Ολοκληρώματα Ταλάντωσης με Πολυωνυμική Φάση

Διδακτορική Διατριβή

Ιωάννη Παρίσση

Εργασία που υποβλήθηκε για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

Ηράκλειο 2007

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Την τριμελή επιτροπή κρίσης της διδακτορικής αυτής εργασίας απετέλεσαν οι

Ε. Κατσοπρινάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Θ. Μήτσης, Επίκουρος Καθηγητής
Μ. Παπαδημητράκης, Αναπληρωτής Καθηγητής.

Στην επταμελή επιτροπή κρίσης συμμετείχαν επιπλέον οι

Α. Κατάβολος, Καθηγητής
Μ. Μαριάς, Αναπληρωτής Καθηγητής
Β. Νεστορίδης, Καθηγητής
Α. Συσκάκης, Καθηγητής.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα εδώ να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου Μιχάλη Παπαδημητράκη. Νιώθω πολύ τυχερός που έκανα διδακτορικό με έναν άνθρωπο που έδειξε τόσο απλόχερα την εμπιστοσύνη του στις ικανότητές μου και μοιράστηκε τις γνώσεις του χωρίς καμία ματαιοδοξία. Η υποστήριξή του ήταν απόλυτη τόσο σε εκπαιδευτικό όσο και σε προσωπικό επίπεδο.

Φυσικά, πέρα απο τον κεντρικό ρόλο του επιβλέποντά μου στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, υπάρχουν και άλλοι άνθρωποι απο το Πανεπιστήμιο της Κρήτης που με βοήθησαν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Με τυχαία σειρά θα ήθελα να δώσω τις ευχαριστίες μου στους Θεμιστοκλή Μήτση, Γιώργο Κωστάκη, Μιχάλη Κολουντζάκη, Πέτρο Γαλανόπουλο καθώς και στον Αποστόλη Γιαννόπουλο (από το Πανεπιστήμιο της Αθήνας).

Τα τελευταία εφτά (7) χρόνια στην Κρήτη, πέρασαν πολύ πιο εύκολα και ευτυχισμένα χάρη στους Γιάννη και Γιάννη, Νίκο και Λευτέρη, Πέτρο και Όλγα, Βαγγελιώ και Ελένη και φυσικά χάρη στον Παναγιώτη και το Νίκο (που είναι τώρα στην Αθήνα) και στη Σοφία. Επίσης πέρασαν λίγο πιο δύσκολα και λίγο πιο όμορφα χάρη στην Anna.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους μου στην Αθήνα που είναι ακόμα εκεί για μένα παρότι δεν βλεπόμαστε τόσο συχνά όσο παλιότερα ή τόσο συχνά όσο θα έπρεπε. Ευχαριστώ λοιπόν τον Αλέξανδρο και τη Βάσια, τη Δανάη και την Ιωάννα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδαίτερα την Αγγελική που μου συμπαραστάθηκε όλα αυτά τα χρόνια και παρ'ολες τις αντιξοότητες.

Όλα αυτά όμως δεν θα ήταν καν εφικτά χωρίς την υποστήριξη του Ρωμύλου και της Διατσέντας και φυσικά της αγαπημένης μου θείας Πόπης. Σε αυτούς αφιερώνεται, φυσιολογικά, αυτή η προσπάθεια.

Στους γονείς μου,
Υακίνθη και Ρωμύλο

και στην Πόπη.

Εισαγωγικά

Η εργασία αυτή ανήκει στην περιοχή της πραγματικής αρμονικής ανάλυσης. Ειδικότερα, τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι τα λεγόμενα ολοκληρώματα ταλάντωσης (oscillatory integrals) δηλαδή ολοκληρώματα συναρτήσεων που ταλαντώνονται έντονα ανάμεσα στις θετικές και τις αρνητικές τιμές τους. Αποτέλεσμα αυτών των ταλαντώσεων είναι η ακύρωση των θετικών και αρνητικών τιμών (cancelation). Κατάλληλη αξιοποίηση αυτής της διαισθητικής αρχής οδηγεί σε «καλές» εκτιμήσεις για τα εν λόγω ολοκληρώματα.

Το πιο κλασσικό παράδειγμα ολοκληρώματος ταλάντωσης είναι ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

Ένα κλασσικό αποτέλεσμα που αξιοποιεί την ταλάντωση του παράγοντα $e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ είναι το Λήμμα Riemmann-Lebesgue που για $f \in L^1(\mathbb{R})$ δίνει ότι $\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$.

Ήδη, ο μετασχηματισμός Fourier παίζει κεντρικό ρόλο όταν κάποιος θέλει να μελετήσει τις ιδιότητες συνέχειας τελεστών ιδιαζόντων ολοκληρωμάτων όπως ο μετασχηματισμός Hilbert

$$H(f)(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\frac{dy}{y} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|>\epsilon} f(x-y)\frac{dy}{y}.$$

καθώς και του αντίστοιχου μεγιστικού τελεστή

$$H^*(f)(x) = \sup_{\epsilon>0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|>\epsilon} f(x-y)\frac{dy}{y}.$$

Ο κεντρικός ρόλος της αλληλεπίδρασης αυτών των τριών αντικειμένων (μετασχηματισμός Fourier, ιδιάζοντα ολοκληρώματα και αντίστοιχοι μεγιστικοί τελεστές) είναι ήδη γνωστός απο την αρχή της ανάπτυξης των πραγματικών μεθόδων στην αρμονική ανάλυση. Οι διαδοχικές γενικεύσεις και εκλεπτύνσεις των ιδιαζόντων ολοκληρωμάτων και των μεγιστικών τελεστών οδήγησαν αντίστοιχα στην ανάγκη μελέτης όλο και πιο σύνθετων ολοκληρωμάτων ταλάντωσης. Η ποικιλία αυτών (ολοκληρωτικοί τελεστές Fourier, τελεστές συνέλιξης καθώς και παραλλαγές του μετασχηματισμού Fourier) κάνουν πολύ δύσκολη την κατηγοριοποίησή τους και πλέον τα ολοκληρώματα ταλάντωσης αποτελούν μια ανεξάρτητη περιοχή μελέτης στην αρμονική ανάλυση.

Στην εργασία αυτή μελετάμε τρία προβλήματα που προέρχονται απο την περιοχή αυτή:

Πρόβλημα Α Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I(P) = p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{iP(t)} \frac{dt}{t}.$$

Οι Stein και Wainger απέδειξαν στο [16] ότι $|I(P)| \leq c_d$, όπου η σταθερά c_d εξαρτάται μόνο απο το βαθμό d του πολυωνύμου και είναι ανεξάρτητη των συντελεστών του. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη εξάρτηση του $I(P)$ απο την παράμετρο d.

Το πρόβλημα αυτό βρίσκει απάντηση στο Θεώρημα 3.3 και ειδικότερα έχουμε

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_d} |I(P)| \sim \log d.$$

Το Θεώρημα 3.3 απαντάει καταφατικά στην αντίστοιχη εικασία που είχε διατυπωθεί απο τους Carbery, Wainger και Wright στο [5].

Πρόβλημα Β Πρόκειται για το $n-$διάστατο ανάλογο του προβλήματος Α. Έστω P ένα πραγματικό πολυώνυμο στον $\mathbb{R}^n$, βαθμού το πολύ d και K μια ομογενής συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, τάξης $-n$, με μέση τιμή μηδέν στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Η συνάρτηση K μπορεί να γραφεί στη μορφή $K(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}$ όπου Ω είναι μια συνάρτηση ορισμένη στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα

$$I_n(P) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x)} K(x) dx.$$

Εδώ θέλουμε να πάρουμε εκτιμήσεις της μορφής

$$|I_n(P)| \leq c_d \|\Omega\|_{S^{n-1}},$$

όπου $\|\Omega\|_{S^{n-1}}$ είναι κάποια κατάλληλη νόρμα της συνάρτησης Ω στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Και πάλι, η σταθερά c_d εξαρτάται μόνο απο την παράμετρο d.

Ο Stein απέδειξε στο [14] ότι αν η Ω είναι φραγμένη και έχει μέση τιμή μηδέν στη μοναδιαία σφαίρα τότε $\sup_{P \in \mathcal{P}_{d,n}} |I_n(P)| \leq c_d \|\Omega\|_{L^\infty(S^{n-1})}$.

Το αποτέλεσμα του Stein βελτιώνεται στο Θεώρημα 3.9 όπου αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση Ω έχει μέση τιμή μηδέν στη μοναδιαία σφαίρα και ανήκει στην κλάση $L \log L$ τότε

$$|I_n(P)| \leq c \log d \|\Omega\|_{L \log L(S^{n-1})},$$

όπου c είναι μια απόλυτη θετική σταθερά.

Πρόβλημα Γ Έστω P ένα πραγματικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ d στον $\mathbb{R}^n$ και $Q = [0,1]^n$ ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$. Οι συγγραφείς στο [4] αποδεικνύουν ότι, αν το πολυώνυμο P έχει μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο Q, τότε

$$\left| \int_Q e^{iP(x)} dx \right| \leq c_{d,n} \|P\|_{L^1(Q)}^{-\frac{1}{d}}.$$

Απο την άλλη, οι Carbery και Wright διατυπώνουν στο [6] την εικασία ότι η σταθερά $c_{d,n}$ μπορεί να αντικατασταθεί απο $c\min(n,d)$ για κάποια απόλυτη σταθερά c. Στο Θεώρημα 2.12 δείχνουμε ότι

$$\left|\int_Q e^{iP(x)}dx\right| \leq c\min(d,n)n^{\frac{1}{2d}}\|P\|_{L^1(Q)}^{-\frac{1}{d}}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά c. Το αποτέλεσμα αυτό απαντά καταφατικά στην εικασία για $n \leq c^d$ για κάποια απόλυτη σταθερά c ενώ απέχει απο τη σταθερά της εικασίας κατά τον παράγοντα $n^{\frac{1}{2d}}$ στη γενική περίπτωση.

Η εργασία αυτή αποτελείται απο τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια γενική εισαγωγή στα ολοκληρώματα ταλάντωσης και παρουσιάζονται κάποια βασικά εργαλεία και τεχνικές. Ταυτόχρονα καταγράφονται κάποια γνωστά αποτελέσματα απο τη βιβλιογραφία που είτε χρησιμοποιούνται στη συνέχεια, είτε δίνουν απλά μια γεύση για τον τύπο των αποτελεσμάτων που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε. Το κεφάλαιο αυτό δεν περιέχει νέα αποτελέσματα.

Το δεύτερο κεφάλαιο αφιερώνεται στα ολοκληρώματα ταλάντωσης με πολυωνυμική φάση. Οι αναλυτικές ιδιότητες των πολυωνύμων μας επιτρέπουν εδώ να πάρουμε ακριβείς εκτιμήσεις για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ταλάντωσης. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί στο πρώτο κεφάλαιο καθώς και άλλες γνωστές εκτιμήσεις απο τη βιβλιογραφία. Η ανάλυση του κεφαλαίου 2 δίνει το Θεώρημα 2.12 (νέο αποτέλεσμα) που επιλύει μερικώς το πρόβλημα Γ. Ταυτόχρονα παρέχει μια σειρά απο χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη ολοκληρωμάτων ταλάντωσης με πολυωνυμική φάση.

Στο κεφάλαιο 3 μελετάμε ιδιάζοντα ολοκληρώματα ταλάντωσης. Αυτά προκύπτουν συνήθως ως πολλαπλασιαστές κάποιων τελεστών ιδιαζόντων ολοκληρωμάτων όπως ο γενικευμένος μετασχηματισμός Hilbert $f \mapsto p.v. \int_{\mathbb{R}} f(x-P(y))\frac{dy}{y}$. Τα Θεωρήματα 3.3 και 3.9 δίνουν απαντήσεις στα Προβλήματα Α και Β αντίστοιχα και αποτελούν νέα αποτελέσματα.

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί

Εδώ παραθέτουμε κάποιους βασικούς συμβολισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Δουλεύουμε γενικά στον $\mathbb{R}^n$. Η Ευκλείδια νόρμα θα συμβολίζεται με $|\cdot|$. Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$,

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$$

είναι η ανοιχτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r. Συμβολίζουμε με S^{n-1} τη μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$. Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με dx και στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} με $d\sigma_{n-1}$. Αν E είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $|E|$ το μέτρο Lebesgue του E, και με χ_E τη χαρακτηριστική του συνάρτηση: $\chi_E(x) = 1$ αν $x \in E$ και 0 αν $x \notin E$.

Αν $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$ είναι ένας πολυδείκτης και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, τότε

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

όπου $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ και $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Αν (X,μ) είναι ένας χώρος μέτρου, με $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, συμβολίζουμε τους χώρους Banach συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ των οποίων οι $p-$οστές δυνάμεις είναι ολοκληρώσιμες· η νόρμα μιας $f \in L^p(X,\mu)$ είναι

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Με $L^\infty(X,\mu)$ συμβολίζουμε το χώρο Banach των ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων απο τον X στο $\mathbb{C}$· ακριβέστερα, μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχει κάποια σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0.$$

Ο χώρος αυτός εφοδιάζεται με τη νόρμα

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \inf\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

Συνήθως $X = \mathbb{R}^n$ ή $X = K \subset \mathbb{R}^n$ και $d\mu = dx$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε απλά $L^p(K)$ αντί για $L^p(K,dx)$.

Αν $K \subseteq \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $C^k(K)$ τους χώρους των k φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ και με $C^\infty(K)$ το χώρο των άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο K. Σε αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι η f είναι **ομαλή** στο K. Όταν το σύνολο στο οποίο ορίζεται μια συνάρτηση είναι σαφές, λέμε απλά ότι η f είναι μια C^k-συνάρτηση ή μια ομαλή συνάρτηση, αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με Q ή Q^n το μοναδαίο κύβο στον $\mathbb{R}^n$, $Q = [0,1]^n$. Γράφουμε $\mathcal{P}_d$ για το χώρο των **πραγματικών** πολυωνύμων $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ d, και $\mathcal{P}_{d,n}$ για το χώρο των **πραγματικών** πολυωνύμων $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ d. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό $\mathcal{P}^o_{d,n}$ για τα πολυώνυμα $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ που έχουν μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο του $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{P}^o_{d,n} = \{P \in \mathcal{P}_{d,n} : \int_Q P(x)dx = 0\}.$$

Με c συμβολίζουμε μια απόλυτη θετική σταθερά, που δεν εξαρτάται απο καμία παράμετρο. Η σταθερά c μπορεί να αλλάζει και στην ίδια γραμμή κειμένου. Θα γράφουμε c_k ή $c_{k,l}$ για να δηλώσουμε την εξάρτηση μιας σταθεράς απο τις παραμέτρους k ή k και l αντίστοιχα.

Χρησιμοποιούμε τους κλασσικούς συμβολισμούς $A = O(B)$ και $A = o(B)$ καθώς κάποια παράμετρος $n \to \infty$, για να δηλώσουμε ότι $A \leq cB$ και $A/B \to 0$, αντίστοιχα, καθώς $n \to \infty$. Ο συμβολισμός $A \sim B$ σημαίνει ότι υπάρχουν απόλυτες θετικές σταθερές c_1, c_2, τέτοιες ώστε,

$$c_1 A \leq B \leq c_2 A.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **1**

Ολοκληρώματα ταλάντωσης στην Αρμονική Ανάλυση

Τα ολοκληρώματα ταλάντωσης αποτελούσαν πάντα κεντρικό αντικείμενο μελέτης στην περιοχή της αρμονικής ανάλυσης. Δεν θα επιχειρήσουμε εδώ μια συνολική καταγραφή όλων των σχετικών αποτελεσμάτων. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [14], [15] για μια αναλυτική περιγραφή της σχετικής θεωρίας. Ακολουθώντας την ορολογία που εισάγεται στο [14], διαχωρίζουμε τα ολοκληρώματα ταλάντωσης σε πρώτου και δεύτερου τύπου.

Στα ολοκληρώματα ταλάντωσης πρώτου τύπου, μελετάμε τη συμπεριφορά μίας μόνο συνάρτησης που τυπικά μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$I_\psi(\lambda) = \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx.$$

Σκοπός είναι τότε η μελέτη της ασυμπτοτικής συμπεριφοράς του $I_\psi(\lambda)$ καθώς η πραγματική παράμετρος λ τείνει στο άπειρο.

Στην κατηγορία αυτή μπορούμε να εντάξουμε και ολοκληρώματα ταλάντωσης που σχετίζονται με κάποια ιδιάζοντα ολοκληρώματα. Ειδικότερα, αν θεωρήσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό Hilbert κατά μήκος μιας πολυωνυμικής καμπύλης

$$H_P(f)(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-P(y))}{y}dy,$$

όπου P είναι κάποιο πραγματικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ d, τότε ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής γράφεται στη μορφή

$$m_P(\xi) = p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi P(t)}\frac{dt}{t}.$$

Εδώ, το αντίστοιχο πρόβλημα είναι η εκτίμηση της L^∞-νόρμας του πολλαπλασιαστή απο μία σταθερά που εξαρτάται απο το βαθμό d του πολυωνύμου και είναι ανεξάρτητη των συντελεστών του.

Στα ολοκληρώματα ταλάντωσης δεύτερου τύπου, μελετάμε τις ιδιότητες συνέχειας ενός τελεστή που στον πυρήνα του φέρει κάποιον παράγοντα που ταλαντώνεται, και που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$T_\lambda(f)(x) = \int e^{i\lambda\Phi(x,y)} K(x,y) f(y) dy.$$

Σκοπός εδώ είναι η περιγραφή της συμπεριφοράς της νόρμας του τελεστή T_λ, ανάμεσα σε κατάλληλους χώρους, καθώς $\lambda \to \pm\infty$.

1.1 Ολοκληρώματα ταλάντωσης πρώτου τύπου, μία μεταβλητή

Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$I_\psi(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(t)} \psi(t) dt \tag{1.1}$$

για μεγάλα και θετικά λ. Εδώ η ϕ είναι μία ομαλή πραγματική συνάρτηση (συνάρτηση φάσης) και η ψ είναι μια συνάρτηση με μιγαδικές τιμές και ομαλή στο (a, b). Συχνά, αλλά όχι πάντα, υποθέτουμε ότι η ψ έχει συμπαγή φορέα στο (a, b).

Η κατάσταση στη μία μεταβλητή είναι εντελώς ξεκάθαρη. Υπάρχουν τρεις αρχές που διέπουν τη συμπεριφορά του $I_\psi(\lambda)$, καθώς το $\lambda \to +\infty$. Αυτές είναι: η κύρια συνεισφορά στο $I_\psi(\lambda)$ προέρχεται απο τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης φάσης ϕ· επιπλέον, υποθέτοντας την ύπαρξη ενός μόνο κρίσιμου σημείου, υπάρχει πλήρης περιγραφή της ασυμπτοτικής συμπεριφοράς του $I_\psi(\lambda)$ που ποιοτικά καθορίζεται απο την τάξη μηδενισμού της ϕ' στο κρίσιμο σημείο· τέλος, υπάρχει μία καθολική εκτίμηση για τον ρυθμό που φθίνει το $I_\psi(\lambda)$, συνεπής με την πιο πάνω ασυμπτοτική συμπεριφορά, που εξαρτάται απο κάποιο ομοιόμορφο κάτω φράγμα για κάποια παράγωγο της φάσης ϕ.

Η αρχή που μελετάται και αξιοποιείται σε αυτή την εργασία είναι η τελευταία. Ας υποθέσουμε ότι για τη συνάρτηση φάσης ϕ γνωρίζουμε μόνο ότι

$$\left| \frac{d^k \phi(t)}{dt^k} \right| \geq 1, \; t \in [a, b],$$

για κάποιο σταθερό k, και θέλουμε να πάρουμε μια εκτίμηση για το ολοκλήρωμα

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(t)} dt$$

που να είναι **ανεξάρτητη** των a, b καθώς και οποιουδήποτε άλλου ποσοτικού χαρακτηριστικού της συνάρτησης ϕ. Η αλλαγή μεταβλητής $t \mapsto \lambda^{-\frac{1}{k}} t'$ στο ολοκλήρωμα δείχνει ότι η μόνη δυνατή εκτίμηση για το $I(\lambda)$ είναι

$$I(\lambda) \leq O(\lambda^{-\frac{1}{k}}).$$

Το ότι αυτή η εκτίμηση πράγματι ισχύει οφείλεται στον van der Corput, και περιέχεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.1. *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια C^k-συνάρτηση και υποθέτουμε ότι $|\phi^{(k)}(t)| \geq 1$ για κάποιο $k \geq 1$ και όλα τα $t \in [a,b]$. Αν $k=1$ υποθέτουμε επιπλέον ότι η ϕ' είναι μονότονη. Τότε, για κάθε $\lambda > 0$,*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(t)} dt \right| \leq \frac{c\,k}{\lambda^{\frac{1}{k}}} \tag{1.2}$$

όπου c είναι μια απόλυτη σταθερά, ανεξάρτητη των a,b,k και ϕ.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της Πρότασης 1.1, είναι σκόπιμο να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

Ένας τρόπος για να πάρουμε εκτιμήσεις για το ολοκλήρωμα στην (1.2) είναι να κάνουμε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες. Αυτή είναι και η αρχική ιδέα του van der Corput, που αποδεικνύει την Πρόταση 1.1 με τον παράγοντα ck να αντικαθίσταται απο κάποια σταθερά c_k. Η απόδειξη της Πρότασης 1.1 με αυτή τη μέθοδο υπάρχει για παράδειγμα στο [15].

Ας υποθέσουμε ότι για συναρτήσεις ϕ που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\left| \frac{d^k\phi(t)}{dt^k} \right| \geq 1$$

γνωρίζουμε «καλές» εκτιμήσεις για το μέτρο των συνόλων υπο-στάθμης

$$E_\alpha = \{t \in [a,b] : |\phi(t)| < \alpha\}, \tag{1.3}$$

συναρτήσει του $\alpha > 0$. Τότε, η εκτίμηση (1.2) είναι άμεση συνέπεια αυτών των εκτιμήσεων. Αυτή η αρχή πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία [1] και αξιοποιήθηκε πλήρως στο [4]. Χρησιμοποιώντας αυτή την αρχή θα αποδείξουμε στη συνέχεια την Πρόταση 1.1, ακολουθώντας την απόδειξη που βρίσκεται στο [1] και που παράγει τη γραμμική εξάρτηση απο την παράμετρο k στη δεξί μέλος της (1.2). Αξίζει επίσης να επισημάνουμε ότι αυτό το επιχείρημα θα κάνει συχνά την εμφάνισή του και στην παρούσα εργασία, στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Οι «καλές» εκτιμήσεις για τα σύνολα υπο-στάθμης (1.3) είναι το περιεχόμενο της ακόλουθης πρότασης:

Πρόταση 1.2. *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια C^k-συνάρτηση και υποθέτουμε ότι $|\phi^{(k)}(t)| \geq 1$ για κάποιο $k \geq 1$ και όλα τα $t \in [a,b]$. Τότε*

$$|\{t \in [a,b] : |\phi(t)| \leq \alpha\}| \leq 2k\alpha^{\frac{1}{k}}. \tag{1.4}$$

Απόδειξη. Έστω $E_\alpha = \{t \in [a,b] : |\phi(t)| \leq \alpha\}$. Το E_α είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων. Τα μεταφέρουμε έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα μόνο διάστημα I μήκους $|E_\alpha|$ και διαλέγουμε $k+1$ ισαπέχοντα σημεία στο I. Αν επαναφέρουμε τα διαστήματα στην αρχική τους θέση, καταλήγουμε με $k+1$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ στο E_α που ικανοποιούν την

$$|x_j - x_l| \geq |E_\alpha| \frac{|j-l|}{k}. \tag{1.5}$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $h(x)$, που παρεμβάλει τις τιμές $\phi(x_0), \phi(x_1), \ldots, \phi(x_k)$:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{k} \phi(x_n) \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\cdots(x-x_k)}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\cdots(x_n-x_k)}.$$

Η συνάρτηση $F(x) = h(x) - \phi(x)$ είναι k φορές παραγωγίσιμη και μηδενίζεται σε καθένα απο τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Υπάρχουν συνεπώς k σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, όπου $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k < x_k$, τέτοια ώστε $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = \cdots = F'(\xi_k) = 0$. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα k φορές συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιο σημείο $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $F^{(k)}(\xi) = h^{(k)}(\xi) - \phi^{(k)}(\xi) = 0$. Έχουμε συνεπώς ότι

$$\frac{\phi^{(k)}(\xi)}{k!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{\phi(x_n)}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\cdots(x_n-x_k)}.$$

Τώρα, απο την υπόθεση $|\phi^{(k)}(t)| \geq 1$ και την ιδιότητα (1.5) των σημείων $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} \leq \frac{\left|\phi^{(k)}(\xi)\right|}{k!} &\leq \alpha \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{|x_n-x_0|\cdots|x_n-x_{n-1}||x_n-x_{n+1}|\cdots|x_n-x_k|} \\
&\leq \alpha \sum_{n=0}^{k} \frac{k^k}{n!(k-n)!|E_\alpha|^k} \leq \frac{\alpha k^k}{|E_\alpha|^k k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} = \frac{\alpha k^k}{|E_\alpha|^k k!} 2^k,
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$|E_\alpha|^k \leq \alpha k^k 2^k.$$

Παίρνοντας $k-$οστές ρίζες και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης. □

Η απόδειξη της Πρότασης 1.1 είναι τώρα άμεση.

Απόδειξη της Πρότασης 1.1. Θα αποδείξουμε πρώτα την Πρόταση στην περίπτωση $k = 1$. Έχουμε

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(t)} dt = \frac{e^{i\lambda\phi(b)}}{i\lambda\phi'(b)} - \frac{e^{i\lambda\phi(a)}}{i\lambda\phi'(a)} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda\phi(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\phi'(t)}\right) dt.$$

Συνεπώς

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(t)}dt\right| \leq \frac{1}{\lambda\,|\phi'(b)|}+\frac{1}{\lambda\,|\phi'(a)|}+\frac{1}{\lambda}\int_a^b\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\phi'(t)}\right)\right|dt.$$

Απο την υπόθεση της μονοτονίας της ϕ' έχουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^b\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\phi'(t)}\right)\right|dt=\frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\phi'(t)}\right)dt\right|=\frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(b)}-\frac{1}{\phi'(a)}\right|\leq\frac{1}{\lambda}.$$

Απο τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(t)}dt\right|\leq\frac{2}{\lambda}\max\left(\frac{1}{|\phi'(a)|},\frac{1}{|\phi'(b)|}\right)\leq\frac{2}{\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση στην περίπτωση $k=1$ με $c=2$.

Έστω τώρα $k\geq 2$. Για κάποιο $\alpha>0$ που θα καθοριστεί αργότερα, γράφουμε

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(t)}dt\right| \leq \left|\int_{\{t\in[a,b]:|\phi'(t)|\geq\alpha\}}e^{i\lambda\phi(t)}dt\right|+\int_{\{t\in[a,b]:|\phi'(t)|<\alpha\}}dt=I_1+I_2.$$

Για να εκτιμήσουμε το $I_2=|\{t\in[a,b]:|\phi'(t)|<\alpha\}|$ χρησιμοποιούμε την Πρόταση 1.2 για τη συνάρτηση ϕ' για να πάρουμε $I_2\leq 2(k-1)\alpha^{\frac{1}{k-1}}$. Για το I_1 παρατηρούμε ότι η υπόθεση $\left|\phi^{(k)}(t)\right|\geq 1$ σημαίνει ότι το σύνολο $\{t\in[a,b]:|\phi'(t)|\geq\alpha\}$ είναι μια ένωση το πολύ $2k$ διαστημάτων σε καθένα απο τα οποία η ϕ' είναι μονότονη. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για $k=1$ σε καθένα απο αυτά τα διαστήματα παίρνουμε λοιπόν ότι $I_1\leq 4\frac{k}{\lambda\alpha}$. Άρα

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(t)}dt\right|\leq 4\frac{k}{\lambda\alpha}+2(k-1)\alpha^{\frac{1}{k-1}}.$$

Βελτιστοποιώντας ως προς α, καταλήγουμε στο ότι

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(t)}dt\right|\leq\frac{4k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}.$$

□

Παρατήρηση 1.3. *Η γραμμική εξάρτηση των σταθερών απο το k στις Προτάσεις 1.1 και 1.2 είναι βέλτιστη όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς ελέγχοντάς τις με τη συνάρτηση $\phi(t)=\frac{t^k}{k!}$.*

Η εκτίμηση που περιέχεται στην Πρόταση 1.1 οδηγεί σε μια ανάλογη εκτίμηση για ολοκληρώματα της μορφής (1.1).

Πόρισμα 1.4. *Αν η ϕ ικανοποιεί της υποθέσεις της Πρότασης 1.1 και η ψ είναι μια C^1-συνάρτηση, τότε*

$$\left|\int_a^b e^{\lambda i\phi(t)}\psi(t)dt\right| \leq \frac{c\,k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\left\{\,|\psi(b)| + \int_a^b \left|\psi'(t)\right| dt\right\} \tag{1.6}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $F(t) = \int_a^t e^{i\lambda\phi(x)}dx$. Τότε, απο την Πρόταση 1.1 έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{\lambda i\phi(t)}\psi(t)dt\right| &= \left|\int_a^b F'(t)\psi(t)dt\right| = \left|F(b)\psi(b) - \int_a^b F(t)\psi'(t)dt\right| \\ &\leq \frac{c\,k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}\left\{\,|\psi(b)| + \int_a^b \left|\psi'(t)\right| dt\right\}.\end{aligned}$$

□

1.2 Ολοκληρώματα ταλάντωσης πρώτου τύπου, πολλές μεταβλητές

Στις πολλές μεταβλητές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$I_\psi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \tag{1.7}$$

καθώς $\lambda \to +\infty$, όπου η συνάρτηση φάσης ϕ είναι πραγματική και ομαλή και η ψ είναι μια ομαλή μιγαδική συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Η κατάσταση στις πολλές μεταβλητές απέχει αρκετά απο το να είναι τόσο ξεκάθαρη όσο στη μία διάσταση και τα σχετικά αποτελέσματα απέχουν αρκετά απο το να είναι βέλτιστα.

Το πρώτο που κάνει κανείς είναι να θεωρήσει το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}dx \tag{1.8}$$

και να προσπαθήσει μετά να συμπεράνει εκτιμήσεις για ολοκληρώματα της μορφής (1.7). Τα προβλήματα αρχίζουν αμέσως διότι στις πολλές διαστάσεις ικανοποιητικά αποτελέσματα για το (1.8) δεν ισχύουν σε ολόκληρο το χώρο αλλά μόνο αν περιοριστούμε σε κατάλληλα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Για ευκολία δουλεύουμε στο μοναδιαίο κύβο του $\mathbb{R}^n$, $Q = [0,1]^n$, και μελετάμε ολοκληρώματα της μορφής

$$I(\lambda) = \int_Q e^{i\lambda\phi(x)}dx. \tag{1.9}$$

Ιδανικά εδώ θα θέλαμε να υποθέσουμε ότι για κάποιο πολυδείκτη $\beta \in \mathbb{N}_o^n$ με $|\beta| > 0$ έχουμε

$$|D^\beta\phi(x)| \geq 1 \tag{1.10}$$

στον Q και να συμπεράνουμε ότι

$$\left|\int_Q e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_{n,\beta}\lambda^{-\epsilon}, \tag{1.11}$$

ομοιόμορφα για όλες τις ϕ που ικανοποιούν την (1.10). Αυτό σημαίνει ότι η σταθερά $c_{n,\beta}$ και ο εκθέτης ϵ πρέπει να εξαρτώνται μόνο απο τη διάσταση n και τον πολυδείκτη β. Ο φαινομενικά «φυσιολογικός» εκθέτης στην (1.11) είναι $\epsilon = \frac{1}{|\beta|}$.

Η κεντρική ιδέα είναι αυτή που αναπτύχθηκε στην πρώτη παράγραφο και αξιοποιήθηκε στην περίπτωση της μίας μεταβλητής. Αν γνωρίζουμε «καλές» εκτιμήσεις για τα σύνολα υπο-στάθμης της συνάρτησης ϕ,

$$\{x \in Q : |\phi(x)| \leq \alpha\},$$

τότε μπορούμε να πάρουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις για τα ολοκληρώματα της μορφής (1.9). Έχουμε για παράδειγμα τα εξής Θεωρήματα.

Θεώρημα 1.5. *Για κάθε πολυδείκτη $\beta \in \mathbb{N}_o^n$ με $|\beta| > 0$ υπάρχει κάποιο $\epsilon = \epsilon_{\beta,n} > 0$ και κάποια θετική σταθερά $c_{\beta,n}$, που εξαρτώνται μόνο απο τα β και n, τέτοια ώστε για κάθε πραγματική συνάρτηση $\phi \in C^{|\beta|}(Q)$ που ικανοποιεί την $\left|D^\beta\phi(x)\right| \geq 1$ στον Q και κάθε $\alpha > 0$ να ισχύει*

$$|\{x \in Q : |\phi(x)| < \alpha\}| \leq c_{\beta,n}\,\alpha^\epsilon. \tag{1.12}$$

Θεώρημα 1.6. *Έστω $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq 0$ κάποιος πολυδείκτης και υποθέτουμε ότι $\beta_j \geq 2$ για ένα τουλάχιστον $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε, υπάρχει κάποιο $\epsilon = \epsilon_{\beta,n} > 0$ και κάποια θετική σταθερά $c_{\beta,n}$, που εξαρτώνται μόνο απο τα β και n, έτσι ώστε για κάθε πραγματική συνάρτηση $\phi \in C^{|\beta|}(Q)$ που ικανοποιεί την $\left|D^\beta\phi(x)\right| \geq 1$ στον Q και για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει ότι*

$$\left|\int_Q e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_{\beta,n}\lambda^{-\epsilon}. \tag{1.13}$$

Τα αποτελέσματα αυτά διατυπώθηκαν και αποδείχθηκαν στο [4]. Οι συγγραφείς στο [4] αποδεικνύουν επίσης τα παραπάνω Θεωρήματα με τον ισχυρότερο εκθέτη $\epsilon = \frac{1}{|\beta|}$ κάτω απο κάποιες επιπλέον υποθέσεις «κυρτότητας» για τη συνάρτηση φάσης ϕ. Αυτό είναι το περιεχόμενο των ακόλουθων Θεωρημάτων.

Θεώρημα 1.7. *Υποθέτουμε ότι $\phi \in C^{|\beta|}(Q)$, ότι $\left|D^\beta\phi(x)\right| \geq 1$ στον Q και επιπλέον ότι για κάποιους δείκτες $N_2 > \beta_2, N_3 > \beta_3, \ldots, N_n > \beta_n$ οι μερικές παράγωγοι*

$$D^{(0,0,\ldots,N_n)}\phi,\ D^{(0,0,\ldots,0,N_{n-1},\beta_n)}\phi,\ \ldots,\ D^{(0,N_2,\beta_3,\ldots,\beta_n)}\phi,$$

έχουν όλες σταθερό πρόσημο. Τότε, υπάρχει μια θετική σταθερά $c_{\beta,N_2,\ldots,N_n}$ που εξαρτάται μόνο απο τα $\beta, N_2, \ldots, N_n$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha > 0$

$$|\{x \in Q : |\phi(x)| < \alpha\}| \leq c_{\beta,N_2,\ldots,N_n}\alpha^{\frac{1}{|\beta|}}. \tag{1.14}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στη διάσταση n. Η περίπτωση $n = 1$ είναι η Πρόταση 1.2 και συνεπώς υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για διάσταση $n-1$. Αν $E = \{x \in Q : |\phi(x)| < \alpha\}$, για κάποιο $\gamma > 0$ που θα καθοριστεί αργότερα γράφουμε

$$\begin{aligned}
|E| &= \int_Q \chi_E(x', x_n)dx = \int_{Q^1}\int_{Q^{n-1}} \chi_E(x', x_n)dx'dx_n \\
&= \int_{Q^1}\int_{\{x' \in Q^{n-1} : |\partial^{\beta_n}\phi(x)/\partial x_n^{\beta_n}| \geq \gamma\}} \chi_E(x', x_n)dx'dx_n \\
&+ \int_{Q^1}\int_{\{x' \in Q^{n-1} : |\partial^{\beta_n}\phi(x)/\partial x_n^{\beta_n}| < \gamma\}} \chi_E(x', x_n)dx'dx_n = I + II.
\end{aligned}$$

Γράφουμε $\beta = (\beta', \beta_n)$. Για το II χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για το $D^{\beta'}$ και την $(\partial/\partial x_n)^{\beta_n}\phi$ στη θέση της ϕ και παίρνουμε $II \leq c_{\beta', N_2, \ldots, N_{n-1}}\gamma^{\frac{1}{|\beta'|}}$. Για το I, το γεγονός ότι η μερική παράγωγος $\partial^{N_n}\phi/\partial x_n^{N_n}$ έχει σταθερό πρόσημο διασφαλίζει ότι το διάστημα $[0, 1]$ γράφεται σαν ένωση φραγμένου πλήθους διαστημάτων σε καθένα απο τα οποία $|\partial^{\beta_n}\phi(x)/\partial x_n^{\beta_n}| \geq \gamma$. Χρησιμοποιώντας τη μονοδιάστατη εκτίμηση, δηλαδή την Πρόταση 1.2, παίρνουμε $I \leq c_{N_n}(\alpha/\gamma)^{\frac{1}{\beta_n}}$. Συνεπώς έχουμε $|E| \leq c_{\beta, N_2, \ldots, N_n}(\gamma^{\frac{1}{|\beta'|}} + (\alpha/\gamma)^{\frac{1}{\beta_n}})$. Βελτιστοποιώντας ως προς γ, $\gamma = \alpha^{\frac{|\beta'|}{|\beta|}}$, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Όπως και πριν, το Θεώρημα 1.7 συνεπάγεται την αντίστοιχη εκτίμηση για το ολοκλήρωμα (1.9). Αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου Θεωρήματος.

Θεώρημα 1.8. *Κάτω απο τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.7, υπάρχει μια σταθερά $c_{\beta, N_2, \ldots, N_n}$ έτσι ώστε*

$$|I(\lambda)| = \left|\int_Q e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_{\beta, N_2, \ldots, N_n}\lambda^{-\frac{1}{|\beta|}} \tag{1.15}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$|I(\lambda)| \leq \left|\int_{\{x \in Q : |(\partial\phi(x)/\partial x_n)^{\beta_n}| \geq \gamma\}} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| + |\{x \in Q : |(\partial\phi(x)/\partial x_n)^{\beta_n}| < \gamma\}| = I + II.$$

Για το II χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.7 για να πάρουμε $II \leq c_{\beta', N_2, \ldots, N_n}\gamma^{\frac{1}{|\beta'|}}$. Για να εκτιμήσουμε το I χρησιμοποιούμε την Πρόταση 1.1 αφού για κάθε $x' \in Q^{n-1}$ το σύνολο $\{x_n \in [0, 1] : \left|\frac{\partial^{\beta_n}\phi}{\partial x_n^{\beta_n}}(x', x_n)\right| \geq \gamma\}$ αποτελείται απο φραγμένα το πλήθος διαστήματα. Έτσι παίρνουμε $I \leq c_{N_n}(\lambda\gamma)^{-\frac{1}{\beta_n}}$. Επιλέγοντας $\gamma = \lambda^{-\frac{|\beta'|}{|\beta|}}$ παίρνουμε την (1.15). □

Αξίζει τέλος να αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα του Stein για την εκτίμηση των ολοκληρωμάτων της μορφής (1.7) που μπορεί να βρεθεί στο [15]. Ο Stein δίνει τη βέλτιστη εκτίμηση όσον αφορά στον εκθέτη $\epsilon = \frac{1}{|\beta|}$, αλλά το αποτέλεσμά του δεν είναι ομοιόμορφο για όλες τις ϕ που ικανοποιούν την (1.10). Ειδικότερα έχουμε το εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 1.9. *Έστω ότι η ψ είναι ομαλή και έχει φορέα εντός της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε επίσης ότι η ϕ είναι μια πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε για κάποιο πολυδείκτη β με $|\beta| > 0$ να ικανοποιεί την*

$$|D^\beta \phi| \geq 1$$

εντός του φορέα της ψ. Τότε

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \right| \leq c_k(\phi)\lambda^{-\frac{1}{k}}\{\|\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla\psi\|_{L^1}\} \tag{1.16}$$

όπου $k = |\beta|\cdot$ η σταθερά $c_k(\phi)$ είναι ανεξάρτητη των λ και ψ και παραμένει φραγμένη εφόσον η C^{k+1} νόρμα της ϕ παραμένει φραγμένη.

1.3 Σημειώσεις και αναφορές

1.3.1 Αναφορές

Οι βασικές αναφορές για αυτό το κεφάλαιο είναι τα [14],[15], [1] και [4]. Η απόδειξη των Προτάσεων 1.1 και 1.2 που παρουσιάστηκε εδώ βασίστηκε στο [1]. Οι ίδιες ουσιαστικά αποδείξεις περιέχονται στο [4]. Στο [4], η Πρόταση 1.2 αξιοποιείται επαγωγικά για να δώσει Θεωρήματα όπως τα 1.5, 1.6, 1.7 και 1.8. Το Θεώρημα 1.9 αποδεικνύεται στα [14] και [15].

1.3.2 Σύνολα υπο-στάθμης στις πολλές διαστάσεις

Το πρόβλημα της εκτίμησης του $n-$διάστατου μέτρου Lebesgue του συνόλου

$$E_\alpha = \{x \in Q : |\phi(x)| \leq \alpha\},$$

για όλες τις ϕ με $|D^\beta\phi| \geq 1$ στον Q και χωρίς επιπλέον υποθέσεις βρίσκει μια απάντηση στο Θεώρημα 1.5:

$$|\{x \in Q : |\phi(x)| \leq \alpha\}| \leq c_{\beta,n}\alpha^\epsilon.$$

Το κατά πόσο ο εκθέτης ϵ μπορεί να πάρει τη «βέλτιστη» τιμή $\epsilon = \frac{1}{|\beta|}$ δεν είναι γνωστό. Στις δύο διαστάσεις, έχουμε το εξής Θεώρημα, που αποδεικνύεται στο [4].

Θεώρημα 1.10. *Έστω $\phi \in C^2(Q^2)$ με $|\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x \partial y}| \geq 1$ στον Q^2. Τότε*

$$|\{x \in Q^2 : |\phi(x)| \leq \alpha\}| \leq c\alpha^{\frac{1}{2}}|\log\alpha|^{\frac{1}{2}}.$$

Παρατηρήστε ότι η πιο πάνω εκτίμηση «απέχει» ένα λογαριθμικό παράγοντα απο τη φαινομενικά βέλτιστη εκτίμηση $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

1.3.3 Σύνδεση με προβλήματα συνδυαστικής

Το παραπάνω πρόβλημα εκτίμησης ενός συνόλου υπο-στάθμης έχει μια φυσιολογική σύνδεση με κάποια συνδυαστικά προβλήματα.

Ερώτημα 1.11. *Έστω $E \subseteq Q^2 = [0,1]^2$ με $|E| > 0$. Είναι αλήθεια ότι για κάποια απόλυτη θετική σταθερά c, μπορούμε πάντα να βρούμε σημεία $A, B, C, D \in E$ τέτοια ώστε το τετράπλευρο $ABCD$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες στους άξονες, και με εμβαδόν τουλάχιστον $c|E|^2$;*

Το ερώτημα 1.11 έχει μια ισοδύναμη διακριτή διατύπωση:

Ερώτημα 1.12. *Έστω M, N θετικοί ακέραιοι και A ένας $N \times N$ πίνακας με τουλάχιστον M συντεταγμένες ίσες με 1 και τις υπόλοιπες ίσες με 0. Υπάρχει κάποια απόλυτη θετική σταθερά $c > 0$ και κάποιος 2×2 υποπίνακας του A, με όλες τις συντεταγμένες του ίσες με 1 και «εμβαδόν» τουλάχιστον cM^2/N^2;*

Τυχόν θετική απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα έχει ώς άμεση συνέπεια την εκτίμηση

$$|\{x \in Q : |\phi(x)| \leq \alpha\}| \leq c\alpha^{\frac{1}{2}},$$

για όλες τις ϕ με $|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}| \geq 1$ στον Q. Πράγματι,αν στο σύνολο $E_\alpha = \{x \in Q : |\phi(x)| \leq \alpha\}$ υπάρχουν τέσσερα σημεία (x_i, y_i), $i, j \in \{0, 1\}$, ώστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου T, που σχηματίζουν να είναι τουλάχιστον $c|E_\alpha|^2$, τότε

$$c|E_\alpha|^2 \leq |T| \leq \int_T \left| \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x \partial y} \right| dxdy \leq 4\alpha,$$

και συνεπώς $|E_\alpha| \leq c\alpha^{\frac{1}{2}}$. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [4].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **2**

Ολοκληρώματα ταλάντωσης με πολυωνυμική φάση στον $\mathbb{R}^n$

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε σε ολοκληρώματα ταλάντωσης πρώτου τύπου όπου η συνάρτηση φάσης είναι κάποιο πραγματικό πολυώνυμο στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_{d,n}$ το διανυσματικό χώρο όλων των πραγματικών πολυωνύμων στον $\mathbb{R}^n$, βαθμού το πολύ d. Το τυχόν $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = \sum_{0 \le |\alpha| \le d} c_\alpha x^\alpha = c_0 + \sum_{0 < |\alpha| \le d} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{2.1}$$

Έστω λοιπόν $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ και γράφουμε $Q = [0,1]^n$ για το μοναδιαίο κύβο στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος

$$I(\lambda) = \int_Q e^{i\lambda P(x)} dx \tag{2.2}$$

καθώς $\lambda \to +\infty$.

2.1 Εκτιμήσεις van der Corput και πολυώνυμα

Οι αναλυτικές ιδιότητες των πολυωνύμων μας επιτρέπουν να πάρουμε εκτιμήσεις για το $I(\lambda)$, πρακτικά χωρίς καμία υπόθεση. Για παράδειγμα, οι συνθήκες κυρτότητας που επιβάλλονται στις συναρτήσεις φάσης των Θεωρημάτων 1.7 και 1.8 ικανοποιούνται αυτομάτως. Έτσι παίρνουμε τα ακόλουθα.

Θεώρημα 2.1. *Για κάθε d, n υπάρχει μια θετική σταθερά $c_{d,n}$ τέτοια ώστε για κάθε πολυδείκτη β και κάθε πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ που ικανοποιεί την $|D^\beta P(x)| \ge 1$ για κάθε $x \in Q$,*

$$|\{x \in Q : |P(x)| < \alpha\}| \le c_{d,n} \alpha^{\frac{1}{|\beta|}}. \tag{2.3}$$

Αντίστοιχα, το Θεώρημα 1.8 μας δίνει ένα αποτέλεσμα τύπου van der Corput στον $\mathbb{R}^n$ για πολυώνυμα.

Θεώρημα 2.2. *Για κάθε d, n υπάρχει μια θετική σταθερά $c_{d,n}$ τέτοια ώστε για κάθε πολυδείκτη β και κάθε πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ που ικανοποιεί την $|D^\beta P(x)| \geq 1$ για κάθε $x \in Q$,*

$$\left| \int_Q e^{i\lambda P(x)} dx \right| \leq c_{d,n} \lambda^{-\frac{1}{|\beta|}}. \tag{2.4}$$

Αν $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ μπορούμε πάντα να βρούμε κάποιο $\beta \in \mathbb{N}_o^n$ με $|\beta| = d$ ώστε $|D^\beta P(x)| \geq |c_\beta|$ παντού στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, το Θεώρημα 2.2 μας δίνει άμεσα ότι για κάθε πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ υπάρχει κάποιος πολυδείκτης β με $|\beta| = d$ ώστε

$$\left| \int_Q e^{iP(x)} dx \right| \leq c_{d,n} |c_\beta|^{-\frac{1}{d}}, \tag{2.5}$$

όπου η σταθερά $c_{d,n}$ εξαρτάται μόνο απο τα d και n. Η εκτίμηση (2.5) μπορεί να γίνει ισχυρότερη.

Πόρισμα 2.3. *Έστω $P \in \mathcal{P}_{d,n}$, $P(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq d} c_\alpha x^\alpha$. Τότε*

$$\left| \int_Q e^{iP(x)} dx \right| \leq c_{d,n} \Bigg(\sum_{0 < |\alpha| \leq d} |c_\alpha| \Bigg)^{-\frac{1}{d}}, \tag{2.6}$$

όπου η σταθερά $c_{d,n}$ εξαρτάται μόνο απο τα d και n.

Απόδειξη. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο P δεν έχει σταθερό όρο, δηλαδή ότι $P(0) = 0$. Θεωρούμε το χώρο $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{P}_{d,n} : P(0) = 0\}$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|P\| = \sum_{0<|\alpha|\leq d} |c_\alpha|$. Το συναρτησοειδές

$$\theta(P) = \max_{0<|\alpha|<d} \inf_{x \in Q} |D^\alpha P(x)|$$

είναι συνεχές στο χώρο $\mathcal{P}$ και ομογενές βαθμού 1. Επίσης, για κάθε μη μηδενικό $P \in \mathcal{P}$ έχουμε ότι $\theta(P) \neq 0$. Συνεπώς, υπάρχει μια σταθερά $c_{d,n}$ που εξαρτάται μόνο απο τα n και d ώστε $\theta(P) \geq c_{d,n} \|P\|$ για όλα τα $\mathcal{P}$. Το Θεώρημα 2.2 δίνει τώρα το επιθυμητό συμπέρασμα. ☐

Παρατήρηση 2.4. *Οι συγγραφείς στο [4] αποδεικνύουν επίσης ότι στη μία διάσταση έχουμε την εκτίμηση $c_{d,1} \leq cd$ για κάποια απόλυτη θετική σταθερά c. Δεν συμπεριλάβαμε αυτήν την απόδειξη αφού θα δείξουμε στη συνέχεια ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα.*

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο πολυωνύμων $\mathcal{P}_{d,n}^o = \{P \in \mathcal{P}_{d,n} : \int_Q P(x)dx = 0\}$, δηλαδή το χώρο όλων των πραγματικών πολυωνύμων στον $\mathbb{R}^n$, βαθμού το πολύ d, με μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο Q. Για $P \in \mathcal{P}_{d,n}^o$ έχουμε ότι

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq d} |c_\alpha| \leq 2 \sum_{0 < |\alpha| \leq d} |c_\alpha|,$$

και συνεπώς, για $P \in \mathcal{P}^o_{d,n}$, το Πόρισμα 2.3 δίνει ότι

$$\left|\int_Q e^{iP(x)}dx\right| \leq c_{d,n}\Big(\sum_{0\leq|\alpha|\leq d}|c_\alpha|\Big)^{-\frac{1}{d}}.$$

Εφόσον όλες οι νόρμες στο χώρο $\mathcal{P}^o_{d,n}$ είναι ισοδύναμες, με σταθερές που εξαρτώνται μόνο απο τα d και n, το Πόρισμα 2.3 γράφεται ισοδύναμα ως εξής.

Πόρισμα 2.5. *Έστω $P \in \mathcal{P}^o_{d,n}$ και $\|\cdot\|$ μια νόρμα στο χώρο $\mathcal{P}^o_{d,n}$. Τότε*

$$\left|\int_Q e^{iP(x)}dx\right| \leq c_{d,n}\|P\|^{-\frac{1}{d}}, \tag{2.7}$$

όπου η σταθερά $c_{d,n}$ εξαρτάται μόνο απο τα d,n και την επιλογή της νόρμας.

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου, απο εδώ και πέρα, είναι να μελετήσει τις σταθερές που εμφανίζονται σε εκτιμήσεις του τύπου (2.7). Για το λόγο αυτό θεωρούμε σκόπιμο στο σημείο αυτό να κάνουμε μια μικρή παράκαμψη ώστε να δώσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για τις σταθερές που εμφανίζονται στην ισοδυναμία των νορμών πολυωνύμων στον $\mathbb{R}^n$.

2.2 Ισοδύναμες νόρμες πολυωνύμων και σύνολα υπο-στάθμης

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο πολυωνύμων $\mathcal{P}_{d,n}$ και κάποιο κυρτό σώμα K, όγκου 1, στον $\mathbb{R}^n$. Εφόσον ο χώρος $\mathcal{P}_{d,n}$ έχει πεπερασμένη διάσταση , οι νόρμες $(\int_K |P(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p \leq \infty$, είναι όλες ισοδύναμες. Σε αυτή την παράγραφο θέλουμε να μελετήσουμε τις σταθερές που εμφανίζονται σε αυτές τις ισοδυναμίες. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [6] και στις αναφορές που εμφανίζονται εκεί για πεισσότερες λεπτομέρειες.

Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Η ανισότητα Hölder δίνει τότε ότι

$$\|P\|_{L^p(K)} \leq \|P\|_{L^q(K)}, \tag{2.8}$$

και η σταθερά 1 που εμφανίζεται στην παραπάνω ανισότητα είναι βέλτιστη. Για την αντίθετη κατεύθυνση έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα που αποδεικνύεται στο [6].

Θεώρημα 2.6. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d και K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, όγκου 1. Έστω $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c, τέτοια ώστε*

(i) *Αν $\frac{n}{d} \leq p \leq q$ τότε*

$$\|P\|^{\frac{1}{d}}_{L^q(K)} \leq c\,\|P\|^{\frac{1}{d}}_{L^p(K)}.$$

(ii) *Αν* $p \leq \frac{n}{d} \leq q$ *τότε*

$$\|P\|_{L^q(K)}^{\frac{1}{d}} \leq c\,\frac{n}{pd}\,\|P\|_{L^p(K)}^{\frac{1}{d}}.$$

(iii) *Αν* $p \leq q \leq \frac{n}{d}$, *τότε*

$$\|P\|_{L^q(K)}^{\frac{1}{d}} \leq c\,\frac{q}{p}\,\|P\|_{L^p(K)}^{\frac{1}{d}}.$$

Οι σταθερές που εμφανίζονται στο παραπάνω Θεώρημα είναι βέλτιστες modulo την αριθμητική σταθερά c όταν θέλουμε να γράψουμε τις ανισότητες για **αυθαίρετα** κυρτά σώματα K στον $\mathbb{R}^n$. Δεν γνωρίζουμε για παράδειγμα αν οι σταθερές αυτές μπορούν να βελτιωθούν όταν θεωρήσουμε ως κυρτό σώμα τον μοναδιαίο κύβο στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή όταν $K = Q$.

Για $0 \leq p \leq 1 \leq q \leq \infty$, το ανάλογο του Θεωρήματος 2.6 είναι το Θεώρημα 2.7 που ακολουθεί. Στο Θεώρημα αυτό εκτιμάται το σύνολο υπο-στάθμης ενός πολυωνύμου σε ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ αν γνωρίζουμε την $L^q(K)$ νόρμα του πολυωνύμου. Απο τη συζήτηση που έχει προηγηθεί, γνωρίζουμε ότι εκτιμήσεις για τα σύνολα υποστάθμης συνεπάγονται αντίστοιχες εκτιμήσεις για τα ολοκληρώματα ταλάντωσης. Οι εκτιμήσεις που διατυπώνονται στο ακόλουθο Θεώρημα του [6] θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες σε ό,τι ακολουθεί.

Θεώρημα 2.7. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d και K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, όγκου 1. Έστω $1 \leq q \leq \infty$. Τότε υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c, ανεξάρτητη των P, d, K, q και n, τέτοια ώστε, για κάθε $\alpha > 0$,*

$$|\{x \in K : |P(x)| \leq \alpha\}| \leq c\min(n, qd)\alpha^{\frac{1}{d}}\,\|P\|_{L^q(K)}^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.9}$$

Και πάλι, ή σταθερά $c\min(n, qd)$ στο δεξί μέλος της (2.9) είναι βέλτιστη στο πλαίσιο των αυθαίρετων κυρτών σωμάτων όγκου 1.

Κοιτώντας την ανάπτυξη του Κεφαλαίου 1, καταλαβαίνει κανείς ότι οι εκτιμήσεις για τα σύνολα υπο-στάθμης χρησιμοποιούνται για κάποια παράγωγο της συνάρτησης φάσης και όχι για την ίδια τη συνάρτηση. Παρατηρώντας την εξίσωση (2.9) καταλαβαίνει κανείς πως η χρήση της για κάποια παράγωγο του πολυωνύμου P στον $\mathbb{R}^n$ θα εμφανίσει την αντίστοιχη νόρμα της παραγώγου στο δεξί μέλος. Για το λόγο αυτό διατυπώνουμε στη συνέχεια ένα απλό Λήμμα που θα μας επιτρέψει να συγκρίνουμε την $L^2(Q)$ νόρμα ενός πολυωνύμου P με την $L^2(Q)$ νόρμα του ∇P. Πρόκειται για μια ανισότητα Poincaré για πολυώνυμα στο μοναδιαίο κύβο του $\mathbb{R}^n$.

Λήμμα 2.8. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο με μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο $Q = [0, 1]^n$. Τότε*

$$\|P\|_{L^2(Q)} \leq c\,\|\nabla P(x)\|_{L^2(Q)},$$

για κάποια απόλυτη θετική σταθερά c, ανεξάρτητη των P και n.

Η απόδειξη του Λήμματος 2.8 είναι μια απλή εφαρμογή των σειρών Fourier στο μοναδιαίο κύβο Q του $\mathbb{R}^n$.

Κλείνουμε αυτό το Κεφάλαιο δίνοντας μία ακόμα εφαρμογή του Θεωρήματος 2.7. Έστω $1 \leq q < \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Μία συνάρτηση βάρους ω (δηλαδή μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση) για την οποία υπάρχει σταθερά $K < +\infty$ ώστε

$$\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x) dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{q}{p}} \leq K < +\infty$$

για κάθε μπάλα B λέμε ότι ανήκει στην κλάση βαρών A_q. Όταν $q = 1$ η παράσταση $\left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{-\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p}}$ αντικαθίσταται απο το $esssup_B\left(\frac{1}{\omega}\right)$. Η μικρότερη σταθερά K για την οποία ισχύει η παραπάνω εκτίμηση ονομάζεται A_q σταθερά του βάρους ω και συμβολίζεται με $A_q(\omega)$. Για τα πολυώνυμα στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση.

Πόρισμα 2.9. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d και K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, όγκου 1. Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και $0 < \epsilon < \frac{1}{d}$. Τότε υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c, ανεξάρτητη των P, d, K, p, ϵ και n, τέτοια ώστε*

$$\left(\int_K |P(x)|^{-\epsilon} dx \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \left(\int_K |P(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(c \min(n, pd) \frac{d\epsilon}{1 - d\epsilon} \right)^d.$$

Απόδειξη. Έστω ένα πολυώνυμο P βαθμού το πολύ d και K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ όγκου 1. Για $1 \leq p \leq \infty$ και κάποιο $\lambda > 0$ που θα καθοριστεί αργότερα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_K |P(x)|^{-\epsilon} dx &= \int_0^\infty |\{x \in K : |P(x)|^{-\epsilon} > \alpha\}| d\alpha \\ &\leq \lambda + \int_\lambda^\infty |\{x \in K : |P(x)| < \alpha^{-\frac{1}{\epsilon}}\}| d\alpha. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εκτίμηση του Θεωρήματος 2.7 για το σύνολο υπο-στάθμης του πολυωνύμου P, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_K |P(x)|^{-\epsilon} dx &\leq \lambda + c \min(n, pd) \|P\|_{L^p(K)}^{-\frac{1}{d}} \int_\lambda^\infty \alpha^{-\frac{1}{d\epsilon}} d\alpha \\ &= \lambda + c \min(n, pd) \|P\|_{L^p(K)}^{-\frac{1}{d}} \frac{\lambda^{-\frac{1}{d\epsilon}+1}}{\frac{1}{d\epsilon} - 1}, \end{aligned}$$

αφού $\epsilon < \frac{1}{d}$. Ελαχιστοποιώντας ως προς λ η παραπάνω άνισότητα γίνεται,

$$\int_K |P(x)|^{-\epsilon} dx \leq \left(c \min(n, pd) \frac{d\epsilon}{1 - d\epsilon} \right)^{d\epsilon} \|P\|_{L^p(K)}^{-\epsilon},$$

που είναι η ζητούμενη εκτίμηση. □

Το παραπάνω Πόρισμα δίνει ότι για ένα πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_{d,n}$, η συνάρτηση $\omega = |P|$ είναι βάρος στον $\mathbb{R}^n$ και μάλιστα

$$A_q(|P|) \leq \left(c \frac{d \min(n,d)}{q-(d+1)} \right)^d$$

για κάθε $q > d+1$. Για μια ακόμα εφαρμογή του Πορίσματος 2.9 βλέπε παρακάτω στην παράγραφο 3.3.

2.2.1 Εκτιμήσεις για πολυώνυμα στη μία διάσταση

Όπως είθισται, οι εκτιμήσεις στη μία διάσταση είναι πληρέστερες και πιο ακριβείς. Για παράδειγμα, το Θεώρημα 2.6 δίνει ότι, για $1 \leq p \leq q \leq \infty$, έχουμε

$$\|P\|_{L^p[0,1]}^{\frac{1}{d}} \leq \|P\|_{L^q[0,1]}^{\frac{1}{d}} \leq c \|P\|_{L^p[0,1]}^{\frac{1}{d}}.$$

Αν $P(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_d t^d$, η Πρόταση 1.2 μας δίνει για το σύνολο υποστάθμης του πολυωνύμου P ότι

$$|\{x \in [0,1] : |P(x)| \leq \alpha\}| \leq c \alpha^{\frac{1}{d}} |b_d|^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.10}$$

Αντίστοιχα, το Θεώρημα 2.7, στην περίπτωση $n = 1$, δίνει την εκτίμηση

$$|\{x \in [0,1] : |P(x)| \leq \alpha\}| \leq c \alpha^{\frac{1}{d}} \, \|P\|_{L^p[0,1]}^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.11}$$

Η «χειρότερη» νόρμα, που δίνει την καλύτερη εκτίμηση για το σύνολο υποστάθμης του πολυωνύμου είναι η L^∞ νόρμα. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η παραπάνω εκτίμηση μπορεί να βελτιωθεί στη μία διάσταση, και η L^∞ να αντικατασταθεί απο μια μεγαλύτερη νόρμα. Ειδικότερα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Vinogradov και μπορεί να βρεθεί στο [19].

Λήμμα 2.10. *Έστω $h(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_d t^d$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ d. Τότε,*

$$|\{t \in [a,b] : |h(t)| \leq \alpha\}| \leq c \max(|a|,|b|) \left(\frac{\alpha}{\max_{0 \leq k \leq d} |b_k|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Απόδειξη. Το σύνολο $E_\alpha = \{t \in [a,b] : |h(t)| \leq \alpha\}$ είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων. Τα μεταφέρουμε έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα μόνο διάστημα I μήκους $|E_\alpha|$ και διαλέγουμε $d+1$ ισαπέχοντα σημεία στο I. Αν επαναφέρουμε τα διαστήματα στην αρχική τους θέση, καταλήγουμε με $d+1$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_d \in E_\alpha$ που ικανοποιούν την

$$|x_j - x_k| \geq |E_\alpha| \frac{|j-k|}{d}. \tag{2.12}$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που παρεμβάλει τις τιμές $h(x_0)$, $h(x_1)$,..., $h(x_d)$ ταυτίζεται με το $h(x)$:

$$h(x) = \sum_{j=0}^{d} h(x_j) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_d)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_d)}.$$

Συνεπώς παίρνουμε για τους συντελεστές του h ότι

$$b_k = \sum_{j=0}^{d} h(x_j) \frac{(-1)^{d-k}\sigma_{d-k}(x_0,\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_d)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_d)}$$

για $k=0,1,\ldots,d$. Στην παραπάνω σχέση, $\sigma_{d-k}(x_0,\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_d)$ είναι η $(d-k)$-οστή στοιχειώδης συμμετρική συνάρτηση των $x_0,\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_d$ όπου το x_j παραλείπεται. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $\sigma_{d-k}(x_0,\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_d) \leq \binom{d}{d-k}\max(|a|,|b|)^{d-k}$ μαζί με την (2.12), παίρνουμε ότι, για κάθε $k = 0,1,\ldots,d$,

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq \binom{d}{d-k}\max(|a|,|b|)^{d-k} d^d \frac{\alpha}{|E_\alpha|^d}\sum_{j=0}^{d}\frac{1}{j!(d-j)!} \\ &= \binom{d}{d-k}\max(|a|,|b|)^{d-k} 2^d \frac{d^d}{d!}\frac{\alpha}{|E_\alpha|^d} \leq c\frac{(4\max(|a|,|b|))^d}{\sqrt{d}}\frac{d^d}{d!}\frac{\alpha}{|E_\alpha|^d}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εκτίμηση $\binom{d}{d-k} \leq \binom{d}{[\frac{d}{2}]} \leq c\frac{2^d}{\sqrt{d}}$. Συνεπώς

$$\max_{0\leq k\leq d}|b_k| \leq c\frac{(4\max(|a|,|b|))^d}{\sqrt{d}}\frac{d^d}{d!}\frac{\alpha}{|E_\alpha|^d}$$

και λύνοντας ως προς $|E_\alpha|$ παίρνουμε

$$|E_\alpha| \leq c\max(|a|,|b|)\left(\frac{\alpha}{\max_{0\leq k\leq d}|b_k|}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

□

Το Λήμμα 2.10 έχει ως συνέπεια την εκτίμηση

$$|\{x\in[0,1] : |P(x)|\leq\alpha\}| \leq c\alpha^{\frac{1}{d}}\{\max_{0\leq j\leq d}|b_j|\}^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.13}$$

Είναι τώρα απλή παρατήρηση ότι η (2.13) συνεπάγεται τις εκτιμήσεις (2.10) και (2.11).

2.3 Μια εικασία των Carbery και Wright

Σε αυτήν την παράγραφο σταθεροποιούμε ως κυρτό σώμα τον μοναδιαίο κύβο Q στον $\mathbb{R}^n$. Αν $P \in \mathcal{P}^o_{d,n}$, το Πόρισμα 2.5 μας λέει ότι υπάρχει κάποια σταθερά $c_{d,n}$, που εξαρτάται μόνο απο τα d και n, τέτοια ώστε

$$\left|\int_Q e^{iP(x)}dx\right| \leq c_{d,n}\|P\|_{L^1(Q)}^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.14}$$

Απο την άλλη, το Θεώρημα 2.7 δίνει ότι για το σύνολο υπο-στάθμης του πολυωνύμου P έχουμε

$$|\{x \in Q : |P(x)| \leq \alpha\}| \leq c\min(d,n)\alpha^{\frac{1}{d}}\|P\|_{L^1(Q)}^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.15}$$

Η σύγκριση ανάμεσα στις εξισώσεις (2.14) και (2.15) καθώς και η γενική αρχή ότι οι εκτιμήσεις για τα σύνολα υποστάθμης συνεπάγονται εκτιμήσεις για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ταλάντωσης οδήγησαν τους Carbery και Wright να διατυπώσουν το ακόλουθο ερώτημα στο [6].

Ερώτημα 2.11. *Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη σταθερά $c_{d,n}$ στη (2.14) με $c\min(d,n)$ για κάποια απόλυτη θετική σταθερά c;*

Απαντάμε μερικώς στο ερώτημα 2.11 μέσω του παρακάτω Θεωρήματος.

Θεώρημα 2.12. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d, με μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο Q. Τότε, υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c, ανεξάρτητη των P, n και d, τέτοια ώστε*

$$\left|\int_Q e^{iP(x)}dx\right| \leq c\min(n,2d)n^{\frac{1}{2d}}\|P\|_{L^2(Q)}^{-\frac{1}{d}}.$$

Απόδειξη. Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d με μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο Q. Υπάρχει $j \in \{1,2,\ldots n\}$ ώστε $\left\|\frac{\partial P}{\partial x_j}\right\|_{L^2(Q)} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla P\|_{L^2(Q)}$. Για κάποιο $\alpha > 0$ που θα καθοριστεί στη συνέχεια, γράφουμε

$$I = \int_Q e^{i\lambda P(x)}dx = \int_{\{x\in Q:|\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)|\leq\alpha\}} e^{i\lambda P(x)}dx + \int_{\{x\in Q:|\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)|>\alpha\}} e^{i\lambda P(x)}dx.$$

Έχουμε συνεπώς ότι

$$|I| \leq |\{x \in Q : |\partial P(x)/\partial x_j| \leq \alpha\}| + \left|\int_{\{x\in Q:|\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)|>\alpha\}} e^{i\lambda P(x)}dx\right|.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.7 παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\{x \in Q : |\partial P(x)/\partial x_j| \leq \alpha\}| &\leq c\min(2(d-1), n)\alpha^{\frac{1}{d-1}}\|\partial P/\partial x_j\|_{L^2(Q)}^{-\frac{1}{d-1}} \\ &\leq cn^{\frac{1}{2(d-1)}}\min(2d, n)\alpha^{\frac{1}{d-1}}\|\nabla P\|_{L^2(Q)}^{-\frac{1}{d-1}} \\ &\leq cn^{\frac{1}{2(d-1)}}\min(2d, n)\alpha^{\frac{1}{d-1}}\|P\|_{L^2(Q)}^{-\frac{1}{d-1}},\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε το Λήμμα 2.8.

Για το $\int_{\{x\in Q:|\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)|>\alpha\}} e^{i\lambda P(x)}dx$ παρατηρούμε ότι για κάθε $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ το σύνολο $\{x_j \in [0,1] : |\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)| > \alpha\}$ αποτελείται απο το πολύ $O(d)$ διαστήματα όπου η συνάρτηση $\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)$ είναι μονότονη. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.1 παίρνουμε

$$\left|\int_{\{x\in Q:|\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)|>\alpha\}} e^{i\lambda P(x)}dx\right| \leq c\frac{d}{\alpha}.$$

Αθροίζοντας τις εκτιμήσεις παίρνουμε

$$|I| \leq c\bigg(\min(2d, n)n^{\frac{1}{2(d-1)}}\alpha^{\frac{1}{d-1}}\|P\|_{L^2(Q)}^{-\frac{1}{d-1}} + \frac{d}{\alpha}\bigg).$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς α παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Αν και διατυπώσαμε το Θεώρημα 2.12 για την L^2 νόρμα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι ισοδύναμο με την ίδια διατύπωση για την L^1 νόρμα. Πράγματι, όπως προκύπτει απο τη συζήτηση της παραγράφου 2.2, υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c ώστε

$$\|P\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{d}} \leq \|P\|_{L^2(Q)}^{\frac{1}{d}} \leq c\|P\|_{L^1(Q)}^{\frac{1}{d}}.$$

Απο την άλλη μεριά είναι προφανές ότι $\min(n, d) \sim \min(n, 2d)$. Συνεπώς, το Θεώρημα 2.12 απαντά καταφατικά στο ερώτημα 2.11 στην περίπτωση $n \leq c^d$ για κάποια απόλυτη θετική σταθερά c. Στην περίπτωση $n > c^d$, το Θεώρημα 2.12 απέχει απο τη σταθερά του Ερωτήματος 2.11 κατά τον παράγοντα $n^{\frac{1}{2d}}$. Γενικότερα, θα μπορούσε να διατυπώσει κανείς το εξής ερώτημα:

Ερώτημα 2.13. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ d, με μέση τιμή μηδέν στο μοναδιαίο κύβο Q. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Το Πόρισμα 2.5 μας λέει τότε ότι υπάρχει θετική σταθερά $c_{d,n,p}$, ανεξάρτητη του P, τέτοια ώστε*

$$\left|\int_Q e^{iP(x)}dx\right| \leq c_{d,n,p}\|P\|_{L^p(Q)}^{-\frac{1}{d}}. \tag{2.16}$$

Μπορεί η σταθερά $c_{d,n,p}$ στη (2.16) να αντικατασταθεί απο $c\min(n, pd)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$;

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.10, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι στην περίπτωση $n = 1$, η απάντηση στο Ερώτημα 2.13 είναι καταφατική.

2.4 Σημειώσεις και αναφορές

2.4.1 Αναφορές

Οι βασικές αναφορές για την ανάπτυξη αυτού του Κεφαλαίου είναι τα [4] και [6]. Τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2 περιέχονται στο [4]. Το Θεώρημα 2.2 μπορεί να αποδειχθεί και με τις μεθόδους στο [1]. Βλέπε επίσης και στα [12], [18] για ένα αποτέλεσμα τύπου van der Corput για ολοκληρώματα ταλάντωσης με πολυωνυμική φάση. Τα Θεωρήματα 2.6 και 2.7 περιέχονται στο [6]. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στο [6] είναι ενα ισχυρό αποτέλεσμα των Kannan, Lovász και Simonovits [8]. Αντίστοιχες εκτιμήσεις με τη χρήση του ίδιου εργαλείου αλλά με άλλες μεθόδους βρίσκονται στο [9]. Το Πόρισμα 2.9 υπάρχει ως παρατήρηση στο [6], αφού είναι άμεσο Πόρισμα των εκεί αποτελεσμάτων. Αντίστοιχες εκτιμήσεις όμως περιέχονται και στο [9], και βελτιώνουν παλαιότερα αποτελέσματα απο τα [14] και [13]. Το Λήμμα 2.10 οφείλεται στον Vinogradov και η απόδειξη που παρουσιάσαμε βασίστηκε στο [19]. Το ερώτημα 2.11 διατυπώνεται στο [6] ενώ το Θεώρημα 2.12 είναι νέο αποτέλεσμα.

2.4.2 Το Λήμμα KLS

Ιδιαίτερα κρίσιμο στην απόδειξη των Θεωρημάτων 2.6 και 2.7 είναι το ακόλουθο Θεώρημα που βρίσκεται στο [8].

Θεώρημα 2.14. *Για $a, b \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \geq 1$ ορίζουμε τα μέτρα $\mu_{a,b,\lambda}$ μέσω της σχέσης*

$$< \phi, \mu_{a,b,\lambda} >= \int_0^1 \phi(a(1-t)+bt)(\lambda - t)^{n-1} dt.$$

Έστω f_1, f_2, f_3, f_4 συνεχείς, μη αρνητικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και $\alpha, \beta > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \geq 1$,

$$\left(\int f_1 d\mu_{a,b,\lambda} \right)^{\alpha} \left(\int f_2 d\mu_{a,b,\lambda} \right)^{\beta} \leq \left(\int f_3 d\mu_{a,b,\lambda} \right)^{\alpha} \left(\int f_4 d\mu_{a,b,\lambda} \right)^{\beta}.$$

Τότε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_K f_1 \right)^{\alpha} \left(\int_K f_1 \right)^{\beta} \leq \left(\int_K f_3 \right)^{\alpha} \left(\int_K f_4 \right)^{\beta}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.14, τα Θεωρήματα 2.6 και 2.7 ανάγονται σε μονοδιάστατες εκτιμήσεις. Το Θεώρημα 2.14 χρησιμοποιείται επίσης, με διαφορετικό τρόπο, στο [9].

2.4.3 Ανισότητες Poincaré σε κυρτά σώματα

Αποτελέσματα όπως το Λήμμα 2.8 είναι κλασσικά όταν κοιτάμε συναρτήσεις με μέση τιμή μηδέν πάνω σε ένα κυρτό σώμα. Έχουμε για παράδειγμα ότι για κάθε κυρτό σώμα K και μια «καλή» συνάρτηση u με μέση τιμή μηδέν στο K,

$$\|u\|_{L^2(K)} \leq c\, d(K) \|\nabla u\|_{L^2(K)},$$

όπου $d(K)$ είναι η διάμετρος του κυρτού σώματος K. Αυτό είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα και μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στα [11],[3]. Η εξάρτηση απο τη διάμετρο είναι βέλτιστη σε αυτή την περίπτωση. Αν $K = Q$, έχουμε $d(Q) = \sqrt{n}$. Παρόλαυτά, εαν περιοριστούμε σε πολυώνυμα στο μοναδιαίο κύβο, η αντίστοιχη ανισότητα ισχύει με μια απόλυτη σταθερά να αντικαθιστά το $d(K)$.

2.4.4 Πολυώνυμα και BMO

Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω ορισμό της νόρμας του χώρου BMO:

$$\|u\|_{BMO} = \sup_{K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ κυρτό}} \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|K|} \int_K |u(x) - c| dx.$$

Είναι κλασσικό αποτέλεσμα ότι, αν μια συνάρτηση ω είναι A_q βάρος, τότε $\log|\omega| \in BMO$. Ακριβέστερα, αν γνωρίζουμε εκτιμήσεις όπως αυτές του Πορίσματος 2.9, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη BMO νόρμα του $\log|\omega|$. Για τα πολυώνυμα είναι γνωστό ότι $\log|P| \in BMO$. Βλέπε για παράδειγμα στα [14], [13]. Χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις ανάλογες με αυτές στο [6], οι συγγραφείς στο [9] δείχνουν ότι αν $P \in \mathcal{P}_{d,n}$ τότε $\|\log|P|\|_{BMO} \sim d$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **3**

Ιδιάζοντα ολοκληρώματα ταλάντωσης

Αν $\gamma(t)$ είναι μια καμπύλη, ορίζεται ο μετασχηματισμός Hilbert κατα μήκος της γ,

$$H_\gamma f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}} f(x-\gamma(t))\frac{dt}{t}.$$

Ένα κλασσικό ερώτημα της Αρμονικής Ανάλυσης είναι το ακόλουθο.

Ερώτημα 3.1. *Μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση*

$$\|H_\gamma f\|_{L^p} \leq c_p \|f\|_p,$$

για κάποια p;

Ακολουθόντας την κλασσική μεθοδολογία, κάποιος δείχνει πρώτα το L^2 φράγμα. Σε επίπεδο μετασχηματισμού Fourier, αυτό ισοδυναμεί με το να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιαστής του H_γ,

$$m_\gamma(\xi) = p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\gamma(t)}\frac{dt}{t},$$

είναι στον L^∞. Σε ό,τι ακολουθεί, θα εκτιμήσουμε την L^∞ νόρμα του πολλαπλασιαστή $m_P(\xi)$, στην περίπτωση που $\gamma = P$, είναι ένα πραγματικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ d.

Έστω $\mathcal{P}_d$ ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ d. Για $P \in \mathcal{P}_d$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα κύριας τιμής

$$I(P) = \left| p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{iP(t)}\frac{dt}{t} \right| = \left| \lim_{\epsilon\to 0^+, R\to+\infty} \int_{\epsilon\leq|t|\leq R} e^{iP(t)}\frac{dt}{t} \right|.$$

Θα θέλαμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα $I(P)$ απο μια σταθερά C_d που να εξαρτάται μόνο απο το βαθμό του πολυωνύμου d. Αυτό ισοδυναμεί με το να εκτιμήσουμε τις ποσότητες

$$I_{(\epsilon,R)}(P) = \left| \int_{\epsilon\leq|t|\leq R} e^{iP(t)}\frac{dt}{t} \right|$$

απο μια σταθερά C_d ανεξάρτητη των ϵ, R και P.

Αυτό το πρόβλημα τέθηκε για πρώτη φορά απο τους Wainger και Stein στα [16] και [20]. Οι Wainger και Stein δείξανε ότι η ποσότητα $I(P)$ φράσσεται απο μια σταθερά C_d, που εξαρτάται μόνο απο το d. Η απόδειξή τους είναι πολύ απλή και χρησιμοποιεί το Λήμμα του van der Corput 1.1 σε συνδυασμό με ένα επαγωγικό επιχείρημα.

Οι Carbery, Wainger και Wright απο την άλλη μεριά διατύπωσαν στο [5] την παρακάτω εικασία.

Εικασία 3.2. *Η τάξη μεγέθους του ολοκληρώματος κύριας τιμής $I(P)$ είναι $\log d$.*

Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι η απόδειξη αυτής της εικασίας. Αυτό είναι το περιεχόμενο του:

Θεώρημα 3.3. *Υπάρχουν δύο απόλυτες θετικές σταθερές c_1 και c_2 ώστε*

$$c_1 \log d \leq \sup_{P \in \mathcal{P}_d} \left| p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{iP(x)} \frac{dx}{x} \right| \leq c_2 \log d.$$

3.1 Το κάτω φράγμα στο Θεώρημα 3.3

Σε αυτή την παράγραφο θα κατασκευάσουμε ένα πραγματικό πολυώνυμο P βαθμού το πολύ d έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα

$$I(P) = \left| p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| \geq c \log d. \tag{3.1}$$

Το γενικό πλάνο της κατασκευής έχει ως εξής. Καταρχήν κατασκευάζουμε μια *συνάρτηση* f (η οποία δεν είναι πολυώνυμο), έτσι ώστε $I(f) \geq c \log n$. Θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια ένα πραγματικό πολυώνυμο P βαθμού $d = 2n^2 - 1$ το οποίο θα προσεγγίζει τη συνάρτηση f κατά τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά $|I(f) - I(P)|$ να είναι «μικρή» (μικρή εδώ σημαίνει $o(\log n)$). Επειδή $\log n \sim \log d$, αυτό θα μας δόσει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.4. *Για n ένα μεγάλο θετικό ακέραιο, έστω $f(t)$ η συνεχής συνάρτηση που είναι ίση με 1 για $\frac{1}{n} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}$, ίση με -1 για $-1 + \frac{1}{n} \leq t \leq -\frac{1}{n}$, ίση με 0 για $|t| \geq 1$ και γραμμική σε καθένα απο τα διαστήματα $[-1, -1 + \frac{1}{n}]$, $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ και $[1 - \frac{1}{n}, 1]$. Τότε,*

$$I(f) = \left| p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{if(t)} \frac{dt}{t} \right| \geq c \log n. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ένας απλός υπολογισμός.

$$
\begin{aligned}
I(f) &= 2\left|\int_0^1 \frac{\sin f(t)}{t}dt\right| \\
&\geq 2\left|\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{\sin f(t)}{t}dt\right| - 2\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin f(t)}{t}dt\right| - 2\left|\int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin f(t)}{t}dt\right| \\
&\geq 2\sin 1\log(n-1) - 2\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{t}dt - 2\int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{f(t)}{t}dt \\
&= 2\sin 1\log(n-1) - 2 - 2n\log\frac{n}{n-1} + 2 \\
&\geq 2\sin 1\log(n-1) - 4 \ \geq \ c\log n.
\end{aligned}
$$

□

Θέλουμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο που να προσεγγίζει τη συνάρτηση f. Αυτό θα γίνει θεωρώντας τη συνέλιξη της συνάρτησης f με μια «πολυωνυμική προσέγγιση της μονάδας». Πιο συγκεκριμένα, για $k \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\phi_k(x) = c_k\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{k^2} \tag{3.3}$$

όπου η σταθερά c_k ορίζεται μέσω της κανονικοποίησης

$$\int_{-2}^2 \phi_k(x)dx = 1. \tag{3.4}$$

Παρατηρήστε ότι

$$1 = c_k\int_{-2}^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{k^2}dx = 4c_k\int_0^1(1-x^2)^{k^2}dx = 2c_kB\left(\frac{1}{2}, k^2+1\right),$$

όπου $B(\cdot,\cdot)$ είναι η συνάρτηση Βήτα. Χρησιμοποιώντας τυπικές εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Βήτα βλέπουμε ότι $c_k \sim k$.

Ορίζουμε στη συνέχεια τις συναρτήσεις P_k στο $\mathbb{R}$ ως

$$P_k(t) = \int_{-1}^1 f(x)\phi_k(t-x)dx, \tag{3.5}$$

όπου f είναι η συνάρτηση που κατασκευάστηκε στο Λήμμα 3.4. Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις P_k είναι *πολυώνυμα* βαθμού το πολύ $2k^2$. Το επόμενο Λήμμα ξεκαθαρίζει ορισμένα τεχνικά ζητήματα σχετικά με τα πολυώνυμα P_k.

Λήμμα 3.5. *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P_k ορίζονται όπως στην (3.5) παραπάνω.*
(i) Το P_k είναι ένα περιττό πολυώνυμο βαθμού $2k^2-1$ με μεγιστοβάθμιο συντελεστή

$$a_k = (-1)^{k^2+1}\frac{2c_k k^2}{4^{k^2}}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Δηλαδή

$$P_k(t) = a_k t^{2k^2-1} + \cdots .$$

(ii) Ως συνέπεια του (i) έχουμε ότι για όλα τα $t \in \mathbb{R}$,

$$|P_k^{(2k^2-1)}(t)| \geq c(2k^2-1)!\frac{k^3}{4^{k^2}}.$$

(iii) Για $t \in [-1,1]$ έχουμε

$$P_k(t) = \int_0^2 \big(f(t+x)+f(t-x)\big)\phi_k(x)dx.$$

Απόδειξη. (i) Χρησιμοποιώντας την (3.5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_k(-t) &= \int_{-1}^{1} f(x)\phi_k(-t-x)dx &= \int_{-1}^{1} f(x)\phi_k(t+x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(-x)\phi_k(t-x)dx &= -P_k(t). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, απο την (3.5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_k(t) &= c_k\int_{-1}^{1} f(x)\sum_{m=0}^{k^2}\binom{k^2}{m}\left(-\frac{(t-x)^2}{4}\right)^m dx \\ &= c_k\sum_{m=0}^{k^2}\binom{k^2}{m}\frac{(-1)^m}{4^m}\int_{-1}^{1} f(x)(t-x)^{2m}dx \\ &= c_k\frac{(-1)^{k^2}}{4^{k^2}}\int_{-1}^{1} f(x)(x-t)^{2k^2}dx \\ &+ c_k\sum_{m=0}^{k^2-1}\binom{k^2}{m}\frac{(-1)^m}{4^m}\int_{-1}^{1} f(x)(t-x)^{2m}dx. \end{aligned}$$

Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος προκύπτει απο τον πρώτο προσθετέο στην παραπάνω σχέση. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P_k(t) &= c_k \frac{(-1)^{k^2}}{4^{k^2}} \int_{-1}^{1} f(x)dx \; t^{2k^2} - c_k \frac{(-1)^{k^2} 2k^2}{4^{k^2}} \int_{-1}^{1} f(x)xdx \; t^{2k^2-1} + \cdots \\ &= (-1)^{k^2+1} \frac{2c_k k^2}{4^{k^2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) t^{2k^2-1} + \cdots . \end{aligned}$$

(ii) Χρησιμοποιούμε απλά το αποτέλεσμα του (i) και το γεγονός ότι $c_k \sim k$.
(iii) Σταθεροποιούμε κάποιο $t \in [-1, 1]$. Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(t-x)\phi_k(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\phi_k(x)\chi_{[-2,2]}(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\phi_k(t-x)\chi_{[-2,2]}(t-x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\phi_k(t-x)dx \\ &= P_k(t). \end{aligned}$$

Όμως, αφού η ϕ_k είναι άρτια,

$$P_k(t) = \int_{-2}^{2} f(t-x)\phi_k(x)dx = \int_{0}^{2} \big(f(t+x) + f(t-x)\big)\phi_k(x)dx.$$

□

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το κάτω φράγμα για το $I(P)$.

Πρόταση 3.6. *Έστω P_n το πολυώνυμο που ορίζεται απο τη σχέση (3.5) όπου n είναι ο μεγάλος θετικός ακέραιος που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό της συνάρτησης f του Λήμματος 3.4. Τότε, το P_n είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $d = 2n^2 - 1$ και*

$$I(P_n) = \left| p.v. \int_{\mathbb{R}} e^{iP_n(t)} \frac{dt}{t} \right| \geq c \log d.$$

Απόδειξη. Αφού το P_n είναι περιττό,

$$I(P_n) = 2 \left| \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin P_n(t)}{t} dt \right|,$$

και αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $R \geq 1$

$$\left| \int_0^R \frac{\sin P_n(t)}{t} dt \right| \geq c \log d \sim c \log n. \tag{3.6}$$

Απο το μέρος (ii) του Λήμματος 3.5 και το Πόρισμα 1.4, βλέπουμε ότι

$$\left| \int_1^R \frac{\sin P_n(t)}{t} dt \right| \leq c$$

για κάθε $R \geq 1$. Ως αποτέλεσμα, η απόδειξη θα είναι πλήρης αν δείξουμε ότι

$$I_1(P_n) = \left| \int_0^1 \frac{\sin P_n(t)}{t} dt \right| \geq c \log n. \tag{3.7}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4 και την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$I_1(P_n) \geq c \log n - |I_1(P_n) - I(f)| \tag{3.8}$$

και, για να δείξουμε την (3.7), αρκεί να δείξουμε ότι

$$|I_1(P_n) - I(f)| = o(\log n). \tag{3.9}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} |I_1(P_n) - I(f)| &= \left| \int_0^1 \frac{\sin P_n(t) - \sin f(t)}{t} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{|P_n(t) - f(t)|}{t} dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το μέρος (iii) του Λήμματος 3.5 και την (3.4), παίρνουμε

$$|P_n(t) - f(t)| \leq \int_0^2 |f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)| \phi_n(x) dx$$

για $0 \leq t \leq 1$. Άρα,

$$|I_1(P_n) - I(f)| \leq \int_0^2 \int_0^1 \frac{|f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)|}{t} \; dt \; \phi_n(x) dx.$$

Τώρα, το επιθυμητό αποτέλσμα, δηλαδή η συνθήκη (3.9), είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου Λήμματος. $\square$

Λήμμα 3.7. *Έστω* $A(x,t) = |f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)|$. *Τότε,*

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{A(x,t)}{t}\ dt\ \phi_n(x)dx = o(\log n).$$

Απόδειξη. Καταρχήν, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$A(x,t) \leq 4\min(nx, nt, 1) \tag{3.10}$$
$$A(x,t) = 0, \qquad \text{όταν } \frac{1}{n} \leq t-x \leq t+x \leq 1-\frac{1}{n}\ . \tag{3.11}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} A(x,t) &\leq |f(t+x) - f(t)| + |f(t-x) - f(t)| \\ &\leq nx + nx \ \leq\ 2nx. \end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} A(x,t) &= |f(t+x) - f(x) + f(t-x) - f(-x) - 2f(t)| \\ &\leq |f(t+x) - f(x)| + |f(t-x) - f(-x)| + 2|f(t)| \\ &\leq nt + nt + 2nt \ =\ 4nt. \end{aligned}$$

Η ανισότητα (3.10) προκύπτει τώρα από το γεγονός ότι η $|f|$ είναι φραγμένη απο 1 ενώ η (3.11) είναι προφανής.

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \int_0^1 \cdots dtdx$ σε επτά ολοκληρώματα:

$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \cdots dtdx + \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^x \cdots dtdx + \int_{\frac{1}{n}}^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \cdots dtdx + \int_0^{\frac{1}{n}} \int_x^{x+\frac{1}{n}} \cdots dtdx$$
$$+ \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \int_{x+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \cdots dtdx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \int_{\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \cdots dtdx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \cdots dtdx.$$

Εκτιμούμε καθένα απο αυτά τα επτά ολοκληρώματα ξεχωριστά.

$$\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{A(x,t)}{t} dt\phi_n(x)dx \ \leq\ 4\log 2 \int_0^2 \phi_n(x)dx \ =\ 2\log 2.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^x \frac{A(x,t)}{t} dt\phi_n(x)dx &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^x \frac{4nt}{t} dt\phi_n(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} 4nx\phi_n(x)dx \ \leq\ 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{A(x,t)}{t}dt\phi_n(x)dx &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{4nt}{t}dt\phi_n(x)dx \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{n}}4\phi_n(x)dx \ \leq\ 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{1}{n}}\int_{x}^{x+\frac{1}{n}}\frac{A(x,t)}{t}dt\phi_n(x)dx &\leq \int_{0}^{\frac{1}{n}}\int_{x}^{x+\frac{1}{n}}\frac{4nx}{t}dt\phi_n(x)dx \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{n}}4nx\log\left(1+\frac{1}{nx}\right)\phi_n(x)dx \ \leq\ 2.
\end{aligned}$$

Για το $\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\int_{x+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}$ έχουμε $\frac{1}{n}\leq t-x\leq t+x\leq 1-\frac{1}{n}$ και, απο την (3.11), $A(x,t)=0$. Συνεπώς

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\int_{x+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}\frac{A(x,t)}{t}dt\phi_n(x)dx=0.$$

Στη συνέχεια,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\int_{\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\frac{A(x,t)}{t}dt\phi_n(x)dx &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\int_{\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\frac{4}{t}dt\phi_n(x)dx \\
&\leq 4\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log(nx+1)\phi_n(x)dx.
\end{aligned}$$

Τώρα, σταθεροποιούμε κάποιο $\alpha\in(0,1)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log(nx+1)\phi_n(x)dx &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^\alpha}}\cdots dx+\int_{\frac{1}{n^\alpha}}^{1}\cdots dx \\
&\leq \frac{\log(n^{1-\alpha}+1)}{2}+c_n\log(n+1)\int_{\frac{1}{n^\alpha}}^{1}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{n^2}dx \\
&\leq \frac{\log(n^{1-\alpha}+1)}{2}+cn\log(n+1)\ e^{-\frac{1}{4}n^{2(1-\alpha)}}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log(nx+1)\phi_n(x)dx}{\log n}\leq\frac{1-\alpha}{2}$$

και, αφού το α ήταν τυχόν στο $(0,1)$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \int_{\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \frac{A(x,t)}{t} dt \phi_n(x) dx = o(\log n).$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{2} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \frac{A(x,t)}{t} dt \phi_n(x) dx &\leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{2} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \frac{4}{t} dt \phi_n(x) dx \\ &\leq 4 \log \frac{n}{2}\ c_n \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{n^2} dx \\ &\leq cn \log n e^{-\frac{1}{16} n^2} \;=\; o(1). \end{aligned}$$

□

3.2 Το πάνω φράγμα στο Θεώρημα 3.3

Θέτουμε

$$K_d = \sup_{P \in \mathcal{P}_d, \epsilon, R} \left| \int_{\epsilon \leq |t| \leq R} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right|. \tag{3.12}$$

Έστω P ένα τυχόν πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ d, το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχει σταθερό όρο, δηλαδή, $P(0) = 0$. Για $k = [\frac{d}{2}]$ γράφουμε

$$\begin{aligned} P(t) &= a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_d t^d \\ &= Q(t) + R(t), \end{aligned}$$

όπου $Q(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k$ και $R(t) = a_{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_d t^d$. Έστω $|a_l| = \max_{k+1 \leq j \leq d} |a_j|$ για κάποιο $k+1 \leq l \leq d$. Μέσω μιας αλλαγής μεταβλητής στο ολοκλήρωμα στην (3.12) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|a_l| = 1$ και συνεπώς ότι $|a_j| \leq 1$ για κάθε $k+1 \leq j \leq d$. Στη συνέχεια, γράφουμε το ολοκλήρωμα στη (3.12) σε δύο μέρη ως εξής

$$\left| \int_{\epsilon \leq |t| \leq R} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq \left| \int_{\epsilon \leq |t| \leq 1} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| + \left| \int_{1 \leq |t| \leq R} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| = I_1 + I_2. \tag{3.13}$$

Για το I_1 έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \left| \int_{\epsilon \leq |t| \leq 1} \left[e^{iP(t)} - e^{iQ(t)} \right] \frac{dt}{t} \right| + \left| \int_{\epsilon \leq |t| \leq 1} e^{iQ(t)} \frac{dt}{t} \right| \\
&\leq \int_{\epsilon \leq |t| \leq 1} \left| e^{iP(t)} - e^{iQ(t)} \right| \frac{dt}{t} + K_{[\frac{d}{2}]} \\
&\leq \int_{0 \leq |t| \leq 1} \frac{|R(t)|}{t} dt + K_{[\frac{d}{2}]} \\
&\leq 2 \sum_{j=k+1}^{d} \frac{|a_j|}{j} + K_{[\frac{d}{2}]} \ \leq \ 2 \sum_{j=k+1}^{d} \frac{1}{j} + K_{[\frac{d}{2}]} \ \leq \ c + K_{[\frac{d}{2}]}.
\end{aligned}
$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα στη (3.13) έχουμε

$$
I_2 \leq \left| \int_{1 \leq t \leq R} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| + \left| \int_{-R \leq t \leq -1} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| = I_2^+ + I_2^-.
$$

Για κάποιο $\alpha > 0$ που θα καθοριστεί στη συνέχεια, χωρίζουμε το I_2^+ σε δύο μέρη:

$$
I_2^+ \leq \int_{\{t \in [1,+\infty) : |P'(t)| \leq \alpha\}} \frac{dt}{t} + \left| \int_{\{t \in [1,R] : |P'(t)| > \alpha\}} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right|.
$$

Αφού το σύνολο $\{t \in [1,R] : |P'(t)| > \alpha\}$ αποτελείται από το πολύ $O(d)$ διαστήματα όπου η παράγωγος P' είναι μονότονη, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1.4, παίρνουμε το φράγμα

$$
\left| \int_{\{t \in [1,R] : |P'(t)| > \alpha\}} e^{iP(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq c \frac{d}{\alpha}.
$$

Για το λογαριθμικό μέτρο του συνόλου $\{t \in [1,+\infty) : |P'(t)| \leq \alpha\}$, παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
\int_{\{t \in [1,+\infty) : |P'(t)| \leq \alpha\}} \frac{dt}{t} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\{t \in [2^m, 2^{m+1}] : |P'(t)| \leq \alpha\}} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\{2^m t \in [2^m, 2^{m+1}] : |P'(2^m t)| \leq \alpha\}} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^m \{t \in [1,2] : |P'(2^m t)| \leq \alpha\}} \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\{t \in [1,2] : |P'(2^m t)| \leq \alpha\}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

Έχουμε συνεπώς δείξει ότι

$$\int_{\{t\in[1,+\infty):|P'(t)|\leq\alpha\}}\frac{dt}{t}\leq\sum_{m=0}^{\infty}|\{t\in[1,2]:|P'(2^m t)|\leq\alpha\}|. \tag{3.14}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος χρειαζόμαστε μια κατάλληλη εκτίμηση για το σύνολο υπο-στάθμης ενός πολυωνύμου. Αυτό είναι το περιεχόμενο του Λήμματος 2.10.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P'(2^m t)$ με συντελεστές $ja_j 2^{m(j-1)}$, $1\leq j\leq d$. Προφανώς,

$$\max_{1\leq j\leq d}|ja_j 2^{m(j-1)}|\geq|la_l 2^{m(l-1)}|\geq([\frac{d}{2}]+1)2^{m[\frac{d}{2}]}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.10 και την εξίσωση (3.14), παίρνουμε

$$\int_{\{t\in[1,+\infty):|P'(t)|\leq\alpha\}}\frac{dt}{t}\leq c\alpha^{\frac{1}{d-1}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{([\frac{d}{2}]+1)2^{m[\frac{d}{2}]}}\right)^{\frac{1}{d-1}}\leq c\alpha^{\frac{1}{d-1}}.$$

Προφανώς, μια όμοια εκτίμηση ισχύει για το I_2^-. Αθροίζοντας τις εκτιμήσεις παίρνουμε

$$\left|\int_{\epsilon\leq|t|\leq R}e^{iP(t)}\frac{dt}{t}\right|\leq c+c\frac{d}{\alpha}+c\alpha^{\frac{1}{d-1}}+K_{[\frac{d}{2}]}.$$

Βελτιστοποιώντας ως προς την παράμετρο α παίρνουμε ότι

$$\left|\int_{\epsilon\leq|t|\leq R}e^{iP(t)}\frac{dt}{t}\right|\leq c+K_{[\frac{d}{2}]} \tag{3.15}$$

και συνεπώς

$$K_d\leq c+K_{[\frac{d}{2}]}.$$

Ειδικότερα έχουμε

$$K_{2^n}\leq c+K_{2^{n-1}}.$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n βρίσκουμε $K_{2^n}\leq cn$. Είναι τώρα εύκολο να δείξουμε την ανισότητα για γενικό d. Πράγματι, αν $2^{n-1}<d\leq 2^n$ τότε $K_d\leq K_{2^n}\leq cn\leq c\log d$.

3.3 Ιδιάζοντα ολοκληρώματα ταλάντωσης στον $\mathbb{R}^n$

Σε αυτήν την παράγραφο ασχολούμαστε με τη γενίκευση του Θεωρήματος 3.3 στις πολλές μεταβλητές. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής. Έστω $K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια ομογενής συνάρτηση τάξης $-n$. Η συνάρτηση K μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$K(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^n}, \tag{3.16}$$

όπου $x' = x/|x| \in S^{n-1}$ και η συνάρτηση Ω ορίζεται πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Έστω $P \in \mathcal{P}_{d,n}$. Μας ενδιαφέρουν εκτιμήσεις της μορφής

$$I_n(P) = \left| p.v. \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x)} K(x) dx \right| \leq c_d \|\Omega\|_{S^{n-1}}, \tag{3.17}$$

όπου η σταθερά c_d εξαρτάται μόνο απο το βαθμό d του πολυωνύμου και $\|\Omega\|_{S^{n-1}}$ είναι κάποια κατάλληλη νόρμα της συνάρτησης Ω πάνω στη μοναδιαία σφαίρα. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε επίσης απο το Stein που στο [14] έδειξε ότι η (3.17) ισχύει για κάποια σταθερά c_d, που εξαρτάται μόνο απο το d.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση Ω είναι περιττή, η (3.17) είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης μονοδιάστατης εκτίμησης. Για ευκολία στο συμβολισμό γράφουμε

$$\mathcal{W}_{\mathcal{L}} = \left\{ \Omega : S^{n-1} \to \mathbb{R},\ \Omega \text{ περιττή},\ \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \leq 1 \right\}.$$

Πόρισμα 3.8. *Υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c ώστε*

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_{d,n},\Omega\in\mathcal{W}_{\mathcal{L}}} \left| p.v. \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x)} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} dx \right| \leq c \log d.$$

Απόδειξη. Απλά γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon\leq|x|\leq R} e^{iP(x)} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} dx &= \int_{S^{n-1}} \int_{\epsilon}^{R} e^{P(rx')} \frac{dr}{r} \Omega(x') d\sigma_{n-1}(x') \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{\epsilon}^{R} e^{P(rx')} \frac{dr}{r} (\Omega(x') - \Omega(-x')) d\sigma_{n-1}(x') \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{\epsilon\leq|r|\leq R} e^{P(rx')} \frac{dr}{r} \Omega(x') d\sigma_{n-1}(x'), \end{aligned}$$

και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.3. □

Για τη γενική περίπτωση θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Stein απο το [14], ενσωματώνοντας τις ιδέες που έδωσαν την απόδειξη στη μία διάσταση. Εδώ, η κατάλληλη κλάση συναρτήσεων πάνω στη μοναδιαία σφαίρα είναι η

$$\mathcal{W}_{\mathcal{L}\log\mathcal{L}} = \left\{ \Omega : S^{n-1} \to \mathbb{R},\ \int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma_{n-1}(x') = 0,\ \|\Omega\|_{L\log L} \leq 1 \right\},$$

όπου

$$\|\Omega\|_{L\log L} = \int_{S^{n-1}} |\Omega(x')|(1 + \log^+ |\Omega(x')|) d\sigma_{n-1}(x').$$

Για τις συναρτήσεις $\Omega \in \mathcal{W}_{\mathcal{L}\log\mathcal{L}}$ έχουμε το αντίστοιχο του Πορίσματος 3.8.

Θεώρημα 3.9. *Υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c τέτοια ώστε*

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_{d,n},\Omega\in\mathcal{W}_{\mathcal{L}\log\mathcal{L}}}\left|p.v.\int_{\mathbb{R}^n}e^{iP(x)}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}dx\right|\leq c\log d.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.9 βασίζεται στο Πόρισμα 2.9 και στα ακόλουθα Λήμματα.

Λήμμα 3.10. *Έστω $P(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_dt^d$ και υποθέτουμε ότι για κάποιο $\frac{d}{2}<j\leq d$ ισχύει ότι $|a_j|\geq 1$. Τότε, υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c τέτοια ώστε, για κάθε $R>0$,*

$$\left|\int_1^R e^{iP(t)}\frac{dt}{t}\right|\leq c. \tag{3.18}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη περιέχεται στην απόδειξη του πάνω φράγματος στο Θεώρημα 3.3 στην παράγραφο 3.2. □

Λήμμα 3.11. *Έστω $P_a(t)=a_1t+a_2t^2+\cdots+a_dt^d$, $P_b(t)=b_1t+b_2t^2+\cdots+b_dt^d$ δύο πραγματικά πολυώνυμα βαθμού $d=2^n$, με $a_l,b_l\neq 0$ για κάθε $l\in\{1,2,\ldots,d\}$. Τότε υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c ώστε*

$$\left|\int_\epsilon^R\left\{e^{iP_a(t)}-e^{iP_b(t)}\right\}\frac{dt}{t}\right|\leq c_n+\sum_{j=0}^n\left|\log\frac{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j}|a_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j}|b_l|^{\frac{1}{l}}}\right|, \tag{3.19}$$

για κάθε $0<\epsilon<R$ και $c_n\leq cn$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Για $n=0$, η εκτίμηση

$$\left|\int_\epsilon^R\{e^{iat}-e^{ibt}\}\frac{dt}{t}\right|\leq c+\left|\log\frac{|a|}{|b|}\right|$$

είναι κλασσική. Υποθέτουμε ότι η (3.19) ισχύει για $n-1$. Θέτουμε $\delta=\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}(|a_l|^{\frac{1}{l}},|b_l|^{\frac{1}{l}})$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t\mapsto t/\delta$ στο ολοκλήρωμα στην (3.19) έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_\epsilon^R\left\{e^{iP_a(t)}-e^{iP_b(t)}\right\}\frac{dt}{t}\right| &= \left|\int_{\epsilon\delta}^{R\delta}\left\{e^{iP_a(t/\delta)}-e^{iP_b(t/\delta)}\right\}\frac{dt}{t}\right|\\ &\leq \left|\int_{\epsilon\delta}^{1}\left\{e^{iP_a(t/\delta)}-e^{iP_b(t/\delta)}\right\}\frac{dt}{t}\right|+\left|\int_{1}^{R\delta}\left\{e^{iP_a(t/\delta)}-e^{iP_b(t/\delta)}\right\}\frac{dt}{t}\right|\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

Γράφουμε $Q_a(t) = \sum_{1\leq l\leq 2^{n-1}} a_l t^l$, $Q_b(t) = \sum_{1\leq l\leq 2^{n-1}} b_l t^l$. Για το I_1 έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left| \int_{\epsilon\delta}^1 \left\{ e^{iQ_a(t/\delta)} - e^{iQ_b(t/\delta)} \right\} \frac{dt}{t} \right| \\ &+ \left| \int_{\epsilon\delta}^1 \left\{ e^{iP_a(t/\delta)} - e^{iQ_a(t/\delta)} \right\} \frac{dt}{t} \right| + \left| \int_{\epsilon\delta}^1 \left\{ e^{iP_b(t/\delta)} - e^{iQ_b(t/\delta)} \right\} \frac{dt}{t} \right| \end{aligned}$$

Απο την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε ότι

$$\left| \int_{\epsilon\delta}^1 \left\{ e^{iQ_a(t/\delta)} - e^{iQ_b(t/\delta)} \right\} \frac{dt}{t} \right| \leq c_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} \left| \log \frac{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j} |a_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j} |b_l|^{\frac{1}{l}}} \right|. \tag{3.20}$$

Απο την άλλη,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\epsilon\delta}^1 \left\{ e^{iP_a(t/\delta)} - e^{iQ_a(t/\delta)} \right\} \frac{dt}{t} \right| &\leq \int_0^1 |P_a(t/\delta) - Q_a(t/\delta)| \frac{dt}{t} \leq \sum_{2^{n-1}<l\leq 2^n} \frac{1}{l} \frac{|a_l|}{\delta^l} \\ &\leq \sum_{2^{n-1}<l\leq 2^n} \frac{1}{l} \leq c. \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\left| \int_{\epsilon\delta}^1 \left\{ e^{iP_b(t/\delta)} - e^{iQ_b(t/\delta)} \right\} \frac{dt}{t} \right| \leq c$, και συνεπώς ότι

$$I_1 \leq c_{n-1} + c + \sum_{j=0}^{n-1} \left| \log \frac{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j} |a_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j} |b_l|^{\frac{1}{l}}} \right|.$$

Παρατηρούμε ότι το I_2 είναι συμμετρικό ως προς τα P_a, P_b. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta = \max_{2^{n-1}<l\leq 2^n} |b_l|^{\frac{1}{l}}$ και άρα ότι κάποιος από τους 2^{n-1} τελευταίους συντελεστές του πολυωνύμου $P_b(t/\delta)$ είναι ίσος με 1. Απο το Λήμμα 3.10 παίρνουμε τότε ότι

$$\left| \int_1^{R\delta} e^{iP_b(t/\delta)} \frac{dt}{t} \right| \leq c.$$

Έστω $\tilde{P}_a(t) = P_a(t/\delta) = \tilde{a}_1 t + \cdots + \tilde{a}_d t^d$. Γράφουμε $\delta_a = \max_{2^{n-1}<l\leq 2^n} |\tilde{a}_l|^{\frac{1}{l}}$. Τότε

$$\left| \int_1^{R\delta} e^{iP_a(t/\delta)} \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_1^{R\delta} e^{i\tilde{P}_a(t)} \frac{dt}{t} \right| \leq \left| \int_{\delta_\alpha}^1 e^{i\tilde{P}_a(t/\delta_a)} \frac{dt}{t} \right| + \left| \int_1^{R\delta\delta_a} e^{i\tilde{P}_a(t/\delta_a)} \frac{dt}{t} \right|.$$

Τώρα, κάποιος απο τους 2^{n-1} τελευταίους συντελεστές του πολυωνύμου $\tilde{P}_a(t/\delta_\alpha)$ είναι ίσος με 1 και συνεπώς απο το Λήμμα 3.10

$$\left|\int_1^{R\delta} e^{iP_a(t/\delta)}\frac{dt}{t}\right| \leq \log\frac{1}{\delta_\alpha}+c = \log\frac{1}{\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|\tilde{a}_l|^{\frac{1}{l}}}+c = \log\frac{\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|b_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|a_l|^{\frac{1}{l}}}+c.$$

Υποθέσαμε ότι

$$\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|b_l|^{\frac{1}{l}} \geq \max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|a_l|^{\frac{1}{l}}.$$

Μια στιγμή παρατήρησης θα μας επιτρέψει να δούμε ότι

$$I_2 \leq c+\left|\log\frac{\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|b_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{n-1}<l\leq 2^n}|a_l|^{\frac{1}{l}}}\right|.$$

Συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις για τα I_1 και I_2 παίρνουμε

$$\left|\int_\epsilon^R \left\{e^{iP_a(t)}-e^{iP_b(t)}\right\}\frac{dt}{t}\right| \leq c_{n-1}+c+\sum_{j=0}^n\left|\log\frac{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j}|a_l|}{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j}|b_l|}\right|,$$

και συνεπώς $c_n \leq c_{n-1}+c$. Αυτό αποδεικνύει και την εκτίμηση $c_n \leq cn$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.9. Έστω $P\in\mathcal{P}_{d,n}$ και $\Omega\in\mathcal{W}_{\mathcal{L}\log\mathcal{L}}$. Είναι αρκετό να αποδείξουμε το Θεώρημα για πολυώνυμα βαθμού $d=2^n$, χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στην παράγραφο 3.2. Για $0<\epsilon<R$ έχουμε

$$\int_{\epsilon\leq|x|\leq R} e^{iP(x)}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}dx \quad = \quad \int_{S^{n-1}}\int_\epsilon^R e^{P(rx')}\frac{dr}{r}\Omega(x')d\sigma_{n-1}(x').$$

Γράφουμε

$$P(rx')=\sum_{j=1}^d P_j(x')r^j,$$

όπου τα πολυώνυμα P_j είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού j. Θέτουμε $m_j=\|P_j\|_{L^\infty(S^{n-1})}$. Εκμεταλλευόμενοι την συνθήκη μηδενικής μέσης τιμής για την Ω, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\epsilon\leq|x|\leq R} e^{iP(x)}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}dx\right| = \left|\int_{S^{n-1}}\int_\epsilon^R\left\{e^{i\sum_{j=1}^d P_j(x')r^j}-e^{i\sum_{j=1}^d m_jr^j}\right\}\frac{dr}{r}\Omega(x')d\sigma_{n-1}(x')\right|\\
\leq\ & \int_{S^{n-1}}\left|\int_\epsilon^R\left\{e^{i\sum_{j=1}^d P_j(x')r^j}-e^{i\sum_{j=1}^d m_jr^j}\right\}\frac{dr}{r}\right||\Omega(x')|d\sigma_{n-1}(x')\\
\leq\ & cn\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}+\sum_{j=0}^n\int_{S^{n-1}}\left|\log\frac{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j}|m_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{j-1}<l\leq 2^j}|P_l(x')|^{\frac{1}{l}}}\right||\Omega(x')|d\sigma_{n-1}(x'),
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 3.11. Έστω τώρα κάποιο $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Παρατηρήστε ότι $\max_{2^{j-1}<l\le 2^j} |m_l|^{\frac{1}{l}} \ge \max_{2^{j-1}<l\le 2^j} |P_l(x')|^{\frac{1}{l}}$. Έστω ότι $\max_{2^{j-1}<l\le 2^j} |m_l|^{\frac{1}{l}} = |m_{l_o}|^{\frac{1}{l_o}}$ για κάποιο $2^{j-1} < l_o \le 2^j$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \left|\log \frac{\max_{2^{j-1}<l\le 2^j} |m_l|^{\frac{1}{l}}}{\max_{2^{j-1}<l\le 2^j} |P_l(x')|^{\frac{1}{l}}}\right| |\Omega(x')| d\sigma_{n-1}(x') &\le \int_{S^{n-1}} \log \frac{|m_{l_o}|^{\frac{1}{l_o}}}{|P_{l_o}(x')|^{\frac{1}{l_o}}} |\Omega(x')| d\sigma_{n-1}(x') \\
= \ 2\int_{S^{n-1}} \log \frac{|m_{l_o}|^{\frac{1}{2l_o}}}{|P_{l_o}(x')|^{\frac{1}{2l_o}}} |\Omega(x')| d\sigma_{n-1}(x') \\
\le \ 2\int_{S^{n-1}} \frac{|m_{l_o}|^{\frac{1}{2l_o}}}{|P_{l_o}(x')|^{\frac{1}{2l_o}}} d\sigma_{n-1}(x') + 2\int_{S^{n-1}} |\Omega(x')| \log(|\Omega(x')| + 1) d\sigma_{n-1}.
\end{aligned}$$

Για την τελευταία ανισότητα παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις $\phi(t) = e^t - 1$, $\psi(t) = \log(t+1)$ μηδενίζονται στο 0, είναι μη αρνητικές και μονότονες, και είναι η μία αντίστροφη της άλλης για $t \ge 0$. Απο την ανισότητα του Young παίρνουμε τώρα ότι για κάθε $a, b \ge 0$,

$$ab \le \int_0^a \phi(t)dt + \int_0^b \psi(t)dt \le e^a + b\log(b+1).$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει τώρα τότε θέτοντας $a = \log \frac{|m_{l_o}|^{\frac{1}{2l_o}}}{|P_{l_o}(x')|^{\frac{1}{2l_o}}}$ και $b = |\Omega(x')|$. Παρατηρήστε επιπλέον ότι

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x')| \log(|\Omega(x')| + 1) d\sigma_{n-1} \le c\|\Omega\|_{L\log L}.$$

Για τον πρώτο όρο στην τελευταία ανισότητα έχουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 3.12. *Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού k. Τότε υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά c, τέτοια ώστε*

$$\int_{S^{n-1}} \frac{\|P\|_{L^\infty(S^{n-1})}^{\frac{1}{2k}}}{|P(x')|^{\frac{1}{2k}}} d\sigma_{n-1}(x') \le c. \tag{3.21}$$

Αναβάλλουμε προς στιγμή την απόδειξη του Λήμματος 3.12, μεχρι να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.9. Αθροίζοντας τις εκτιμήσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\epsilon\le|x|\le R} e^{iP(x)} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} dx\right| &\le cn\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} + c\sum_{j=0}^n (1 + \|\Omega\|_{L\log L}) \\
&\le cn\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} + cn\|\Omega\|_{L\log L} + cn \le cn,
\end{aligned}$$

αφού $\|\Omega\|_{L\log L} \le 1$. $\square$

Απόδειξη του Λήμματος 3.12. Έστω $B = B(0,\rho)$ η μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Η ακτίνα αυτής της μπάλας ικανοποιεί την $\rho^n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{\frac{n}{2}}}$. Απο το Πόρισμα 2.9 έχουμε τότε ότι

$$\int_B |P(x)|^{-\frac{1}{2k}}dx\|P\|_{L^\infty(B)}^{\frac{1}{2k}} \leq (cn)^{\frac{1}{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες παίρνουμε τότε ότι

$$\begin{aligned}\|P\|_{L^\infty(S^{n-1})}^{\frac{1}{2k}}\int_{S^{n-1}}|P(x')|^{-\frac{1}{2k}}d\sigma_{n-1}(x') &\leq c\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\rho^n} = c\frac{n^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\\ &\leq c\frac{n^{\frac{3}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2}+1)^{\frac{n+1}{2}}} \leq c,\end{aligned}$$

απο τον τύπο του Stirling. □

3.4 Σημειώσεις και αναφορές

3.4.1 Αναφορές

Το πρόβλημα της εκτίμησης του ολοκληρώματος κύριας τιμής $I(P)$ τίθεται για πρώτη φορά στο [16] και στη συνέχεια στα [14] και [20]. Το αντίστοιχο πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$ παρουσιάζεται επίσης στο [14]. Στα παραπάνω, οι εκτιμήσεις που δίνονται δεν περιγράφουν την εξάρτηση των σταθερών απο το βαθμό του πολυωνύμου. Το Θεώρημα 3.3 βρίσκεται στο [10] και αποτελεί νέο αποτέλεσμα όπως και τα $n-$διάστατα ανάλογά του. Το Θεώρημα 3.9 ακολουθεί την απόδειξη του Stein απο το [14], βελτιώνοντας όλα τα Λήμματα που χρησιμοποιούνται εκεί. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στη απόδειξη του Θεωρήματος 3.9 για να περάσουμε στην $L\log L$ νόρμα της συνάρτησης Ω είναι κλασσικό. Η ανισότητα του Young μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στο [21].

3.4.2 Ιδιάζοντα ολοκληρώματα ταλάντωσης με ρητή φάση

Έστω $P, Q \in \mathcal{P}_d$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα κύριας τιμής

$$I(P,Q) = p.v.\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{P(t)}{Q(t)}}\frac{dt}{t}.$$

Το ακόλουθο Θεώρημα περιέχεται στο [7].

Θεώρημα 3.13. *Έστω $P, Q \in \mathcal{P}_d$. Τότε, υπάρχει μια θετική σταθερά c_d που εξαρτάται μόνο απο το d, τέτοια ώστε,*

$$\left|p.v.\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{P(t)}{Q(t)}}\frac{dt}{t}\right| \leq c_d.$$

3.4.3 Ένα διακριτό ανάλογο

Για $P \in \mathcal{P}_d$, θεωρούμε τα συμμετρικά αθροίσματα

$$S(P) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{iP(n)}}{n}.$$

Τα αντίστοιχα συμμετρικά μερικά αθροίσματα είναι

$$S_N(P) = \sum_{0<|n|<N} \frac{e^{iP(n)}}{n}.$$

Έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.14. *Έστω $d \geq 2$. Τότε*

$$\sup_{N=1,2,\ldots} \sup_{P \in \mathcal{P}_d} |S_N(P)| \leq c_d.$$

Επιπλέον, για κάθε πολυώνυμο $P \in \mathcal{P}_d$, η ακολουθία $\{S_N(P)\}$ συγκλίνει καθώς $N \to \infty$, και έτσι η σειρά $S(P)$, θεωρούμενη ως όριο των συμμετρικών μερικών της αθροισμάτων $S_N(P)$, είναι παντού ορισμένη και φραγμένη στο χώρο $\mathcal{P}_d$.

Το Θεώρημα αυτό αποδείχθηκε στο [2] και επίσης ανεξάρτητα στο [17]. Η εξάρτηση της σταθεράς c_d απο το d δεν είναι γνωστή.

Βιβλιογραφία

[1] G. I. Arkhipov, A. A. Karacuba, and V. N. Čubarikov, *Trigonometric integrals*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 5, 971–1003, 1197. MR MR552548 (81f:10050)

[2] G. I. Arkhipov and K. I. Oskolkov, *A special trigonometric series and its applications*, Mat. Sb. (N.S.) **134(176)** (1987), no. 2, 147–157, 287. MR MR922412 (89a:42010)

[3] M. Bebendorf, *A note on the Poincaré inequality for convex domains*, Z. Anal. Anwendungen **22** (2003), no. 4, 751–756. MR MR2036927 (2004k:26025)

[4] A. Carbery, M. Christ, and J. Wright, *Multidimensional van der Corput and sublevel set estimates*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 981–1015. MR MR1683156 (2000h:42010)

[5] A. Carbery, S. Wainger, and J. Wright, *Personal communication*, 2005.

[6] A. Carbery and J. Wright, *Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 233–248. MR MR1839474 (2002h:26033)

[7] M. Folch-Gabayet and J. Wright, *An oscillatory integral estimate associated to rational phases*, J. Geom. Anal. **13** (2003), no. 2, 291–299. MR MR1967028 (2004b:42025)

[8] R. Kannan, L. Lovász, and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), no. 3-4, 541–559. MR MR1318794 (96e:52018)

[9] F. Nazarov, M. Sodin, and A. Vol′berg, *The geometric Kannan-Lovász-Simonovits lemma, dimension-free estimates for the distribution of the values of polynomials, and the distribution of the zeros of random analytic functions*, Algebra i Analiz **14** (2002), no. 2, 214–234. MR MR1925887 (2004e:60086)

[10] I. R. Parissis, *A sharp bound for the Stein-Wainger oscillatory integral*, Proc. Amer. Math. Soc. **to appear** (2006).

[11] L. E. Payne and H. F. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 286–292 (1960). MR MR0117419 (22 #8198)

[12] D. H. Phong and E. M. Stein, *Oscillatory integrals with polynomial phases*, Invent. Math. **110** (1992), no. 1, 39–62. MR MR1181815 (93k:58215)

[13] F. Ricci and E. M. Stein, *Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals. I. Oscillatory integrals*, J. Funct. Anal. **73** (1987), no. 1, 179–194. MR MR890662 (88g:42023)

[14] E. M. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier analysis*, Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 112, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986, pp. 307–355. MR MR864375 (88g:42022)

[15] ———, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III. MR MR1232192 (95c:42002)

[16] E. M. Stein and S. Wainger, *The estimation of an integral arising in multiplier transformations.*, Studia Math. **35** (1970), 101–104. MR MR0265995 (42 #904)

[17] ———, *Discrete analogues of singular Radon transforms*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **23** (1990), no. 2, 537–544. MR MR1056560 (92e:42010)

[18] ———, *Oscillatory integrals related to Carleson's theorem*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 5-6, 789–800. MR MR1879821 (2002k:42038)

[19] I. M. Vinogradov, *Selected works*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, With a biography by K. K. Mardzhanishvili, Translated from the Russian by Naidu Psv [P. S. V. Naidu], Translation edited by Yu. A. Bakhturin. MR MR807530 (87a:01042)

[20] S. Wainger, *Averages and singular integrals over lower-dimensional sets*, Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 112, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986, pp. 357–421. MR MR864376 (89a:42026)

[21] A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II*, third ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, With a foreword by Robert A. Fefferman. MR MR1963498 (2004h:01041)