsilon, \beta, 1)\Big] = 0\ .$$

Συμπεραίνουμε ότι τα σημεία (x_i, u_i), $i = 0, ..., d-1$, (υ, β) βρίσκονται πάνω στο ίδιο υπερεπίπεδο. Αφού η επιλογή των x_1, x_2 έγινε τυχαία, προκύπτει ότι το γράφημα των συναρτήσεων $u_{1,\ \nu}$ και $u_{2,\ \nu}$ περιέχεται σε αυτό το υπερεπίπεδο, γεγονός που δείχνει ότι οι $u_{1,\ \nu}$ και $u_{2,\ \nu}$ είναι περιορισμοί της ίδιας αφφινικής συνάρτησης. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για όλα τα ζεύγη δεικτών, προκύπτει ότι οι $u_{0,\ \nu}, ..., u_{n,\ \nu}$ είναι όλες περιορισμοί της ίδιας αφφινικής συνάρτησης. Από το Λήμμα 2.4.3 αυτή η ιδιότητα ισχύει για σχεδόν κάθε κατεύθυνση. Άρα, για σχεδόν κάθε κατεύθυνση ν τα μέσα όλων των χορδών των $K_0, ..., K_n$, παράλληλων στην ν, περιέχονται σε ένα κοινό υπερεπίπεδο H_ν. Από συνέχεια, κάτι τέτοιο ισχύει για όλες τις κατευθύνσεις. Επομένως, (βλέπε [2]) τα $K_0, ..., K_n$ είναι ελλειψοειδή. Επιπλέον, ελέγχεται εύκολα ότι μία γραμμική απεικόνιση που μετασχηματίζει το ελλειψοειδές K_1 σε μία μπάλα κέντρου 0, επίσης μετασχηματίζει και τα υπόλοιπα K_i σε μπάλες κέντρου 0. Προκύπτει άμεσα ότι όλα τα K_i είναι ομοιόθετα με το ίδιο κέντρο. Ειδικότερα, αν $D = B$ ή I, έχουμε $K_0 = \{0\}$, οπότε το κέντρο των K_i είναι η αρχή των αξόνων.□

2.5 Χαρακτηρισμοί καρτεσιανών γινομένων μπαλών

Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις ισότητας στην 1.9. Το κλειδί για τον σκοπό αυτό είναι το επόμενο:

Λήμμα 2.5.1 *Έστω $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ένα πολύτοπο με κορυφές $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$. Υποθέτουμε ότι οι κορυφές $\upsilon_1, ..., \upsilon_k$, $k \geq d$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο στήριξης H του Q και x είναι ένα σημείο του πολυτόπου που παράγεται από τις υ_i, $i = 1, ..., k$. Ορίζουμε το σύστημα σκιών*

$$Q_s = conv\Big(\{\upsilon_1 + \beta_1 s\nu, ..., \upsilon_n + \beta_n s\nu, x + \beta_0 s\nu\} \cup P_s\Big) \ , \ s \in [s_0, s_1] \ ,$$

για κάποιους $\beta_0, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$, $s_0 < 0 < s_1$ και τυχόν σύστημα σκιών $\{P_s\}_{s\in[s_0,\ s_1]}$ προς κάποια κατεύθυνση $\nu \in S^{d-1}$. Αν ο όγκος του Q_s είναι αφφινική συνάρτηση της παραμέτρου s και $Q_0 = Q$, τότε για κάθε s στο $[s_0, s_1]$, τα σημεία $x + \beta_0 s\nu$, $\upsilon_1 + \beta_1 s\nu, ..., \upsilon_k + \beta_k s\nu$ περιέχονται στο ίδιο υπερεπίπεδο στήριξης του Q_s.

Απόδειξη. Αν το Q είναι διάστασης μικρότερης από d, το γεγονός ότι η συνάρτηση $V(Q_s)$ είναι αφφινική, συνεπάγεται ότι $V(Q_s) = 0$, $s \in [s_0, s_1]$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε s, το Q_s περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο και το αποτέλεσμα έπεται.

Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το Q είναι διάστασης d. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fubini, έχουμε:

$$Q_s = \int_{z\in\ Q|\ \nu^\perp} V_1(Q_s \cap (z + \nu\mathbb{R}))\ dz \ ,$$

όπου $V_1(\cdot)$ είναι το μονοδιάστατο μέτρο Lebesque. Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι κυρτή ως προς s και ο όγκος του Q_s είναι αφφινική συνάρτηση του s. Ένα επιχείρημα συνέχειας παρόμοιο με αυτό του Λήμματος 2.4.1 εγγυάται ότι η συνάρτηση (ως προς s) $V_1(Q_s \cap (z+\nu\mathbb{R}))$ είναι αφφινική στο $[s_0, s_1]$, για κάθε z στο $Q|\ \nu^{\perp}$.

Η τομή του Q με κάθε ευθεία που περνάει από το x και είναι παράλληλη στην ν είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ (πιθανώς εκφυλισμένο). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το x περιέχεται στην κυρτή θήκη των $\upsilon_1, ..., \upsilon_d$, όπου τα υ_i, $i = 1, ..., d$, είναι αφφινικώς ανεξάρτητα και ότι η ν δεν είναι παράλληλη στο H (στην αντίθετη περίπτωση ο ισχυρισμός μας είναι προφανής). Τότε, $x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \upsilon_i$ για κάποια $\lambda_i \geq 0$, με $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1$ και $y = \sum_{j=1}^{d} \mu_j \upsilon_{i_j}$, για κάποια $i_1, ..., i_d \in \{1, ..., n\}$ και $\mu_j \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{d} \mu_i = 1$. Θέτουμε $\gamma := \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \beta_i$ και $\delta := \sum_{j=1}^{d} \lambda_{i_j} \beta_{i_j}$. Για να δείξουμε ότι τα $x + \beta_0 s\nu$, $\upsilon_1 + \beta_1 s\nu, ..., \upsilon_d + \beta_d s\nu$ βρίσκονται στο ίδιο υπερεπίπεδο, αρκεί να δείξουμε ότι $\beta_0 = \gamma$. Προφανώς, $V_1([x+\beta_0 s\nu, y+\delta s\nu])$, $V_1([x+\gamma s\nu, y+\delta s\nu]) \leq V_1(Q_s \cap (x+\mathbb{R}\nu))$, με ισότητα για $s = 0$. Αφού οι συναρτήσεις στο αριστερό μέλος των προηγούμενων ανισοτήτων είναι κυρτές και αυτή στο δεξιό μέλος είναι αφφινική, προκύπτει ότι η ισότητα θα πρέπει να ισχύει και στις δύο ανισότητες παντού στο $[s_0, s_1]$, άρα $\beta_0 = \gamma$.

Στη συνέχεια, παίρνουμε οποιοδήποτε σημείο z από το εσωτερικό του simplex που παράγεται από τα $\upsilon_1, ..., \upsilon_d$. Τότε, $z = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \upsilon_i$ για κάποιο $\lambda_i > 0$. Θέτουμε: $\gamma' = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \beta_i$. Αφού τα ν και H δεν είναι παράλληλα, το $z+\gamma' s\nu$ είναι εσωτερικό σημείο του simplex που παράγεται από τα $\upsilon_1+\beta_1 s\nu, ..., \upsilon_d+\beta_d s\nu$ Ωστόσο, $Q_s = conv\{Q_s \cup \{z+\gamma' s\nu\}\}$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις το Λήμματος. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το $z + \gamma' s\nu$ είναι συνοριακό σημείο του Q_s, γεγονός που δείχνει ότι τα $\upsilon_1 + \beta_1 s\nu, ..., \upsilon_d + \beta_d s\nu$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο στήριξης του Q_s. Τέλος, εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα σε όλες τις d-άδες αφφινικώς ανεξάρτητων σημείων από τα $\upsilon_1, ..., \upsilon_k$, συμπεραίνοντας ότι όλα τα $\upsilon_i + \beta_i s\nu$, $i = 1, ..., k$ βρίσκονται στο ίδιο υπερεπίπεδο του Q_s.$\square$

Πρωτού ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2, αποδεικνύουμε μία αναδιατύπωση του Λήμματος 2.5.1, που θεωρούμε ενδιαφέρουσα:

Πόρισμα 2.5.2 *Έστω Q ένα πολύτοπο πλήρους διάστασης και*

$$Q_s = conv\{x + \beta(x)s\nu : x \in Q\},\ s \in [-1, 1]$$

ένα σύστημα σκιών στην κατεύθυνση ν. Αν ο όγκος του Q_s είναι αφφινική συνάρτηση ως προς s, τότε το Q_s είναι επίσης πολύτοπο, συνδυαστικώς ισόμορφο με το Q, για κάθε s στο $(-1, 1)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό μας σε μία μικρή περιοχή του 0. Έστω $\upsilon_1,...,\upsilon_n$ οι κορυφές του Q. Θέτουμε $\beta_i := \beta(\upsilon_i)$, $i = 1,...,n$. Προφανώς,

$$Q_s = conv\{\upsilon_1 + s\beta_1\nu, ..., \upsilon_n + s\beta_n\nu\} \ ,$$

αφού ο όγκος του δεξιού μέλους είναι κυρτή συνάρτηση και κυριαχείται από την αφφινική συνάρτηση $V(Q_s)$. Από συνέχεια προκύπτει ότι οι κορυφές του Q_s είναι ακριβώς τα σημεία $\upsilon_i + s\beta_i\nu$, για s κοντά στο 0. Από το Λήμμα 2.5.1, προκύπτει ότι αν $\upsilon_1,...,\upsilon_m$ είναι οι κορυφές μίας έδρας F του Q, τότε οι κορυφές $\upsilon_1 + s\beta_1\nu, ..., \upsilon_m + s\beta_m\nu$ περιέχονται σε μία κοινή έδρα F_s του Q_s. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των Q και Q_s, συμπεραίνουμε ότι αυτές είναι ακριβώς οι κορυφές της έδρας F_s. Ομοίως, οι έδρες του Q_s είναι ακριβώς της μορφής F_s, όπου F είναι έδρα του Q. Το ζητούμενο έπεται.□

Απόδειξη του μονοσημάντου στο Θεώρημα 1.1.2:

Ας υποθέσουμε, πρώτα, ότι $D = S$ ή B. Διαλέγουμε τυχαίο $x_1 \in K_1|\ \nu^{\perp}$. Από το Λήμμα 2.4.2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 0 περιέχεται στο εσωτερικό όλων των K_i, άρα μπορούμε να επιλέξουμε $x_2 = 0$ και $x_i \in K_i|\ \nu^{\perp}$, $i = 0, 3, ..., n$, έτσι ώστε το πολύτοπο που παράγεται από τα σημεία $x_0, ..., x_n$ να είναι k-διάστατο, όπου $k = d - j$. Μπορούμε και πάλι να υποθέσουμε ότι $\nu = e_d$. Από το Λήμμα 2.4.1, υπάρχει ένα σημείο L του T και κάποιο $\zeta_0 \geq 0$ τέτοια ώστε:

$$\Phi_{D,X,j}(L + su) = \Phi_{D,X,j}(L) = \zeta_0 \ , \ \forall \ s \in [-1, 1] \ . \tag{2.7}$$

Θα δείξουμε ότι, αν $D = S$ ή B, τότε $u_{1,\ \nu}(x_1) = u_{0,\ \nu}(x_0)$, που θα σημαίνει ότι $u_{1,\ \nu} = u_{0,\ \nu} = \sigma\tau\alpha\vartheta$. Αυτό θα έχει ως συνέπεια, για οποιαδήποτε ν στην S^{d-1} όλα τα μέσα των χορδών των K_0, K_1 να βρίσκονται στο ίδιο υπερεπίπεδο, που είναι ορθογώνιο στην ν. Άρα, (βλέπε [2]) τα K_0, K_1 θα είναι υποχρεωτικά μπάλες και, ομοίως, μπάλες θα είναι και τα $K_2, ..., K_n$. Επίσης, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1, τα $K_0, ..., K_n$ θα έχουν όλα το ίδιο κέντρο και αν $D = B$, το κοινό κέντρο των K_i θα είναι η αρχή των αξόνων.

Από τον τύπο του Kubota και την (2.7) λαμβάνουμε:

$$\int_{\mathcal{G}_{d,k}} V_k(\ conv\{(x_0, l_0 + su_0), ..., (x_n, l_n + su_n)\}|\ E)\ d\mu(E)$$

$$= \int_{\mathcal{G}_{d,k}} V_k(\ conv\{(x_0, l_0), ..., (x_n, l_n)\}|\ E)\ d\mu(E)\ ,\ s \in [-1, 1]\ .$$

Η κυρτότητα ως προς s συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε θα πρέπει να είναι αφφινική ως προς s. Προφανώς, το πολύτοπο P που παράγεται από τα σημεία (x_i, l_i), $i = 0, ..., n$, είναι διάστασης k ή $k + 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σημεία (x_i, l_i), $i = 0, ..., k$, παράγουν έναν k-διάστατο αφφινικό υπόχωρο στήριξης H_0 του P, όχι παράλληλο στην ν.

Έστω G ένας $(k+1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, που περιέχει το P και E ένας k-διάστατος υπόχωρος του G, κάθετος στον H_0 (δηλ. ο E περιέχει ένα διάνυσμα ορθογώνιο στον H_0). Θέτουμε,

$$Q = conv\{(x_0, l_0), ..., (x_n, l_n)\}|\ E\ .$$

Τότε το Q είναι διάστασης k ή $k-1$. Επιπλέον, τα σημεία $(x_i, l_i)|\ E$, $i = 0, ..., k$, περιέχονται στην ίδια $(k-1)$-διάστατη πλευρά του Q. Επιπρόσθετα, ο k-διάστατος όγκος του συστήματος σκιών

$$Q_s := conv\{(x_0, l_0 + su_0), ..., (x_n, l_n + su_n)\}|\ E$$

είναι αφφινική συνάρτηση της παραμέτρου s. Σημειώνουμε, επίσης ότι $(0, l_2) \in P$, οπότε $\nu = e_d \in G$ (το l_2 δεν μπορεί να ισούται με 0, αφού υποθέσαμε ότι η αρχή των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο όλων των K_i), άρα τα σημεία $(x_i, l_i + su_i)$, $i = 0, ..., n$, ανήκουν στον G για κάθε s στο $[-1, 1]$.

Τώρα, το Λήμμα 2.5.1 εγγυάται ότι τα σημεία $(x_i, l_i + su_i)|\ E$, $i = 0, ..., k$ περιέχονται στο ίδιο υπερεπίπεδο του E. Από αυτό προκύπτει ότι ο αφφινικός υπόχωρος H_s που παράγεται από τα σημεία $(x_i, l_i + su_i)$, $i = 0, ..., k$, είναι επίσης κάθετος στον E για κάθε s στο $[-1, 1]$.

Ειδικότερα, δείξαμε ότι για κάθε k-διάστατο υπόχωρο E του G, κάθετο στον αφφινικό υπόχωρο H_0 του G, ο E είναι επίσης κάθετος στον $H_1 \subseteq G$. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί μόνο αν οι H_0 και H_1 είναι παράλληλοι. Από υπόθεση, το διάνυσμα $\nu = e_d$ δεν είναι παράλληλο στο H_0. Αφού οι H_0 και H_1 είναι της ίδιας διάστασης, οι γραμμικοί χώροι που παράγονται από τα $(x_i - x_0, l_i - l_0)$ και $(x_i - x_0, l_i - l_0 + u_i - u_0)$, $i = 1, ..., k$, αντιστοίχως ταυτίζονται, οπότε $u_1 = u_0$.

Η απόδειξη όταν $D = I$ βασίζεται στην ίδια ιδέα. Περιγράφουμε εν συντομία το επιχείρημα: Η επιλογή των $(x_1, ..., x_n) \in K_1|\ \nu^\perp \times ... \times K_n|\ \nu^\perp$ μπορεί να γίνει ώστε το ζωνότοπο $P = \sum_{i=1}^n [0, (x_i, l_i)]$ να είναι ένα $(k+1)$-διάστατο παραλληλεπίπεδο (πράγματι, μπορούμε να επιλέξουμε κάποια από τα x_i να είναι 0, αν χρειάζεται). Όπως πριν, η ισότητα στην (2.1) αναγκάζει τον k-διάστατο όγκο του ζωνοτόπου $\sum_{i=1}^n [0, (x_i, l_i + su_i)]\ |\ E$ να είναι αφφινική συνάρτηση του s, για κάθε k-διάστατο υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $[0, (x_i, l_i)]$, $i = 1, ..., k$ παράγουν κάποια έδρα F του P, όχι παράλληλη στη $\nu = e_d$ και παίρνοντας τον E να είναι κάθετος στην F, καταλήγουμε (χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5.1) ότι το k-διάστατο παραλληλεπίπεδο που παράγεται από τα $(x_i, l_i + su_i)$, $i = 1, ..., k$, ταυτίζεται πάντα με την F. Αυτό δείχνει ότι $u_1 = ... = u_n = 0$ και το ζητούμενο έπεται.$\square$

2.6 Μία γενίκευση του Θεωρήματος των Rogers και Shephard

Θα μπορούσε κάποιος να ρωτήσει αν η μέθοδος που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2.1 μπορεί να εφαρμοστεί και στις περισσότερες διαστάσεις. Η απάντηση είναι όχι, αφού για $d \geq 3$, υπάρχει πολύτοπο K του $\mathbb{R}^d$, του οποίου οι κορυφές δεν μπορούν να κινηθούν με τρόπο ώστε να παραχθεί ένα σύστημα σκιών $\{K_t\}_{t\in[t_0,t_1]}$ με μη αφφινική συνάρτηση ταχύτητας, το 0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[t_0, t_1]$ και ο όγκος να είναι αφφινική συνάρτηση της παραμέτρου t. Πολύ δε περισσότερο, δεν μπορεί κάποιος να κατασκευάσει μη τετριμμένη παράλληλη χορδική κίνηση σε ένα διάστημα γύρω από το 0. Ένα τέτοιο παράδειγμα στις τρεις διαστάσεις είναι ένα εξάεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι τετράπλευρα και του οποίου όλες οι ακμές είναι ανά δύο μη παράλληλες. Ανάλογα παραδείγματα μπορούν να κατασκευαστούν και στην κεντρικά συμμετρική περίπτωση. Στην πραγματικότητα, πολύτοπα με αυτή την ιδιότητα είναι ο κανόνας και όχι η εξαίρεση, εκτός φυσικά από την περίπτωση του επιπέδου.

Ίσως όμως, να υπάρχουν κάποιοι άλλοι μετασχηματισμοί πέρα από τα συστήματα σκιών, για τους οποίους να υπάρχει ένας έλεγχος ως προς τον όγκο (π.χ. να είναι αφφινική συνάρτηση της παραμέτρου) και να ισχύει κάποια ιδιότητα κυρτότητας ως προς τα συναρτησοειδή τύπου Sylvester (ή και άλλα συναρτησοειδή). Αποδεικνύουμε το εξής σχετικό:

Θεώρημα 2.6.1 *Έστω n ένας ακέραιος, μ ένα Borel μέτρο του $(\mathbb{R}^d)^n$, απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesque, με θετική πυκνότητα και K ένα κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^d$. Έστω, ακόμη, X ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και μία οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $\alpha_i : X \to \mathbb{R}^d$, $i \in I$. Θέτουμε $K_x = conv\{x_i + \alpha_i(x) : x_i \in Ext(K),\ i \in I\}$. Αν η συνάρτηση*

$$X \ni x \mapsto \mu(K_{1,x} \times ... \times K_{n,x})$$

είναι κυρτή για οποιαδήποτε n-άδα simplexes $K_1, ..., K_n$, με κορυφές από το $Ext(K)$, τότε και η συνάρτηση $X \ni x \mapsto \mu(K_x^n)$ είναι κυρτή.

Το Θεώρημα 2.6.1, ασφαλώς αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος των Rogers και Shephard, ότι δηλαδή ο όγκος σε ένα σύστημα σκιών είναι κυρτή συνάρτηση της παραμέτρου. Αυτό γιατί αν $n = 1$ και $\mu(\cdot) = V(\cdot)$, ο όγκος ενός συστήματος σκιών που αποτελείται από simplexes του $\mathbb{R}^d$, είναι της μορφής:

$$V\Big(conv\{x_1 + \alpha_1 t\nu, ..., x_d + \alpha_d t\nu\}\Big) = d!|det(x_1 + \alpha_1 t\nu, ..., x_d + \alpha_d t\nu)|\ ,$$

που είναι κυρτή συνάρτηση του t.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε πρώτα το εξής εύκολο:

Λήμμα 2.6.2 *Έστω P, Q δύο πολύτοπα του $\mathbb{R}^d$ με το ίδιο πλήθος κορυφών $x_1, ..., x_k$ και $y_1, ..., y_k$ αντίστοιχα, $k \geq d+2$. Έστω, επίσης, ότι για οποιουσδήποτε δείκτες $i_1, ..., i_{d+2}$ από τα $1, ..., k$, διαφορετικούς ανά δύο ισχύουν τα εξής:*
$i)$Οι κορυφές $x_{i_1}, ..., x_{i_{d+2}}$ ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο αν και μόνο αν οι $y_{i_1}, ..., y_{i_{d+2}}$ ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο.
$ii)$Αν τα σύνολα $\{x_{i_1}, ..., x_{i_d}, x_{i_{d+1}}\}$ και $\{x_{i_1}, ..., x_{i_d}, x_{i_{d+2}}\}$ είναι αφφινικώς ανεξάρτητα (άρα το αντίστοιχο ισχύει και για τις κορυφές $y_{i_1}, ..., y_{i_{d+2}}$), τότε:
Οι $x_{i_{d+1}}$, $x_{i_{d+2}}$ ανήκουν στον ίδιο ανοιχτό ημίχωρο σχετικά με το υπερεπίπεδο που παράγουν οι $x_{i_1}, ..., x_{i_d}$, αν και μόνο αν οι $y_{i_{d+1}}$, $y_{i_{d+2}}$ ανήκουν στον ίδιο ανοιχτό ημίχωρο σχετικά με το υπερεπίπεδο που παράγουν οι $y_{i_1}, ..., y_{i_d}$.
Τότε, ισχύει το εξής: Το σύνολο $\{x_{j_1}, ..., x_{j_m}\}$ αντιστοιχεί σε πλευρά του P, αν και μόνο αν το σύνολο $\{y_{j_1}, ..., y_{j_m}\}$ αντιστοιχεί σε πλευρά του Q. Δηλαδή, υπάρχει μία συνδυαστική ισομορφία μεταξύ των P και Q, η οποία σέβεται την διάταξη των δεικτών.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1:

Με τον όρο τριγωνισμός θα εννοούμε υποδιαίρεση ενός πολυτόπου K σε μη επικαλυπτόμενα simplexes, τα οποία έχουν ως κορυφές τους, κορυφές του K. Καταρχήν, αρκεί να δείξουμε ότι ο περιορισμός της εν λόγω συνάρτησης σε κάθε ευθεία του X είναι κυρτή συνάρτηση, δηλαδή αρκεί να υποθέσουμε ότι $dimX = 1$ ή $X = \mathbb{R}$. Ακόμη, αφού το (σημειακό) όριο κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση και λόγω της απόλυτης συνέχειας του μ, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι πολύτοπο. Επίσης, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t_0, υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε η συνάρτηση $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mu(K_t^n)$ να είναι κυρτή στην περιοχή $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Τέλος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_0 = 0$ και $\alpha_i(0) = 0$, για κάθε i στο I.

Έστω $x_1, ..., x_m$ οι κορυφές του K. Τότε, λογω της συνέχειας των α_i, υπάρχει περιοχή του 0, στην οποία τα σημεία $x_i + \alpha_i(t)$, $i = 1, ..., m$, να είναι ακριβώς οι κορυφές του K_t, για όλα τα t στην περιοχή. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε t_1, t_2 στο $(0, \delta)$, για τα πολύτοπα $P = K_{t_1}$ και $Q = K_{t_2}$, να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 2.6.2. Αλλά, επειδή το πλήθος των κορυφών είναι πεπερασμένο, αρκεί να βρούμε τέτοιο δ για μία $(d+2)$-άδα δεικτών. Πιο συγκεκριμμένα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε t_1, t_2 στο $(0, \delta)$ να ισχύουν:
$i)$ Αν τα σημεία $x_1 + \alpha_1(t_1), ..., x_{d+1} + \alpha_{d+1}(t_1)$ είναι αφφινικώς εξαρτημένα, τότε τα $x_1 + \alpha_1(t_2), ..., x_{d+1} + \alpha_{d+1}(t_2)$ είναι αφφινικώς εξαρτημένα.
$ii)$Αν τα σύνολα $\{x_1 + \alpha_1(t_1), ..., x_d + \alpha_d(t_1), x_{d+1} + \alpha_{d+1}(t_1)\}$ και $\{x_1 + \alpha_1(t_1), ..., x_d + \alpha_d(t_1), x_{d+2} + \alpha_{d+2}(t_1)\}$ είναι αφφινικώς ανεξάρτητα και τα σημεία $x_{d+1} + \alpha_{d+1}(t_1)$, $x_{d+2} + \alpha_{d+2}(t_1)$ ανήκουν στον ίδιο ανοιχτό ημίχωρο του υπερεπιπέδου που παράγεται από τα σημεία $x_1 + \alpha_1(t_1), ..., x_d + \alpha_d(t_1)$, τότε και τα $x_{d+1} + \alpha_{d+1}(t_2)$, $x_{d+2} + \alpha_{d+2}(t_2)$ ανήκουν στον ίδιο ανοιχτό ημίχωρο του

υπερεπιπέδου που παράγεται από τα $x_1+\alpha_1(t_2),...,x_d+\alpha_d(t_2)$.

Αν υπάρχει περιοχή $(0,\delta)$, τέτοια ώστε τα $x_i+\alpha_i(t)$, $i=1,...,d+1$, το δ είναι το ζητούμενο για το (i). Αλλιώς, υπάρχει ακολουθία θετικών αριθμών $\{t_j\}$, με $t_j\to 0$, τέτοια ώστε τα σημεία $x_i+\alpha_i(t_j)$, $i=1,...,d+1$ να είναι αφφινικώς εξαρτημένα, για όλους τους j. Άρα,

$$V\Big(conv\{x_i+\alpha_i(t_j):i=1,...,d+1\}\Big)=0\ ,\ \forall j\in\mathbb{N}$$

και από την απόλυτη συνέχεια του μ και την κυρτότητα της υπόθεσης, έχουμε:

$$\mu\Big((conv\{x_i+\alpha_i(t):i=1,...,d+1\})^n\Big)=0\ ,\ \forall t\in[0,t_1]\ .$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει το ζητούμενο δ για το (i).

Επιπλέον, λόγω του (i), υπάρχει $\delta'>0$, τέτοιο ώστε είτε για κάθε t στο $(0,\delta')$, τα σύνολα $\{x_i+\alpha_i(t):i=1,...,d,d+1\}$ και $\{x_i+\alpha_i(t):i=1,...,d,d+2\}$ να είναι αφφινικώς ανεξάρτητα είτε για κάθε t στο $(0,\delta')$ ένα από αυτά να μην είναι. Στην πρώτη περίπτωση, τα $x_{d+1}+\alpha_{d+1}(t)$, $x_{d+2}+\alpha_{d+2}(t)$ θα ανήκουν για κάθε $t\in(0,\delta')$ στον ίδιο ή για κάθε $t\in(0,\delta')$, σε αντίθετους ανοιχτους ημίχωρους που ορίζονται από το υπερεπίπεδο $aff\{x_i+\alpha_i(t):i=1,...,d\}$. Αλλιώς, λόγω συνέχειας, θα υπήρχε $t_0\in(0,\delta')$, τέτοιο ώστε το $x_{d+1}+\alpha_{d+1}(t_0)$ ή το $x_{d+2}+\alpha_{d+2}(t_0)$ να ανήκουν στο $aff\{x_i+\alpha_i(t_0):i=1,...,d\}$, πράγμα αδύνατο. Άρα, υπάρχει το ζητούμενο δ και για το (ii).

Άρα, τελικά από το Λήμμα 2.6.2, υπάρχει μία συνδυαστική ισομορφία μεταξύ των K_{t_1} και K_{t_2}, που σέβεται την διάταξη των δεικτών, για κάθε t_1,t_2 στο $(0,\delta)$. Αντικαθιστώντας το t με το $-t$, κάποιος παίρνει το ίδιο σε κάποιο διάστημα $(-\delta_1,0)$. Θέτουμε για απλότητα, $\varepsilon=min\{\delta,\delta_1\}$. Έστω, τώρα $S=\{K_1,...,K_q\}$ ένας τριγωνισμός του K. Τότε, τα $K_{i,t}$, $i=1,...,q$, είναι όλα μη επικαλυπτόμενα και θετικού όγκου παντού στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$, αφού από αυτά που δείξαμε, η σχετική θέση κορυφών και υπερεπιπέδων που παράγονται από κορυφές, παραμένει αμετάβλητη.

Για τυχαίο $t_1\in(0,\varepsilon)$, το σύνολο $\{K_{1,t_1},...,K_{q,t_1}\}$ επεκτείνεται σε έναν τριγωνισμό $\{K_{1,t_1},...,K_{q,t_1},K_1^+,...,K_r^+\}$ του K_{t_1}. Λόγω της συνδυαστικής ισομορφίας στην περιοχή $(0,\varepsilon)$, το σύνολο $\{K_{1,t},...,K_{q,t},K_{1,t}^+,...,K_{r,t}^+\}$ αποτελεί τριγωνισμο του K_t, για όλα τα t στο $(0,\varepsilon)$, όπου

$$K_{i,t}^+:=conv\{x_j+\alpha_j(t):x_j+\alpha_j(t_1)\ \textit{κορυφή του}\ K_i^+\}\ .$$

Επίσης, επειδή

$$\mu(K_t^n)\to\mu(K_0^n)=\sum_{(i_1,...,i_n)\in\{1,...,q\}^n}\mu(K_{i_1,0}\times...\times K_{i_n,0})\ ,$$

είναι προφανές ότι $\mu(T_{1,0} \times ... \times T_{n,0}) = 0$, όπου τουλάχιστον ένα από τα $T_{i,0}$ ισούται με κάποιο $K_{j,0}^+$. Εργαζόμενοι ομοίως για $t < 0$, βρίσκουμε αντιστοίχως simplexes $K_{1,t}^-, ..., K_{s,t}^-$, με τις ίδιες ιδιότητες.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f,\ g,\ h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, με

$$f(t) = \sum_{(i_1,...,i_n)\in\{1,...,q\}^n} \mu(K_{i_1,t} \times ... \times K_{i_n,t}) \ ,$$

$$g(t) = \sum \mu(T_{1,t} \times ... \times T_{n,t}) \cdot \mathbf{1}(t > 0) \ ,$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις n-άδες $(T_{1,t}, ..., T_{n,t})$ από το σύνολο $\{K_{1,t}, . .., Kn, t, K_{1,t}^+, ..., K_{r,t}^+\}$ και τουλάχιστον ένα από τα $T_{i,t}$ ισούται με κάποιο από τα $K_{j,t}^+$ και

$$h(t) = \sum \mu(T'_{1,t} \times ... \times T'_{n,t}) \cdot \mathbf{1}(t < 0) \ ,$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις n-άδες $(T'_{1,t}, ..., T'_{n,t})$ από το σύνολο $\{K_{1,t}, . .., Kn, t, K_{1,t}^-, ..., K_{r,t}^-\}$ και τουλάχιστον ένα από τα $T'_{i,t}$ ισούται με κάποιο από τα $K_{j,t}^-$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι f, g, h είναι κυρτές. Επίσης, $\mu(K_t^n) = f(t) + g(t) + h(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Άρα, η συνάρτηση $t \mapsto \mu(K_t^n)$ είναι κυρτή στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$. $\square$

2.7 Χαρακτηρισμοί κεντρικής συμμετρίας

Σε αυτή την παράγραφο ασχολούμαστε με ένα πρόβλημα τοπολογικής φύσεως, που αφορά σε μία ειδική κατηγορία συστημάτων σκιών, τη Steiner συμμετρικοποίηση. Πιο συγκεκριμμένα, αν U είναι ένα δεδομένο υποσύνολο της S^{d-1}, για το οποίο είναι γνωστό ότι για κάθε ν στο U, η Steiner συμμετρικοποίηση του K στην κατεύθυνση ν είναι κεντρικά συμμετρικό σώμα. Προκύπτει τότε ότι το K είναι κεντρικά συμμετρικό;

Είναι προφανές ότι μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα σύνολα U με οσαδήποτε στοιχεία, για τα οποία το προηγούμενο ερώτημα να έχει αρνητική απάντηση, όπως δείχνουν τα παραδείγματα των κανονικών πολυγώνων, με περιττό πλήθος κορυφών. Δεν γνωρίζουμε, πάντως, αν υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα σύνολα U, με πεπερασμένου πλήθους σημεία συσσώρευσης (έστω και στο επίπεδο), που να χαρακτηρίζουν την κεντρική συμμετρία. Αποδεικνύουμε αμέσως το παρακάτω:

Θεώρημα 2.7.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα και ένα μη κενό, ανοιχτό σύνολο $U \subseteq S^{d-1}$, τέτοιο ώστε για κάθε $\nu \in U$, η Steiner συμμετρικοποίηση $S_\nu(K)$, στην κατεύθυνση ν να έχει κεντρική συμμετρία. Τότε, και το K έχει κεντρική συμμετρία.*

Απόδειξη: Έστω ότι έχουμε δείξει το ζητούμενο για $d = 2$. Θα δείξουμε, τότε, ότι ισχύει για κάθε $d \geq 3$.

Έστω $\nu \in U \subseteq S^{d-1}$. Θεωρούμε έναν διδιάστατο υπόχωρο H του $\mathbb{R}^d$, τέτοιο ώστε $dim(K \cap H) = 2$ και $\nu \in H$. Το $U \cap H$ είναι ανοιχτό και μη κενό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του H. Η Steiner συμμετρικοποίηση $S_{\nu,H}(K \cap H)$ του $K \cap H$ (μέσα στον χώρο H), ισούται με $S_\nu(K) \cap H$, άρα από υπόθεση, το $S_{\nu,H}(K \cap H)$ έχει κεντρική συμμετρία. Το ίδιο, όμως, ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη κατεύθυνση στο $U \cap H$, άρα αφού υποτείθεται ότι το δείξαμε για $d = 2$, το $K \cap H$ έχει κάποιο κέντρο συμμετρίας Σ. Τότε, όμως, και το $S_{\nu,H}(K \cap H)$ έχει κάποιο κέντρο συμμετρίας Σ' και ισχύει $\Sigma' = \Sigma|\nu^\perp$. Άρα, το Σ είναι το μέσω της χορδής του K που είναι παράλληλη στην ν και διέρχεται από το Σ'. Αλλά το Σ' είναι κέντρο του $S_\nu(K) \cap H$, άρα και του $S_\nu(K)$, συνεπώς εξαρτάται μόνο από το ν και όχι από την επιλογή του υπόχωρου H. Επομένως, το ίδιο ισχύει και για το Σ και αφού το K γράφεται ως ένωση όλων των διδιάστατων υπόχωρων που πληρούν τις υποθέσεις που έγιναν για το H, το Σ είναι μέσο κάθε χορδής του K που διέρχεται από το Σ, άρα κέντρο συμμετρίας του K. Μένει, λοιπόν να δείξουμε τον ισχυρισμό μας για $d = 2$.

Έστω, πάλι, $\nu \in U \subseteq S^1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ν είναι παράλληλη στον άξονα των y. Έστω $A' = (\alpha, 0)$ το κέντρο βάρους του $S_\nu(K)$. Αν A είναι το κέντρο βάρους του K, τότε προφανώς $A' = A|\nu^\perp$. Επίσης, αν

$$K = \{(x, y) : x \in [\gamma, \delta],\ f(x) \leq y \leq g(x)\}\ ,$$

τότε

$$S_\nu(K) = \{(x, y) : x \in [\gamma, \delta], (f(x) - g(x))/2 \leq y \leq (g(x) - f(x))/2\}\ .$$

Λόγω κεντρικής συμμετρίας, έχουμε $[\gamma, \delta] = [-\theta + \alpha, \theta + \alpha]$, για κάποιο $\theta > 0$ και $g(x + \alpha) - f(x + \alpha) = g(-x + \alpha) - f(-x + \alpha)$, για κάθε x στο $[-\theta, \theta]$. Άρα, έχουμε δείξει ότι δύο οποιεσδήποτε χορδές του K, που είναι παράλληλες προς την ν και ισαπέχουν από την παράλληλη προς την ν ευθεία, που διέρχεται από το A (άρα και από το A'), έχουν ίσα μήκη.

Ορίζουμε το σύνολο $J :=$

$$\{x \in (-\theta, \theta) : A \text{ μέσο της χορδής } [(-x+\alpha, f(-x+\alpha)), (-x+\alpha, g(-x+\alpha))]\}\ .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $J = (-\theta, \theta)$. Το J είναι προφανώς μη κενό και κλειστό στο σύνολο $(-\theta, \theta)$. Μένει να δείξουμε ότι είναι και ανοιχτό. Επειδή το U είναι ανοιχτό και η ν είναι παράλληλη στον άξονα y, υπάρχει περιοχή I του x, τέτοια ώστε για κάθε y στο I, η παράλληλη κατεύθυνση στη χορδή $[(-y + \alpha, f(-y + \alpha)), (x + \alpha, g(x + \alpha))]$ να περιέχεται στο U. Έστω $w \in I$. Ονομάζουμε: $B = (-x + \alpha, f(-x + \alpha))$, $\Gamma = (-x + \alpha, f(-x + \alpha))$, $\Delta = (x + \alpha, f(x +$

$\alpha))$, $E = (x+\alpha, g(x+\alpha))$, $B' = (-w+\alpha, f(-w+\alpha))$. Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με $BA = AE$, επομένως ισχύει $A\Gamma = \Delta A$. Θεωρούμε, τώρα, το σημείο E' του συνόρου του K, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $\Delta E'$ να είναι παράλληλο στο $\Gamma B'$. Αφού $A\Gamma = A\Delta$, προκύπτει ότι οι χορδές $B'\Gamma$ και $E'\Delta$ ισαπέχουν από την ευθεία που είναι παράλληλη σε αυτές και διέρχεται από το A. Επειδή $w \in I$, η Steiner συμμετρικοποίηση στην κατεύθυνση, παράλληλη στη χορδή $B'\Gamma$, είναι κεντρικά συμμετρικό σώμα, άρα τα μήκη των $B'\Gamma$ και $E'\Delta$ είναι ίσα. Και πάλι, αφού $A\Gamma = A\Delta$ και το $B'\Gamma E'\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, το A είναι μέσο του $B'E'$, άρα το $A' = (\alpha, 0) = A|\nu^{\perp}$ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $[B'|\nu^{\perp}, E'|\nu^{\perp}]$. Αλλά, $B'|\nu^{\perp} = (-w+\alpha, 0)$, άρα $E'|\nu^{\perp} = (w+\alpha, 0)$, δηλαδή το A είναι το μέσο της χορδής $[(-w+\alpha, f(-w+\alpha)), (-w+\alpha, g(-w+\alpha))]$, δηλαδή $w \in J$. Άρα, $I \subseteq J$, οπότε το J είναι ανοιχτό. $\square$.

Κεφάλαιο 3

Όγκοι Σωμάτων Προβολών

3.1 Εισαγωγικά

Έστω $Z = \sum_{i=1}^{n}[-x_i, x_i]$ ένα ζωνότοπο του $\mathbb{R}^d$. Ο όγκος του Z δίνεται από τον τύπο (βλέπε [50] για την απόδειξη και γενικεύσεις):

$$V(Z) = 2^d \sum_{\{i_1,...,i_d\}\subseteq[n]} |\ det(x_{i_1}, ..., x_{i_d})| = \frac{2^d}{d!} \sum_{i_1,...,i_d\in[n]} |det(x_{i_1}, ..., x_{i_d})\ |\ , \tag{3.1}$$

όπου $[n] := \{1, ..., n\}$.

Άρα, αν $F_1, ..., F_n$ είναι οι έδρες ενός πολυτόπου K του $\mathbb{R}^d$, με αντίστοιχα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα διανύσματα $x_1, ..., x_n$, από τον ορισμό του ΠK και την (3.1), έχουμε:

$$V_d(\Pi K) = \sum_{\{i_1,...,i_d\}\subseteq[n]} V_{d-1}(F_{i_1})...V_{d-1}(F_{i_d}) \cdot |\ det(x_{i_1}, ..., x_{i_d})\ | \tag{3.2}$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $K = Z = \sum_{i=1}^{n}[-x_i, x_i]$. Αν, επιπλέον, δεχτούμε ότι οποιαδήποτε d διανύσματα από τα $x_1, ..., x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, μπορεί να αποδειχτεί ότι οι έδρες του K είναι ακριβώς (μέχρι παράλληλης μεταφοράς) τα $(d-1)$-διάστατα παραλληλεπίπεδα της μορφής $\sum_{i=1}^{d-1}[-x_{j_i}, x_{j_i}]$, όπου $1 \leq j_1 < ... < j_{d-1} \leq n$. Με άλλα λόγια, τα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα διανύσματα των εδρών του Z, πολλαπλασιασμένα με τον $(d-1)$-διάστατο όγκο των αντίστοιχων εδρών, είναι ακριβώς τα διανύσματα:

$$\pm\ 2^{d-1}\ x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_{d-1}}\ ,\ 1 \leq i_1 < ... < i_{d-1} \leq n\ ,$$

όπου $x_1 \wedge ... \wedge x_{d-1}$ συμβολίζει το διανυσματικό γινόμενο των $x_1, ..., x_{d-1}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3.2), αμέσως έχουμε:

$V(\Pi Z) =$

$$\frac{2^{d^2}}{((d-1)!)^d d!} \sum_{i_1,\dots,i_{d(d-1)}\in[n]} |\, det(x_{i_1}\wedge\dots\wedge x_{i_{d-1}},\ \dots, x_{i_{(d-1)(d-1)+1}}\wedge\dots\wedge x_{i_{d(d-1)}})\,| \,. \tag{3.3}$$

Είναι προφανές ότι η τελευταία ταυτότητα ισχύει ακόμη και αν δεν υποθέσουμε ότι τα x_i βρίσκονται σε γενική θέση.

3.2 Σώματα προβολών σωμάτων προβολών

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $S, T : (\mathbb{R}^3)^6 \to \mathbb{R}_+$ με τύπο:

$$S(x_1,\dots,x_6) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_6\in[6]\\ i_j\neq i_k\ ,\ j\neq k}} |\, det(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})\cdot det(x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6})\,| \,,$$

$$T(x_1,\dots,x_6) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_6\in[6]\\ i_j\neq i_k\ ,\ j\neq k}} |\, det(x_{i_1}\wedge x_{i_2}\ ,\ x_{i_3}\wedge x_{i_4}\ ,\ x_{i_5}\wedge x_{i_6})\,| \,.$$

Προφανώς, οι S και T είναι συμμετρικές, κυρτές και θετικά ομογενείς ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές τους. Επίσης, διαπιστώνεται εύκολα ότι $S(x_1,\dots,x_6) = 0$ αν και μόνο αν $T(x_1,\dots,x_6) = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την κυρτότητα στην εξής μορφή:

Λήμμα 3.2.1 *Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,b) της πραγματικής ευθείας. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η g είναι γνησίως θετική στο (a,b), η f είναι κυρτή και η g αφφινική. Τότε, ο λόγος f/g λαμβάνει μέγιστο στο (a,b) αν και μόνο αν η f είναι σταθερό πολλαπλάσιο της g.*

Ας ξαναγράψουμε τις (3.1) και (3.3) εμπλέκοντας τις T και S. Αν $Z = \sum_{i=1}^n [-x_i, x_i]$ είναι ένα ζωνότοπο στον $\mathbb{R}^3$, παρατηρούμε αρχικά ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 6$ (παίρνοντας κάποια από τα x_i να είναι ίσα μεταξύ τους, αν είναι απαραίτητο). Έχουμε:

$$V(\Pi Z) = \frac{2^9}{2^3\cdot 3!} \sum_{i_1,\dots,i_6\in[n]} |\, det(x_{i_1}\wedge x_{i_2}\ ,\ x_{i_3}\wedge x_{i_4}\ ,\ x_{i_5}\wedge x_{i_6})\,|$$

$$= \frac{2^6}{3!}\Big(\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3\in[n]\\ i_j\neq i_k\ \text{για}\ j\neq k}} T(x_{i_1},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_3})$$

$$+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} T(x_{i_1},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4})+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} T(x_{i_1},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$$

$$+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} T(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6})\Big) \ . \tag{3.4}$$

Ομοίως,

$$V(Z)^2=\Big(\frac{2^3}{3!}\Big)^2\sum_{i_1,\dots,i_6\in[n]} \mid det(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})\cdot det(x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6})\mid$$

$$=\frac{2^6}{(3!)^2}\Big(\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} S(x_{i_1},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_3})$$

$$+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} S(x_{i_1},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4})+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} S(x_{i_1},x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$$

$$+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6\in[n]\\ i_j\neq i_k \text{ για } j\neq k}} S(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5},x_{i_6})\Big) \ . \tag{3.5}$$

Παρατηρώντας τις (3.4) και (3.5), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η απόδειξη της (1.11) ανάγεται στην απόδειξη της ακόλουθης ανισότητας:

$$T(x_1,...,x_6)\leq\frac{4}{3}S(x_1,...,x_6)\ ,\ x_1,...,x_6\in\mathbb{R}^d\ . \tag{3.6}$$

Για την απόδειξη, απαιτούνται ορισμένα λήμματα από την 3-διάστατη αφφινική γεωμετρία.

Λήμμα 3.2.2 *Έστω $x_1,...,x_6$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, όπου τα $x_4,\ x_5,\ x_6$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ισχύουν τα εξής:*
i) $(x_1\wedge x_2)\wedge(x_2\wedge x_3)=det(x_1,\ x_2,\ x_3)\cdot x_2$.
ii) $det(x_1\wedge x_2\ ,\ x_3\wedge x_4\ ,\ x_5\wedge x_6)\ =\ det(x_1,x_2,x_4)\cdot det(x_3,x_5,x_6)$.

Απόδειξη. *i)* Προφανώς, το διάνυσμα $(x_1\wedge x_2)\wedge(x_2\wedge x_3)$ είναι παράλληλο στο x_2. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το x_2 είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε,

$$\mid(x_1\wedge x_2)\wedge(x_2\wedge x_3)\mid=\mid[(x_1-<x_1,x_2>x_2)\wedge x_2]\wedge[x_2\wedge(x_3-<x_2,x_3>x_2)]\mid$$

$$=\mid det(x_1-<x_1,x_2>x_2,\ x_2,\ x_3-<x_2,x_3>x_2)\mid\ ,$$

αφού τα διανύσματα $x_1 - < x_1, x_2 > x_2$, $x_3 - < x_2, x_3 > x_2$ είναι ορθογώνια στο x_2. Άρα,

$$| \ (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \wedge x_3) \ | = | \ det(x_1, \ x_2, \ x_3) \ | \ ,$$

οπότε

$$(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \wedge x_3) = \pm \ det(x_1, \ x_2, \ x_3) \cdot x_2 \ .$$

Διαλέγοντας τα $x_1, \ x_2, \ x_3$ να είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, επιλέγουμε το σωστό πρόσημο.
$ii)$ Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν αριθμοί $\lambda_4, \ \lambda_6$ τέτοιοι ώστε $x_5 = \lambda_4 x_4 + \lambda_6 x_6$. Τότε, από την (i) έχουμε:

$$\begin{aligned} det(x_1 \wedge x_2 \ , \ x_3 \wedge x_4 \ , \ x_5 \wedge x_6) \ &= \ \lambda_4 < x_1 \wedge x_2 \ , \ (x_3 \wedge x_4) \ \wedge \ (x_4 \wedge x_6) > \\ &= \ \lambda_4 \cdot det(x_1, x_2, x_4) \cdot det(x_3, x_4, x_6) \\ &= \ det(x_1, x_2, x_4) \cdot det(x_3, \lambda_4 x_4 + \lambda_6 x_6, x_6) \\ &= \ det(x_1, x_2, x_4) \cdot det(x_3, x_5, x_6) \ . \quad \square \end{aligned}$$

Λήμμα 3.2.3 *Έστω $x_1, ..., x_6$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Αν δύο από αυτά είναι παράλληλα, τότε*

$$T(x_1, ..., x_6) = \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6) \ .$$

Απόδειξη. Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε τα $x_1, ..., x_6$ μοναδιαία διανύσματα. Επίσης, από συμμετρία, μπορούμε να πάρουμε $x_5 = x_6$. Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} | \ det(x_5 \wedge x_{i_1}, \ x_5 \wedge x_{i_2}, \ x_{i_3} \wedge x_{i_4}) \ | &= | \ det(x_5, x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot det(x_5, x_{i_3}, x_{i_4}) \ | \\ &= | \ det(x_5 \wedge x_{i_3}, \ x_5 \wedge x_{i_4}, \ x_{i_1} \wedge x_{i_2}) \ | \ , \end{aligned}$$

όπου $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Άρα,

$$\begin{aligned} T(x_1, ..., x_6) &= 2 \cdot 2^3 \cdot 3! \sum_{\substack{i_1 < i_2, \ i_3 < i_4 \\ \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1,2,3,4\}}} | \ det(x_5 \wedge x_{i_1}, \ x_5 \wedge x_{i_2}, \ x_{i_3} \wedge x_{i_4}) \ | \\ &= 2 \cdot 2^3 \cdot 3! \sum_{\substack{i_1 < i_2, \ i_3 < i_4 \\ \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1,2,3,4\}}} | \ det(x_5, x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot det(x_5, x_{i_3}, x_{i_4}) \ | \\ &= \frac{2 \cdot 2^3 \cdot 3!}{2 \cdot 2} \sum_{\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1,2,3,4\}} | \ det(x_5, x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot det(x_5, x_{i_3}, x_{i_4}) \ | \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot 2^3 \cdot 3!}{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} S(x_1, ..., x_6) = \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6) \ . \quad \square$$

Έστω Z ένα ζωνότοπο στον $\mathbb{R}^3$, που γράφεται ως άθροισμα πέντε ευθυγράμμων τμημάτων. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε $Z = \sum_{i=1}^{6} [-x_i, x_i]$, για κάποια $x_1, ..., x_6$ στον $\mathbb{R}^3$, με $x_5 = x_6$. Το προηγούμενο λήμμα, σε συνδυασμό με τις (3.4) και (3.5) εγγυάται ότι $|\Pi Z| = 8|Z|^2$.

Έστω $x_1, ..., x_s$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Για απλότητα, ονομάζουμε $\mathcal{E}(x_1, ..., x_s)$ το σύνολο όλων των επιπέδων, που περνάνε από το 0 και παράγονται από ζεύγη διανυσμάτων από τα $x_1, ..., x_s$.

Λήμμα 3.2.4 *Έστω $x_1, ..., x_6$ διανύσματα που παράγουν τον $\mathbb{R}^3$, ώστε οποιαδήποτε δύο από αυτά να μην είναι παράλληλα. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, ..., 6$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά επίπεδα E_1, E_2 από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_6)$, που περιέχουν το x_i. Τότε μετά από ενδεχόμενη αναδιάταξη των δεικτών, τα σύνολα των συνεπίπεδων διανυσμάτων από το $\{x_1, ..., x_6\}$ είναι ακριβώς τα εξής:*

$$\{x_1, x_2, x_3\} \ , \ \{x_2, x_4, x_5\} \ , \ \{x_1, x_5, x_6\} \ , \ \{x_3, x_4, x_6\} \ .$$

Απόδειξη. Προφανώς, οποιαδήποτε πέντε από τα διανύσματα $x_1, ..., x_6$ δεν μπορούν να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αφού υπάρχει ένα επίπεδο E στο $\mathcal{E}(x_1, x_3, ..., x_6)$ που περιέχει το x_2 και είναι διαφορετικό από αυτό που παράγεται από τα x_1, x_3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x_2, x_4, x_5 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ κάθε ένα από τα x_4, x_5 δεν είναι συνεπίπεδο με τα x_1, x_3.

Ομοίως, είτε το x_1 είναι γραμμικώς εξαρτημένο με τα x_5, x_6 ή είναι γραμμικώς εξαρτημένο με τα x_4, x_6. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι συμβαίνει το πρώτο. Τώρα, το x_6 δεν μπορεί να περιέχεται σε κανένα από τα επίπεδα που παράγονται από τα x_4, x_5 και x_1, x_2 (στην αντίθετη περίπτωση, πέντε από τα διανύσματα x_i θα ήταν συνεπίπεδα). Άρα, το x_3 είναι υποχρεωτικά συνεπίπεδο με τα x_4, x_6.

Έχουμε δείξει ότι αυτά τα σύνολα είναι όντως γραμμικώς εξαρτημένα. Αν υπήρχε και άλλο υποσύνολο του $\{x_1, ..., x_6\}$ με αυτή την ιδιότητα, πέντε από τα x_i θα ήταν συνεπίπεδα, πράγμα αδύνατο. $\square$

Το κλειδί στην απόδειξη της (3.6) είναι το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2.5 *Έστω $x_1, ..., x_6$ διανύσματα, για τα οποία ισχύει το συμπέρασμα του Λήμματος 3.2.4. Τότε,*

$$T(x_1, ..., x_6) < \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6) \ .$$

Απόδειξη. Έστω τα εξής υποσύνολα του συνόλου U των όρων στο $T(x_1,...,x_6)$:

$$U_{ij} = \Big\{ \mid det(x_i \wedge x_j \ , \ x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ , \ x_{i_3} \wedge x_{i_4}) \mid \neq 0 \ \Big| \ \{i_1,i_2,i_3,i_4\} = \{1,...,6\} \backslash \{i,j\} \Big\},$$

$i,j = 1,...,6, \ i \neq j$. Είναι φανερό ότι τα σύνολα U_{12}, U_{23}, U_{13}, U_{24}, U_{25}, U_{45}, U_{26} καλύπτουν το U. Από το Λήμμα 3.2.2, προκύπτει ότι τα στοιχεία του U_{12} είναι ακριβώς όροι της μορφής:

$$\mid det(x_1,x_2,x_{i_1}) \cdot det(x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}) \mid \neq 0 \ , \ \{i_1,i_2,i_3,i_4\} = \{3,4,5,6\} \ .$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να εκφραστούν και τα στοιχεία των U_{23}, U_{13}. Συνεπώς, αφού $\mid det(x_1,x_2,x_3) \mid = 0$ και τα U_{12}, U_{23}, U_{13} είναι ξένα, το άθροισμα όλων των όρων που περιέχονται στο $V_1 := U_{12} \cup U_{23} \cup U_{13}$, είναι σταθερό πολλαπλάσιο του $S(x_1,...,x_6)$. Η σταθερά υπολογίζεται εύκολα και είναι ίση με $2/3$.

Ομοίως, το άθροισμα όλων των όρων που περιέχονται στο $V_2 := U_{24} \cup U_{25} \cup U_{45}$, επίσης ισούται με $2/3 \cdot S(x_1,...,x_6)$.

Προφανώς, οι όροι της μορφής (κάθε ένας προσμετράται $2^3 \cdot 3!$-φορές) $\mid det(x_4 \wedge x_5 \ , \ x_1 \wedge x_6 \ , \ x_2 \wedge x_3) \mid$, $\mid det(x_4 \wedge x_5 \ , \ x_1 \wedge x_2 \ , \ x_3 \wedge x_6) \mid$, $\mid det(x_2 \wedge x_5 \ , \ x_1 \wedge x_3 \ , \ x_4 \wedge x_6) \mid$ ανήκουν από κοινού στα V_1 και V_2. Άρα, αν A είναι το άθροισμα των όρων από το σύνολο $V_1 \cup V_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} A \leq \frac{4}{3} S(x_1,...,x_6) - 2^3 \cdot 3! \Big[&\mid det(x_4 \wedge x_5 \ , \ x_1 \wedge x_6 \ , \ x_2 \wedge x_3) \mid \\ &+ \mid det(x_4 \wedge x_5 \ , \ x_1 \wedge x_2 \ , \ x_3 \wedge x_6) \mid + \mid det(x_2 \wedge x_5 \ , \ x_1 \wedge x_3 \ , \ x_4 \wedge x_6) \mid \Big] \\ = \frac{4}{3} S(x_1,...,x_6) - 2^3 \cdot 3! \Big[&\mid det(x_4,x_5,x_3) \cdot det(x_1,x_2,x_6) \mid \\ &+ \mid det(x_4,x_5,x_1) \cdot det(x_2,x_3,x_6) \mid + \mid det(x_1,x_3,x_5) \cdot det(x_2,x_4,x_6) \mid \Big] \ , \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του Λήμματος 3.2.2, για μία ακόμη φορά.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι τα x_1,x_5,x_6 είναι συνεπίπεδα, οπότε από το Λήμμα 3.2.2, έχουμε:

$$\mid det(x_2 \wedge x_6 \ , \ x_1 \wedge x_5 \ , \ x_3 \wedge x_4) \mid = \mid det(x_1,x_2,x_5) \cdot det(x_3,x_4,x_6) \mid = 0 \ .$$

Συνεπώς,

$$U_{26} \setminus (V_1 \cup V_2) = \Big\{ \mid det(x_2 \wedge x_6 \ , \ x_1 \wedge x_4 \ , \ x_3 \wedge x_5) \mid \Big\}$$

και αφού $\mid det(x_4,x_5,x_3) \cdot det(x_1,x_2,x_6) \mid > 0$, συμπεραίνουμε:

$$T(x_1,...,x_6) < \frac{4}{3} S(x_1,...,x_6) + 2^3 \cdot 3! \Big[\mid det(x_2 \wedge x_6 \ , \ x_1 \wedge x_4 \ , \ x_3 \wedge x_5) \mid$$

$$-\mid det(x_4,x_5,x_1)\cdot det(x_2,x_3,x_6)\mid - \mid det(x_1,x_3,x_5)\cdot det(x_2,x_4,x_6)\mid\Big] \ .$$

Τέλος, από υπόθεση, υπάρχουν αριθμοί $\lambda_4,\ \lambda_6$ τέτοιοι ώστε $x_3 = \lambda_4 x_4 + \lambda_6 x_6$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα x_1, x_5, x_6 είναι συνεπίπεδα, έχουμε:

$$\mid det(x_2\wedge x_6\ ,\ x_1\wedge x_4\ ,\ x_3\wedge x_5)\mid \le \mid \lambda_4\cdot det(x_2\wedge x_6\ ,\ x_1\wedge x_4\ ,\ x_4\wedge x_5)\mid$$

$$+\mid \lambda_6\cdot det(x_2\wedge x_6\ ,\ x_1\wedge x_4\ ,\ x_6\wedge x_5)\mid$$

$$= \mid \lambda_4\cdot det(x_4,x_5,x_1)\cdot det(x_4,x_2,x_6)\mid + \mid \lambda_6\cdot det(x_4,x_5,x_6)\cdot det(x_1,x_2,x_6)\mid$$

$$= \mid det(x_3,x_5,x_1)\cdot det(x_4,x_2,x_6)\mid + \mid det(x_4,x_5,x_1)\cdot det(x_2,x_3,x_6)\mid \ ,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. $\square$

Απόδειξη της (3.6):

Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 3.2.3 ή του Λήμματος 3.2.4 ή ισχύει $S(x_1,...,x_6)=0$, το συμπέρασμα είναι προφανές. Στην αντίθετη περίπτωση, υπάρχει κάποιο i στο $\{1,...,6\}$, τέτοιο ώστε το x_i να ανήκει το πολύ σε ένα επίπεδο από το $\mathcal{E}(x_1,...x_{i-1},x_{i+1},...,x_6)$. Είναι, τότε εύκολο να δούμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $t_1<0<t_2$ και ένα διάνυσμα ν, με την ιδιότητα: Για κάθε $E\in\mathcal{E}(x_1,...x_{i-1},x_{i+1},...,x_6)$, έχουμε

$$x_i\in E \ \Leftrightarrow\ x_i+t\nu\in E\ ,\ \textit{για κάθε}\ \ t\in(t_1,t_2)$$

και επιπλέον

$$\#\mathcal{E}(x_1,...x_{i-1},x_i+t_j\nu,x_{i+1},...,x_6) < \#\mathcal{E}(x_1,...,x_6)\ ,\ j=1,2\ , \qquad (3.7)$$

όπου $\#A$ είναι το πλήθος των στοιχείων του A. Σημειώνουμε ότι αυτό το γεγονός θα χρησιμοποιηθεί και στην επόμενη παράγραφο.

Συνεπώς, η συνάρτηση

$$[t_1,t_2]\ni t\mapsto S(x_1,...x_{i-1},x_i+t\nu,x_{i+1},...,x_6)$$

είναι αφφινική. Άρα, από την κυρτότητα της $T(x_1,...x_{i-1},x_i+t\nu,x_{i+1},...,x_6)$ και από το Λήμμα 3.2.1, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{T}{S}(x_1,...,x_6)\le\frac{T}{S}(x_1,...,x_{i-1},x_i+t_j\nu,x_{i+1},...,x_6)\ ,$$

για $j=1$ ή 2 (προφανώς, το $S(x_1,...,x_i+t_j\nu,...,x_6)$ δεν μπορεί να είναι μηδέν για $j=1$ και για $j=2$, στην αντίθετη περίπτωση το $S(x_1,...,x_6)$ θα ήταν ίσο με μηδέν).

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία όσες φορές χρειάζεται. Πάντως, όπως δείχνει η (3.7), μετά από μόνο πεπερασμένου πλήθους βήματα θα έχουμε βρει διανύσματα $z_1,...,z_6$, για τα οποία να ισχύουν οι συνθήκες του Λήμματος 3.2.3 ή του Λήμματος 3.2.4 και, επιπλέον, $(T/S)(x_1,...,x_6)\le(T/S)(z_1,...,z_6)$. $\square$

3.3 Χαρακτηρισμός ακραίων ζωνοειδών

Λήμμα 3.3.1 *Έστω $x_1, ..., x_6$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Αν τέσσερα από αυτά είναι συνεπίπεδα, τότε*

$$T(x_1, ..., x_6) = \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6) \ .$$

Απόδειξη. Έστω π.χ. ότι τα x_1, x_2, x_3, x_4 είναι συνεπίπεδα. Αν (i_1, i_2, i_3, i_4) είναι μία μετάθεση του $\{1, 2, 3, 4\}$, είναι φανερό ότι

$$|\ det(x_{i_1} \wedge x_{i_2}\ ,\ x_{i_3} \wedge x_{i_4}\ ,\ x_{i_5} \wedge x_{i_6})\ | = 0 = |\ det(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \cdot det(x_{i_4}, x_{i_5}, x_{i_6})\ | \ .$$

Επιπλέον, προκύπτει από το Λήμμα 3.2.2,

$$|\ det(x_{i_1} \wedge x_{i_2}\ ,\ x_{i_3} \wedge x_5\ ,\ x_{i_4} \wedge x_6)\ | = |\ det(x_{i_1}, x_{i_2}, x_5) \cdot det(x_{i_3}, x_{i_4}, x_6)\ |$$

$$= |\ det(x_{i_1} \wedge x_{i_2}\ ,\ x_{i_4} \wedge x_5\ ,\ x_{i_3} \wedge x_6)\ | \ .$$

Άρα,

$$T(x_1, ..., x_6) = 2^3 \cdot 3! \sum_{\substack{(i_1,i_2,i_3,i_4) \in S_4 \\ i_1 < i_2}} |\ det(x_{i_1} \wedge x_{i_2}\ ,\ x_{i_3} \wedge x_5\ ,\ x_{i_4} \wedge x_6)\ |$$

$$= 2 \cdot 2^3 \cdot 3! \sum_{\substack{(i_1,i_2,i_3,i_4) \in S_4 \\ i_1 < i_2, i_3 < i_4}} |\ det(x_{i_1}, x_{i_2}, x_5) \cdot det(x_{i_3}, x_{i_4}, x_6)\ | = \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6) \ ,$$

όπου S_4 είναι το σύνολο των μεταθέσεων του $\{1, 2, 3, 4\}$. □

Έστω, τώρα, Z άθροισμα τουλάχιστον έξι ευθυγράμμων τμημάτων $[-x_i, x_i]$, $i = 1, ..., n$ (όπως αναφέρθηκε παραπάνω δεν βλάπτουμε καθόλου την γενικότητα). Αν το Z είναι το άθροισμα ενός κυλίνδρου και ενός ευθύγραμμου τμήματος, τότε για κάθε έξι από τα διανύσματα $x_1, ..., x_n$, τουλάχιστον δύο είναι παράλληλα ή τουλάχιστον τέσσερα από αυτά είναι συνεπίπεδα. Το προηγούμενο Λήμμα, το Λήμμα 3.2.3, η (3.4) και η (3.5) δείχνουν ότι $V(\Pi Z) = 2^3 V(Z)^2$. Αφού η ίδια σχέση ισχύει και όταν το Z είναι το άθροισμα πέντε ευθυγράμμων τμημάτων, αρκεί να δείξουμε μόνο το ' μόνο αν ' στο Θεώρημα 3.2.

Είναι, λοιπόν, προφανές ότι το πρόβλημα του χαρακτηρισμού των ζωνοειδών, για τα οποία ισχύει η ισότητα στην (1.11), ανάγεται στον προσδιορισμό των 6-άδων $(x_1, ..., x_6)$, για τις οποίες $T(x_1, ..., x_6) = (4/3) \cdot S(x_1, ..., x_6)$. Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 3.2.3 ή του Λήμματος 3.3.1, ισχύει και η τελευταία ισότητα. Θα αφιερώσουμε το υπόλοιπο αυτής της παραγράφου στο να δείξουμε ότι αυτές είναι και οι μόνες πιθανές περιπτώσεις ισότητας.

Για να καταφέρουμε κάτι τέτοιο χρειαζόμαστε μία σειρά από γεωμετρικά λήμματα. Η απόδειξη του επόμενου είναι προφανής.

Λήμμα 3.3.2 . *Έστω E ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, που δεν περιέχει το 0 και $y_1, ..., y_5$ σημεία του E, με $y_4 \neq y_5$. Υποθέτουμε, επίσης ότι το y_3 βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[y_1, y_2]$ και ότι το y_i δεν είναι συγγραμμικό με τα y_1, y_2, $i = 4, 5$. Αν το x_i είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου y_i, $i = 1, ..., 5$, τότε υπάρχει ένα διάνυσμα ν του $\mathbb{R}^3$ και πραγματικοί αριθμοί $t_1 < 0 < t_2$, ώστε το $x_3 + t_i\nu$ να είναι παράλληλο στο x_i, $i = 1, 2$ και $det(x_3 + t\nu, x_4, x_5) \neq 0$ για κάθε t στο (t_1, t_2), αν και μόνο αν το y_3 είναι εσωτερικό σημείο του $[y_1, y_2]$, ενώ ταυτόχρονα η ευθεία $aff\{y_4, y_5\}$ και το εσωτερικό του τμήματος $[y_1, y_2]$ είναι ξένα.*

Για να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Λήμμα, παρατηρούμε ότι ο λόγος $T/S(x_1, ..., x_6)$ είναι ανεξάρτητος από το μήκος και την φορά των x_i. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα (μη μηδενικά) άκρα των $x_1, ..., x_6$ περιέχονται όλα σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$, που δεν περιέχει το 0.

Έστω $A = \{x_1, ..., x_6\}$ ένα σύνολο έξι διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$. Θα λέμε ότι το A έχει την ιδιότητα (N), αν οποιαδήποτε δύο από τα $x_1, ..., x_6$ δεν είναι παράλληλα και οποιαδήποτε τέσσερα από αυτά δεν είναι συνεπίπεδα.

Λήμμα 3.3.3 *Έστω $\{x_1, ..., x_6\}$ σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιεί την ιδιότητα (N), όπου x_i είναι το διάνυσμα θέσης κάποιου σημείου y_i, $i = 1, ..., 6$. Υποθέτουμε τα εξής:*
i) Τα $y_1, ..., y_6$ είναι συνεπίπεδα και το y_6 ανήκει στο εσωτερικό του $[y_1, y_2]$.
ii) Για κάθε $i, j \in \{3, 4, 5\}$, $i \neq j$, η ευθεία που παράγεται από τα σημεία y_i, y_j, και το εσωτερικό του $[y_1, y_2]$ είναι ξένα.
iii) Υπάρχει κάποια μετάθεση (k_1, k_2, k_3) του $\{3, 4, 5\}$ και κάποιο εσωτερικό σημείο y του $[y_1, y_2]$, τέτοια ώστε οι ευθείες

$$aff\{y_1, y_{k_1}\},\ aff\{y_2, y_{k_2}\},\ aff\{y, y_{k_3}\}$$

να είναι είτε παράλληλες ή να έχουν ένα κοινό σημείο, διάφορο των y_1, y_2, y_3. Τότε,

$$T(x_1, ..., x_6) < \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6)\ .$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $T(x_1, ..., x_6) = (4/3) \cdot S(x_1, ..., x_6)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, υπάρχουν αριθμοί $t_1 < 0 < t_2$ και ένα διάνυσμα ν, τέτοιο ώστε το $x_6 + t_i\nu$ να είναι παράλληλο στο x_i, $i = 1, 2$, και η ποσότητα $S(x_1, ..., x_5, x_6 + t\nu)$ να είναι αφφινική (και θετική) στο $[t_1, t_2]$, ως συνάρτηση του t. Αυτό, μαζί με την (3.6), το Λήμμα 3.2.1 και το γεγονός ότι η ποσότητα $T(x_1, ..., x_5, x_6 + t\nu)$ είναι κυρτή ως προς t στο $[t_1, t_2]$, δείχνει αμέσως ότι η συνάρτηση

$$[t_1, t_2] \ni t \mapsto \frac{T}{S}(x_1, ..., x_5, x_6 + t\nu)$$

είναι σταθερή. Ειδικότερα, η $T(x_1,...,x_5,x_6+t\nu)$ είναι αφφινική στο $[t_1,t_2]$.

Αφού είναι φανερό ότι δεν υπάρχει κάποιο $j\in\{3,4,5\}$ τέτοιο ώστε το y_j να είναι συγγραμμικό με τα y_1, y_2 (στην αντίθετη περίπτωση, τα x_1,x_2,x_6,x_j θα ήταν συνεπίπεδα), το σημείο y της υπόθεσης (iii) είναι μοναδικό. Με άλλα λόγια, για κάποια μετάθεση (k_1,k_2,k_3) του $\{3,4,5\}$, οι ευθείες $\varepsilon_1 := aff\{y_1,y_{k_1}\}$, $\varepsilon_2 := aff\{y_2,y_{k_2}\}$, $aff\{y,y_{k_3}\}$ είναι παράλληλες ή έχουν ένα κοινό σημείο, ενώ για κάθε σημείο y' στο εσωτερικό του $[y_1,y_2]$, διαφορετικό από το y, οι ευθείες ε_1, ε_2, $aff\{y',y_{k_3}\}$ είτε είναι μη παράλληλες είτε δεν περιέχουν κοινό σημείο.

Συνεπώς, για $t_1<t<t_2$, η τομή των επιπέδων $span\{x_1,x_{k_1}\}$, $span\{x_2,x_{k_2}\}$, $span\{x_6+t\nu,x_{k_3}\}$, είναι μη τετριμμένη, αν και μόνο αν το $x_6+t\nu$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα θέσης του y. Αυτό δείχνει ότι η ποσότητα

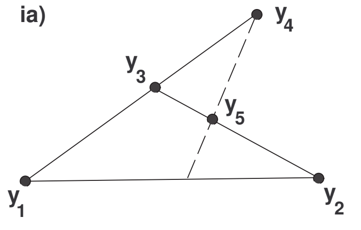
$$|\ det(x_1\wedge x_{k_1}\ ,\ x_2\wedge x_{k_2}\ ,\ (x_6+t\nu)\wedge x_{k_3})\ |$$

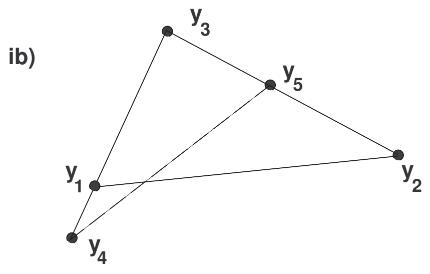
μηδενίζεται σε μοναδικό εσωτερικό σημείο t του $[t_1,t_2]$.

Προκύπτει, λοιπόν, ότι η $T(x_1,...,x_5,x_6+t\nu)$ δεν μπορεί να είναι αφφινική στο $[t_1,t_2]$, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. $\square$

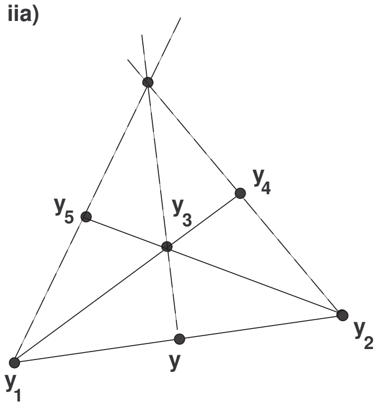
Λήμμα 3.3.4 *Έστω $y_1,...,y_5$ σημεία του ίδιου επιπέδου, τέτοια ώστε τα y_1,y_3, y_4 να είναι συγγραμμικά, τα y_2,y_3,y_5 να είναι συγγραμμικά και να μην υπάρχει άλλο σύνολο τριών συγγραμμικών σημείων μεταξύ αυτών των πέντε. Ισχύει ακριβώς μία από τις επόμενες προτάσεις:*
i) $aff\{y_4,y_5\}\cap int[y_1,y_2]\neq\emptyset$.
ii) Ικανοποιείται η υπόθεση (iii) του Λήμματος 3.3.3.

Απόδειξη. Μέχρι πιθανής αναδιάταξης των δεικτών, υπάρχουν ακριβώς οι εξής περιπτώσεις:

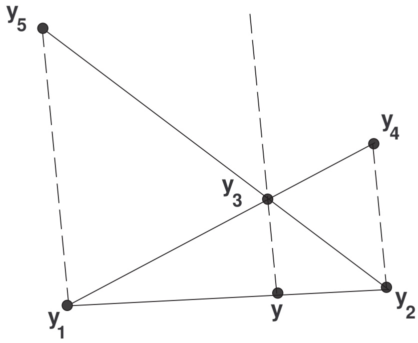




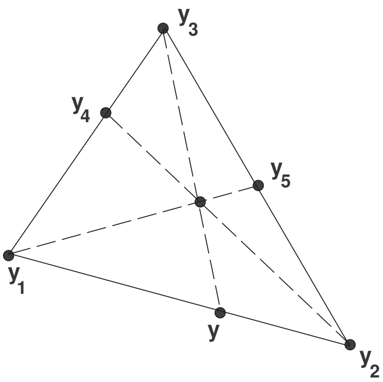
iia)



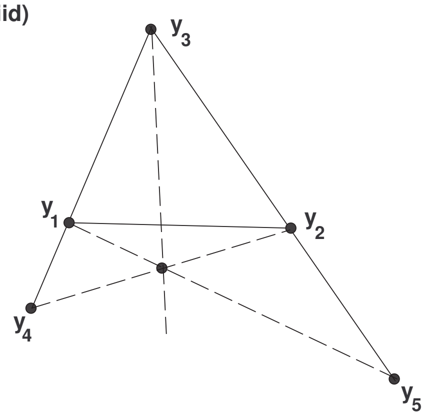
iib)



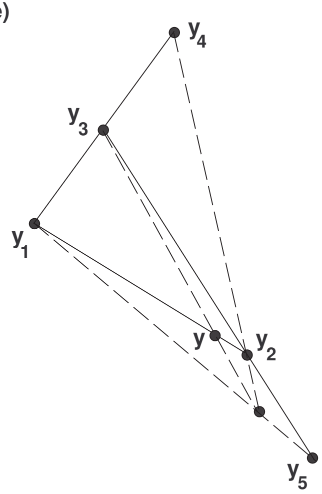
iic)



iid)



iie)



□

Λήμμα 3.3.5 *Έστω $\{y_1, ..., y_5\}$, διαφορετικά ανά δύο σημεία του ίδιου επιπέδου, τέτοια ώστε:*
i)Το y_5 είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[y_3, y_4]$.
ii)Κάθε ένα από τα τμήματα $[y_1, y_2]$, $[y_3, y_4]$ περιέχεται στο ένα από τα δύο ανοιχτά ημιεπίπεδα, που ορίζεται από το άλλο.
Τότε, για κάποια επιλογή k_1, k_2, υπάρχει ένα εσωτερικό σημείο y του $[y_1, y_2]$, τέτοιο ώστε οι ευθείες $aff\{y, y_5\}$, $aff\{y_1, y_{k_1}\}$, $aff\{y_2, y_{k_2}\}$ να έχουν ένα κοινό σημείο, όπου $\{k_1, k_2\} = \{3, 4\}$.

Απόδειξη. Οι κορυφές του πολυγώνου $P = conv\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ είναι ακριβώς τα σημεία y_1, y_2, y_3, y_4. Επομένως, η ευθεία που παράγεται από το y_5 και το σημείο τομής των διαγωνίων του P, τέμνει το $[y_1, y_2]$ σε κάποιο εσωτερικό του σημείο. □

Λήμμα 3.3.6 *Έστω ότι το σύνολο $\{x_1, ..., x_6\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (N). Υποθέτουμε, επίσης, ότι δεν υπάρχει επίπεδο από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_5)$, που να περιέχει το x_6. Τότε, υπάρχει ένα διάνυσμα ν και πραγματικοί αριθμοί $t_1 < 0 < t_2$ με τις εξής ιδιότητες:*
i) Υπάρχει ένα επίπεδο E_i από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_5)$, που περιέχει το $x_6 + t_i\nu$, $i = 1, 2$.
ii) Για κάθε t στο (t_1, t_2), δεν υπάρχει επίπεδο από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_5)$, που να περιέχει το $x_6 + t\nu$.
iii) Το σύνολο $\{x_1, ..., x_5, x_6 + t_i\nu\}$ έχει την ιδιότητα (N), για $i = 1$ ή 2.

Απόδειξη: Αν υπάρχει το πολύ μία 3-άδα συνεπίπεδων διανυσμάτων από τα $x_1, ..., x_6$, το συμπέρασμα ισχύει κατά προφανή τρόπο. Αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο τέτοιες 3-άδες, ονομάζουμε G την ανοιχτή κυρτή διεδρική γωνία που ορίζεται από τα αντίστοιχα επίπεδα και περιέχει το x_6. Τότε προφανώς υπάρχει κάποιο επίπεδο E, το οποίο περιέχει ακριβώς δύο από τα $x_1, ..., x_5$ αλλά όχι το x_6, έχει κοινά σημεία με την G και για κάποιο σημείο x στο E, το εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος $[x_6, x]$ δεν έχει κοινά σημεία με κανένα επίπεδο από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_5)$. Το ζητούμενο έπεται. □

Η απόδειξη του επόμενου είναι εύκολη και παραλείπεται.

Λήμμα 3.3.7 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{x_1, ..., x_6\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (N) και για κάθε $i = 1, .., 6$ υπάρχει ένα επίπεδο E_i από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_6)$, που περιέχει το x_i. Μέχρι πιθανής αναδιάταξης των δεικτών, ένα από τα επόμενα είναι αληθές:*
i)Τα x_1, x_2, x_3 είναι συνεπίπεδα και τα x_4, x_5, x_6 είναι συνεπίπεδα.
ii)Τα x_1, x_2, x_3 είναι συνεπίπεδα, τα x_3, x_4, x_5 είναι συνεπίπεδα και τα x_1, x_5, x_6 είναι συνεπίπεδα.

Μπορούμε, τώρα, να αποδείξουμε τον βασικό ισχυρισμό που αναφέρθηκε στην αρχή αυτής της παραγράφου.

Λήμμα 3.3.8 *Το σύνολο $\{x_1, ..., x_6\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (N), αν και μόνο αν*

$$T(x_1, ..., x_6) < \frac{4}{3} S(x_1, ..., x_6) \ .$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ¨μόνο αν' μέρος. Υποθέτουμε ότι το $\{x_1, ..., x_6\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (N). Αν πληρούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 3.2.4, από το Λήμμα 3.2.5 δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε.

Περίπτωση I: Έστω ότι ισχύουν τα εξής:
a) Για κάθε $i = 1, ..., 6$ υπάρχει κάποιο επίπεδο E_i από το $\mathcal{E}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_6)$, που περιέχει το x_i.
b) Υπάρχει κάποιο i, $i = 1, ..., 6$, ένα διάνυσμα ν και πραγματικοί αριθμοί $t_1 < 0 < t_2$, έτσι ώστε για κάθε $k, l = 1, ..., 6$ και για κάθε t στο (t_1, t_2), $det(x_i + t\nu, x_k, x_l) = 0$, αν και μόνο αν $det(x_i, x_k, x_l) = 0$ και επιπλέον τα σύνολα $\{x_1, ..., x_{i-1}, x_i + t_j\nu, x_{i+1}, ..., x_6\}$ δεν ικανοποιούν την ιδιότητα (N), $j = 1, 2$.

Από υπόθεση (a) και το Λήμμα 3.3.7, υπάρχουν δύο δυνατότητες (αναδιατάσσοντας τους δείκτες, αν χρειάζεται):
i) Τα x_1, x_2, x_3 περιέχονται σε κάποιο επίπεδο E_1 και τα x_4, x_5, x_6 περιέχονται σε κάποιο άλλο επίπεδο E_2. Αφού ισχύει η ιδιότητα (N), αντικαθιστώντας το x_i με το $-x_i$ αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x_1, x_2, x_3 περιέχονται στον ίδιο ανοιχτό ημίχωρο του E_2 και τα x_4, x_5, x_6 περιέχονται στον ίδιο ανοιχτό ημίχωρο του E_1. Ελέγχεται εύκολα ότι μπορούμε, ταυτόχρονα, να πάρουμε το x_i να είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου y_i, $i = 1, ..., 6$, όπου τα $y_1, ..., y_6$ είναι συνεπίπεδα. Τότε, είναι προφανές ότι οποιαδήποτε πέντε διανύσματα από τα $y_1, ..., y_6$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 3.3.5, άρα από το Λήμμα 3.3.3, λαμβάνουμε $T(x_1, ..., x_6) < (4/3) \cdot S(x_1, ..., x_6)$.
ii) Τα $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$, $\{x_1, x_5, x_6\}$ είναι σύνολα γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων. Τότε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο διάνυσμα ν και πραγματικοί $t_1 < 0 < t_2$, έτσι ώστε για κάθε t στο (t_1, t_2), ισχύει $det(x_3 + t\nu, x_k, x_l) \neq 0$ αν και μόνο αν $det(x_3, x_k, x_l) \neq 0$, ενώ τα σύνολα $\{x_1, x_2, x_3 + t_j\nu, x_4, x_5, x_6\}$, $j = 1, 2$, δεν ικανοποιούν την ιδιότητα (N). Αν για $j = 1$ ή 2, τέσσερα από τα διανύσματα x_1, x_2, $x_3 + t_j\nu$, x_4, x_5, x_6 ήταν συνεπίπεδα, τότε τα x_4, x_5, x_6 θα ήταν επίσης συνεπίπεδα και τα $x_1, ..., x_6$ δεν θα παρήγαγαν τον $\mathbb{R}^3$. Αυτό αναγκάζει το $x_3 + t_j\nu$ να είναι παράλληλο στο x_j, $j = 1, 2$. Όπως πριν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x_i είναι διανύσματα θέσης κάποιων συνεπίπεδων σημείων $y_1, ..., y_6$ αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.3.4 για τα σημεία y_1, y_2, y_4, y_5, y_6. Αν το (i) του Λήμματος 3.3.4 ικανοποιείται, τότε το Λήμμα 3.3.2 αντιβαίνει με την υπόθεση

του παρόντος Λήμματος. Επομένως, ισχύει το συμπέρασμα (ii) του Λήμματος 3.3.4, άρα $T(x_1,...,x_6) < (4/3)\cdot S(x_1,...,x_6)$.

Από το Λήμμα 3.3.6, η μόνη περίπτωση που απομένει είναι η εξής:

Περίπτωση ΙΙ: Υπάρχει ένας δείκτης i από τα $\{1,...,6\}$, ένα διάνυσμα ν και ένα διάστημα $[t_1,t_2]$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, το οποίο είναι μεγιστικό υπό την προϋπόθεση ότι τα επόμενα ικανοποιούνται:

$a)$ Για κάθε t στο (t_1,t_2) και για κάθε $k,l=1,...,6$, $k,l\neq i$ τα $x_i+t\nu$, x_k, x_l είναι συνεπίπεδα, αν και μόνο αν τα x_i, x_k, x_l είναι συνεπίπεδα.

$b)$ Το σύνολο $\{x_1,...,x_{i-1},x_i+t_j\nu,x_{i+1},...,x_6\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (N), $j=1$ ή 2.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η ισότητα στην (3.6). Από υπόθεση (b), προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$[t_1,t_2]\ni t\mapsto S(x_1,...x_{i-1},x_i+t\nu,x_{i+1},...,x_6)\ ,$$

είναι αφφινική, άρα το Λήμμα 3.2.1 μαζί με την (3.6), συνεπάγονται ότι

$$\frac{T}{S}(x_1,...x_{i-1},x_i+t\nu,x_{i+1},...,x_6)=\frac{4}{3}\ ,\ \forall\ t\in[t_1,t_2]\ .$$

Άρα, από την υπόθεση, είναι φανερό ότι υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων $\{z_1,...,z_6\}$ με την ιδιότητα (N), τέτοιο ώστε $T(z_1,..,z_6)=(4/3)\cdot S(z_1,...,z_6)$ και $\#\mathcal{E}(z_1,...,z_6)<\#\mathcal{E}(x_1,...,x_6)$. Είναι φανερό ότι μετά από πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της ίδιας διαδικασίας, θα έχουμε κατασκευάσει ένα σύνολο διανυσμάτων με την ιδιότητα (N), που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.2.4 ή πέφτει στην Περίπτωση Ι. Αυτό είναι αδύνατο και ο ισχυρισμός έπεται. □

Το τελευταίο μέρος του Θεωρήματος 1.2.1 προκύπτει εύκολα από το Λήμμα 3.3.8. Πράγματι, έστω Z ένα ζωνότοπο του $\mathbb{R}^3$ με συνάρτηση στήριξης

$$h_Z(x)=\int_{S^2}|<x,y>|\ d\mu(y)\ ,$$

όπου $\mu(\cdot)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta_{x_i}(\cdot)$ και $\delta_{x_i}(\cdot)$ είναι το μέτρο Dirac στο x_i, για κάποια μοναδιαία διανύσματα x_i και θετικούς αριθμούς α_i $(n\geq 6)$. Από το Λήμμα 3.2.3, την (3.4) και την (3.5), έχουμε

$$6!\Big(\frac{2^6}{3!}\Big)^{-1}\Big[2^3V(Z)^2-V(\Pi Z)\Big]$$

$$=6!\sum_{\substack{i_1,...,i_6\in[n]\\ i_1<...<i_6}}\alpha_{i_1}...\alpha_{i_6}\Big[\frac{4}{3}S(x_{i_1},...,x_{i_6})-T(x_{i_1},...,x_{i_6})\Big]$$

$$= \sum_{i_1,...,i_6\in[n]} \alpha_{i_1}...\alpha_{i_6}\Big[\frac{4}{3}S(x_{i_1},...,x_{i_6}) - T(x_{i_1},...,x_{i_6})\Big] \ .$$

ή

$$6!\Big(\frac{2^6}{3!}\Big)^{-1}\Big[2^3V(Z)^2 - V(\Pi Z)\Big] = \int_{x_1\in S^2}\cdots\int_{x_6\in S^2}\varphi(x_1,...,x_6)\, d\mu(x_1)...d\mu(x_6) \ ,$$

όπου έχουμε θέσει $\varphi := (4/3)\cdot S - T$. Από σύγκλιση, η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε μέτρο στην S^2, άρα για κάθε 3-διάστατο ζωνοειδές.

Τώρα, αν το Z δεν είναι το άθροισμα πέντε ευθυγράμμων τμημάτων ή το άθροισμα ενός κυλίνδρου και ενός ευθυγράμμου τμήματος, σίγουρα υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων $\{y_1,...,y_6\}$, που περιέχεται στον φορέα του μ, και ικανοποιεί την ιδιότητα (N). Από τη συνέχεια της φ και του γεγονότος ότι $\varphi(y_1,...,y_6) > 0$, έχουμε

$$\int_{x_1\in S^2}\cdots\int_{x_6\in S^2}\varphi(x_1,...,x_6)\, d\mu(x_1)...d\mu(x_6) > 0 \ ,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

3.4 Κώνοι και διπλοί κώνοι

Έστω ότι $K = conv(P\cup\{e_3\})$ είναι ένας κώνος του $\mathbb{R}^3$, όπου P είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^2\times\{0\}$. Για τον σκοπό μας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P είναι πολύγωνο, που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Έστω $A_1,...,A_n$ οι ακμές του P. Ονομάζουμε, επίσης, h_i το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην A_i, μήκους ίσου με την απόσταση της A_i από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον, παίρνουμε διάνυσμα a_i, παράλληλο στην A_i, μήκους ίσου με το μήκος της A_i, $i = 1,...,n$. Μπορούμε να διαλέξουμε τις φορές των a_i, έτσι ώστε $det(a_i,h_i) > 0$, $i = 1,...,n$.

Οι έδρες του K είναι, ακριβώς, τα σύνολα

$$P\ ,\ F_i := conv(A_i\cup\{e_3\})\ ,\ i = 1,...,n\ .$$

Έστω x_i το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στην F_i, $i = 1,...,n$. Τότε, αφού το $-e_3$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην έδρα P του K, από την (3.2), έχουμε:

$$V(\Pi K) = \sum_{\{i_1,i_2,i_3\}\subseteq[n]} V(F_{i_1})\cdot V(F_{i_2})\cdot V(F_{i_3})\cdot |\ det(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})\ |$$

$$+\sum_{\{i_1,i_2\}\subseteq[n]} V(P)\cdot V(F_{i_1})\cdot V(F_{i_2})\cdot |\ det(x_{i_1},x_{i_2},e_3)\ | \tag{3.8}$$

Μία κρίσιμη παρατήρηση για όσα θα ακολουθήσουν είναι το γεγονός ότι όλοι οι όροι του αθροίσματος $V(F_{i_1})\cdot V(F_{i_2})\cdot V(F_{i_3})\cdot |\ det(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})\ |$ είναι μη μηδενικοί. Κάποιος μπορεί εύκολα να δει κάτι τέτοιο, παίρνοντας κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τις έδρες F_{i_1}, F_{i_2} σε έδρες παράλληλες στο διάνυσμα e_3. Τότε, για κάθε i_3 διαφορετικό των i_1, i_2, η εικόνα της F_{i_3} μέσω αυτής της απεικόνισης είναι αναγκαστικά μη παράλληλη στο e_3.

Προφανώς, το διάνυσμα h_i-e_3 είναι παράλληλο στην έδρα F_i. Άρα, το διάνυσμα $a_i\wedge(h_i-e_3)$ είναι ορθογώνιο στην F_i, άρα πολλαπλάσιο του x_i. Επιπρόσθετα, αφού το h_i-e_3 είναι ορθογώνιο στο a_i,

$$|a_i\wedge(h_i-e_3)|=|a_i|\cdot|h_i-e_3|=2V(F_i)\ ,\ i=1,...,n\ .$$

Συνεπώς, έχουμε δείξει ότι

$$V(F_i)\cdot x_i=\pm\frac{1}{2}a_i\wedge(h_i-e_3) \tag{3.9}$$

Μπορούμε, τώρα, να χρησιμοποιήσουμε την (3.9), το Λήμμα 3.2.2 (i) και το γεγονός ότι τα διανύσματα $a_1\wedge h_1$, $a_2\wedge h_2$ είναι παράλληλα, για να υπολογίσουμε τον κάθε όρο της (3.8) ξεχωριστά:

$$V(P)\cdot V(F_1)\cdot V(F_2)\cdot |\ det(x_1,x_2,e_3)\ |$$
$$=V(P)\cdot\frac{1}{4}|\ det(a_1\wedge(h_1-e_3),a_2\wedge(h_2-e_3),e_3)\ |$$
$$=\frac{1}{4}V(P)\cdot|\ det(a_1\wedge e_3,a_2\wedge e_3,e_3)\ |=\frac{1}{4}V(P)\cdot|\ det_{2\times2}(a_1,a_2)\ |\ .$$

Άρα,

$$\sum_{\{i_1,i_2\}\subseteq[n]} V(P)\cdot V(F_{i_1})\cdot V(F_{i_2})\cdot |\ det(x_{i_1},x_{i_2},e_3)\ |$$
$$=\frac{1}{4}V(P)\cdot\sum_{\{i_1,i_2\}\subseteq[n]}|\ det(a_{i_1},a_{i_2})\ |=\frac{1}{4}V(P)\cdot V(\Pi P)\ . \tag{3.10}$$

Επιπλέον,

$$\Big|\ det\Big(a_1\wedge(h_1-e_3),a_2\wedge(h_2-e_3),a_3\wedge(h_3-e_3)\Big)\ \Big|$$
$$=\Big|\ det(-a_1\wedge e_3,-a_2\wedge e_3,a_3\wedge h_3)+det(-a_1\wedge e_3,a_2\wedge h_2,-a_3\wedge e_3)$$
$$+det(a_1\wedge h_1,-a_2\wedge e_3,-a_3\wedge e_3)\ \Big|$$

$$= | \ < (-a_1 \wedge e_3) \wedge (e_3 \wedge a_2), a_3 \wedge h_3 > + < (-a_1 \wedge e_3) \wedge (e_3 \wedge -(a_3)), a_2 \wedge h_2 >$$
$$+ < a_1 \wedge h_1, (-a_2 \wedge e_3) \wedge (e_3 \wedge a_3) > \ |$$
$$= | \ det(-a_1, e_3, a_2) \cdot det(e_3, a_3, h_3) + det(-a_1, e_3, -a_3) \cdot det(e_3, a_2, h_2)$$
$$+det(-a_2, e_3, a_3) \cdot det(a_1, h_1, e_3) \ |$$
$$= | \ det_{2\times 2}(a_1, a_2) \cdot det_{2\times 2}(a_3, h_3) + det_{2\times 2}(a_3, a_1) \cdot det_{2\times 2}(a_2, h_2)$$
$$+det_{2\times 2}(a_2, a_3) \cdot det_{2\times 2}(a_1, h_1) \ | \ .$$

Αφού $V(\ conv(\{0\} \cup A_i)\ ) = det(a_i, h_i)/2$, προκύπτει ότι

$$V(F_1) \cdot V(F_2) \cdot V(F_3) \cdot |det(x_1, x_2, x_3)| = \frac{1}{4} \cdot \Big| \ det(a_2, a_3) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_1)\ )$$

$$+det(a_3, a_1) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_2)\ ) + det(a_1, a_2) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_3)\ ) \Big| \ . \quad (3.11)$$

Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι οι A_1, A_2 είναι διαδοχικές ακμές, τότε

$$V(\ conv(\{0\} \cup A_1 \cup A_2)\ ) = V(\ conv(\{0\} \cup A_1)\ ) + V(\ conv(\{0\} \cup A_2)\ ) \ .$$

Σε αυτή την περίπτωση,

$$det(a_3, a_1) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_2)\ ) + det(a_2, a_3) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_1)\ )$$

$$= det(a_3, a_1) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_1 \cup A_2)\ ) + det(a_1 + a_2, a_3) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_1)\ ) \ . \quad (3.12)$$

Θέτουμε $R(K) := V(\Pi K) - (1/4) \cdot V(P) \cdot V(\Pi P)$. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.2.2, αρκεί να δείξουμε ότι το $R(K)$ εξαρτάται μόνο από το εμβαδόν του P και ότι η ισότητα στο Θεώρημα 1.2.2 ισχύει για κάποιο P.

Έστω $v_1, ..., v_n$ οι κορυφές του P. Υποθέτουμε ότι το P δεν είναι τρίγωνο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$ είναι οι ακμές A_1, A_2, αντίστοιχα και ότι το 0 δεν περιέχεται στο τρίγωνο $conv(A_1 \cup A_2)$. Το γεγονός ότι $det(a_i, h_i) > 0$ συνεπάγεται εύκολα ότι το διάνυσμα $a_1 + a_2$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[v_1, v_3]$ έχουν ίσα μήκη και παράλληλες διευθύνσεις.

Θέτουμε σε εφαρμογή τη μέθοδο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2.1. Θεωρούμε την οικογένεια των πολυγώνων:

$$P_t = conv\{v_1, v_2 + t\nu, v_3, ..., v_n\} \ , \ t \in [t_1, t_2] \ ,$$

όπου ν είναι κάποιο διάνυσμα κάθετο στο $a_1 + a_2$ και $[t_1, t_2]$ είναι το μεγαλύτερο διάστημα για οποίο οι v_1, v_3 είναι κορυφές του P_t για κάθε t στο (t_1, t_2). Όπως αναφέρθηκε, το (t_1, t_2) περιέχει το 0, $P_0 = P$ και, επιπλέον, ο όγκος του P_t είναι σταθερός στο $[t_1, t_2]$. Επίσης, το P_t περιέχει το 0 στο εσωτερικό του για όλα τα t στο $[t_1, t_2]$.

Αν $A_{1,\ t}, A_{2,\ t}, A_3, ..., A_n$ είναι οι ακμές του P_t, τα αντίστοιχα παράλληλα διανύσματα είναι τα $a_{1,\ t} = a_1 \pm t\nu$, $a_{2,\ t} = a_2 \mp t\nu$, $a_3, ..., a_n$. Αντικαθιστώντας το ν με το $-\nu$ αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{1,\ t} = a_1 - t\nu$ και $a_{2,\ t} = a_2 + t\nu$.

Από τις (3.8), (3.10), (3.11), (3.12), έχουμε:

$$R\Big(conv(\{e_3\} \cup P_t)\Big) = \sum_{\{i_1,i_2,i_3\} \subseteq [n] \setminus \{1,2\}} V(F_{i_1}) \cdot V(F_{i_2}) \cdot V(F_{i_3}) \cdot |det(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})|$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{\substack{\{i_2,i_3\} \subseteq [n] \setminus \{1,2\} \\ i \in \{1,2\}}} \Big|\ det(a_i + \varepsilon_i t\nu, a_{i_2}) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_{i_3})\ )$$

$$+det(a_{i_3}, a_i + \varepsilon_i t\nu) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_{i_2})\ ) + det(a_{i_2}, a_{i_3}) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_{i,t})\ )\ \Big|$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{i \in [n] \setminus \{1,2\}} \Big| det(a_i, a_1 - t\nu) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_{1,t} \cup A_{2,t})\ )$$

$$+det(a_1 + a_2, a_i) \cdot V(\ conv(\{0\} \cup A_{1,t})\ ) + det(a_1 - t\nu, a_2 + t\nu) \cdot V(\ conv(\{0\}) \cup A_i\ )\ \Big|\ ,$$

όπου $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$.

Τότε, οι ποσότητες $V(\ conv(\{0\} \cup A_{1,t} \cup A_{2,t})\ )$ και $det(a_1 - t\nu, a_2 + t\nu) = 2V(\ conv\{v_1, v_2 + t\nu, v_3\}\ )$ είναι προφανώς σταθερές στο $[t_1, t_2]$. Επίσης, οι $det(a_i, a_1 - t\nu)$ και $V(\ conv(\{0\} \cup A_{i,t})\ )$ είναι αφφινικές στο $[t_1, t_2]$, $i = 1, 2$. Από προηγούμενη παρατήρηση, κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι αυστηρά θετικός στο (t_1, t_2). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ποσότητα $R(conv(P_t \cup \{e_3\}))$ είναι αφφινική στο $[t_1, t_2]$.

Συμπεραίνουμε ότι για κάποια i, j, με $\{i, j\} = \{1, 2\}$,

$$R\Big(conv(P_{t_i} \cup \{e_3\})\Big) \leq R(K) = R\Big(conv(P_0 \cup \{e_3\})\Big) \leq R\Big(conv(P_{t_j} \cup \{e_3\})\Big)\ .$$

Θυμίζουμε ότι οι κορυφές των P_{t_1} και P_{t_2} είναι αυστηρά λιγότερες από τις κορυφές του P. Άρα, από επαγωγή, υπάρχουν τρίγωνα T_1, T_2 του $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, εμβαδού όσο και το εμβαδον του P, με:

$$R\Big(conv(T_1 \cup \{e_3\})\Big) \leq R(K) \leq R\Big(conv(T_2 \cup \{e_3\})\Big)\ .$$

Ωστόσο, εξόρισμού, το $R(K)$ είναι αναλλοίωτο από αφφινικές απεικονίσεις της μορφής

$$\mathbb{R}^3 \ni (s_1, s_2, s_3) \mapsto\ (\Phi(s_1, s_2), s_3) \in \mathbb{R}^3\ ,$$

όπου Φ είναι μία αφφινική απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$, που διατηρεί την επιφάνεια. Αυτό συνεπάγεται ότι $R(K) = R(conv(T \cup \{e_3\}))$, όπου T οποιοδήποτε τρίγωνο ίδιας επιφάνειας με το P. Άρα, το $R(K)$ εξαρτάται μόνο από το εμβαδόν του P.

Στην ειδική περίπτωση, κατά την οποία $V(P) = 1$ και το K είναι simplex, είναι φανερό ότι $V(P) \cdot V(\Pi P)/4 = 1.5$ και υπολογίζεται εύκολα (βλέπε π.χ. [8]) ότι $V(\Pi K) = 2$. Επομένως, $R(K) = 1/2$. $\square$

Για να αποδείξουμε το Πόρισμα 1.2.4, ας πάρουμε K να είναι ο διπλός κώνος $conv(P \cup \{\pm e_3\})$ και K' να είναι ο κώνος $conv(P \cup \{e_3\})$, όπου P είναι ένα κεντρικά συμμετρικό πολύγωνο του $\mathbb{R} \times \{0\}$ εμβαδού 1. Αν $F_1, ..., F_n$ είναι οι έδρες του K', διάφορες της P, από τις (3.2), (3.8) και (3.10) προκύπτει ότι:

$$V(\Pi K') = \frac{1}{4}V(P) \cdot V(\Pi P)$$

$$+ \sum_{\{i_1,i_2,i_3\}\subseteq[n]} V(F_{i_1}) \cdot V(F_{i_2}) \cdot V(F_{i_3}) \cdot \mid det(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \mid ,$$

$$V(\Pi K) = 2^3 \cdot \sum_{\{i_1,i_2,i_3\}\subseteq[n]} V(F_{i_1}) \cdot V(F_{i_2}) \cdot V(F_{i_3}) \cdot \mid det(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \mid .$$

Επομένως,

$$\frac{V(\Pi K)}{V(K)^2} = 2^3 \cdot \Big(V(\Pi K') - \frac{1}{4}V(P) \cdot V(\Pi P)\Big) \cdot \frac{9}{4} = 9 ,$$

όπου κάναμε χρήση του Θεωρήματος 1.2.2 και του γεγονότος ότι $V(K) = 2/3$. $\square$

3.5 Σώματα προβολών και σώματα βαρυκέντρων

Έστω K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^d$. Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση στήριξης του σώματος βαρυκέντρων $\Gamma K(=\Gamma_1(K))$ του K, δίνεται από τον τύπο:

$$h_{\Gamma K}(x) = \int_K \mid < x, y > \mid dy = \frac{1}{d+1}\int_{S^{d-1}} \mid < x, y > \mid \rho_K^{d+1}(y)\, dy \ , \ x \in S^{d-1} ,$$

όπου ρ_K είναι η ακτινική συνάρτηση του K και το τελευταίο μέλος προκύπτει από ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. Προφανώς, το ΓK ζωνοειδές. Μπορεί να αποδειχτεί εύκολα ότι το συναρτησοειδές $V(\Gamma K)/V(K)^{d+1}$ είναι αναλλοίωτο από μη ιδιάζουσες γραμμικές απεικονίσεις. Μία βασική ιδιότητα για τον όγκο των σωμάτων βαρυκέντρων οφείλεται στον Petty [36] :

$$\frac{V(\Gamma B_1)}{V(B_1)^{d+1}} \leq \frac{V(\Gamma K)}{V(K)^{d+1}} \tag{3.13}$$

όπου $B_1 = B_1^d$ είναι η μπάλα όγκου 1 του $\mathbb{R}^d$. Εδώ, ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές με κέντρο το 0. Σημειώνουμε ότι η (3.13) είναι ουσιαστικά ειδική περίπτωση της ανισότητας (1.3). Αποδεικνύουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 3.5.1 *Αν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα του $\mathbb{R}^d$, τότε*

$$\frac{V(\Pi(\Gamma B_1))}{V(B_1)^{(d+1)(d-1)}} \leq \frac{V(\Pi(\Gamma K))}{V(K)^{(d+1)(d-1)}} \tag{3.14}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Σημειώνουμε ότι η ποσότητα $V(\Pi(\Gamma K))/V(K)^{(d+1)(d-1)}$ είναι επίσης αναλλοίωτη από μη ιδιάζοντες γραμμικούς μετασχηματισμούς. Επιπλέον, όπως δείχνει η (3.13), η (3.14) θα ήταν συνέπεια της εικασίας του Petty (αν, φυσικά γνωρίζαμε ότι ισχύει).

Για ότι ακολουθεί, α_d, β_d κτλ, θα ορίζουν θετικές σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση d. Ξαναγυρίζουμε στην ποσότητα $B_h(K, n; d)$, που ορίζεται από την (1.2). Για $h(t) = t^p$ και $p \in \mathbb{N}$, θέτουμε για απλότητα:

$$B_p(K) = B_h(K, n; d) =$$

$$\frac{1}{(d+p)^d} \int_{x_1 \in S^{d-1}} \cdots \int_{x_d \in S^{d-1}} |det(x_1, ..., x_d)|^p \ \rho_K(x_1)^{d+p} ... \rho_K(x_d)^{d+p} \ dx_1 ... dx_d.$$

Θυμίζουμε ότι το $B_p(K)$ είναι αναλλοίωτο από γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο. Επίσης, η (3.1) δείχνει ότι ο όγκος του ΓK δίνεται από τον τύπο:

$$V(\Gamma K) = \alpha_d B_1(K) \ ,$$

ενώ είναι φανερό ότι

$$B_2(K) = \beta_d (L_K^2)^d V(K)^{d+2} \ .$$

Λήμμα 3.5.1 *Υπάρχει κάποια σταθερά δ_d, τέτοια ώστε αν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα του $\mathbb{R}^d$, τότε*

$$B_1(K)^{\frac{d+2}{d+1}} \leq \delta_d B_2(K) \ ,$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές κέντρου 0.

Απόδειξη. Ισχύουν τα εξής:

$$B_2(K) = \beta_d L_K^{2d} V(K)^{d+2} = \beta_d \Big(\frac{1}{d}\int_{TK} |x|^2 \; dx\Big)^d$$

$$= \widetilde{\beta}_d \Big(\int_{S^{d-1}} \rho_{TK}^{d+2}(x) \; dx\Big)^d \geq \beta'_d \Big(\int_{S^{d-1}} \rho_{TK}^{d+1}(x) \; dx\Big)^{d\frac{d+2}{d+1}} \;,$$

όπου T είναι ένας μετασχηματισμός, τέτοιος ώστε το TK να είναι ισοτροπικό και ίδιου όγκου με το K και χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Hölder στην τελευταία ανισότητα. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η ρ_{TK} είναι σταθερή, δηλαδή το TK είναι μπάλα κέντρου 0 ή, ισοδύναμα, το K είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Από την άλλη, είναι φανερό ότι υπάρχουν κάποιες σταθερές γ_d, γ'_d τέτοιες ώστε

$$\gamma'_d \int_{S^{d-1}} \rho_{TK}^{d+2}(x) \, dx = \gamma_d \int_{S^{d-1}} \int_{TK} | < x, y > | \, dx \, \frac{dy}{d\omega_d} = V(\Gamma(TK), B_1, ..., B_1) \;,$$

όπου ω_d είναι ο όγκος της d-διάστατης μοναδιαίας μπάλας. Από την ανισότητα Minkowski (βλέπε Παράρτημα), έχουμε:

$$V(\Gamma(TK), B_1, ..., B_1) \geq V(\Gamma(TK))^{\frac{1}{d}} \cdot V(B_1)^{\frac{d-1}{d}} \;,$$

με ισότητα αν το $\Gamma(TK)$ είναι μπάλα. Αν το TK είναι μπάλα με κέντρο το 0, τότε το $\Gamma(TK)$ είναι μπάλα. Άρα αν το K είναι ελλειψοειδές κέντρου 0, ισχύει η ισότητα στην τελευταία ανισότητα. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες μαζί με τις περιπτώσεις ισότητας λαμβάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.□

Η Πρόταση 3.5.1 προκύπτει από το Λήμμα 3.5.1. Πρώτα χρειαζόμαστε μερικά επιπρόσθετα γνωστά αποτελέσματα. Το πρώτο, ο τύπος του Busemann [9]:

$$V(K)^{\;d-1} = \frac{1}{2}\int_{S^{d-1}} B_1(K \cap x^{\perp}) \; dx \;. \tag{3.15}$$

Χρησιμοποιώντας την εξής γενίκευση του τύπου του Busemann,

$$\int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} f(y_1, ..., y_{d-1}) dy_1 ... dy_{d-1} =$$

$$\epsilon_d \int_{x \in S^{d-1}} \Big[\int_{S^{d-1} \cap x^{\perp}} \cdots \int_{S^{d-1} \cap x^{\perp}} |det(y_1, ..., y_{d-1})| \cdot f(y_1, ..., y_{d-1}) dy_1 ... dy_{d-1} \Big] dx, \tag{3.16}$$

ο Weil [50] έδειξε ότι αν

$$h_Z(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{d-1}} | < x, y > | \ f(y) \ dy \ , \ x \in \mathbb{R}^d \ ,$$

είναι η συνάρτηση στήριξης ενός d-διάστατου ζωνοειδούς Z, για κάποια μετρήσιμη συνάρτηση $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}$, τότε το επιφανειακό του μέτρο είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesque και έχει συνάρτηση πυκνότητας την:

$$f_Z(x) = \theta_d \int_{S^{d-1}\cap x^\perp} .. \int_{S^{d-1}\cap x^\perp} det(x_1, ..., x_{d-1})^2 \ f(x_1)...f(x_{d-1}) \ dx_1...dx_{d-1} \ .$$

Έστω P ένα κυρτό σώμα, με απόλυτα συνεχές επιφανειακό μέτρο και πυκνότητα f. O Petty [38] έδειξε την εξής ανισότητα:

$$V(\Pi P) \geq \overline{c_d}\Big(\int_{S^{d-1}} f^{\frac{d}{d+1}}(x) \ dx \ \Big)^{d+1} \ , \tag{3.17}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το P είναι ελλειψοειδές. Η ποσότητα $\Omega(P) := \int_{S_{d-1}} f^{d/d+1} dx$ ονομάζεται αφφινική επιφάνεια του P.

Για να δείξουμε την Πρόταση 3.5.1, σημειώνουμε ότι (σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Weil) το επιφανειακό μέτρο του ΓK είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesque και η συνάρτηση πυκνότητάς του δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = l_d \cdot B_2(K \cap x^\perp) \ , \ x \in S^{d-1} \ .$$

Άρα, από την (3.17), το Λήμμα 3.5.1 και την (3.15), έχουμε

$$V(\Pi(\Gamma K)) \geq \lambda_d \Big(\int_{S^{d-1}} B_2(K \cap x^\perp)^{\frac{d}{d+1}} \ dx \ \Big)^{d+1}$$

$$\geq \lambda_d' \Big(\int_{S^{d-1}} B_1(K \cap x^\perp) \ dx \Big)^{d+1} = \lambda_d'' V(K)^{(d-1)(d+1)} \ .$$

Η ισότητα ισχύει και στις δύο ανισότητες αν το K είναι ελλειψοειδές κέντρου 0 και στην δεύτερη, μόνο αν για κάθε κατεύθυνση x το $K \cap x^\perp$ είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων. Όπως προκύπτει από το [16], Θεώρημα 7.1.5, το K είναι αναγκαστικά ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων. □

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε μία εφαρμογή της Πρότασης 3.5.1 στις τρεις διαστάσεις.

Θεώρημα 3.5.2 *Έστω $n \geq 3$ ένας ακέραιος. Μεταξύ όλων των 3-διάστατων κυρτών σωμάτων όγκου 1, τα ελλειψοειδή κέντρου 0 είναι ακριβώς αυτά που ε-λαχιστοποιούν το (αναλλοίωτο από γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο) συναρτησοειδές*

$$Q_n(K) := \int_{x_1 \in K} \dots \int_{x_n \in K} V\Big(\Pi\Big(\sum_{i=1}^{n} [-x_i, x_i]\Big)\Big)\ dx_1 \dots dx_n\ .$$

Με άλλα λόγια, η μέση τιμή του όγκου του σώματος προβολών n ευθυγράμμων τμημάτων, τα οποία έχουν επιλεγεί ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από ένα κυρτό σωμα K διάστασης 3 δεδομένου όγκου, είναι ελάχιστο αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές με κέντρο το 0. Το θεώρημα 3.5.2 σχετίζεται τυπικά με την εικασία του Petty ως εξής: Αν μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα Minkowski με την κυρτή θήκη, τότε η εικασία του Petty θα ήταν σωστή στις 3 διαστάσεις. Σημειώνουμε εδώ ότι το Θεώρημα 3.5.2 ισχύει, γενικότερα, για αστρόμορφα σώματα.

Ας χρησιμοποιήσουμε τωρα την (3.4) και το Λήμμα 3.2.3 για να παράγουμε μία απλούστερη έκφραση για το $Q_n(K)$:

$$Q_n(K) = \alpha_1\ \binom{n}{3} \int_{(x_1,x_2,x_3)\in K^3} det(x_1,x_2,x_3)^2\ dx_1 dx_2 dx_3$$

$$+\alpha_2\ \binom{n}{4} \int_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in K^4} |det(x_1,x_2,x_3)\cdot det(x_1,x_2,x_4)|\ dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

$$+\alpha_3\ \binom{n}{5} \int_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in K^5} |det(x_1,x_2,x_3)\cdot det(x_1,x_4,x_5)|\ dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5$$

$$+\alpha_4\ \binom{n}{6} \int_{(x_1,\dots,x_6)\in K^6} |det(x_1\wedge x_2, x_3\wedge x_4, x_5\wedge x_6)|\ dx_1 \dots dx_6$$

$$=: \alpha_1\ \binom{n}{3} A_1(K) + \alpha_2\ \binom{n}{4} A_2(K) + \alpha_3\ \binom{n}{5} A_3(K) + \alpha_4\ \binom{n}{6} A_4(K)\ ,$$

όπου $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αφου $A_1(K) = B_2(K) = \beta_3 (L_K^2)^3$ και αφού είναι γνωστό ότι η ισοτροπική σταθερά είναι ελάχιστη αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές κέντρου 0, προκύπτει ότι

$$A_1(K) \geq A_1(B_1) \ ,$$

όπου B είναι η μπάλα κέντρου 0 και όγκου 1, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές κέντρου 0.

Επίσης, από την (3.3) και την Πρόταση 3.5.1, έχουμε:

$$A_4(K) = \mu V(\Pi(\Gamma K)) \geq \mu V(\Pi(\Gamma B_1)) = A_4(B_1) \ ,$$

όπου μ είναι απόλυτη σταθερά.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2, χρειαζόμαστε ανισότητες ανάλογες με αυτές που έχουμε για τα $A_2(K)$ και $A_3(K)$. Παρότι τέτοιες ανισότητες μπορούν να προκύψουν σχετικά άμεσα, θα θέλαμε προηγουμένως να περιγράψουμε το πώς συσχετίζεται το $Q_n(K)$ με άλλες ποσότητες που συνδέονται αφφινικά με το K. Επειδή για τα $A_1(K)$ και $A_4(K)$ έχουμε ήδη βρει καλές εκφράσεις, αρκεί να κάνουμε το ίδιο και για τα $A_2(K)$, $A_3(K)$. Καταρχήν, θα χρειαστούμε κάποιες επιπλέον έννοιες.

Για $p \geq 1$, το L^p-επιφανειακό μέτρο του K δίνεται από τον τύπο

$$dS_{p,K}(\cdot) = h_K^{1-p} dS_K(\cdot) \ .$$

Ο Lutwak [28] απέδειξε ότι αν $p \geq 1$, $p \neq d$ τότε για οποιαδήποτε άρτια μετρήσιμη συνάρτηση $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό συμμετρικό κυρτό σώμα L, τέτοιο ώστε:

$$dS_{p,L}(\cdot) = f dV(\cdot) \ .$$

Με βάση το τελευταίο, αν $1 \leq p \neq d$ και το K είναι κεντρικά συμμετρικό, ορίζουμε το κεντρικά συμμετρικό σώμα $C_p(K)$, που μπορούμε να ονομάσουμε συμμετρική L^p-εικόνα καμπυλότητας (curvature image) του K και έχει ως L^p-επιφανειακό μέτρο:

$$dS_{p,C_p(K)}(\cdot) = \frac{\rho_K^{d+p}}{2} dV(\cdot) + \frac{\rho_{-K}^{d+p}}{2} dV(\cdot) \ .$$

Αποδεικνύεται, εύκολα, το εξής:

Πρόταση 3.5.2 *Αν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα όγκου 1, τότε $V(C_p(K)) \geq V(C_p(B_1))$, όπου $1 \leq p < d$.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder και την κεντρική συμμετρία του $C_p(K)$, έχουμε:

$$1 = V(K) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \rho_K^d(x) dx$$

$$\leq \frac{1}{d}\Big[\int_{S^{d-1}} \rho_K^{d+p} h_{C_p(K)}^p dx\Big]^{\frac{d}{d+p}} \cdot \Big[\int_{S^{d-1}} h_{C_p(K)}^{-d} dx\Big]^{\frac{p}{d+p}}$$

$$= c_{p,d} V\Big(C_p(K)\Big)^{\frac{d}{d+p}} \cdot V\Big((C_p(K))^*\Big)^{\frac{p}{d+p}} \ .$$

Όμως, από την ανισότητα Blaschke-Santalo (βλέπε Παράγραφο 4.3, Θεώρημα A), έχουμε:

$$V\Big((C_p(K))^*\Big)^{\frac{p}{d+p}} \leq j_p \cdot V\Big(C_p(K)\Big)^{-\frac{d}{d+p}} \ .$$

Η ισότητα ισχύει και στις δύο ανισότητες, όταν το K είναι μπάλα. $\square$

Επίσης, για $p \neq d$, ορίζουμε το συμμετρικό σώμα $U_p(K)$, του οποίου η πυκνότητα του L^p-επιφανειακού μέτρου δίνεται από τον τύπο:

$$f_{p,U_p(K)}(x) = B_{p+1}(K \cap x^{\perp}) \ , \ x \in S^{d-1} \ .$$

Ισχύει το αναμενόμενο.

Πρόταση 3.5.3 *Αν K κυρτό σώμα όγκου 1 του $\mathbb{R}^d$, τότε $U_p(K) \geq U_p(B_0)$.*

Ο L^p μεικτός όγκος των σωμάτων L και M ορίζεται από τον τύπο:

$$V_p(L, M, ..., M) = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_L^p(x) dS_{p,M}(x) \ .$$

Μία L^p-εκδοχή της κλασσικής ανισότητας Minkowski εμφανίζεται στο [28]:

$$V_p(L, M, ..., M) \geq V(L)^{\frac{p}{d}} V(M)^{\frac{d-p}{d}} \ ,$$

με ισότητα αν και μόνο αν τα L και M είναι ομοιόθετα. Για την απόδειξη της Πρότασης 3.5.3 θα χρειαστούμε το παρακάτω απλό Λήμμα:

Λήμμα 3.5.3 $V_p(L, U_p(K), ..., U_p(K)) = \xi_{p,d} \int_K ... \int_K h_L^p(y_1 \wedge ... \wedge y_d) dy_1 ... dy_d$.

Απόδειξη: Το δεύτερο μέλος, από την (3.16) και από πολικές, ισούται με:

$$\overline{\epsilon}_{p,d} \int_{x \in S^{d-1}} \Big[\int_{S^{d-1} \cap x^{\perp}} ... \int_{S^{d-1} \cap x^{\perp}}$$

$$|det(y_1, ..., y_{d-1})| \cdot h_L^p(y_1 \wedge ... \wedge y_{d-1}) \rho_K^{d+p}(y_1) ... \rho_K^{d+p}(y_{d-1}) dy_1 ... dy_{d-1}\Big] dx$$

$$= \overline{\epsilon'}_{p,d} \int_{x \in S^{d-1}} h_L^p(x) \Big[\int_{S^{d-1} \cap x^{\perp}} ... \int_{S^{d-1} \cap x^{\perp}}$$

$$|det(y_1, ..., y_{d-1})|^{p+1} \rho_K^{d+p}(y_1) ... \rho_K^{d+p}(y_{d-1}) dy_1 ... dy_{d-1}\Big] dx$$

$$= \overline{\epsilon''}_{p,d} \int_{x\in S^{d-1}} h_L^p(x) B_{p+1}(K\cap x^{\perp}) dx = \xi_{p,d}^{-1} V_p(L, U_p(K), ..., U_p(K)). \ \square$$

Για να αποδείξουμε την Πρόταση 3.5.3, θα δείξουμε πρώτα ότι

$$V_p(L, U_p(K), ..., U_p(K)) \geq V_p(B_0, U_p(B_0), ..., U_p(B_0)) \ , \tag{3.18}$$

για κάθε κυρτό σώμα L όγκου 1, του $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε την παράλληλη χορδική κίνηση $K_t = \{x + tu(x|\nu^{\perp})\nu : x \in \ S_\nu(K)\}$, $t \in [-1, 1]$, όπου ν είναι κάποια κατεύθυνση και $u(y)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $K \cap (y + \mathbb{R}\nu)$, $y \in K|\nu^{\perp}$. Τότε το K_{-1} είναι η ανάκλαση του K ως προς το υπερεπίπεδο $\nu^{\perp}$, $K_0 = S_\nu(K)$ και $K_1 = K$. Ανάλογη παράλληλη χορδική κίνηση μπορούμε να ορίσουμε και για το L, στην κατεύθυνση ν (ουσιαστικά και πάλι η Steiner συμμετρικοποίηση), με αντίστοιχη συνάρτηση ταχύτητας v. Κάποιος μπορεί να δει εύκολα ότι $V_p(L, U_p(K), ..., U_p(K)) = V_p(L_{-1}, U_p(K_{-1}), ..., U_p(K_{-1}))$, ενώ από το Λήμμα 3.5.3 και από μία αλλαγή μεταβλητής, έχουμε:

$$V_p(L_t, U_p(K_t)..., U_p(K_t)) = \xi_{p,d} \int_{y_1\in K} ... \int_{y_{d-1}\in K} max_{x\in L}$$

$$| \ det(x + tv(x|\nu^{\perp})\nu, y_1 + tu(y_1|\nu^{\perp})\nu, ..., y_{d-1} + tu(y_{d-1}|\nu^{\perp})\nu) \ | \ dy_1...dy_{d-1} \ ,$$

που είναι κυρτή συνάρτηση του t, Ο ισχυρισμός έπεται. Αν, τώρα, B' είναι η μπάλα όγκου ίσου με τον όγκο του $U_p(K)$, από την (3.18) και για $L = U_p(K)$, έχουμε:

$$V(U_p(K)) \geq V_p(B', U_p(B_0), ..., U_p(B_0)) = V(U_p(K))^{\frac{p}{d}} V(U_p(B_0))^{\frac{d-p}{d}} \ . \ \square$$

Με βάση τα όσα είπαμε, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα $A_2(K)$ και $A_3(K)$. Έχουμε:

$$A_2(K) = \int_{x_1\in K} \int_{x_2\in K} \Big(\int_{x_3\in K} |det(x_1, x_2, x_3)| \ dx_3 \Big)^2 \ dx_1 dx_2$$

$$= \int_{x_1\in K} \int_{x_2\in K} h_{\Gamma K}^2(x_1 \wedge x_2) \ dx_1 dx_2 \ ,$$

άρα από το Λήμμα 3.5.3, λαμβάνουμε

$$A_2(K) = \xi_{2,2}^{-1} \cdot V_2(\Gamma K, U_2(K), U_2(K)) \ . \tag{3.19}$$

Ομοίως,

$$A_3(K) = \int_{x_1\in K} \Big(\int_{x_2\in K} \int_{x_3\in K} |det(x_1, x_2, x_3)| \ dx_2 dx_3 \Big)^2 \ dx_1$$

$$= c_0 \int_{x_1 \in K} \Big(\int_{x_2 \in S^2} \int_{x_3 \in S^2} | < x_1, x_2 \wedge x_3 > | \ \rho_K^4(x_2) \rho_K^4(x_3) dx_2 dx_3 \Big)^2 \ dx_1$$

$$= c_0' \int_{x_1 \in K} h^2_{\Pi(\Gamma K)}(x_1) dx_1 = c_0'' \int_{S^2} h^2_{\Pi(\Gamma K)}(x) \rho_K^5(x) dx \ .$$

Άρα,

$$A_3(K) = \bar{b} \cdot V_2(\Pi(\Gamma K), C_2(K), C_2(K)) \ . \tag{3.20}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί το $\Pi(\Gamma K)$ είναι κεντρικά συμμετρικό. Οι ζητούμενες ανισότητες για τα $A_2(K)$, $A_3(K)$ (άρα και η απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2) προκύπτουν άμεσα από την L^2-ανισότητα Minkowski, την ανισότητα (3.13) και την Πρόταση 3.5.3 (για το $A_2(K)$) και την Πρόταση 3.5.1 και την (3.5.2) (για το $A_3(K)$).

Πιστεύουμε ότι θα ήταν ενδιαφέρον να αποδείξει κάποιος (αν ισχύει) το Θεώρημα 3.5.2 καθώς και να γράψει μία απλή έκφραση για το $Q_n(K)$ σε οποιαδήποτε διάσταση.

3.6 Μερικά εν κατακλείδι σχόλια

§1) Το γεγονός ότι η κλάση των 3-διάστατων ζωνοειδών, για τα οποία ισχύει η ισότητα στην (1.11), περιέχει αυστηρά την κλάση των κεντρικά συμμετρικών κυλίνδρων έχει κατά τη γνώμη μας κάποιο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος εύκολα να παράγει μία άπειρη οικογένεια αντιπαραδειγμάτων για την εικασία του Schneider στις τρεις διαστάσεις, καθώς και στις πολλές διαστάσεις χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.13).

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι το Z είναι ένα ζωνότοπο του $\mathbb{R}^3$, που γράφεται ως άθροισμα πέντε ευθυγράμμων τμημάτων σε γενική θέση ή ως άθροισμα ενός κυλίνδρου και ενός ευθύγραμμου τμήματος, αλλά δεν είναι κύλινδρος. Τότε,

$$V(\Pi(\Pi^{-1}Z)) > 2^3 V(\Pi^{-1}Z)^2 \ .$$

Για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιούμε μία παρατήρηση του Schneider ([46] σελ. 417):

$$\frac{V(\Pi(\Pi Z))}{V(\Pi Z)^2} \leq \frac{V(\Pi Z)}{V(Z)^2} \ , \tag{3.21}$$

με ισότητα αν και μόνο αν τα $\Pi(\Pi Z)$ και Z είναι ομοιόθετα. Ωστόσο, ο Weil [49] έδειξε ότι οι κύλινδροι είναι τα μόνα πολύτοπα διάστασης 3, με αυτή την ιδιότητα. Αφού το Z είναι πολύτοπο αλλα όχι κύλινδρος, το ίδιο είναι και το $\Pi^{-1}Z$. Αρα, αντικαθιστώς στην (3.21) το Z με το $\Pi^{-1}Z$ και χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό της ισότητας στο Θεώρημα 1.2.1, το ζητούμενο έπεται. Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε 3-διάστατο κεντρικά συμμετρικό πολύτοπο K όγκου 1, με το πολύ δέκα έδρες, ισχύει $V(\Pi K) \geq 8$, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι κύλινδρος.

Αν E είναι ένα ελλειψοειδές διάστασης τρία, υπολογίζεται εύκολα ότι $V(\Pi E)/V(E)^2 < 8$. Άρα, αν το K είναι κώνος, κεντρικά συμμετρικός διπλός κώνος ή είναι της μορφής $\Pi^{-1}Z$, όπου Z είναι κάποιο ζωνοειδές για το οποίο η ισότητα στην (1.11) επιτυγχάνεται, τότε $V(\Pi E)/V(E)^2 < V(\Pi K)/V(K)^2$. Από όσο γνωρίζουμε, δεν υπάρχει άλλη φυσιολογική κλάση σωμάτων του $\mathbb{R}^3$, εκτός από τους κυλίνδρους, στην οποία η εικασία του *Petty* να έχει επιβεβαιωθεί.

§2) Το πρόβλημα της απόδειξης μίας ανισότητας ανάλογης της (1.11) σε κάθε διάσταση, φαίνεται να είναι αρκετά πιο πολύπλοκο από την 3-διάστατη περίπτωση. Ένας από τους κυριότερους λόγους, κατά τη γνώμη μας, είναι ότι δεν μπορεί κάποιος εύκολα να εικάσει ποιες θα μπορούσαν να είναι οι περιπτώσεις ισότητας. Μία ανισότητα ανάλογη της (3.6) θα ήταν το κλειδί για τη λύση του προβλήματος. Κάποιος μπορεί να παρατηρήσει τις συναρτήσεις S και T στις d διαστάσεις, που ορίζονται από τις (3.5) και (3.4) και να συμπεράνει ότι η ανισότητα $V(\Pi Z)/V(Z)^{d-1} \leq 2^d$ ισχύει για κάθε ζωνοειδές Z, αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα για όλα τα ζωνοειδή που παράγονται από το πολύ $d(d-1)$-ευθύγραμμα τμήματα.

§3) O Brannen διατύπωσε στο [7], την εξής εικασία: ' Στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών σωμάτων διάστασης d, το $V(\Pi K)/V(K)^{d-1}$ μεγιστοποιείται αν το K είναι το μέγιστο κεντρικά συμμετρικό σώμα, που περιέχεται στο simplex. '
O Brannen αναφέρει ότι στις τρεις διαστάσεις, αυτό είναι το σύνηθες οκτάεδρο (ειδικότερα, ένας κεντρικά συμμετρικός διπλός κώνος).

Έστω K ένα κυρτό σώμα και $dS_K(\cdot)$ το επιφανειακό του μέτρο, ορισμένο στην S^{d-1}. Το Blaschke-σώμα ∇K του K ορίζεται ως το μοναδικό (μέχρι παράλληλης μεταφοράς) κυρτό σώμα, με επιφανειακό μέτρο:

$$dS_{\nabla K}(\cdot) = \frac{1}{2}dS_K(\cdot) + \frac{1}{2}dS_{-K}(\cdot)\ . \tag{3.22}$$

Προφανώς, το ∇K είναι κεντρικά συμμετρικό. O Schneider διατύπωσε την εικασία ότι ο λόγος $V(\nabla K)/V(K)$ είναι μέγιστος αν και μόνο αν το K είναι simplex (βλέπε [16] για αναφορά). Εικάζουμε το εξής: Στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών σωμάτων, το $V(\Pi K)/V(K)^{d-1}$ είναι μέγιστο όταν το K είναι το Blaschke-σώμα ενός simplex. Έστω, τώρα, ότι η προηγούμενη πρόταση είναι αληθής και, επιπλέον, η εικασία του Schneider είναι αληθής. Αν το K είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα, έχουμε:

$$\frac{V(\Pi K)}{V(K)^{d-1}} = \frac{V(\Pi(\nabla K))}{V(\nabla K)^{d-1}}\Big(\frac{V(\nabla K)}{V(K)}\Big)^{d-1} =$$

$$\leq \frac{V(\Pi(\nabla T))}{V(\nabla T)^{d-1}}\Big(\frac{V(\nabla T)}{V(T)}\Big)^{d-1} = \frac{V(\Pi T)}{V(T)^{d-1}} \ .$$

Άρα, αν οι δύο αυτές εικασίες είναι σωστές, τότε το $V(\Pi K)/V(K)^{d-1}$ είναι μέγιστο αν και μόνο αν το K είναι simplex, όπως προτείνει και ο Brannen.

Σημειώνουμε, εδώ ότι η εικασία που αναφέραμε προηγουμένως και η εικασία του Brannen (για συμμετρικά σώματα) είναι ίδιες στις τρεις διαστάσεις. Δεν γνωρίζουμε αν ισχύει το ίδιο γενικά.

§4) Έστω K ένα αστρόμορφο σώμα του $\mathbb{R}^3$. Θέτουμε

$$P_n(K) := \int_{x_1\in K} .... \int_{x_n\in K} V(\sum_{i=1}^{n}[-x_i, x_i])^2 \ dx_1...dx_n \ .$$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι η τιμή του $Q_n(B)/P_n(B)$ συμφωνεί με την εικασία του Petty, για κάθε $n \geq 3$, όπου B είναι μία τριδιάστατη μπάλα κέντρου 0. Πράγματι, κάποιος μπορεί να υπολογίσει:

$$P_n(K) = \beta_1 \binom{n}{3} A_1(K) + \beta_2 \binom{n}{4} A_2(K) + \beta_3 \binom{n}{5} A_3(K) + \beta_4 \binom{n}{6} B_4(K),$$

όπου

$$B_4(K) := \Big(\int_{x_1\in K}\int_{x_2 \ \in K}\int_{x_3\in K} |det(x_1, x_2, x_3)| \ dx_1 dx_2 dx_3\Big)^2$$

και $\beta_1, ..., \beta_4$ είναι απόλυτες σταθερές. Παίρνοντας, διαδοχικά, το n να είναι 3, 4, 5, προκύπτει από το Θεώρημα 1.2.1 ότι $\alpha_i/\beta_i = 8 > V(\Pi B)/V(B)^2$, $i = 1, 2, 3$. Επίσης, από το νόμο των μεγάλων αριθμών, προκύπτει εύκολα ότι το $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[-x_i, x_i]$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως σε ένα πολλαπλάσιο του σώματος βαρυκέντρων του K, όταν το n τείνει στο άπειρο, άρα $lim_{n\to\infty} Q_n(K)/P_n(K) = V(\Pi(\Gamma K))/V(\Gamma K)^2$. Από την άλλη είναι φανερό ότι $lim_{n\to\infty} Q_n(K)/P_n(K) = \alpha_4 A_4(K)/\beta_4 B_4(K)$. Παίρνοντας $K = B$, έχουμε

$$\alpha_4 A_4(B)/\beta_4 B_4(B) = V(\Pi B)/V(B)^2 \ ,$$

οπότε $Q_n(B)/P_n(B) > V(\Pi B)/V(B)^2$, $n \geq 3$. Η τελευταία ανισότητα θα προέκυπτε από την ανισότητα που είκασε ο Petty.

Κεφάλαιο 4

Ελάχιστη επιφάνεια και M-θέση

4.1 Εισαγωγικά

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^d$. Έστω C ένας θετικός αριθμός. Λέμε ότι το K είναι σε M-θέση με σταθερά C, αν

$$|K + B_1^d|^{1/d} < C \ , \tag{4.1}$$

Το εφαλτήριο αυτού του Κεφαλαίου είναι το διάσημο αποτέλεσμα του Milman [34], σύμφωνα με το οποίο υπάρχει κατάλληλη επιλογή της σταθεράς C, έτσι ώστε κάθε κυρτό σώμα να έχει γραμμική εικόνα όγκου 1 σε M-θέση με σταθερά C. Σε όσα θα ακολουθήσουν θα αναφερόμαστε στην M-θέση χωρίς να κάνουμε λόγο για την απόλυτη σταθερά C. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski (βλέπε Παράρτημα) προκύπτει ότι αν το K είναι σε M-θέση, τότε $|K + B_1^d|^{1/d} \sim X(K,1)$ (η ποσότητα $X(K,t)$ ορίστηκε στην Εισαγωγή). Ο συμβολισμός $a \sim b$ σημαίνει ότι ο λόγος a/b φράσσεται από απόλυτες σταθερές.

Αν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα του $\mathbb{R}^d$, με βαρύκεντρο στο 0, από το Θεώρημα ύπαρξης του Minkowski (βλέπε Παράρτημα), ορίζεται μονοσήμαντα το σώμα $C(K)$ με κέντρο βάρους το 0 και επιφανειακό μέτρο

$$dS_{C(K)}(\cdot) = \frac{1}{d+1}\rho_K^{d+1} dV(\cdot) \ .$$

Μπορεί κάποιος να ονομάσει το $C(K)$ εικόνα καμπυλότητας του K (ο ορισμός καθώς και παραλλαγές του οφείλονται στον Lutwak [25]· μπορεί να γίνει η σύγκριση με τον αντίστοιχο ορισμό στην Παράγραφο 3.5).

Μπορεί να αποδειχτεί ότι το $C(K)$ συνδέεται αφφινικά με το K. Για την ακρίβεια, ισχύει το εξής:

$$C(TK) = (T^*)^{-1} C(K) \ , \tag{4.2}$$

για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T που διατηρεί τον όγκο. Πράγματι, για οποιοδήποτε κυρτό σώμα L έχουμε:

$$V(L, C(TK), ..., C(TK)) = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_L f_{C(TK)} dx = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_L(x) f \frac{\rho_{TK}^{d+1}(x)}{d+1} dx$$

$$= \frac{1}{d}\int_{TK} h_L(x)dx = \frac{1}{d}\int_K h_L(Tx)dx = \frac{1}{d}\int_K h_{T^*L}(x)dx$$

$$= V(T^*L, C(K), ..., C(K)) = lim_{t\to 0}\frac{V(C(K)+tT^*L) - V(C(K))}{t}$$

$$= lim_{t\to 0}\frac{V((T^*)^{-1}C(K)+tL) - V((T^*)^{-1}C(K))}{t}$$

$$= V(L, (T^*)^{-1}C(K), ..., (T^*)^{-1}C(K)) ,$$

γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας (βλέπε Παράρτημα).

Ορίζουμε, επίσης, την ποσότητα:

$$F_K = \frac{1}{\sqrt{d}V(K)^{1+\frac{1}{d}}} min\{\int_{TK} |x|dx : \ T \in SL_d\} .$$

Είναι προφανές από την (4.2) ότι αν $V(K) = 1$, για την επιφάνεια του $C(K)$ έχουμε

$$\partial(C(K)) = \int_K |x|dx.$$

Επομένως, το επόμενο είναι προφανές:

Λήμμα 4.1.1 *Το $C(K)$ έχει ελάχιστη επιφάνεια αν και μόνο αν*

$$F_K = \frac{1}{\sqrt{d}V(K)^{1+\frac{1}{d}}}\int_K |x|dx .$$

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε τα παρακάτω:

Θεώρημα 4.1.2 *Έστω K ένα αστρόμορφο σώμα του $\mathbb{R}^d$ με κέντρο βάρους το 0 και $K \subseteq L$, για κάποιο κυρτό σώμα L με κέντρο βάρους 0 και $V(L)/V(K) < C^d$. Αν $T' \in SL_{2d}$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε*

$$F_{K\times B_1^d} = \frac{1}{\sqrt{d}}\int_{T'(K\times B_1^d)} |x|dx ,$$

τότε $V_{2d}\Big(\frac{1}{V_d(C(T'(K\times B_1^d)))^{\frac{1}{2d}}} C(T'(K\times B_1^d)) + B_1^{2d}\Big)^{\frac{1}{2d}} \geq c\sqrt[4]{F_K}$, *για κάποια θετική σταθερά c που εξαρτάται μόνο από την C.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μία ιδέα από το [5].

Θεώρημα 4.1.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$, τέτοια ώστε για κάθε διάσταση d να υπάρχει κυρτό σώμα M_d όγκου 1 του $\mathbb{R}^d$ σε θέση ελάχιστης επιφάνειας, τέτοιο ώστε*

$$V(M_d + B_1^d)^{\frac{1}{d}} \geq c_0 d^{1/8} \ .$$

Επιπλέον, το M_d μπορεί να ληφθεί 1-unconditional (δηλαδή συμμετρικό ως προς τα κύρια υπερεπίπεδα).

Άρα, αν το d είναι αρκετά μεγάλο, ένα σώμα σε θέση ελάχιστης επιφάνειας απέχει εν γένει πολύ από το να βρίσκεται σε M-θέση, ακόμη και στην 1-unconditional περίπτωση. Επίσης, αν ένα σώμα K όγκου 1 έχει ελάχιστη επιφάνεια, δεν προκύπτει ότι

$$V(K + B_1^d)^{1/d} = X(K,t) \ ,$$

τουλάχιστον για $c'^{-1}d^{-1/8} \leq t \leq c'd^{1/8}$, για κάποια (αρκετά μικρή) θετική απόλυτη σταθερά c'. Πράγματι, αν το M_d είναι όπως στο Θεώρημα 4.1.3 και $c'^{-1}d^{-1/8} \leq t \leq 1$, έχουμε:

$$V(M_d + tB_1^d)^{1/d} \geq tV(M_d + B_1^d)^{1/d} \geq tc_0 d^{-1/8} \geq c_0 c'^{-1} \ ,$$

ενώ $X(K,t) < C$ και αν $1 \leq t \leq c'd^{1/8}$, τότε

$$V(M_d + tB_1^d)^{1/d} \geq V(M_d + B_1^d)^{1/d} > c_0 c' d^{1/8} \ ,$$

ενώ $X(K,t) < Cc_0 d^{1/8}$.

4.2 Βασικά εργαλεία

Αναφέρουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα που είναι απαραίτητα για τη συνέχεια. Το πρώτο είναι ένας ασυμπτωτικός τύπος για τον όγκο του πολικού ενός κυρτού σώματος K του $\mathbb{R}^d$, με βαρύκεντρο στο 0.

Θεώρημα A. Ισχύει

$$\frac{C^{-1}}{d} \leq \Big[V_d(K^*)V_d(K)\Big]^{\frac{1}{d}} \leq (\omega_d^2)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{C}{d}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Η δεξιά ανισότητα είναι η κλασσική ανισότητα Blaschke-Santalo και είναι ακριβής: Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές. Η αριστερή ανισότητα αποδείχτηκε από τους Bourgain-Milman [6] [34]. Σημειώνουμε ότι η ίδια ανισότητα ισχύει για κάθε κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του (χωρίς απαραίτητα το κέντρο βάρους του να είναι το 0). Για την ιστορία αναφέρουμε ότι το πρόβλημα του προσδιορισμού της ελάχιστης τιμής του γινομένου $V_d(K^*)V_d(K)$ παραμένει ανοιχτό εδώ και πολλά χρόνια.

Το επόμενο Θεώρημα (και πάλι του Milman [34]) αποτελεί μία ισχυροποίηση της (4.1):

Θεώρημα B. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$, με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^d$ υπάρχει ένα ελλειψοειδές M_K, με $V(M_K) = V(K)$, τέτοιο ώστε για κάθε κυρτό σώμα T του $\mathbb{R}^d$ να ισχύει:

$$c^{-1}V(M_K + T)^{1/d} \leq V(K + T)^{1/d} \leq cV(M_K + T)^{1/d}$$

και

$$c^{-1}V((M_K)^* + T)^{1/d} \leq V(K^* + T)^{1/d} \leq cV((M_K)^* + T)^{1/d} .$$

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε ορισμένες άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος B. Αν και είναι όλες γνωστές, θεωρούμε σωστό να συμπεριλάβουμε και αποδείξεις, για λόγους είτε πληρότητας είτε συνέπειας.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω E ελλειψοειδές του $\mathbb{R}^d$, με κέντρο 0 και $V(E) = \omega_d$ (οπότε και $V(E^*) = \omega_d$). Ισχύει:*

$$V(E^* + \Omega_d)^{1/d} = V(E + \Omega_d)^{1/d} ,$$

όπου Ω_d η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T \in SL_d$, με $E = T\Omega_d$. Είναι γνωστό το εξής: Υπάρχει συμμετρικός πίνακας A και ορθογώνιος πίνακας S, τέτοιοι ώστε $T = SA$. Έχουμε:

$$V(E^* + \Omega_d) = V((T^*)^{-1}(\Omega_d) + \Omega_d) = V(\Omega_d + T^*\Omega_d)$$

$$= V(\Omega_d + A^*S^*\Omega_d) = V(\Omega_d + AS^*\Omega_d) = V(\Omega_d + A\Omega_d)$$

$$= V(\Omega_d + SA\Omega_d) = V(E + \Omega_d) . \quad \square$$

Πρόταση 4.2.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, τέτοια ώστε αν L είναι ένα σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^d$, με βαρύκεντρο στο 0 να ισχύει*

$$V(dL^* + B_1^d)^{1/d} < c_1V(L + B_1^d)^{1/d} .$$

Απόδειξη: Θέτουμε $t_1 = V(L + B_1^d)^{1/d}$. Από το Θεώρημα B, για $K = L$ και $T = dB_1^d$, έχουμε:

$$c^{-1}V\Big((M_L)^* + \frac{1}{d}B_1^d\Big)^{\frac{1}{d}} < \frac{1}{d}t_1 \ .$$

Όμως, $V((M_L)^*)^{1/d} \sim 1/d$, άρα:

$$V\Big(\frac{1}{d}\frac{1}{V((M_L)^*)^{1/d}}(M_L)^* + \frac{1}{d}B_1^d\Big)^{\frac{1}{d}} \leq V\Big((c'+1)(M_L)^* + \frac{1}{d}B_1^d\Big)^{\frac{1}{d}}$$

$$\leq V\Big((c'+1)(M_L)^* + (c'+1)\frac{1}{d}B_1^d\Big)^{\frac{1}{d}} = (c'+1)V\Big((M_L)^* + \frac{1}{d}B_1^d\Big)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{c'+1}{d}t_1 \ .$$

Άρα, από το Λήμμα 4.2.1, έχουμε

$$\frac{1}{d}V(M_L + B_1^d)^{1/d} \leq \frac{c+1}{d}t_1 \ ,$$

οπότε και πάλι από το Θεώρημα του Milman, υπάρχει κάποια απόλυτη σταθερά C', τέτοια ώστε:

$$V(L + B_1^d)^{1/d} \leq C't_1 \ . \quad \square$$

Αφού όπως αναφέρθηκε $V((M_L)^*)^{1/d} \sim 1/d$, η προηγούμενη πρόταση μας λέει με απλά λόγια ότι αν ένα σώμα βρίσκεται σε M-θέση, τότε και το πολικό του βρίσκεται σε M-θέση.

Έστω L_1, L_2 κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^d$. Ο αριθμός κάλυψης του L_1 από L_2 το ορίζεται ως εξής:

$$N(L_1, L_2) = min\#\{k \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^k, \ L_1 \subseteq \cup_{i=1}^d (x_i + L_2)\} \ .$$

Πρόταση 4.2.2 *Αν L_1 συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και L_2 κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^d$, τότε:*

$$2^{-d} \cdot \frac{V(L_1 + L_2)}{V(L_2)} \leq N(L_1, L_2) \leq 2^d \cdot \frac{V(L_1 + L_2)}{V(L_2)} \ .$$

Απόδειξη: Έστω $x_1, ..., x_k$ σημεία, τέτοια ώστε τα $x_i + \frac{1}{2}L_2$, $i = 1, ..., k$ να είναι ξένα ανά δύο και για κάθε x στο L_1 να ισχύει $(x + \frac{1}{2}L_2) \cap (x_j + \frac{1}{2}L_2) \neq \emptyset$, για κάποιο j από τα $1, ..., k$. Τότε, λόγω κεντρικής συμμετρίας του L_2, διαπιστώνει κάποιος εύκολα ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $[x, x_j]$ ανήκει στο σώμα $x_j + \frac{1}{2}L_2$. Άρα, το τυχόν $x \in L_1$ περιέχεται στο σώμα $x_j + 2\frac{1}{2}L_2$, δηλαδή $L_1 \subseteq \cup_{i=1}^k (x_i + L_2)$. Επομένως, ισχύει $N(L_1, L_2) \leq k$. Συνεπώς,

$$\Big(\frac{1}{2}\Big)^d kV(L_2) = \sum_{i=1}^k V\Big(x_i + \frac{1}{2}L_2\Big) = V\Big(\cup_{i=1}^k (x_i + \frac{1}{2}L_2)\Big)$$

$$\leq V\Big(L_1 + \frac{1}{2}L_2\Big) \leq V(L_1+L_2)\ .$$

Άρα,

$$k \leq \frac{V(L_1+L_2)}{V(L_2)}\ ,$$

οπότε

$$N(L_1,L_2) \leq \frac{V(L_1+L_2)}{V(L_2)}\ .$$

Από την άλλη, αν $L_1 \subseteq \cup_{i=1}^k (x_i + L_2)$ με $k = N(L_1,L_2)$, έχουμε:

$$V(L_1+L_2) \leq V\Big(\cup_{i=1}^k (x_i+L_2) + L_2\Big) \leq \sum_{i=1}^k V(x_i + 2L_2)$$

$$= k2^d V(L_2) = 2^d V(L_2) N(L_1,L_2)\ .\ \square$$

Θα χρειαστούμε την ανισότητα Rogers-Shephard [41]:

$$V(K-K) \leq C_d^d V(K)\ ,$$

όπου K οποιοδήποτε κυρτό σώμα και C_d μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση, αλλά είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Σημειώνουμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι simplex.

Πρόταση 4.2.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\overline{C} > 0$, τέτοια ώστε αν L_1, L_2 είναι κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^d$ (όχι απαραίτητα κεντρικά συμμετρικά), να ισχύει*

$$V(L_2 + B_1^d) \leq \overline{C}^d \frac{V(L_1+L_2)}{V(L_1)} V(L_1 + B_1^d)\ .$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\Delta L_1 := L_1 - L_1$, $\Delta L_2 := L_2 - L_2$. Τότε, από την Πρόταση 4.2.2, έχουμε

$$V(L_2 + B_1^d) < V(\Delta L_2 + B_1^n) < 2^d N(\Delta L_2, B_1^d) V(\Delta L_2)$$

$$< 2^d N(\Delta L_2, \Delta L_1) N(\Delta L_1, B_1^d) V(\Delta L_2)$$

$$< 2^d 2^d \frac{V(\Delta L_1 + \Delta L_2)}{V(\Delta L_1)} 2^d \frac{V(\Delta L_1 + B_1^d)}{V(B_1^d)} < 8^d \frac{V(\Delta L_1 + \Delta L_2)}{V(\Delta L_1)} V(\Delta(L_1 + B_1^d))$$

$$< 8^d \frac{V(\Delta L_1 + \Delta L_2)}{V(L_1)} V(\Delta(L_1 + B_1^d)) = 8^d \frac{V(\Delta(L_1+L_2))}{V(L_1)} V(\Delta(L_1 + B_1^d))$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την ανισότητα Rogers-Shephard. $\square$

4.3 Εικόνες καμπυλότητας

Σε αυτή την παράγραφο συγκρίνουμε την M-θέση ενός αστρόμορφου σώματος -' σχεδόν κυρτού ' - και της εικόνας καμπυλότητας αυτού. Αποδεικνύουμε ότι οι δύο αυτές θέσεις ουσιαστικά ταυτίζονται. Μέχρι το τέλος αυ-τής της παραγράφου, με K θα συμβολίζουμε ένα αστρόμορφο σώμα όγκου 1 του $\mathbb{R}^d$, με βαρύκεντρο στο 0, για το οποίο υπάρχει κυρτό σώμα $L \supseteq K$, με βαρύκεντρο στο 0 και $V(L)/V(K) < C_0^d$.

Πρόταση 4.3.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$, έτσι ώστε*

$$C_2^{-1} \leq V(C(K)) \leq C_2 C_0 \ .$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα Minkowski έχουμε:

$$V(L^*)^{\frac{1}{d}} V(C(K))^{\frac{d-1}{d}} \leq V(L^*, C(K), ..., C(K)) = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{L^*} f_{C(K)} dx$$

$$= \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} \rho_L^{-1} \frac{\rho_K^{d+1}}{d+1} dx \leq \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} \rho_K^{-1} \frac{\rho_K^{d+1}}{d+1} dx = \frac{1}{d+1} \ .$$

Όμως, από την αντίστροφη ανισότητα Blaschke-Santalo, έχουμε:

$$V(L^*)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{c_1}{d} V(L)^{-\frac{1}{d}} \geq \frac{c_1}{d} C_0^{-1} V(K)^{-\frac{1}{d}} = C_0^{-1}\frac{c_1}{d} \ .$$

Άρα,

$$V(C(K)) \leq \left[\frac{dC_0}{c_1(d+1)}\right]^{\frac{d}{d-1}} < \overline{c_1} \ .$$

Από την άλλη, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.5.2, από την ανισότητα Hölder έχουμε:

$$1 = V(K) = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} \rho_K^d dx = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{C(K)}^{-\frac{d}{d+1}} \left[h_{C(K)}^{\frac{d}{d+1}} \rho_K^d\right] dx$$

$$\leq \frac{1}{d}\Big(d\int_{S^{d-1}} \frac{1}{d} h_{C(K)}^{-d} dx\Big)^{\frac{1}{d+1}} \cdot \Big((d+1)d\int_{S^{d-1}} \frac{1}{d(d+1)} h_{C(K)} \rho_K^{d+1} dx\Big)^{\frac{d}{d+1}}$$

$$= \frac{1}{d} d^{\frac{1}{d+1}} [(d+1)d]^{\frac{d}{d+1}} V(C^*(K))^{\frac{1}{d+1}} V(C(K))^{\frac{d}{d+1}}$$

$$\leq c_2 d \frac{c_3}{d} \frac{V(C(K))^{\frac{d}{d+1}}}{V(C(K))^{\frac{1}{d+1}}} \leq \overline{c_2} V(C(K))^{\frac{d-1}{d+1}} \ ,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Blaschke-Santalo. □

Πρόταση 4.3.2 *Υπάρχει σταθερά $c_2 > 0$, που εξαρτάται μόνο από την C_0, τέτοια ώστε:*

$$V(K+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \le c_2 V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \ ,$$

όπου $\overline{C}(K) := V(C(K))^{-1/d}C(K)$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε πάλι την ανισότητα Minkowski:

$$V(dL^*+C(K))^{\frac{1}{d}}V(C(K))^{\frac{d-1}{d}} \le V(dL^*+C(K),C(K),...,C(K))$$

$$= \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}}(dh_{L^*}+h_{C(K)})f_{C(K)}dx = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}}dh_{L^*}f_{C(K)}dx + V(C(K))$$

$$= \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}}d\rho_L^{-1}f_{C(K)}dx + V(C(K)) \le \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}}d\rho_K^{-1}\frac{\rho_K^{d+1}}{d+1}dx + V(C(K))$$

$$\le V(K)+C_2C_0 = 1+C_2C_0 \ ,$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 4.3.1. Άρα, τελικά και πάλι από την Πρόταση 4.3.1, έχουμε:

$$V(dL^*+C(K))^{\frac{1}{d}} \le \frac{1+C_2C_0}{V(C(K))^{\frac{d-1}{d}}} < C' \ ,$$

για κάποια σταθερά C' που εξαρτάται μόνο από την C_0. Άρα,

$$V(dL^*+\overline{C}(K))^{\frac{1}{d}} \le \Big(1+\frac{1}{V(C(K))^{\frac{1}{d}}}\Big)\cdot V(dL^*+C(K))^{\frac{1}{d}} < C'' \ ,$$

όπου η C'' εξαρτάται μόνο από την C_0. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.3, λαμβάνουμε:

$$V(dL^*+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \le \frac{V(\overline{C}(K)+dL^*)^{\frac{1}{d}}}{V(\overline{C}(K))^{\frac{1}{d}}}\cdot V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \le \widetilde{c}V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \ ,$$

ενώ από την Πρόταση 4.2.1, έχουμε:

$$V(L+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \le c_1V(dL^*+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \le c_1\widetilde{c}V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \ , \qquad (4.3)$$

επομένως,

$$V(K+B_1^d)^{\frac{1}{d}} < c_1\widetilde{c}V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \ . \ \square$$

Αν και δεν θα μας χρειαστεί για τη συνέχεια θα θέλαμε να διατυπώσουμε τις ανάλογες προτάσεις για το Blaschke-σώμα ∇M (που ορίζεται από την (3.22)) ενός κυρτού σώματος M, όγκου 1.

Πρόταση 4.3.3 *Ισχύει* $V(\nabla M) \sim 1$.

Απόδειξη: Έχουμε:

$$V(\nabla M) = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{\nabla M} f_{\nabla M} dx = V(\nabla M, M, ..., M) \ ,$$

οπότε από ανισότητα Minkowski:

$$V(\nabla M) \geq V(M) = 1 \ .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο όγκος του ∇M είναι φραγμένος από πάνω. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο βάρους του M είναι το 0. Σε αυτή την περίπτωση:

$$V(M \cap -M)^{-\frac{1}{d}} \leq dCV\Big((M \cap -M)^*\Big)^{\frac{1}{d}}$$

$$= dCV\Big(conv(M^* \cup -M^*)\Big)^{\frac{1}{d}} \leq dCV(M^* - M^*)^{\frac{1}{d}}$$

$$\leq d\Big(C(C')^d V(M^*)\Big)^{\frac{1}{d}} \leq C'' d\frac{c}{d} V(M)^{-\frac{1}{d}} = c''c \ ,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ανισότητες Rogers-Shephard και Blaschke-Santalo. Επομένως,

$$V(M \cap -M)^{\frac{1}{d}} \geq (cc'')^{-1} \ .$$

Άρα, τελικά, χρησιμοποιώντας και πάλι την ανισότητα Minkowski, προκύπτει:

$$V(M \cap -M)^{\frac{1}{d}} V(\nabla M)^{\frac{d-1}{d}} \leq V(M \cap -M, \nabla M, ..., \nabla M)$$

$$= \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{M \cap -M} f_{\nabla M} dx = \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{M \cap -M} f_M dx$$

$$\leq \frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_M f_M dx = V(M) = 1 \ .$$

Συνεπώς,

$$V(\nabla M) \leq (c''c)^{\frac{d}{d-1}} \ . \quad \square$$

Πρόταση 4.3.4 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $c_3 > 0$, *ώστε:*

$$V(M + B_1^d)^{1/d} \leq c_3 V(\overline{\nabla M} + B_1^d)^{\frac{1}{d}} \ ,$$

όπου $\overline{\nabla M} := V(\nabla M)^{-1/d} \nabla M$.

Απόδειξη: Πάντα από την ανισότητα Minkowski:

$$V(\overline{\nabla M}+M)^{\frac{1}{d}}V(M)^{\frac{d-1}{d}} \leq V(\overline{\nabla M}+M,M,...,M)$$

$$V(\overline{\nabla M},M,...,M)+V(M,M,...,M)$$

$$=\frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{\overline{\nabla M}} f_M dx + V(M)$$

$$=\frac{2}{V(\overline{\nabla M})^{\frac{1}{d}}}\frac{1}{d}\int_{S^{d-1}} h_{\nabla M}\frac{1}{2}(f_M+f_{-M})dx+1 = 2V(\overline{\nabla M})^{\frac{d-1}{d}}+1 \ ,$$

άρα από την Πρόταση 4.3.3 προκύπτει

$$V(\overline{\nabla M}+M)^{\frac{1}{d}} \leq \widehat{c} \tag{4.4}$$

και συνεπώς από την Πρόταση 4.2.3 έχουμε:

$$V(M+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \leq \overline{C}V(\overline{\nabla M}+M)^{\frac{1}{d}} \cdot V(\overline{\nabla M}+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \leq \overline{C}\widehat{c}V(\overline{\nabla M}+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \ . \quad \square$$

Σημειώνουμε, εδώ, ότι ισχύουν και οι αντίστροφες ανισότητες στις Προτάσεις 4.3.2, 4.3.4. Αυτό προκύπτει από τις (4.3) και (4.4) αντίστοιχα, με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήθηκαν. Ισχύει, λοιπόν, ότι τα K, M είναι σε M-θέση, αν και μόνο αν τα $C(K)$ και ∇M είναι σε M-θέση αντίστοιχα.

4.4 Κατασκευή παθολογικών παραδειγμάτων

Είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε κυρτά σώματα, τα οποία ενώ έχουν ελάχιστη επιφάνεια, δεν βρίσκονται σε M-θέση.

Λήμμα 4.4.1 *Έστω συμπαγή σύνολα* $F_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$, $F_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ *με* $V_{d_1}(F_1)=V_{d_2}(F_2)=1$. *Αν* $T \in SL_{d_1+d_2}$, *τότε*

$$V_{d_1}(TF_1)\cdot V_{d_2}(TF_2) \geq 1 \ .$$

Απόδειξη: Προσεγγίζοντας τα F_1, F_2 με ενώσεις μη επικαλυπτόμενων κύβων ίδιας ακμής, αρκεί να υποθέσουμε ότι τα F_1, F_2 είναι κύβοι. Ισχύει τότε

$$V_{d_1}(TF_1)\cdot V_{d_2}((TF_2)|V^{\perp})=1 \ ,$$

όπου $V=span[T(F_1)]$. Το ζητούμενο έπεται. $\square$

Λήμμα 4.4.2 *Υπάρχει κάποια απόλυτη θετική σταθερά c_3 τέτοια ώστε αν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^d$ και $T' \in SL_{2d}$ με την ιδιότητα*

$$F_{K\times B_1^d} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{T'(K\times B_1^d)} |x|dx \ ,$$

τότε $V_d(T'B_1^d)^{1/d} \geq c_3\sqrt{F_K}$.

Απόδειξη: Για $T \in SL_{2d}$ έχουμε:

$$\int_{T(K\times B_1^d)} |z|dz = \int_{K\times B_1^d} |Tz|dz$$

$$= \int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} |Tx+Ty|dydx \leq \int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} (|Tx|+|Ty|)dydx \ .$$

Επίσης,

$$\int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} |Tx+Ty|dydx = \int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} |Tx-Ty|dydx \ ,$$

άρα

$$\int_{T(K\times B_1^d)} |z|dz = \int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} \frac{1}{2}(|Tx+Ty|+|Tx-Ty|)dydx$$

$$\geq \int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} max\{|Tx|,|Ty|\}dydx \geq \frac{1}{2}\int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} (|Tx|+|Ty|)dydx \ .$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι

$$\int_{T(K\times B_1^d)} |z|dz \sim \int_{x\in K}\int_{y\in B_1^d} (|Tx|+|Ty|)dydx =$$

$$V(B_1^d)\int_K |Tx|dx + V(K)\int_{B_1^d} |Ty|dy = \int_K |Tx|dx + \int_{B_1^d} |Tx|dx \ .$$

Εξάλλου, υπάρχουν ορθογώνιοι μετασχηματισμοί $O_1, O_2 \in O_{2d}$, τέτοιοι ώστε:

$$O_1(span(TK)) = span(K) \text{ και } O_2(span(TB_1^d)) = span(B_1^d) \ .$$

Θέτουμε $T_1 := (O_1T)|_{span(K)}$ και $T_2 := (O_2T)|_{span(B_2^n)}$. Προφανώς, $T_1, T_2 \in GL_d$. Άρα,

$$\int_K |Tx|dx = \int_K |O_1Tx|dx = \int_K |T_1x|dx$$

$$= |detT_1|^{\frac{1}{d}} \int_K \left|\frac{1}{|detT_1|^{\frac{1}{d}}}T_1x\right|dx = |detT_1|^{\frac{1}{d}}\int_{S_1K} |x|dx \ ,$$

όπου $S_1 := T_1/|detT_1|^{1/d}$ (προφανώς $S_1 \in SL_d$). Ομοίως,

$$\int_{B_1^d} |Tx|dx = |detT_2|^{\frac{1}{d}} \int_{S_2 B_1^d} |x|dx \ ,$$

για κάποια $S_2 \in SL_d$. Όμως,

$$|detT_1|^{\frac{1}{d}} = \Big(\frac{V_d(T_1K)}{V_d(K)}\Big)^{\frac{1}{d}} = V(TK)^{\frac{1}{d}} \ .$$

Άρα, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε:

$$|detT_1|^{\frac{1}{d}} \cdot V_d(TB_1^d)^{\frac{1}{d}} \geq 1 \ . \tag{4.5}$$

Για

$$T = diag\Big(\frac{1}{\sqrt{F_K}}, ..., \frac{1}{\sqrt{F_K}}, \sqrt{F_K}, ..., \sqrt{F_K}\Big) \ ,$$

μπορούμε να πάρουμε $O_1 = O_2 = I_{\mathbb{R}^{2d}}$, οπότε $S_1 = S_2 = I_{\mathbb{R}^d}$ και $|detT_1|^{\frac{1}{d}} = 1/\sqrt{F_K}$, $|detT_2|^{\frac{1}{d}} = \sqrt{F_K}$. Υποθέτοντας ότι $\int_K |x|dx = \sqrt{d}F_K$ έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2d}} \int_{T(K\times B_1^d)} |z|dz \sim \frac{1}{\sqrt{F_K}} \cdot \frac{1}{\sqrt{d}} \int_K |x|dx + \sqrt{F_K} \cdot \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{B_1^d} |x|dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{F_K}} F_K + \sqrt{F_K} F_{B_1^d} \sim \sqrt{F_K} \ ,$$

λόγω του ότι $F_{B_1^d} \sim 1$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι

$$c_1' \sqrt{F_K} \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{T'(K\times B_1^d)} |z|dz \ ,$$

άρα

$$c_1'' \sqrt{F_K} \geq |detT_1'|^{\frac{1}{d}} \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{S_1'K} |x|dx + |detT_2'|^{\frac{1}{d}} \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{S_2'B_1^d} |x|dx$$

$$\geq |detT_1'|^{\frac{1}{d}} \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{S_1'K} |x|dx \geq |detT_1'|^{\frac{1}{d}} F_K \ ,$$

όπου όπως πάντα c_1', c_1'' είναι απόλυτες σταθερές. Τελικά, η (4.5) δίνει

$$c_1'' \sqrt{F_K} \geq V_d(T'B_1^d)^{-\frac{1}{d}} F_K \ . \quad \square$$

Δανειζόμαστε την ιδέα για την απόδειξη του επόμενου λήμματος από το [5].

Λήμμα 4.4.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_4 > 0$ με την ιδιότητα: Αν K ένα αστρόμορφο σώμα όγκου 1 και $T \in SL_{2d}$, τέτοια ώστε*

$$F_{K\times B_1^d} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{T(K\times B_1^d)} |x| dx \ ,$$

τότε

$$c_4 \sqrt[4]{F_K} < V\Big(T(K \times B_1^d) + B_1^{2d}\Big)^{\frac{1}{2d}} \ .$$

Απόδειξη: Θέτουμε $t = V\Big(T(K \times B_1^d) + B_1^{2d}\Big)^{\frac{1}{2d}}$. Από την Πρόταση 4.2.2 έχουμε

$$N(T(K \times B_1^d), B_1^{2d})^{\frac{1}{2d}} \leq 2t.$$

Άρα, υπάρχουν σημεία $x_1, ..., x_k$ του $\mathbb{R}^{2d}$, με $k \leq (2t)^{2d}$, τέτοια ώστε

$$T(K \times B_1^d) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + B_1^{2d}) \ ,$$

οπότε

$$TB_1^d \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + B_1^{2d}) \ ,$$

άρα

$$TB_1^d \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Big[(x_i + B_1^{2d})|V\Big] \ ,$$

όπου $V = span(TB_1^d)$. Επομένως,

$$V_d(TB_1^d) \leq \sum_{i=1}^{k} V_d\Big((x_i + B_1^{2d})|V\Big) = kV_d(B_1^{2d}|V) < 2^{2d} t^{2d} C^{2d} \ ,$$

όπου $C > 0$ κάποια απόλυτη σταθερά. Από το Λήμμα 4.4.2 έχουμε

$$c\sqrt{F_K} \leq V_d(TB_1^d)^{\frac{1}{d}} < (2tC)^2 \ . \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2:
Από την Πρόταση 4.3.2 και το Λήμμα 4.4.3 έχουμε

$$V_{2d}\Big(\overline{C}(T(K\times B_1^d)) + B_1^{2d}\Big)^{\frac{1}{2d}} \geq c_2^{-1} V_{2d}\Big(T(K\times B_1^d) + B_1^{2d}\Big)^{\frac{1}{2d}} \geq c_2^{-1} c_4 \sqrt[4]{F_K} \ . \ \square$$

Για να συνάγουμε το Θεώρημα 4.1.3 από το Θεώρημα 4.1.2 θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε 1-unconditional αστρόμορφα σώματα με μεγάλη F_K, τα οποία είναι επιπροσθέτως, ' σχεδόν κυρτά ' .

Πρόταση 4.4.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_5 > 0$, τέτοια ώστε για κάθε φυσικό αριθμό d, να υπάρχει κάποιο 1-unconditional αστρόμορφο σώμα K με $V(conv(K))/V(K) < c_5^d$ και $F_K > c_5^{-1}\sqrt{d}$.*

Προοφ. Έστω $\{e_1, ..., e_d\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε τα σημεία $v_i = de_i$ και $v_{n+i} = -de_i$, $i = 1, ..., d$. Αφού η ακτίνα της μπάλας B_1^d είναι της τάξης του $\sqrt{d}$, για d αρκετά μεγάλο, οι μπάλες $B_1^d + v_i$ είναι ξένες ανά δύο, $i = 1, ..., 2d$. Θέτουμε

$$K_i = conv\Big(\{0\} \cup (B_1^d + v_i)\Big)$$

και $K = \cup_{i=1}^{2d} K_i$. Προφανώς, το K είναι κεντρικά συμμετρικό και 1-συμμετρικό (άρα 1-uconditional), δηλαδή

$$\rho_K(x_1 e_1 + ... + x_d e_d) = \rho_K(x_{\sigma(1)} e_1 + ... + x_{\sigma(d)} e_d) \ ,$$

για κάθε επιλογή πραγματικών $x_1, ..., x_d$ και οποιαδήποτε μετάθεση σ στους δείκτες $1, ..., d$. Είναι φανερό ότι το $C(K)$ είναι επίσης 1-συμμετρικό, οπότε προκύπτει εύκολα από τον χαρακτηρισμό του Petty ότι το $C(K)$ έχει ελάχιστη επιφάνεια. Συνεπώς, από το Λήμμα 4.1.1, $\int_K |x|dx = V(K)^{1+1/d}\sqrt{d}F_K$.

Ας εκτιμήσουμε την F_K:

$$\frac{1}{\sqrt{d}}\int_{K_i} |x|dx \geq \frac{1}{\sqrt{d}}\int_{B_1^d} |x + v_i|dx$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{d}}\frac{1}{2}\int_{B_1^d}\Big(\Big|x - <x, \frac{v_i}{|v_i|}> \frac{v_i}{|v_i|}\Big| + \Big| <x, \frac{v_i}{|v_i|}> \frac{v_i}{|v_i|} + v_i\Big|\Big)dx$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{d}}\int_{B_1^d}\Big||v_i| - | <x, \frac{v_i}{|v_i|}> \frac{v_i}{|v_i|}|\Big|dx \geq c_5\sqrt{d} \ ,$$

για κάποια απόλυτη σταθερά c_5. Από την άλλη,

$$V(K_i) \leq V(B_1^d + v_i) + V\Big(conv\Big[\{0\} \cup \Big((B_1^d \mid v_i^{\perp}) + v_i\Big)\Big]\Big)$$

$$= V(B_1^d) + \frac{1}{d}V_{d-1}(B_1^d \ v_i^{\perp}) \cdot |v_i| \leq c_5',$$

για κάποια απόλυτη σταθερά c_5'. Επομένως, $F_K \geq 2dc_5\sqrt{d}/(2dc_5')^{1+1/d}$.

Μένει να δειχτεί ότι ο λόγος $|conv(K)|/|K|$ είναι μικρός. Θέτουμε $C = conv\{v_1, ..., v_{2n}\}$. Είναι ευρέως γνωστό ότι $|C|^{1/n} \sim 1$ και ότι το C είναι σε M-θέση. Αφού $B_1^d + v_1 \subseteq K \subseteq C + B_1^d$, προκύπτει ότι

$$(|conv(K)|/|K|)^{1/d} \leq |C + B_1^d|^{1/d} \sim 1 \ . \ \square$$

Σημειώνουμε ότι από ένα κλασσικό θεώρημα του F. John, προκύπτει ότι η τάξη $\sqrt{n}$ για την F_K είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

Λήμμα 4.4.4 *Έστω M ένα κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^d$. Αν το M είναι σε θέση ελάχιστης επιφάνειας, τότε το σώμα του $\mathbb{R}^{d+1}$*

$$M' = \left(\frac{\partial(M)^{\frac{1}{d+1}}}{(2d)^{\frac{1}{d+1}}} M \right) \times \left(\frac{(2d)^{\frac{d}{d+1}}}{\partial(M)^{\frac{d}{d+1}}} [-1/2, 1/2] \right)$$

είναι ίδιου όγκου με το M και σε θέση ελάχιστης επιφάνειας.

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του χαρακτηρισμού του Petty για τη θέση ελάχιστης επιφάνειας και παραλείπεται.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3:
Για κάποιον φυσικό αριθμό d θεωρούμε το αστρόμορφο σώμα K του $\mathbb{R}^d$ όπως στην Πρόταση 4.4.1. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.1.3 για να κατασκευάσουμε ένα 1-unconditional κυρτό σώμα M_{2d} του $\mathbb{R}^{2d}$, όγκου 1 και (από το Λήμμα 4.1.1) σε θέση ελάχιστης επιφάνειας, τέτοιο ώστε

$$|M_{2d} + B_1^{2d}|_{2d}^{\frac{1}{2d}} > c_1 \sqrt[4]{F_K} \geq c_1 c_5 n^{1/8} \ .$$

Θέτουμε επίσης $M_{2d+1} = M'_{2d}$, όπου M'_{2d} είναι το κυρτό σώμα που ορίζεται από το Λήμμα 4.4.4, με $M = M_{2d}$. Τότε, $M_{2d+1} + B_1^{2d+1}$

$$\supseteq \left(\frac{\partial(M_{2d})^{\frac{1}{2d+1}}}{(4d)^{\frac{1}{2d+1}}} M_{2d} + (B_1^{2d+1} \mid e_{2d+1}^{\perp}) \right) \times \left(\frac{(4d)^{\frac{2d}{2d+1}}}{\partial(M_{2d})^{\frac{2d}{2d+1}}} [-1/2, 1/2] \right).$$

Χρησιμοποιώντας το (εύκολο) γεγονός $\partial(M_{2d})^{1/2d+1} \sim 1$ (αφού το M_{2d} έχει ελάχιστη επιφάνεια), προκύπτει εύκολα ότι

$$|M_{2d+1} + B_1^{2d+1}|_{2d+1}^{\frac{1}{2d+1}} > c_6 (d+1)^{1/8} \ ,$$

όπου όπως συνήθως c_6 είναι απόλυτη σταθερά. □

Η κλάση των σωμάτων ελλειπτικού τύπου ορίζεται να είναι η οικογένεια των εικόνων καμπυλότητας κυρτών σωμάτων. Ως τελικό σχόλιο, συνοψίζουμε στην επόμενη Πρόταση τη σχέση του προβλήματος με το οποίο ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς.

Πρόταση 4.4.2 *Η ισοτροπική σταθερά είναι φραγμένη στην κλάση όλων των κεντρικά συμμετρικών κυρτών σωμάτων αν και μόνο αν, για κεντρικά συμμετρικά σώματα ελλειπτικού τύπου, η θέση ελάχιστης επιφάνειας είναι επίσης M-θέση.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ισοτροπική σταθερά των κεντρικά συμμετρικών κυρτών σωμάτων είναι φραγμένη από μία απόλυτη σταθερά c_{00}. Αν K είναι ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 σε ισοτροπική θέση, από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}}V(C(K))^{\frac{d-1}{d}} \leq V(\overline{C}(K)+B_1^d, C(K), ..., C(K))$$
$$= \frac{1}{V(C(K))^{1/d}}\frac{1}{d}\int_{S_{d-1}}(h_{C(K)}(x)+1/\omega_d^{1/d}|x|)f_{(C(K))}(x)dx$$
$$\leq V(C(K))^{\frac{d-1}{d}}+\frac{c_{00}'}{\sqrt{d}}\int_K |x|dx \leq V(C(K))^{\frac{d-1}{d}}+\frac{c_{00}'}{\sqrt{d}}\Big(\int_K |x|^2dx\Big)^{1/2}$$
$$= V(C(K))^{\frac{d-1}{d}}+c_{00}'L_K \leq V(C(K))^{\frac{d-1}{d}}+c_{00}'c_{00}\ ,$$

για κάποια απόλυτη σταθερά c_{00}', όπου $\overline{C}(K)=C(K)/V(C(K))$. Άρα, από την Πρόταση 4.3.1 έχουμε

$$V(\overline{C}(K)+B_1^d)^{\frac{1}{d}} \leq 1+\frac{c_{00}'c_{00}}{C_2^{-\frac{d-1}{d}}}\ .$$

Αντίστροφα, αν κάθε κεντρικά συμμετρικό σώμα είναι σε M-θέση (για κάποια απόλυτη σταθερά C_{00}), τότε από το Λήμμα 4.1.1 και το Θεώρημα 4.1.2 προκύπτει άμεσα ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, $\sqrt[4]{F_K} \leq cC_{00}$. Είναι όμως ευρέως γνωστό ότι $L_K \sim F_K$, στην κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σημειώνουμε εδώ ότι, όπως αποδείχτηκε στο [23], για να φράξει κάποιος την L_K, αρκεί να την φράξει στην κλάση των συμμετρικών σωμάτων.

Παράρτημα

Στοιχεία από τη θεωρία Brunn-Minkowski

Παραθέτουμε ορισμένα κλασσικά θεωρήματα που χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία. Παραπέμπουμε στα [16], [46] για αποδείξεις και αναφορές.

Το επιφανειακό S_K μέτρο ενός κυρτού σώματος K του $\mathbb{R}^d$ είναι το μέτρο της S^{d-1}, που ορίζεται από τη σχέση

$$S_K(\omega) = V_{d-1}\Big(\{x \in \partial K : \exists u \in \omega,\ t \in \mathbb{R},\ \acute{\omega}\sigma\tau\epsilon\ (tu + u^{\perp}) \cap K = \{x\}\}\Big)\ ,$$

για κάθε $\omega \subseteq S^{d-1}$.

Θεώρημα I. (Θεώρημα ύπαρξης του Minkowski) Έστω μ ένα Borel μέτρο στην S^{d-1}, που δεν συγκεντρώνεται σε κανένα υποσύνολο της μορφής $H \cap S^{d-1}$, όπου H υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$. Αν επιπλέον το βαρύκεντρο του μ είναι το 0, τότε υπάρχει μοναδικό (μέχρι μετατόπισης) κυρτό σώμα K με $S_K = \mu$.

Θεώρημα II. (Ορισμός των μεικτών όγκων, Minkowski) Αν K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$, τότε για $t > 0$ ισχύει:

$$V(K + tL) = \sum_{j=1}^{d} t^j \binom{d}{j} V(L[j], K[d-j])\ ,$$

όπου $V(L[j], K[d-j]) := V(L, ..., L, K, ..., K)$ (j-φορές το L και $(d-j)$-φορές το K), $j = 0, 1, ..., d$, είναι θετικές ποσότητες που εξαρτώνται μόνο από τα K και L και ονομάζονται όλες μαζί μεικτοί όγκοι των K και L.

Είναι προφανές ότι $V(K, ..., K) = V(K)$ και, επιπλέον,

$$V(L, K, ..., K) = \frac{1}{d} lim_{t \to 0^+} \frac{V(K + tL) - V(K)}{t}\ .$$

Ακόμη, είναι γνωστό ότι

$$V(L, K, ..., K) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} h_L(x) dS_K(x)$$

και αφού οι διαφορές συναρτήσεων στήριξης είναι πυκνές στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στην S^{d-1}, προκύπτει ότι το συναρτησοειδές $V(\cdot, K, ..., K)$ καθορίζει το K.

Στην ειδική περίπτωση όπου το L είναι η μοναδιαία μπάλα Ω_d του $\mathbb{R}^d$, η ποσότητα

$$W_j(K) = V(\Omega_d[j], K[d-j])$$

ονομάζεται j-στό quermassintegral του K. Σημειώνουμε ότι $W_0(K) = V(K)$, ενώ τα $W_1(K)$ και $W_{d-1}(K)$ είναι πολλαπλάσια της επιφάνειας και του μέσου πλάτους του K, αντίστοιχα.

Θεώρημα III. (Ανισότητα Minkowski) Αν K, L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$, τότε

$$V(L, K, ..., K) \geq V(L)^{\frac{1}{d}} V(K)^{\frac{d-1}{d}} .$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K και L είναι ομοιόθετα.

Θεώρημα IV. (Ανισότητα Brunn-Minkowski) Αν K, L συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, τότε

$$V(K+L)^{1/d} \geq V(K)^{1/d} + V(L)^{1/d} .$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K και L είναι ομοιόθετα.

Τέλος, έστω K, L κυρτά σώματα, x, y σημεία του $\mathbb{R}^d$ και $\lambda \in [0,1]$. Επειδή,

$$K \cap \Big[L + \lambda x + (1-\lambda) y \Big] \supseteq \lambda \Big[K \cap (L+x) \Big] + (1-\lambda) \Big[K \cap (L+y) \Big] ,$$

από την ανισότητα Brunn-Minkowski προκύπτει εύκολα το εξής:

Πόρισμα. Για $x \in \mathbb{R}$, η ποσότητα

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto V(K \cap (L+tx))^{1/d}$$

είναι κοίλη.

Βιβλιογραφία

[1] Blaschke, W., Über affine Geometric XI: Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, *Leipziger Berichte*, **69** (1917), 436-453.

[2] Blaschke, W., Kreis und Kugel, 2 Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, 1956.

[3] Bourgain, J., Geometry of Banach spaces and harmonic analysis , In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, Calif., 1986), Vol 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 871-878.

[4] Bourgain, J., Meyer, M., Milman V.D. and Pajor, A., On a geometric inequality, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, **1317** (1988), 271-282.

[5] Bourgain, J., Klartag B., and Milman V.D., Symmetrization and isotropic constants of convex bodies, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1850** (2004), 101-116.

[6] Bourgain, J. and Milman V.D., New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^d$, *Invent. Math.*,**88** (1987), 319-340.

[7] Brannen, N., S., Volumes of projection bodies, *Mathematika*, **43** (1996), 255-264.

[8] Brannen, N., S., Three-dimensional projection bodies, *Adv. Geom.*, **5** (2005), 1-13.

[9] Busemann, H., Volumes in terms of concurrent cross-sections, *Pacific Journal of Mathematics*, **3** (1953), 1-12.

[10] Campi, S., Colesanti A. and Gronchi, P., A note on Sylvester's problem for random polytopes in a convex body, *Rendiconti Ist Matematica dell'Universita Trieste*, **31** (1999), 79-94.

[11] Campi, S. and Gronchi, P., Extremal convex sets for Sylvester-Busemann type functionals, *Applicable Analysis*, **85** (2006), 129-141.

[12] Campi, S. and Gronchi, P., On the reverse L^p-Busemann-Petty centroid inequality, *Mathematika*, **49** (2002), 1-11.

[13] Campi, S. and Gronchi, P., On volume product inequalities for convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), 2393-2402.

[14] Dalla, L. and Larman, D.G., Volumes of a random polytope in a convex set, *Applied Geometry and Discrete Mathematics.* Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **4** (1991), 175-180.

[15] Ewald, G., Larman, D.G. and Rogers, C.A., The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in Euclidean space, *Mathematika* **17** (1970), 1-20.

[16] Gardner, R. J., Geometric Tomography, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 58, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[17] Giannopoulos, A.A., On the mean value of the area of a random polygon in a plane convex body, *Mathematika*, **39** (1992), 279-290.

[18] Giannopoulos, A.A. and Milman, V.D., Extremal problems and isotropic positions of convex bodies, *Israel J. Math.*, **117** (2000), 29-60.

[19] Giannopoulos, A.A. and Tsolomitis, A., On the volume radius of a random N-tope in a convex body, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **134** (2003), 13-21.

[20] Groemer, H., On some mean value associated with a randomly selected simplex in a convex set, *Pacific Journal of Mathematics*, **45** (1973), 525-533.

[21] Groemer, H., On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set, *Arch. Math.*, **25** (1974), 86-90.

[22] Hartzoulaki, M. and Paouris, G., Quermassintegrals of a random polytope in a convex body, *Arch. Math.*, **80** (2003), 430-438.

[23] Klartag, B., An isomorphic version of the slicing problem, *J. Funct. Anal.*, **218** (2005), 372-394.

[24] Klartag, B., On convex perturbations with a bounded isotropic constant, *Geom. Funct. Anal.*, **16** (2006), 1274-1290.

[25] Lutwak, E., Selected affine isoperimetric inequalities, *Handbook of convex geometry* (P.M. Gruber and J.M. Wills eds.), vol A, Elsevier Science Publishers, North-Holland (1993), 151-176.

[26] Lutwak, E., On a conjectured projection inequality of Petty. *Contemp. Math.*, **113** (1990), 171-182.

[27] Lutwak, E., On quermassintegrals of mixed projection bodies, *Geom. Dedicata*, **33** (1990), 51-58.

[28] Lutwak, E., The Brunn-Minkowski-Firey Theory I: Mixed Volumes and the Minkowski Problem, *J. Differential Geometry*, **38** (1993), 131-150.

[29] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang G., A new affine invariant for polytopes and Schneider's projection problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 1767-1779.

[30] Makai, E. Jr. and Martini, H., The cross-section body, plane sections of convex bodies and approximation of convex bodies. I, *Geometriae Dedicata*, **63** (1996), 267-296.

[31] Martini, H. and Mustafaev, Z., On Isoperimetric Inequalities in Minkowski Spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2010, Article ID 697954, 18 pages (2010).

[32] Meckes, M. W., Sylvester's Problem for Symmetric Convex Bodies and Related Problems, *Monatsh. Math.*, **145**(4) (2005), 307-319.

[33] Meyer, M. and Reisner, S., Shadow Systems and Volumes of Polar Convex Bodies, *Mathematika*, **53** (2006), 129-148.

[34] Milman, V.D., Isomorphic symmetrization and geometric inequalities, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 107-131.

[35] Milman, V.D. and, Pajor A., Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1376** (1989), Springer Berlin, 64-104.

[36] Petty, C.M., Centroid Surfaces, *Pacific Journal of Mathematics*, **11** (1961), 1535-1547.

[37] Petty, C.M., Surface area of a convex body under affine transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 824-828.

[38] Petty, C. M., Projection bodies, *Proc. Coll. Convexity, Copenhagen, 1965, Kobenhavns Univ. Mat. Inst.*, 1967, 234-241.

[39] Petty, C. M., Isoperimetric problems, *Proc. Conf. Convexity Combinat. Geom., Univ. Oklahoma*, 1971, 26-41.

[40] Pfiefer, R.E., The historical development of J.J. Sylvester four point problem, *Mathematics Magazine* **62**(5), (1989), 309-317.

[41] Rogers, C. A. and Shephard, G. C., The difference body of a convex body, *Arch. Math.*, **8** (1957), 220-233.

[42] Rogers, C.A. and Shephard, G.C., Some extremal problems for convex bodies, *Mathematika*, **5** (1958), 93-102.

[43] Reisner, S., Random polytopes and the volume product of symmetric convex bodies, *Math. Scand.*, **57** (1985), 386-392.

[44] Reisner, S., Zonoids with minimal volume product, *Math. Z.*, **192** (1986), 339-346.

[45] Schneider, R., Random hyperplanes meeting a convex body. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb.*, **61** (1982), 379-387.

[46] Schneider, R., Convex Bodies: The Brunn-Minkowski theory, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[47] Schöpf, P., Gewichtete Volumsmittelwerte von Simplices, welche zufällig in einem konvexen Körper der $\mathbb{R}^n$ gewählt werden, *Mh. Math.*, **83** (1977), 331-337.

[48] Shephard, G.C., Shadow systems of convex sets, *Israel J. Math.*, **2** (1964), 229-236.

[49] Weil, W., Über die Projektionenkörper konvexer Polytope, *Arch. Math.*, **22** (1971), 664-672.

[50] Weil, W., Kontinuierliche Linearkombination won Strecken, *Math. Z.*, **148** (1976), 71-84.

[51] Zhang, G., Restricted chord projection and affine inequalities, *Geom. Dedicata*, **39** (1991), 213-222.