Ελεύθερα Σύνορα και Μεταβολή Φάσεως Υλικών

Εμμανουήλ Ε. Μηλάκης

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Μάϊος 2006

του

Εμμανουήλ Μηλάκη

Μαθηματικού

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή έχει κατατεθεί
στην Ειδική Διατμηματική Επιτροπή των Τμημάτων Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Επιβλέπων Διδακτορικής Διατριβής:

Καθηγητής Ιωάννης Αθανασόπουλος

Η Διδακτορική Διατριβή χρηματοδοτήθηκε κατά ένα μέρος από το πρόγραμμα Ηράκλειτος: Υποτροφίες έρευνας με προτεραιότητα στη Βασική Έρευνα 2002-2005.

ΕΛΛΑΔΑ
ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Περιεχόμενα

Σχήματα

Αντί Προλόγου

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Πρώτα από όλους το δάσκαλο μου, Καθηγητή Ιωάννη Αθανασόπουλο. Η καθοδήγηση, η συμπαράσταση και οι συμβουλές του στις καθημερινές μας συζητήσεις ήταν οι βασικοί παράγοντες της ολοκλήρωσης της διατριβής. Ο Καθηγητής Ιωάννης Αθανασόπουλος μου πρότεινε το θέμα της διατριβής και εκτός των άλλων διάβασε επανηλειμμένα το αρχικό χειρόγραφο και συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση του τελικού κειμένου με υποδείξεις, διορθώσεις και βελτιώσεις στις αποδείξεις των θεωρημάτων.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους Αναπληρωτές Καθηγητές Γεώργιο Κοσιώρη και Άλκη Τερσένοβ που αποτέλεσαν τα άλλα δυο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής η οποία και παρακολουθούσε της εξέλιξη της διατριβής, καθώς και τους Καθηγητές Νικόλαο Αλικάκο, Ιωάννη Στρατή και τους Αναπληρωτές Καθηγητές Ευστάθιο Φίλιππα και Αχιλλέα Τερτίκα οι οποίοι συμμετείχαν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή, διάβασαν τη διατριβή και οι παρατηρήσεις τους τόσο πριν όσο και κατά τη διάρκεια της παρουσίασης υπήρξαν καθοριστικές.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον Καθηγητή Luis Caffarelli ο οποίος, κατά τη διάρκεια της παραμονής μου στο Πανεπιστήμιο του Τέξας στο Ώστιν, άκουσε το σύνολο σχεδόν της διατριβής στις εβδομαδιαίες συναντήσεις μας. Θέλω επίσης

να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια Σουζάννα Παπαδοπούλου για τις συμβουλές της καθ᾽ όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η ερευνητική μου εργασία υποστηρίχτηκε οικονομικά κατά καιρούς από τα Τμήματα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, το Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών του ΙΤΕ, το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών και το Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων διαμέσου του προγράμματος (ΕΠΕΑΕΚ) "Ηράκλειτος: Υποτροφίες Έρευνας με προτεραιότητα στη Βασική Έρευνα". Προς τα ιδρύματα αυτά εκφράζω τις ευχαριστίες μου.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τη συνεχή υλική και ηθική συμπαράστασή τους και τη σύντροφο μου Μαρία για την αμέριστη στήριξη και ενθάρρυνση της όλα αυτά τα χρόνια.

Ηράκλειο, 9/5/2006

Εμμανουήλ Μηλάκης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στα προβλήματα μεταβολής φάσεως ενός υλικού μελετάται μια διαδικασία, για παράδειγμα η διάχυση της θερμότητας, σε ένα μέσο η οποία συνοδεύεται από τη δημιουργία ενός μετώπου διαμέσου του οποίου πραγματοποιείται η μετάβαση από τη μία φάση στην άλλη. Η πρώτη εργασία στη περιοχή οφείλεται στους Lamé και Clapeyron [LC], οι οποίοι και έθεσαν το ερώτημα του προσδιορισμού του πάχους της επιφάνειας που δημιουργείται από την ψύξη ενός υγρού που καταλαμβάνει το ημιεπίπεδο $x > 0$ κάτω από την επίδραση σταθερής θερμοκρασίας στο $x = 0$. Περί τα τέλη του 19ου αιώνα ο αυστριακός φυσικό-μαθηματικός Joseph Stefan πρότεινε με τις εργασίες του [S1]-[S4] ένα μοντέλο που θα εξηγούσε το φαινόμενο της τήξης του πάγου, προσδιορίζοντας το μηχανισμό με τον οποίο γίνεται η μετάβαση από την περιοχή της στερεάς κατάστασης στην αντίστοιχη της υγρής και αντίστροφα. Το μοντέλο αυτό έτυχε της προσοχής των ερευνητών ιδιαίτερα κατά το δεύτερο μισό του τελευταίου αιώνα και λόγω της έρευνας του Stefan πήρε το όνομα του, γνωστό στις μέρες μας ως το πρόβλημα του Stefan.

Η μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος και τα όποια μαθηματικά αποτελέσματα για την κίνηση και τη γεωμετρική μορφή των μετώπων ή ελευθέρων συνόρων δεν έχουν μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον λόγω των εκλεπτυσμένων σύγχρονων μεθόδων αλλά αποτελούν αντικείμενο μελέτης και άλλων επιστημών λόγω της αμεσότητάς τους με τις εφαρμογές. Συγκεκριμένα το πρόβλημα αυτό αποτελείται από τη λύση της εξίσωσης της θερμότητας σε δύο χωρία που περιέχουν την υγρή και τη στερεά κατάσταση αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη μια συνθήκη ισορροπίας στην επιφάνεια της μεταβολής της φάσης. Η συνθήκη αυτή, επακόλουθο της λανθάνουσας θερμότητας, υποδηλώνει ότι η ταχύτητα της επιφάνειας θα πρέπει να είναι ανάλογη με το άλμα της παραγώγου της θερμοκρασίας. Τοπικά η κλασική λύση στο πρόβλημα του Stefan μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Θεωρούμε το μοναδιαίο κύλινδρο $D_1 = B_1 \times (-1,1)$ ο οποίος χωρίζεται σε δύο χωρία Ω και $D_1 \setminus \Omega$ από την επιφάνεια $\mathcal{F} = (\partial\Omega) \cap D_1$. Στα Ω και $D_1 \setminus \Omega$ θεωρούμε τις συναρτήσεις $u_1 \geq 0$ και $u_2 \leq 0$ αντίστοιχα με

$$\begin{cases} \Delta u_1 - D_t u_1 = 0 & \sigma\tau o \;\; \Omega \\ \Delta u_2 - D_t u_2 = 0 & \sigma\tau o \;\; D_1 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις u_1 και u_2 είναι C^1 μέχρι και το σύνορο $\mathcal{F}$ και $u_1 = u_2 = 0$ στο $\mathcal{F}$. Επιπλέον για τη ταχύτητα της επιφάνειας $\mathcal{F}$ ισχύει

$$[u_\nu] := \frac{(u_i)_t}{(u_i)_\nu} = (u_{1\nu} - u_{2\nu}).$$

Μια ασθενής μορφή του προβλήματος (βλέπε [CE], [LSU]) προκύπτει αν,

$$\Delta u \in \beta(u)_t$$

όπου $\beta(u) = u^+ - u^- + sign u$. Στη περίπτωση αυτή έχουμε $u_1 = u^+$ στο $\Omega = \{u > 0\}$, $u_2 = -u^-$ στο $\Omega^c = \{u \leq 0\}$.

Σε προβλήματα τέτοιου είδους τα βασικά ερωτήματα έχουν να κάνουν με την ομαλότητα της λύσης αλλά και την ομαλότητα της επιφάνειας μεταβολής φάσης δηλαδή του ελευθέρου συνόρου. Στη μονοδιάστατη περίπτωση τα πρώτα αποτελέσματα αφορούσαν τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα γενικευμένων λύσεων ([O], [K]) ενώ αργότερα ο Rubinstein ([R]) απέδειξε την ύπαρξη της λύσης για αναλυτικό ελεύθερο σύνορο. Στη συνέχεια οι J. Cannon, A. Fasano, D. Henry, C. Hill, D. Kotlow, A. Meirmanov, M. Primicerio (βλέπε [CF], [CH], [CHK], [CP], [M] και τις αναφορές τους) ολοκλήρωσαν τη μελέτη της μονοδιάστατης περίπτωσης αποδεικνύοντας την ολική ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης, τη συνεχή και μονότονη εξάρτηση του ελευθέρου συνόρου από τα δεδομένα καθώς και την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ελευθέρου συνόρου για $t \to +\infty$.

Για $n > 1$ και στη περίπτωση του μονοφασικού προβλήματος του Stefan, ο Duvaut ([D]) απέδειξε ότι το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε μια ανίσωση μεταβολών. Στη συνέχεια και με βάση τη παρατήρηση αυτή μπορεί να αποδειχθεί η Lipschitz ομαλότητα του ελευθέρου συνόρου (βλέπε [FK]). Τέλος οι Kinderlehrer, Nirenberg και Hanzawa ([KN], [H]) απέδειξαν, χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους, την ύπαρξη κλασικής λύσης για το μονοφασικό πρόβλημα.

Παρόλο που τα προβλήματα μεταβολής φάσεως υλικών απασχολούσαν τους ερευνητές για πάνω από ένα αιώνα, απαντήσεις για τη λειότητα του μετώπου σε διφασικά προβλήματα με $n > 1$ δόθηκαν μόλις πρόσφατα στα μέσα της δεκαετίας του 1990 από τους Ιωάννη Αθανασόπουλου, Luis Caffarelli και

Sandro Salsa σε μια σειρά από εργασίες [ACS1], [ACS2], [ACS3]. Οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι λύσεις με την έννοια του ιξώδους σε μια γενικότερη κλάση προβλημάτων ελευθέρου συνόρου είναι *Lipshcitz* συνεχείς κατά μήκος του ελευθέρου συνόρου και ότι τα ελεύθερα σύνορα είναι C^1. Η ομαλότητα του μετώπου θα δώσει στη συνέχεια ότι λύσεις με την έννοια του ιξώδους είναι κλασικές λύσεις στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου. Στις εργασίες αυτές εισάγονται καινούργιες μέθοδοι που βοηθούν ουσιαστικά στην κατανόηση του προβλήματος του Stefan από την άλλη όμως καταδεικνύουν τη δυσκολία στην αντιμετώπιση και στην απόδειξη ισχυρών αποτελεσμάτων στα προβλήματα μεταβολής φάσεως υλικών.

Στη παρούσα διδακτορική διατριβή πρωταρχικός σκοπός είναι η γενίκευση των αποτελεσμάτων των [ACS1], [ACS2] σε προβλήματα ανομοιογενών υλικών για γενικές συνθήκες τύπου Stefan. Αυτά εν γένει εμπεριέχουν πλήρως μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων με συνθήκες άλματος των παραγώγων στο ελεύθερο σύνορο. Συγκεκριμένα θεωρούμε στο μοναδιαίο κύλινδρο $D_1 = B_1 \times (-1,1)$ το πρόβλημα ελευθέρου συνόρου

$$\begin{cases} F(D^2v^+) - D_tv^+ = 0 & \sigma\tau o \;\; \Omega^+ := D_1 \cap \{v > 0\} \\ F(D^2v^-) - D_tv^- = 0 & \sigma\tau o \;\; \Omega^- := D_1 \cap \{v \leq 0\}^o \\ V_\nu = G((x,t), \nu, v_\nu^+, v_\nu^-) & \sigma\tau o \;\; \mathcal{F}_t = \partial\Omega^+ \cap \{t\}, \end{cases}$$

όπου η $F : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι μια πλήρως μη γραμμική συνάρτηση, ορισμένη στο χώρο $\mathcal{S}$ των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων, ομογενής βαθμού 1, $F(0) = 0$, κοίλη και ομοιόμορφα ελλειπτική. Μερικά παραδείγματα μη γραμμικών τελεστών της παραπάνω μορφής προκύπτουν από την εξίσωση του Bellman:

$$F(D^2u) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_\alpha u - f_\alpha) = 0,$$

για το βέλτιστο κόστος σε προβλήματα στοχαστικού ελέγχου καθώς επίσης και από τους τελεστές του Pucci $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{M}^+$ όπως αυτοί ορίζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Για την G υποθέτουμε ότι είναι *Lipschitz*, αύξουσα ως προς v_ν^+, φθίνουσα ως προς v_ν^- και $G \to +\infty$ όταν $v_\nu^+ - v_\nu^- \to +\infty$. Τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται στη μεταλλουργία, στη δημιουργία κραμάτων-έξυπνων υλικών και γενικά σε περιπτώσεις διφασικών προβλημάτων όπου η διαδικασία μεταβολής της φάσης είναι πλέον μη γραμμική. Στο πρόβλημα αυτό, λόγω του τοπικού χαρακτήρα του, θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά της λύσης κοντά στο ελεύθερο σύνορο, την ομαλότητα της λύσης επί και πέραν του ελευθέρου συνόρου, τη γεωμετρική μορφή και λειότητα του ελευθέρου συνόρου.

Τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας αυτής διατυπώνονται στα Θεωρήματα 2.4 και 2.5 του Κεφαλαίου 2 παρακάτω. Η διατριβή χωρίζεται σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα ασχοληθούμε με την ομαλότητα της λύσης σε πλήρως μη γραμμικά προβλήματα με γενικές συνθήκες στο ελεύθερο σύνορο ενώ στο δεύτερο μέρος αποδεικνύουμε τη λειότητα του ελευθέρου συνόρου. Παρακάτω περιγράφουμε σύντομα τις αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων.

Για την απόδειξη της *Lipschitz* συνέχειας της λύσης χρειάζεται να αποδείξουμε συγκεκριμένες ιδιότητες για τις F-λύσεις (δηλαδή μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης) σε χωρία με *Lipschitz* σύνορα. Τέτοιου είδους αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα από το πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου και έχουν προκαλέσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών τα τελευταία χρόνια (για γραμμικές παραβολικές εξισώσεις δείτε M. Safonov, Y. Yuan, [Sf], [SY] κ.α.). Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι:

- F-λύσεις σε *Lipschitz* χωρία ικανοποιούν μια ανισότητα Harnack πίσω στο χρόνο (Backward Harnack).
- Το πηλίκο u_1/u_2 δυο F-λύσεων είναι C^{α}.
- Η F-λύση είναι μονότονη σε ένα ολόκληρο κώνο διευθύνσεων που εισέρχονται στο *Lipschitz* χωρίο.
- Το ∇u για την F-λύση u, είναι της τάξης u/d, όπου d είναι η ελλειπτική απόσταση από το *Lipschitz* σύνορο.

Από τις εκτιμήσεις αυτές προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $w_+ := u + u^{1+\varepsilon}$ και $w_- := u - u^{1+\varepsilon}$ είναι F-υπολύση και F-υπερλύση στην αντίστοιχη ελλειπτική εξίσωση στο υπερεπίπεδο $\{t = 0\}$ κοντά στο ελεύθερο σύνορο. Οι ιδιότητες αυτές για τις w_+ και w_- σε συνδυασμό με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης κοντά στο ελεύθερο σύνορο (κεφάλαιο 5) θα μας δώσουν τη *Lipschitz* ομαλότητα κατά μήκος του ελευθέρου συνόρου χρησιμοποιώντας τον τύπο μονοτονίας των Alt, Caffarelli και Friedman για υφαρμονικές συναρτήσεις, διότι η w_+ είναι ουσιαστικά υφαρμονική με την έννοια του ιξώδους. Από τον τρόπο που ορίζεται το πρόβλημα ελευθέρου συνόρου, η *Lipschitz* ομαλότητα είναι το βέλτιστο αποτέλεσμα για τη λύση.

Στο δεύτερο μέρος εξετάζουμε την ομαλότητα του ελευθέρου συνόρου. Όπως φαίνεται από το αντιπαράδειγμα στο [ACS2] για το διφασικό πρόβλημα του Stefan, γενικά δεν μπορούμε να περιμένουμε ομαλό ελεύθερο σύνορο. Για το λόγο αυτό περιοριζόμαστε σε μια κλάση προβλημάτων, για τα οποία μπορούμε να αποδείξουμε την C^1 ομαλότητα. Η συνθήκη μη εκφυλισμού που υποθέτουμε μας εξασφαλίζει ουσιαστικά ότι οι δυο ροές θερμότητας δεν εξαφανίζονται ταυτόχρονα στο ελεύθερο σύνορο. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αποδείξουμε ότι *Lipschitz* ελεύθερα σύνορα είναι στην ουσία C^1 γραφήματα στο χώρο και το χρόνο. Από την άλλη όμως μελετώντας το παραπάνω αντιπαράδειγμα βλέπουμε ότι η επιτυχία της περαιτέρω ομαλότητας του ελευθέρου συνόρου εξαρτάται από την *Lipschitz* σταθερά του. Δηλαδή αν η σταθερά είναι αρκετά μικρή τότε στην πραγματικότητα βρισκόμαστε στην μη εκφυλιζόμενη περίπτωση και άρα η παραπάνω ομαλότητα ισχύει. Σκοπεύουμε να μελετήσουμε την κατάσταση αυτή σε μελλοντική εργασία [M3]. Στη μη εκφυλιζόμενη περίπτωση τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

- Οι επιφάνειες στάθμης της u είναι υπερεπίπεδα κάθετα στο μοναδιαίο διάνυσμα e, αν $D_\nu u \geq 0$ για κάθε ν τέτοια ώστε $\alpha(\nu, e) \leq \pi/2$.

- Από την άλλη αν μπορούμε να αποδείξουμε μόνο ότι $D_\nu u \geq 0$ για κάθε ν στο κώνο $\Gamma(e,\theta) := \{\nu : \alpha(\nu, e) \leq \theta < \pi/2\}$, τότε οι επιφάνειες στάθμης είναι *Lipschitz*.

- Όταν λέμε ότι η u είναι μονότονη για κάθε $\nu \in \Gamma(e,\theta)$ ουσιαστικά εννοούμε ότι για κάθε μικρό ε ισχύει

$$u(x) \geq \sup_{y \in B_{\varepsilon sin\theta}(x)} u(y - \varepsilon e).$$

- Οπότε αν $u(x) \geq \sup_{B_\varepsilon(x)} u(y - \varepsilon e)$ τότε οι επιφάνειες στάθμης της u είναι υπερεπίπεδα.

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, η απόδειξη της ομαλότητας θα προκύψει αν κατασκευάσουμε μια ακολουθία δυαδικών κυλίνδρων όπου η u γίνεται μονότονη σε μια ακολουθία κώνων με άνοιγμα θ_k όλο και πιο κοντά στο $\pi/2$. Πράγματι, αν συγκρίνουμε τη λύση u με τις $v := \sup_{y \in B_{\varepsilon sin\theta}(x)} u(y - \varepsilon e)$ στα σύνολα αυτά, μπορούμε να δείξουμε ότι η u μένει πάνω από τη v όταν η γωνία πλησιάζει το $\pi/2$ (ή αντίστοιχα η ακτίνα της μπάλας πλησιάζει το ε). Το σημαντικότερο ίσως πρόβλημα, στο οποίο οφείλεται και η δυσκολία στην αντιμετώπιση των προβλημάτων ελευθέρου συνόρου με συνθήκες τύπου Stefan, είναι το γεγονός ότι η εξίσωση έχει παραβολικές ιδιότητες ομοιοθεσίας (*scaling*), δηλαδή αν η u είναι F-λύση τότε και η $u_k(x,t) := u(kx, k^2 t)$ θα είναι F-λύση, αντίθετα η συνθήκη του ελευθέρου συνόρου είναι υπερβολικού τύπου δηλαδή k ως προς x και k ως προς t. Για το λόγο αυτό πριν εφαρμόσουμε επαναληπτικά τις εκτιμήσεις θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τα δυο είδη ομοιοθεσίας, ολοκληρώνοντας την απόδειξη σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα σε χωρία με παραβολική ομοιοθεσία και μακριά από το ελεύθερο σύνορο, αποδεικνύουμε ότι ο κώνος μονοτονίας της λύσης μεγαλώνει (δηλαδή η u βρίσκεται πάνω από τη v) χρησιμοποιώντας μια ανισότητα τύπου Harnack. Στο δεύτερο βήμα θα πρέπει να δείξουμε ότι οι προηγούμενες εκτιμήσεις (πάντα μακριά από το ελεύθερο σύνορο) ισχύουν και σε χωρία με υπερβολικού τύπου ομοιοθεσία. Τέλος μεταφέρουμε τις εσωτερικές εκτιμήσεις στο ελεύθερο σύνορο (κεφάλαιο 10) χρησιμοποιώντας μια οικογένεια υπολύσεων και μια ισχυρή τοπολογική μέθοδο όπως στις εργασίες [C1], [ACS2].

Στα παραρτήματα δίνουμε μια λεπτομερή απόδειξη του τύπου μονοτονίας για την περίπτωση μας, κάποιες βασικές ιδιότητες μη γραμμικών εξισώσεων καθώς και ένα απλό παράδειγμα κατασκευής μιας πλήρως μη γραμικής εξίσωσης. Τα αποτελέσματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής εμφανίζονται στην εργασία [M1].

Κεφάλαιο 2

Ορισμοί και Κύρια Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς και θα διατυπώσουμε τα κύρια αποτελέσματα της διατριβής στα Θεωρήματα 2.4 και 2.5 παρακάτω.

Ορισμός 2.1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $F(M,P,u,x,t)$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική αν υπάρχουν θετικές σταθερές λ, Λ τέτοιες ώστε

$$\lambda||N|| \leq F(M+N,P,u,x,t) - F(M,P,u,x,t) \leq \Lambda||N||$$

όπου ο πίνακας N είναι θετικά ορισμένος και $||N|| = \sup_{|x|=1}|Nx|$.

Από τον ορισμό της ελλειπτικότητας για μια συνάρτηση F εύκολα προκύπτει η ακόλουθη ισοδυναμία.

Λήμμα 2.1. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για την $F(M)$:*
(α) Η F είναι ομοιόμορφα ελλειπτική.
(β) Για κάθε M, N ισχύει:

$$F(M+N) \leq F(M) + \Lambda||N^+|| - \lambda||N^-||.$$

Θα ορίσουμε τώρα τις λύσεις με την έννοια του ιξώδους σε μια μη γραμμική εξίσωση. Πρώτα όμως ας δούμε τον τυπικό ορισμό για τις περιβάλλουσες μιας φραγμένης συνάρτησης.

Ορισμός 2.2. Έστω u μια φραγμένη συνάρτηση σε ένα χωρίο Ω και v συνεχής. Θα ονομάζουμε άνω ημισυνεχή περιβάλλουσα της u τη συνάρτηση

$$u^* = \inf_v \{v : v \geq u\}.$$

Ομοίως ορίζουμε τη κάτω ημισυνεχή περιβάλλουσα της u,

$$u_* = \sup_v \{v : v \leq u\}.$$

Ορισμός 2.3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$u_t - F(D^2u, Du, u, x, t) = 0. \tag{2.1}$$

Η φραγμένη συνάρτηση u θα λέγεται λύση της (2.1) με την έννοια του ιξώδους αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
α) Αν $\forall \varphi \in C^2$, $\forall \varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\varphi_t - F(D^2\varphi, D\varphi, \varphi, x, t) \geq \varepsilon > 0$$

η $u^* - \varphi$ δεν λαμβάνει τοπικό μέγιστο 0.
β) Αν $\forall \varphi \in C^2$, $\forall \varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\varphi_t - F(D^2\varphi, D\varphi, \varphi, x, t) \leq -\varepsilon < 0$$

η $u_* - \varphi$ δεν λαμβάνει τοπικό ελάχιστο 0.

Ένα άμεσο συμπέρασμα του παραπάνω ορισμού είναι το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.2. *Έστω u είναι υπολύση της (2.1) και $\varphi \in C^2$ τέτοια ώστε*

$$\begin{cases} u & \leq \varphi \\ u(x_0, t_0) & = \varphi(x_0, t_0). \end{cases} \tag{2.2}$$

Τότε

$$\varphi_t - F(D^2\varphi, D\varphi, \varphi, x_0, t_0) \leq 0. \tag{2.3}$$

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει, τότε

$$\varphi_t - F(D^2\varphi, D\varphi, \varphi, x_0, t_0) \geq \varepsilon > 0,$$

άρα σε μια περιοχή του (x_0, t_0) η συνάρτηση $\varphi^1 = \varphi + \delta(|x - x_0|^2 - t + t_0)$ ικανοποιεί

$$\varphi^1_t - F(D^2\varphi^1, D\varphi^1, \varphi^1, x, t) \geq \varepsilon/2 > 0$$

για δ αρκετά μικρό. Προφανώς η $u - \varphi^1$ λαμβάνει εσωτερικό μέγιστο, άτοπο από τον Ορισμό 2.3. $\square$

Πόρισμα 2.3. *Αν για κάθε $\varphi \in C^2$ η (2.2) συνεπάγεται την (2.3) τότε η u είναι υπολύση της (2.1).*

Για ένα συμμετρικό πίνακα M ορίζουμε τους τελεστές του *Pucci* ως εξής:

$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) = \lambda(\sum_{e_i > 0} e_i) + \Lambda(\sum_{e_i < 0} e_i)$$
$$\mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) = \Lambda(\sum_{e_i > 0} e_i) + \lambda(\sum_{e_i < 0} e_i)$$

όπου e_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα M. Για τις διάφορες ιδιότητες των $\mathcal{M}^-, \mathcal{M}^+$ που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Παράρτημα Β΄. Ορίζουμε τώρα την κλάση όλων των ασθενών (με την έννοια του ιξώδους) λύσεων σε όλες τις παραβολικές εξισώσεις σε *nondivergence* μορφή:

Ορισμός 2.4. Έστω f συνεχής στο Ω και λ, Λ θετικές σταθερές. Θα συμβολίζουμε με :

(α) $\underline{S}(\lambda, \Lambda, f)$ την κλάση των συνεχών συναρτήσεων u στο Ω για τις οποίες,

$$\mathcal{M}^{+}(D^2u, \lambda, \Lambda) - u_t \geq f$$

(β) $\overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$ την κλάση των συνεχών συναρτήσεων u που ικανοποιούν

$$\mathcal{M}^{-}(D^2u, \lambda, \Lambda) - u_t \leq f$$

(γ) $S(\lambda, \Lambda, f) = \underline{S}(\lambda, \Lambda, f) \cap \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$,

όπου οι ανισότητες ισχύουν με την έννοια του Ορισμού 2.3.

Έστω $x_n = f(x', t)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ είναι μια *Lipschitz* συνάρτηση με *Lipschitz* σταθερά L και Ω το χωρίο δεξιά της f, $\Omega = \{x_n > f(x', t)\}$. Για κάθε $(\xi, \tau) = (\xi', \xi_n, \tau) \in \{x_n > f(x', t)\}$, $r > 0$ και $b = max(4L, 1)$ ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα :

$$Q_r(\xi, \tau) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x' - \xi'| < r, |x_n - \xi_n| < br, |t - \tau| < r^2\},$$

$$K_r(\xi, \tau) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x' - \xi'| < t, |x_n - \xi_n| < br, |t - \tau| < r\}$$

και τα σημεία:

$$A_r(\xi, \tau) := (\xi', \xi_n + br, \tau),$$

$$\overline{A}_r(\xi,\tau) := (\xi', \xi_n + br, \tau + \frac{3}{2}r^2),$$
$$\underline{A}_r(\xi,\tau) := (\xi', \xi_n + br, \tau - \frac{3}{2}r^2).$$

Τέλος θα συμβολίζουμε με ∂_p το παραβολικό σύνορο, $M := \sup u$ και με

$$d_{x,t} := inf\{dist((x,t),(y,t)) : y_n = f(y',t)\}$$

την ελλειπτική απόσταση από το *Lipschitz* σύνορο. Δίνουμε τώρα τον ορισμό των F-λύσεων σε χωρία με *Lipschitz* σύνορο.

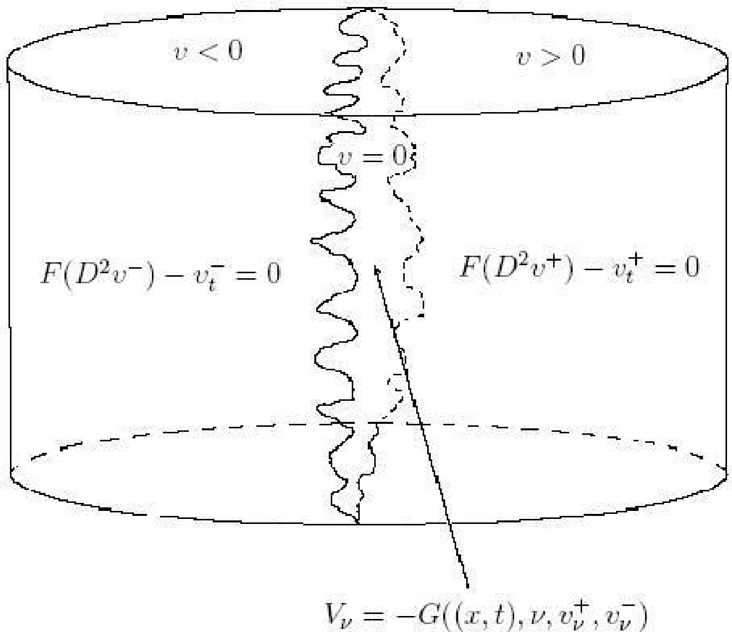
Ορισμός 2.5. Έστω Ω είναι το χωρίο δεξιά του *Lipschitz* γραφήματος f, δηλαδή $\Omega = \{x_n > f(x',t)\}$ και έστω D είναι η τομή ενός κύβου Q διάστασης $(n+1)$ με το Ω. Θα ονομάζουμε F-λύση μια μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$F(D^2u) - u_t = 0 \ \ \sigma\tau o \ \ D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

η οποία μηδενίζεται τοπικά στο $(\partial\Omega) \cap Q$.

Η συνάρτηση $F : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι μια πλήρως μη γραμμική συνάρτηση, ορισμένη στο χώρο $\mathcal{S}$ των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων, ομογενής βαθμού 1, $F(0) = 0$, κοίλη και ομοιόμορφα ελλειπτική. Στη συνέχεια ορίζουμε τη λύση στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου. Τυπικά η συνάρτηση αυτή θα είναι μια F-λύση δεξιά και αριστερά του *Lipschitz* γραφήματος, ενώ πάνω στο ελεύθερο σύνορο ικανοποιείται η συνθήκη τύπου *Stefan* (Σχήμα 2.1).

Ορισμός 2.6. Έστω v μια συνεχής συνάρτηση στο $D_1 := B_1(0) \times (-1,1)$. Θα λέμε ότι η v είναι υπολύση (υπερλύση) στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου αν,



Σχήμα 2.1: Λύση στο πρόβλημα Ελευθέρου Συνόρου

(i) $F(D^2v^+) - v_t^+ \geq 0 \quad (\leq) \quad \sigma\tau o \;\; \Omega^+ := D_1 \cap \{v > 0\}$

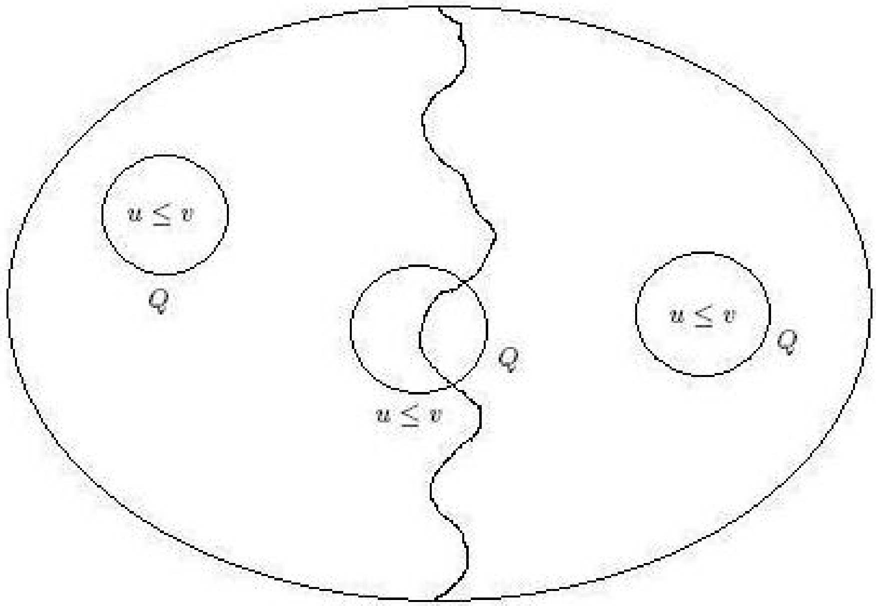
(ii) $F(D^2v^-) - v_t^- \leq 0 \quad (\geq) \quad \sigma\tau o \;\; \Omega^- := D_1 \cap \{v \leq 0\}^o$

(iii) $v \in C^1(\bar{\Omega}^+) \cap C^1(\bar{\Omega}^-)$

(iv) Για κάθε $(x,t) \in \partial\Omega^+ \cap D_1$, $\nabla_x v^+(x,t) \neq 0$, και

$$V_\nu \geq -G((x,t),\nu,v_\nu^+,v_\nu^-) \quad (\leq)$$

όπου οι (i) και (ii) ικανοποιούνται με την έννοια του Ορισμού 2.3 και V_ν είναι η ταχύτητα της επιφάνειας $\mathcal{F}_t := \partial\Omega^+ \cap \{t\}$ στην κατεύθυνση $\nu := \frac{\nabla_x v^+}{|\nabla_x v^+|}$.



Σχήμα 2.2: Λύση με την έννοια του ιξώδους

Θα λέμε ότι η v είναι λύση στο πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου αν είναι συγχρόνως υπολύση και υπερλύση. Στον παραπάνω ορισμό η συνθήκη (iv) μπορεί να αντικατασταθεί με

$$\frac{v_t^+}{v_\nu^+} \leq G((x,t), \nu, v_\nu^+, v_\nu^-) \qquad (\geq).$$

Θα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής ως προς όλες τις μεταβλητές της, αύξουσα ως προς v_ν^+, φθίνουσα ως προς v_ν^- και $G \to +\infty$ όταν $v_\nu^+ - v_\nu^- \to +\infty$. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις λύσεις με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου.

Ορισμός 2.7. Υποθέτουμε ότι η u είναι συνεχής στο D_1, τότε η u θα ονομάζεται υπολύση (υπερλύση) με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου αν, για κάθε υποκύλινδρο Q του D_1 και για κάθε υπερλύση (υπολύση) με την έννοια του Ορισμού 2.6 v στο Q ισχύει $u \leq v$ ($u \geq v$) στο σύνορο $\partial_p Q$, τότε θα ισχύει $u \leq v$ ($u \geq v$) και στο Q.

Πολλές φορές τις λύσεις με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου θα τις ονομάζουμε απλά λύσεις με την έννοια του ιξώδους χωρίς αυτό να προκαλεί σύγχυση με τον αντίστοιχο ορισμό των *Crandall* και *Lions*. Παρακάτω διατυπώνουμε τα βασικά αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής.

Θεώρημα 2.4. *Έστω u μια λύση με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο χωρίο $B_1(0) \times (-1, 1)$ και έστω ότι το $\partial\Omega^+$ είναι Lipschitz σε μια χωριακή κατεύθυνση ν με Lipschitz σταθερά L. Υποθέτουμε ότι $u(\underline{A}_{3/4}(0,0)) = m > 0$ και ότι η αρχή των αξόνων ανήκει στο ελεύθερο σύνορο. Τότε η u είναι Lipschitz συνεχής κατά μήκος του ελευθέρου συνόρου.*

Θεώρημα 2.5. *Έστω u μια λύση με την έννοια του ιξώδους για το πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο χωρίο $Q_2 = B_2 \times (-2, 2)$, της οποίας το ελεύθερο σύνορο $\mathcal{F}$ περιέχει την αρχή $(0,0)$ και δίνεται από το γράφημα μιας Lipschitz συνάρτησης $x_n = f(x', t)$ με Lipschitz σταθερά L. Υποθέτουμε ότι $u(e_n, -\frac{3}{2}) = 1$ όπου e_n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην x_n κατεύθυνση και επιπλέον*

(i) Η $G(\nu, a, b)$ είναι μια Lipschitz συνάρτηση ως προς όλες τις μεταβλητές της με Lipschitz σταθερά L_G, και για κάποιο θετικό αριθμό γ,

$$D_a G \geq \gamma \qquad \text{και} \qquad D_b G \leq -\gamma.$$

(ii)(Συνθήκη μη-εκφυλισμού) Υπάρχει $k_0 > 0$ τέτοιο ώστε, αν $(x_0, t_0) \in \mathcal{F}$ είναι

ομαλό σημείο από τα δεξιά ή από τα αριστερά, τότε για κάθε μικρό r,

$$\fint_{B_r(x_0)} u^+ \geq k_0 r.$$

Τότε στο χωρίο Q_1 *το ελεύθερο σύνορο είναι ένα* C^1 *γράφημα στο χώρο και το χρόνο. Επιπλέον για κάθε* $\eta > 0$, *υπάρχει θετική σταθερά*

$$C = C(n, L, L_G, M, \lambda, \Lambda, \gamma, k_0, \eta)$$

τέτοια ώστε

$$|\nabla_{x'} f(x', t) - \nabla_{x'} f(y', t)| \leq C(-log|x' - y'|)^{-3/2+\eta}$$

$$|D_t f(x', t) - D_t f(x', s)| \leq C(-log|t - s|)^{-1/2+\eta}$$

για κάθε (x, t), $(y, s) \in \mathcal{F}$ *όπου* $M = \sup_{Q_2} u$.

Κεφάλαιο 3

Μη αρνητικές λύσεις σε Lipschitz χωρία

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ορισμένες ιδιότητες μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$F(D^2u) - u_t = 0. \tag{3.1}$$

Θεωρούμε ότι η F είναι ομαλή, κοίλη, ομογενής βαθμού ένα, ομοιόμορφα ελλειπτική με σταθερές ελλειπτικότητας λ, Λ και $F(0) = 0$. Παρακάτω αποδεικνύουμε το βασικό Θεώρημα της παραγράφου, μια συνοριακή *Backward Harnack*, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε θετική, εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν, λύση της (3.1). Το θεώρημα αυτό γενικεύει τα αντίστοιχα αποτελέσματα των M. Safonov, Y. Yuan (βλέπε [Sf], [SY]) για γραμμικές εξισώσεις.

Θεώρημα 3.1. *Έστω u μια F-λύση στο $Q_1 \cap \Omega$ και $u(\underline{A}_{3/4}(0,0)) = m > 0$. Τότε υπάρχει σταθερά $C = C(n, L, \lambda, \Lambda, M, m)$, τέτοια ώστε*

$$u(x, t + \rho^2) \leq Cu(x, t - \rho^2)$$

για κάθε $(x,t) \in Q_{1/2} \cap \Omega$ και για κάθε $\rho : 0 < \rho \leq \frac{d_{x,t}}{b}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$Lu \equiv \alpha_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}(x,t) - u_t(x,t)$$

όπου

$$\alpha_{ij}(x,t) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial R_{ij}}(sD^2u)ds.$$

Παρατηρούμε ότι αν η u είναι F-λύση στο $Q_1 \cap \Omega$ τότε επίσης $Lu = 0$ στο $Q_1 \cap \Omega$ και ο τελεστής L έχει τις ίδιες σταθερές ελλειπτικότητας λ και Λ με την F. Προσεγγίζουμε τον τελεστή L με ομαλούς παραβολικούς τελεστές L_ϵ με τις ίδιες σταθερές ελλιπτικότητας και έστω u_ε η κλασική λύση της $L_\varepsilon u = 0$ με τα ίδια συνοριακά δεδομένα όπως η u. Τότε υπάρχει ομοιόμορφο όριο της u^ε, έστω u^0, το οποίο είναι L^{n+1}-λύση με την έννοια του ιξώδους της $Lu = 0$ με τις ίδιες συνοριακές τιμές όπως η u (βλέπε [CKLS], [CKS]), επομένως από τη μοναδικότητα της λύσης θα πρέπει $u^0 = u$.

Συμβολίζουμε με $w^{(x,t)}$ το L_ε-θερμικό μέτρο στο $Q_1 \cap \Omega$ υπολογισμένο στο σημείο (x,t). Ορίζουμε $B := \{t = -1\} \cap Q_1 \cap \Omega$ και για κάθε $(x,t) \in Q_{1/2} \cap \Omega$ επιλέγουμε $(\xi,\tau) \in Q_{1/2} \cap \partial\Omega$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $(x,t) = A_r(\xi,\tau) = A_r$. Τότε

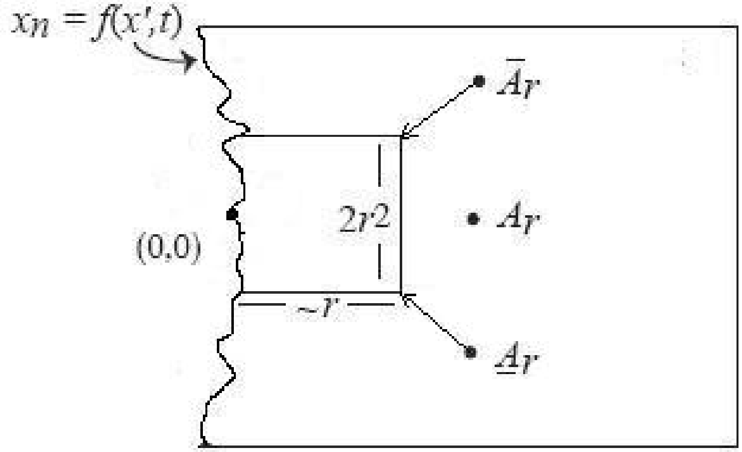
$$u^\varepsilon(\overline{A}_r) = \int_\Sigma u^\varepsilon dw^{\overline{A}_r} + \int_B u^\varepsilon dw^{\overline{A}_r} =: u_1(\overline{A}_r) + u_2(\overline{A}_r). \tag{3.2}$$

Εκ κατασκευής η u_2 είναι μηδέν στην παράπλευρη επιφάνεια του $Q_1 \cap \Omega$. Οπότε από το Θεώρημα 3.7 του [FSY] έχουμε

$$u_2(\overline{A}_r) \leq C u_2(\underline{A}_r)$$

όπου $C = C(n, \lambda, \Lambda, L)$. Έστω τώρα $\gamma := \Sigma \cap \{-1 < t < -9/16\}$ από την ιδιότητα D (Doubling Property) του L-θερμικού μέτρου (βλέπε [SY]) έχουμε

$$w^{(x,t)}(\Sigma) \leq C w^{(x,t)}(\gamma)$$



Σχήμα 3.1: Backward Harnack

άρα

$$u_1(x,t) = \int_\Sigma u^\varepsilon dw^{(x,t)} \leq Mw^{(x,t)}(\Sigma) \leq C(n,\lambda,\Lambda,L)Mw^{(x,t)}(\gamma).$$

Από την άλλη μεριά

$$u^\varepsilon(\underline{A}_r) = \int_\Sigma u^\varepsilon dw^{\underline{A}_r} + \int_B u^\varepsilon dw^{\underline{A}_r} \geq \int_\gamma u^\varepsilon dw^{\underline{A}_r} + \int_B u^\varepsilon dw^{\underline{A}_r}. \tag{3.3}$$

Επειδή το $w^{(x,t)}(\gamma)$ είναι μηδέν στην παράπλευρη επιφάνεια του $Q_1 \cap \Omega$ εκτός απο το γ, χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα 3.7 από το άρθρο [FSY] έχουμε

$$w^{\overline{A}_r}(\gamma) \leq C(n,\lambda,\Lambda,L)w^{\underline{A}_r}(\gamma)$$

άρα

$$\int_\gamma u^\varepsilon dw^{\underline{A}_r} \geq mC(n,\lambda,\Lambda,L)w^{\overline{A}_r}(\gamma).$$

Από τις σχέσεις (3.2) και (3.3) προκύπτει

$$u^{\varepsilon}(\overline{A}_r) \leq C(n, \lambda, \Lambda, L, m, M) u^{\varepsilon}(\underline{A}_r)$$

και επειδή επιλέξαμε το $r \sim d_{x,t}$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Λήμμα 3.2. *Έστω u_1, u_2 όπως η u στο Θεώρημα 3.1, $A_{1/2}(0,0) = A_{1/2}$ και επιπλέον $u_1 - \sigma u_2 \geq 0$ στο $Q_1 \cap \Omega$ για κάποιο $\sigma \geq 0$. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c(n, L, M_i, m_i, \lambda, \Lambda)$ τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{c} \frac{u_1(A_{1/2}) - \sigma u_2(A_{1/2})}{u_2(A_{1/2})} \leq \frac{u_1(x,t) - \sigma u_2(x,t)}{u_2(x,t)} \leq c \frac{u_1(A_{1/2}) - \sigma u_2(A_{1/2})}{u_2(A_{1/2})}$$

για κάθε $(x,t) \in Q_{1/2} \cap \Omega$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$w = C \frac{u_1 - \sigma u_2}{u_1(A_{1/2}) - \sigma u_2(A_{1/2})} - \frac{u_2}{u_2(A_{1/2})}$$

στο $Q_1 \cap \Omega$ όπου τη σταθερά C θα την επιλέξουμε παρακάτω. Αν γράψουμε την w στη μορφή

$$w = \alpha u_1 - (\alpha\sigma + \beta) u_2$$

όπου α, β θετικές σταθερές, τότε

$$\begin{aligned} Lw &\equiv w_t - \int_0^1 F_{ij}(sD^2(\alpha u_1) + (1-s)D^2(\alpha\sigma + \beta)u_2) ds \cdot w_{x_i x_j} \\ &= \alpha(u_1)_t - (\alpha\sigma + \beta)(u_2)_t - [F(D^2(\alpha u_1) - F(D^2(\alpha\sigma + \beta)u_2)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 θεωρούμε τις w_1, w_2 οι οποίες είναι λύσεις των προβλημάτων *Dirichlet*, $L_\varepsilon w_i = 0$ στο $Q_1 \cap \Omega$, για $i = 1, 2$, με $w_1 = \frac{u_1 - \sigma u_2}{u_1(A_{1/2}) - \sigma u_2(A_{1/2})}$ στο $\partial_p(Q_1 \cap \Omega)$ και $w_2 = \frac{u_2}{u_2(A_{1/2})}$ στο $\partial_p(Q_1 \cap \Omega)$ αντίστοιχα. Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.3 του [FSY] θα προκύψει

$$Cw_1 \geq w_2 \quad \sigma\tau o \quad Q_{1/2} \cap \Omega,$$

με $C = C(n, L, \lambda, \Lambda, m_1, m_2, M_1, M_2)$. Επιλέγουμε αυτή τη σταθερά C στον ορισμό της συνάρτησης w οπότε θα έχουμε

$$w = Cw_1 - w_2 \geq 0 \quad \sigma\tau o \quad Q_{1/2} \cap \Omega.$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει με ανάλογο τρόπο. □

Ένα άμεσο συμπέρασμα της προηγούμενης ανισότητας είναι C^α συνέχεια του πηλίκου δυο λύσεων u_1 και u_2.

Πόρισμα 3.3. *Θεωρούμε τις u_1, u_2 όπως στο Πόρισμα 3.2 τότε η u_1/u_2 είναι C^α στο $Q_{1/2} \cap \Omega$ για κάποιο $0 < \alpha < 1$ όπου το α και η C^α νόρμα εξαρτώνται από τα $n, L, m_i, M_i, \lambda, \Lambda$ για $i = 1, 2$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\alpha_k - \beta_k := \sup_{Q_{2^{-k}} \cap \Omega} \frac{u_1}{u_2} - \inf_{Q_{2^{-k}} \cap \Omega} \frac{u_1}{u_2} \leq \gamma \delta^k$$

για κάποιο $\delta \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ και κάθε k, ή επαγωγικά αρκεί

$$\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} \leq \delta(\alpha_k - \beta_k).$$

Έστω ότι ισχύει η σχέση για k και χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι

$$\frac{u_1(A_{1/2^k})}{u_2(A_{1/2^k})} \geq \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k).$$

Τότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2 έχουμε

$$\frac{u_1 - \beta_k u_2}{u_2} \geq C\frac{(u_1 - \beta_k u_2)(A_{1/2^k})}{u_2(A_{1/2^k})} \geq C(\frac{\alpha_k + \beta_k}{2} - \beta_k)$$

άρα

$$\frac{u_1}{u_2} - \beta_k \geq \frac{C}{2}(\alpha_k - \beta_k)$$

ή ισοδύναμα

$$\beta_{k+1} - \beta_k \geq \frac{C}{2}(\alpha_k - \beta_k).$$

Επιπλέον η α_k είναι φθίνουσα οπότε

$$\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} \leq \alpha_k - (\beta_k + \frac{C}{2}(\alpha_k - \beta_k)) = (1 - \frac{C}{2})(\alpha_k - \beta_k)$$

όπου το C είναι αρκετά μικρό και έχουμε το ζητούμενο για

$$\delta = 1 - C/2 > 0.$$

□

Κεφάλαιο 4

Μονοτονία στο κώνο

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 μπορούμε να αποδείξουμε ότι η F-λύση είναι μονότονη σε ένα ολόκληρο κώνο διευθύνσεων που εισέρχονται στο *Lipschitz* χωρίο. Συγχρόνως με τη μονοτονία στο κώνο θα εκτιμήσουμε το ∇u σε σχέση με το πηλίκο u/d, όπου d είναι η ελλειπτική απόσταση από το *Lipschitz* σύνορο. Οι εκτιμήσεις αυτές ουσιαστικά υποδηλώνουν ότι η $u(\cdot, t)$ είναι "σχεδόν" F-λύση της αντίστοιχης ελλειπτικής εξίσωσης για κάθε υπερεπίπεδο $t = t_0$.

Λήμμα 4.1. *Έστω u όπως στο Θεώρημα 3.1. Αν $D_{e_n}u \geq 0$ στο $Q_{1/2} \cap \Omega$ τότε υπάρχει σταθερά $C = C(n, L, \lambda, \Lambda, m, M)$ τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{C}\frac{u(x,t)}{d_{x,t}} \leq D_{e_n}u(x,t) \leq C\frac{u(x,t)}{d_{x,t}}$$

για κάθε $(x,t) \in Q_{1/2} \cap \Omega$.

Απόδειξη. Έστω u λύση της εξίσωσης $F(D^2u) - u_t = 0$. Αν γραμμικοποιήσουμε κατά τα γνωστά, τότε στην ουσία η u λύνει μια παραβολική εξίσωση με μεταβλητούς συντελεστές

$$\alpha_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} - u_t = 0$$

για $(x,t) \in Q_1 \cap \Omega$ όπου

$$\alpha_{ij}(x,t) = \int_0^1 F_{ij}(sD^2u)ds.$$

Έστω $(x,t) \in Q_{1/2} \cap \Omega$ και επιλέγουμε $r > 0$, $(\xi, \tau) \in Q_{1/2} \cap \partial\Omega$ τέτοια ώστε

$$(x,t) = A_r(\xi, \tau).$$

Τώρα

$$u(\underline{A}_r(\xi,\tau) - u(\xi + \delta e_n, \tau - \frac{3}{2}r^2) = \int_\delta^{br} D_{e_n} u(\xi + se_n, \tau - \frac{3}{2}r^2)ds$$

και από το Πόρισμα 4 της [Sf] έχουμε

$$\sup_{U_s} u \leq (\frac{2s}{r})^\alpha \sup_{U_r} u \tag{4.1}$$

για κάθε $s \in (0, r]$ όπου $\alpha > 0$ σταθερά και

$$U_s = [B_s(\xi) \times (\tau - s^2, \tau + s^2)] \cap (Q_{1/2} \cap \Omega).$$

Προφανώς $\bar{A}_r \notin U_r$ άρα από την ανισότητα *Harnack*

$$\sup_{U_s} u \leq Cu(\bar{A}_r(\xi, \tau))$$

ομοίως

$$u(\xi + \delta e_n, \tau - \frac{3}{2}r^2) \leq Cu(x,t)$$

για κάθε $(x,t) \in U_s$, άρα

$$u(\xi + \delta e_n, \tau - \frac{3}{2}r^2) \leq C(\frac{\delta}{r})^\alpha u(\bar{A}_r(\xi, \tau)). \tag{4.2}$$

Από την [WL1] αν u, v είναι λύσεις τότε $u - v \in S(\lambda, \Lambda)$ άρα

$$\frac{u(x+he_n,t)-u(x,t)}{h} \in S(\lambda, \Lambda)$$

και λόγω της κλειστότητας του S προκύπτει $D_{e_n}u \in S$. Τώρα

$$\int_\delta^{br} D_{e_n}u(\xi+se_n,\tau-\frac{3}{2}r^2)ds = (br-\delta)D_{e_n}u(\xi+\omega e_n,\tau-\frac{3}{2}r^2)$$
$$\leq brD_{e_n}u(\xi+\omega e_n,\tau-\frac{3}{2}r^2)$$

για $\omega \in (\delta, br)$. Επειδή $D_{e_n}u \in S$ και $D_{e_n}u \geq 0$ από $Harnack$ έχουμε

$$D_{e_n}u(\xi+\omega e_n,\tau-\frac{3}{2}r^2) \leq CD_{e_n}u(A_r(\xi,\tau)).$$

Από την άλλη χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1

$$u(\xi+\delta e_n,\tau-\frac{3}{2}r^2) \leq C(\frac{\delta}{r})^\alpha u(\bar{A}_r(\xi,\tau)) \leq$$
$$\leq C(\frac{\delta}{r})^\alpha u(\underline{A}_r(\xi,\tau)) \leq C(\frac{\delta}{r})^\alpha u(A_r(\xi,\tau))$$

άρα

$$u(A_r(\xi,\tau)) - u(\xi+\delta e_n,\tau-\frac{3}{2}r^2) \geq u(\underline{A}_r(\xi,\tau)) - (\frac{\delta}{r})^\alpha u(A_r(\xi,\tau)) \geq$$
$$\geq u(\bar{A}_r(\xi,\tau)) - (\frac{\delta}{r})^\alpha u(A_r(\xi,\tau)) \geq u(A_r(\xi,\tau)) - (\frac{\delta}{r})^\alpha u(A_r(\xi,\tau))$$

οπότε για δ αρκετά μικρό

$$\frac{1}{2}u(A_r(\xi,\tau)) \leq CrD_{e_n}u(A_r(\xi,\tau)). \tag{4.3}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την ανισότητα $Harnack$ για $\omega \in (br/2, br)$

$$CrD_{e_n}u(A_r(\xi,\tau)) \leq rD_{e_n}u(\xi+\omega e_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)$$

και
$$\int_{\frac{br}{2}}^{br} D_{e_n}u(\xi+se_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)ds=\frac{br}{2}D_{e_n}u(\xi+\omega e_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)$$
άρα από το Θεώρημα 3.1
$$\int_{\frac{br}{2}}^{br} D_{e_n}u(\xi+se_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)ds=u(\xi+bre_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)-u(\xi+\frac{br}{2}e_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)\leq$$
$$\leq u(\xi+bre_n,\tau+\frac{3}{2}r^2)\leq Cu(\xi+bre_n,\tau-\frac{3}{2}r^2)\leq u(\xi+bre_n,\tau)=Cu(A_r(\xi,\tau))$$
δηλαδή
$$rD_{e_n}u(A_r(\xi,\tau))\leq Cu(A_r(\xi,\tau)). \tag{4.4}$$
Επειδή $r\sim d_{x,t}$ από τις (4.3), (4.4) προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.2. *Έστω u όπως στο Θεώρημα 3.1. Τότε στο $Q_\delta\cap\Omega$ για κάποιο $\delta=\delta(n,L,\lambda,\Lambda,\frac{m}{M})$ ισχύει $D_{e_n}u\geq 0$.*

Απόδειξη. Έστω $u_1(x,t)=u(x,t)$ και $u_2(x,t)=Cv(x,t)$ όπου v είναι η μοναδική λύση του προβλήματος
$$\begin{cases} F(D^2v)-v_t=0, & Q_1\cap\Omega \\ v=1, & \partial_p(Q_1\cap\Omega) \\ v=0, & Q_1\cap\partial\Omega \end{cases}$$
Επιλέγουμε το C έτσι ώστε $u_1(A_{1/2}(0,0))=u_2(A_{1/2}(0,0))$, οπότε από το Λήμμα 3.2 για $\sigma=0$ έχουμε
$$\frac{1}{C}\leq\frac{u_1(x,t)}{u_2(x,t)}\leq C$$
με $(x,t)\in Q_{1/2}\cap\Omega$. Συγκρίνοντας την u_2 με τις e_n-μεταφορές έχουμε $D_{e_n}u_2>0$ στο $Q_1\cap\Omega$. Επειδή $\frac{u_1}{u_2}\in C^\alpha$ από το Πόρισμα 3.3 έχουμε για (x,t), $(\bar{x},\bar{t})\in$

$Q_{1/2} \cap \Omega$,
$$\left| \frac{u_1(x,t)}{u_2(x,t)} - \frac{u_1(\bar{x},\bar{t})}{u_2(\bar{x},\bar{t})} \right| \leq C(|x-\bar{x}| + |t-\bar{t}|^{1/2})^{\alpha}.$$
Έστω d η απόσταση του (x,t) από το ελεύθερο σύνορο και $\bar{x} = x + he_n$, $h \in (0, \frac{d}{2})$. Θέτουμε $K := \frac{u_1(\bar{x},t)}{u_2(\bar{x},t)}$ οπότε

$$|u_1(x,t) - Ku_2(x,t)| \leq u_2(x,t)h^{\alpha}.$$

Τώρα

$$u_1(x,t) - u_1(\bar{x},t) - K[u_2(x,t) - u_2(\bar{x},t)] = u_1(x,t) - u_1(\bar{x},t) -$$

$$- \frac{u_1(\bar{x},t)}{u_2(\bar{x},t)}[u_2(x,t) - u_2(\bar{x},t)] = u_1(x,t) - Ku_2(x,t)$$

άρα
$$|[u_1(\bar{x},t) - u_1(x,t)] - K[u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t)]| \leq Cu_2(x,t)h^{\alpha} \tag{4.5}$$

και από το Λήμμα 4.1

$$u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t) = \int_0^h D_{e_n}u_2(x+se_n,t)ds = hD_{e_n}u_2(x+\omega e_n,t)$$

$$\geq C\frac{h}{d}u_2(x+\omega e_n,t) \geq C\frac{h}{d}u_2(x,\underline{t})$$

για κάποιο $\underline{t} < t$. Αν τώρα $\frac{1}{C}$ είναι η σταθερά από το Πόρισμα 3.3 τότε

$$u_1(\bar{x},t) - u_1(x,t) - \frac{1}{C}[u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t)] \geq u_1(\bar{x},t) - u_1(x,t) - K[u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t)]$$

$$\geq -Cu_2(x,t)h^{\alpha} \geq -Cu_2(x,\underline{t})h^{\alpha} \geq -C\frac{d}{h^{1-\alpha}}[u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t)].$$

Έστω $C_1 = \frac{1}{C}$ και d αρκετά μικρό έτσι ώστε $d^{\alpha^2} \leq \frac{C_1}{2C}$, τότε

$$u_1(\bar{x},t) - u_1(x,t) \geq (C_1 - C\frac{d}{h^{1-\alpha}})[u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t)] \geq \frac{C_1}{2}[u_2(\bar{x},t) - u_2(x,t)]$$

$$\geq C\frac{h}{d}u_2(x,\underline{t}) \geq C\frac{h}{d}u_1(x,\underline{t}) \geq C\frac{h}{d}u_1(x,t).$$

Χρησιμοποιώντας τις $C^{1,\alpha}$ εκτιμήσεις [WL1], [WL2] έχουμε

$$|Du_1(x+\eta e_n,t) - Du_1(x,t)| \leq \frac{C}{d^{1+\alpha}} \sup_{Q_{\frac{d}{2}}(x,t)} |u_1||\eta|^\alpha$$

για κάθε $\eta \in [0,h]$ και $h = d^{1+\alpha} < \frac{d}{16}$, οπότε από το Θεώρημα 3.1 και την ανισότητα *Harnack*

$$|Du_1(x+\eta e_n,t) - Du_1(x,t)| \leq C\frac{h^\alpha}{d^{1+\alpha}}u_1(x,t) \leq C\frac{h^{\alpha-1}}{d^\alpha}[u_1(\bar{x},t) - u_1(x,t)].$$

Οπότε

$$u_1(\bar{x},t)-u_1(x,t) = \int_0^h D_{e_n}u(x+\eta e_n,t)d\eta \leq \int_0^h |D_{e_n}u(x+\eta e_n,t)-D_{e_n}u_1(x,t)|d\eta$$

$$+hD_{e_n}u_1(x,t).$$

Επιλέγοντας το d έτσι ώστε $d^{\alpha^2} < \frac{1}{2C}$ προκύπτει με $h = d^{1+\alpha}$

$$hD_{e_n}u_1(x,t) \geq (1 - \frac{Ch^\alpha}{d^\alpha})[u_1(\bar{x},t) - u_1(x,t)] \geq 0,$$

δηλαδή

$$D_{e_n}u_1(x,t) \geq 0.$$

□

Λήμμα 4.3. *Έστω u όπως στο Θεώρημα 3.1. Τότε για κάθε κατεύθυνση* $\mu = \alpha e_n + \beta e_{n+1}$ *με* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $0 < tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha}) < \frac{1}{2}cot^{-1}(L)$ *για αρκετά μικρό* $\delta = \delta(n, L, \lambda, \Lambda, m, M, ||\nabla u||_{L^2})$ *ισχύει*

$$D_\mu u(x,t) \geq 0$$

για $(x,t) \in Q_\delta \cap \Omega$.

Απόδειξη. Έστω $\bar{\mu} = \bar{\alpha}e_n + \bar{\beta}e_{n+1}$ με $\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1$, $0 < tan^{-1}(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}) < \frac{1}{2}cot^{-1}(L)$. Για $0 < h < h_0$, h_0 μικρό θέτουμε

$$w_h^-(p) := \left[\frac{u(p+h\bar{\mu}) - u(p)}{h}\right]^-$$

για κάθε $p \in Q_{1-h_0} \cap \Omega$. Η w_h^- είναι μη αρνητική και υπολύση της εξίσωσης $F(D^2 w) - w_t = 0$ στο $Q_{1-h_0} \cap \Omega$. Πράγματι, επειδή η F είναι κοίλη τότε $F(D^2(\cdot)) = \inf_{\alpha \in A} L_\alpha(\cdot)$ και με $u_1 = u(p+h\bar{\mu})$, $u_2 = u(p)$ λύσεις έχουμε

$$L_\alpha(u_1 - u_2) = L_\alpha u_1 - L_\alpha u_2 \leq L_\alpha u_1 - F(D^2 u_2) = L_\alpha u_1$$

για κάθε α άρα

$$F(D^2(u_1 - u_2)) \leq F(D^2 u_1) = 0$$

δηλαδή η $u_1 - u_2$ είναι υπερλύση με την έννοια του ιξώδους. Από το Πόρισμα 2.7 [CC] προκύπτει ότι η $[u_1 - u_2]^-$ θα είναι υπολύση. Θεωρούμε την συνάρτηση v_h ως τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} F(D^2 v_h) - (v_h)_t = 0, & Q^* \cap \Omega \\ v_h = w_h^-, & \partial_p(Q^* \cap \Omega) \end{cases}$$

όπου $Q* \subset Q_{1-h_0}$ τέτοιο ώστε $\nabla u \in L^2(\partial_p Q*)$. Από αρχή μεγίστου προφανώς

$$w_h^-(p) \leq v_h(p)$$

για κάθε $p \in Q^* \cap \Omega$. Επεκτείνουμε τη w_h^- με μηδέν στο $Q_{1-h_0} \setminus \Omega$ ($w_h^- = 0$ στο $Q_{1-h_0} \cap \partial\Omega$) και θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση z_h ως τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta z_h - (z_h)_t = 0, & Q^* \\ z_h = w_h^-, & \partial_p(Q^*) \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι από τον ορισμό της v_h

$$0 = F(D^2 v_h) - (v_h)_t \leq \Delta v_h - (v_h)_t$$

δηλαδή είναι υποθερμική με την έννοια του ιξώδους. Ξανά η αρχή μεγίστου θα δώσει

$$w_h^-(p) \leq v_h(p) \leq z_h(p) \tag{4.6}$$

για κάθε $p \in Q^* \cap \Omega$. Κοιτώντας τώρα τον ορισμό της z_h και τις L^2 εκτιμήσεις για το ∇u μπορούμε να γράψουμε

$$z_h(p) = \int_{\partial_p Q*} w_h^-(q) d\omega^p \leq ||w_h^-||_{L^2(\partial_p Q*)} \cdot ||\frac{d\omega^p}{dH^n}||_{L^2(\partial_p Q*)}$$

$$\leq c||(D_{\bar{\mu}} u)^-||_{L^2(\partial_p Q*)} \cdot ||\frac{d\omega^p}{dH^n}||_{L^2(\partial_p Q*)}.$$

Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.2 με $\sigma = 0$ για τις v_h, u οπότε

$$\frac{v_h(p)}{u(p)} \leq C \frac{v_h(A_{1/2})}{u(A_{1/2})}$$

και από την (4.6)

$$w_h^-(p) \leq c \frac{z_h(A_{1/2})}{u(A_{1/2})} u(p).$$

Αν αφήσουμε το $h \longrightarrow 0$ έχουμε τη ζητούμενη εκτίμηση για τη παράγωγο

$$(D_{\bar{\mu}} u)^-(x,t) \leq C u(x,t)$$

ή αλλιώς

$$D_{\bar{\mu}} u(x,t) \geq -C u(x,t)$$

για κάθε $(x,t) \in Q_{1/2} \cap \Omega$.

Αν $\mu = \alpha e_n + \beta e_{n+1}$ όπου $\alpha = \sqrt{1+\bar{\alpha}} \setminus \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2(1+\bar{\alpha})}$ από το Λήμμα 4.1 έχουμε

$$D_\mu u(x,t) = D_{e_n} u(x,t) + D_{\bar{\mu}} u(x,t) \geq (\frac{c}{d_{x,t}} - C) u(x,t)$$

και με $d_{x,t}$ αρκετά μικρό η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Παρατήρηση. Τα Λήμματα 4.1 και 4.2 ισχύουν ακόμα και αν αντικαταστήσουμε την e_n κατεύθυνση με οποιαδήποτε χωριακή κατεύθυνση με γωνία από το e_n μικρότερη από $cot^{-1}(L)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3 προκύπτει ένας ολόκληρος κώνος $\Gamma(e_n, \bar{\theta}) := \{\mu \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mu| = 1, e_n \cdot \mu < cos\bar{\theta}\}$ με $\bar{\theta} = \frac{1}{2} cot^{-1}(L)$ όπου η λύση u είναι μονότονη. Αποδείξαμε δηλαδή το παρακάτω Θεώρημα Μονοτονίας.

Θεώρημα 4.4. *Έστω u όπως στο Λήμμα 4.3, τότε για κάθε $\mu \in \Gamma(e_n, \bar{\theta})$ όπου $\bar{\theta} = \frac{1}{2} cot^{-1}(L)$, ισχύει*

$$D_\mu u(x,t) \geq 0$$

για $(x,t) \in Q_\delta \cap \Omega$ με $\delta = \delta(n, L, \lambda, \Lambda, \frac{m}{M}, ||\nabla u||_{L^2})$ αρκετά μικρό.

Η ύπαρξη του κώνου μονοτονίας στο χώρο και το χρόνο υποδηλώνει έλεγχο του u_t ως προς το $\nabla_x u$ και έλεγχο του $\nabla_x u$ ως προς τη κατά κατεύθυνση παράγωγο $D_{e_n} u$. Από το Λήμμα 4.1 προκύπτει

Πόρισμα 4.5. *Έστω u όπως στο Θεώρημα 3.1, τότε υπάρχουν σταθερές $C_i = C_i(n, L, \lambda, \Lambda, m, M)$, $i = 1, 2$ τέτοιες ώστε*

$$C_1 \frac{u(x,t)}{d_{x,t}} \leq |\nabla u(x,t)| \leq C_2 \frac{u(x,t)}{d_{x,t}}$$

για κάθε $(x,t) \in K_1 \cap \Omega$.

Όπως είδαμε και στην εισαγωγή, βασικό ρόλο στην απόδειξη της ομαλότητας της λύσης έχουν οι συναρτήσεις $w_+ := u+u^{1+\varepsilon}$ και $w_- := u-u^{1+\varepsilon}$ για τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο μονοτονίας των Alt, Caffarelli και Friedman. Παρακάτω αποδεικνύουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές λύνουν την αντίστοιχη ελλειπτική εξίσωση σε χωρία κοντά στο ελεύθερο σύνορο και t σταθερό.

Λήμμα 4.6. *Έστω η u ικανοποιεί το Θεώρημα 3.1. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ που εξαρτώνται απο τα n, L, λ, Λ έτσι ώστε οι*

$$w_+ := u + u^{1+\varepsilon}, \qquad w_- := u - u^{1+\varepsilon}$$

είναι υπολύση και υπερλύση αντίστοιχα της εξίσωσης

$$F(D^2 w) = 0$$

στο $Q_\delta \cap \Omega \cap \{t = 0\}$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε $F(D^2 w_+) \geq 0$. Η F είναι κοίλη άρα μπορούμε να γράψουμε

$$F(D^2 w_+) = \inf_{\alpha \in A} L_\alpha w_+$$

όπου L_α είναι ομοιόμορφα ελλειπτικοί γραμμικοί τελεστές με σταθερούς συντελεστές και τις ίδιες σταθερές ελλειπτικότητας λ, Λ με την F. Έστω λοιπόν $\alpha \in A$ τότε

$$L_\alpha w_+ = L_\alpha u + L_\alpha u^{1+\varepsilon} = [1 + (1+\varepsilon)u^\varepsilon] L_\alpha u + (1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon - 1} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^\alpha u_{x_i} u_{x_j}$$

$$\geq [1 + (1+\varepsilon)u^\varepsilon] L_\alpha u + (1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1} \lambda |\nabla_x u|^2$$

$$\geq [1+(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]F(D^2u)+(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}\lambda|\nabla_x u|^2$$

$$=[1+(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]u_t+(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}\lambda|\nabla_x u|^2$$

για κάποιο $\varepsilon>0$ που θα επιλεγεί παρακάτω. Από το Πόρισμα 4.5 έχουμε $|\nabla_x u(x,0)|\leq C\frac{u(x,0)}{d_x}$ και $|u_t(x,0)|\leq C\frac{u(x,0)}{d_x}$ όπου $d_x=d_{x,0}$ και $C=C(n,L,\lambda,\Lambda)$. Τώρα από την ανισότητα *Harnack* και τον κώνο μονοτονίας για $N=N(n,L,\lambda,\Lambda)$ αρκετά μεγάλο θα έχουμε

$$u(x,0)\geq C_0u(A_r(0,0))d_x^N$$

με $C_0=C_0(n,L,\lambda,\Lambda)$, άρα

$$L_\alpha w_+\geq -[1+(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]c\frac{u(x,0)}{d_x}+(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}c\frac{u^2}{d_x^2}\geq[-\bar{C}+C\frac{u^{\varepsilon}}{d_x}]\frac{u}{d_x}$$

$$\geq[-\bar{C}+C\frac{d^{\varepsilon N}}{d_x}]\frac{u}{d_x}\geq 0$$

αν επιλέξουμε $\varepsilon<\frac{1}{N}$ και d_x αρκετά μικρό έχουμε το ζητούμενο. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η w_- είναι υπερλύση της εξίσωσης. Πράγματι έστω $\alpha\in A$,

$$L_\alpha w_-=L_\alpha u-L_\alpha u^{1+\varepsilon}=[1-(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]L_\alpha u-(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{\alpha}u_{x_i}u_{x_j}$$

$$\leq[1-(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]L_\alpha u-(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}\lambda|\nabla_x u|^2$$

άρα

$$F(D^2w_-)\leq[1-(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]F(D^2u)-(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}\lambda|\nabla_x u|^2$$

$$=[1-(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]u_t-(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}\lambda|\nabla_x u|^2$$

$$\leq[1-(1+\varepsilon)u^{\varepsilon}]c\frac{u}{d}-(1+\varepsilon)\varepsilon u^{\varepsilon-1}c\frac{u^2}{d^2}$$

$$\leq [C - (1+\varepsilon)C\frac{u^\varepsilon}{d}]\frac{u}{d}$$
$$\leq [C - (1+\varepsilon)C\frac{d^{\varepsilon N}}{d}]\frac{u}{d} \leq 0$$

αν επιλέξουμε $\varepsilon < \frac{1}{N}$ και d αρκετά μικρό. $\square$

Κεφάλαιο 5

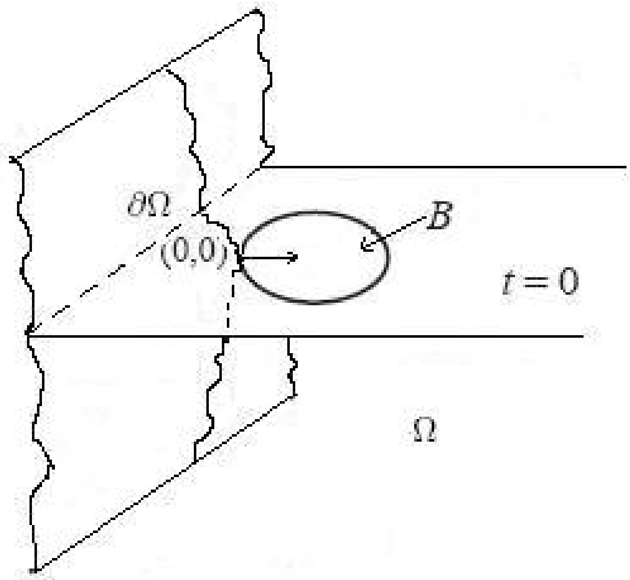
Ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης κοντά στο ελεύθερο σύνορο. Ο συντελεστής του γραμμικού όρου στο ανάπτυγμα της λύσης θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε την ομαλότητα της λύσης στο επόμενο κεφάλαιο. Στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το σύνορο (ελεύθερο σύνορο) στο οποίο η λύση μηδενίζεται είναι *Lipschitz* στο χώρο και το χρόνο. Από την άλλη όμως είναι δυνατόν να αποδείξουμε παρόμοιο θεώρημα σε γενικότερα χωρία, με τα οποία σκοπεύουμε να ασχοληθούμε σε μελλοντική εργασία [M3].

Λήμμα 5.1. *Έστω u λύση στο $K_1 \cap \Omega$ και μονότονη σε κάθε διεύθυνση $\mu \in \Gamma(e_n, \theta)$ με $cot(2\theta) > L$. Αν υπάρχει n- διάστατη μπάλα $B \subset K_1 \cap \Omega \cap \{t = 0\}$ (αντίστοιχα $B \subset K_1 \cap \Omega^c \cap \{t = 0\}$) τέτοια ώστε $\bar{B} \cap \partial\Omega = \{(0, 0)\}$ τότε κοντά στην αρχή στο $K_1 \cap \Omega$*

$$u(x, 0) = \alpha(x, \nu)^+ + o(|x|)$$

για $\alpha \in (0, \infty]$ (αντίστοιχα $\alpha \in [0, \infty)$) όπου με $\alpha = \infty$ εννοούμε ότι η u αυξάνεται γρηγορότερα από κάθε γραμμική συνάρτηση και με ν συμβολίζουμε το εσωτερικό (αντίστοιχα εξωτερικό), στη διεύθυνση της ακτίνας της B, διάνυσμα στο $(0, 0)$.



Σχήμα 5.1: Η επιλογή της μπάλας B

Απόδειξη. Έστω w_+, w_- όπως ορίστηκαν στο Λήμμα 4.6. Επειδή $u^{1+\varepsilon} = o(u)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$w_-(x,0) = \alpha(x,\nu)^+ + o(|x|)$$

$$(w_+(x,0) = \alpha(x,\nu)^+ + o(|x|)).$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τη περίπτωση $B \subset \Omega \cap \{t=0\}$. Έστω r η ακτίνα της B. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε $\nu = e_n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = x_n + \frac{1}{2a\lambda}x_n^2 - \frac{1}{2(n-1)a\Lambda}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2,$$

όπου $a = \frac{r}{2(n-1)}$. Εκ κατασκευής η φ είναι υπολύση διότι

$$F(D^2\varphi) = \inf_{\beta \in \mathcal{A}} L_\beta \varphi$$

και για κάθε $\beta \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$L_\beta \varphi := \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \varphi_{x_i x_j} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} \varphi_{x_i x_i} = \beta_{nn} \frac{1}{a\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ii} \frac{1}{(n-1)a\Lambda} \geq 0$$

άρα και

$$F(D^2\varphi) \geq 0.$$

Επίσης αν $\delta > 0$ αρκετά μικρό ισχύει

$$B_\delta(0) \cap \{\varphi(x) > 0\} \subset B_\delta(0) \cap B.$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ο κύκλος B είναι $x_1^2 + .. + x_{n-1}^2 + (x_n - r)^2 = r^2$ τότε από $Taylor$ έχουμε

$$x_n \sim \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Τώρα

$$\varphi(x) > x_n + \frac{1}{2a} \frac{x_n^2}{\beta_{nn}} - \frac{1}{2(n-1)a} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\beta_{ii}} x_i^2 \geq x_n + \frac{1}{2a} \frac{x_n^2}{\beta_{nn}} - \frac{1}{2(n-1)a} \frac{1}{\beta_{kk}} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Επίσης με

$$x_n + \frac{1}{2a} \frac{x_n^2}{\beta_{nn}} - \frac{1}{2(n-1)a} \frac{1}{\beta_{kk}} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0$$

έχουμε

$$x_n = -a\beta_{nn} + \sqrt{(a\beta_{nn})^2 + \frac{\beta_{nn}}{(n-1)\beta_{kk}} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \sim \frac{1}{(n-1)a\beta_{kk}} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Από τη προηγούμενη επιλογή του a προκύπτει ότι η τελευταία παραβολή περιέχεται στη τομή της B με το $B_\delta(0)$, άρα

$$B_\delta(0) \cap \{\varphi(x) > 0\} \subset B_\delta(0) \cap B.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τη ζητούμενη σχέση στο

$$B_\delta(0) \cap \{\varphi(x) > 0\}.$$

Από το Θεώρημα σύγκρισης επειδή η w_- είναι υπερλύση και η φ είναι υπολύση, το σύνολο $\{m : w_-(x,0) \geq m\varphi(x)\}$ είναι μη κενό. Έστω

$$\alpha_k := \sup\{m : w_-(x,0) \geq m\varphi(x), \forall x \in B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap \{\varphi > 0\}\}$$

επειδή

$$\{m : w_- \geq m\varphi, \forall x \in B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap B\} \subseteq \{m : w_- \geq m\varphi, \forall x \in B_{\frac{\delta}{2^{k+1}}}(0) \cap B\}$$

η α_k είναι αύξουσα και θέτουμε

$$\alpha := sup\alpha_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} \alpha_k.$$

Αν $\alpha = \infty$, τότε τελειώσαμε.

Αν $\alpha < \infty$, τότε επειδή $\alpha := sup\alpha_k$ έχουμε

$$w_-(x,0) \geq \alpha(x,\nu) + o(|x|)$$

στο $B_r(0) \cap \{\varphi(x) > 0\}$.

Έστω ότι υπάρχει ακολουθία σημείων x_k με $x_k \to 0$ τέτοια ώστε

$$w_-(x_k, 0) - \alpha(x_k, \nu) \geq \eta|x_k|$$

για $\eta > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας πάρουμε $|x_k| = \delta/2^k$ και $k \geq k_0$, για k_0 αρκετά μεγάλο που θα επιλέξουμε παρακάτω.

Έστω h η αρμονική συνάρτηση στο $B_{\delta/2^{k_0}}(0) \cap \Omega$ τέτοια ώστε $h = w_+$ στο $\partial(B_{\delta/2^{k_0}}(0) \cap \Omega)$. Τότε

$$F(D^2h) = \inf_{\alpha \in A} L_\alpha \leq \Delta h = 0$$

άρα η h είναι υπερλύση με την έννοια του ιξώδους. Όμως έχουμε δείξει ότι η w_+ είναι υπολύση, άρα από το Θεώρημα 5.3 του [CC] προκύπτει

$$w_+ - h \in \underline{S}(\frac{\lambda}{n}, \Lambda),$$

οπότε το γεγονός ότι $h = w_+$ στο σύνορο θα δώσει

$$w_+(x, 0) \leq h(x)$$

για $x \in B_{\frac{\delta}{2^{k_0}}}(0) \cap \Omega$. Επίσης από την κατασκευή των συναρτήσεων w_+ και w_- έχουμε

$$w_+ = u + u^{1+\varepsilon} \geq u - u^{1+\varepsilon} = w_-,$$

άρα

$$h(x) \geq w_+(x, 0) \geq w_-(x, 0)$$

για κάθε $x \in B_{\frac{\delta}{2^{k_0}}}(0) \cap \Omega$, οπότε και

$$h(x_k) - \alpha(x_k, \nu) \geq \eta|x_k|$$

ή

$$h(x_k) - \alpha_k(x_k, \nu) \geq \eta |x_k|.$$

Τώρα από την ανισότητα $Harnack$ σε ένα σταθεροποιημένο κομμάτι του $\partial B_{\frac{\delta}{2^k}}(0)$ θα έχουμε

$$h(x) - \alpha_k(x, \nu) \geq C(h(x_k) - \alpha(x_k, \nu)) \geq C\eta |x_k|,$$

διότι η $h(x) - \alpha_k(x, \nu)$ είναι αρμονική και θετική από τον ορισμό των α_k. Ο τύπος του $Poisson$ θα δώσει

$$H(x) = h(x) - \alpha_k(x, \nu) = \int_{\partial(B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap \{\varphi > 0\})} H(y) d\omega = \int_{\Sigma} H d\omega + \int_{\Sigma'} H d\omega$$

$$\geq \int_{\Sigma} H d\omega + \omega(\Sigma') o(|x|) \geq C\eta |x_k| \omega(\Sigma) + o(|x|)$$

όπου Σ το κομμάτι του $\partial B_{\frac{\delta}{2^k}}(0)$ που προέκυψε για να εφαρμόσουμε την ανισότητα $Harnack$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$h(x) - \alpha_k(x, \nu) \geq \bar{\eta}(x, \nu) + o(|x|)$$

για $\bar{\eta} > 0$. Επιλέγουμε το k_0 αρκετά μεγάλο έτσι ώστε για $k \geq k_0$ να έχουμε

$$w_+(x, 0) \leq (1 + c^{-k}) w_-(x, 0)$$

για κάθε $x \in B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap \Omega$ και από την αρχή μεγίστου μπορούμε, για $k \geq k_0$, να γράψουμε

$$h(x) \leq (1 + c^{-k}) w_-(x)$$

για $x \in B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap \{\varphi > 0\}$, οπότε

$$w_-(x, 0) \geq \left(\frac{\alpha_k + \bar{\eta}}{1 + c^{-k}} \right) (x, \nu) + o(|x|)$$

στο $B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap \{\varphi > 0\}$, άτοπο από τον ορισμό των α_k για μεγάλο k.

Αν τώρα $B \subset \Omega^c \cap \{t = 0\}$ και r η ακτίνα της B, επιλέγουμε δ αρκετά μικρό και ορίζουμε

$$\psi(x) := (x, \nu) - \frac{r}{2a}(x, \nu)^2 + \frac{1}{2(n-1)a}\sum_{i=1}^{n-1}(x, \mu_i)^2$$

όπου $\mu_1, ...\mu_{(n-1)}, \nu$ είναι τα ορθοκανονικά διανύσματα του συστήματος συντεταγμένων, ν είναι το εξωτερικό ακτινικό διάνυσμα στην αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση ψ είναι αρμονική άρα και υπερλύση με την έννοια του ιξώδους. Ορίζουμε

$$\alpha_k := \inf\{m : \tilde{w}_+(x, 0) \leq m\psi(x), \forall x \in B_{\frac{\delta}{2^k}}(0) \cap \{\psi > 0\}\}$$

όπου

$$\tilde{w}_+(x, 0) = \begin{cases} w_+(x, 0), & x \in \Omega \cap B_\delta(0) \\ 0, & x \notin \Omega \cap B_\delta(0) \end{cases}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως πριν. □

Λήμμα 5.2. *Έστω u λύση στο $K_1 \cap \Omega$ και μονότονη σε κάθε διεύθυνση $\mu \in \Gamma(e_n, \theta)$ με $cot(2\theta) > L$. Αν υπάρχει $(n+1)$- διάστατη μπάλα $B^{(n+1)} \subset \Omega$ (αντίστοιχα $B^{(n+1)} \subset \Omega^c$) τέτοια ώστε $B^{n+1} \cap \partial\Omega = \{(0, 0)\}$ τότε κοντά στην αρχή και για $t \leq 0$,*

$$u(x, t) \geq (\beta t + \alpha(x, \nu))^+ + o(d(x, t))$$

$$(\alpha\nu\tau.\ u(x, t) \leq (\beta t + \alpha(x, \nu))^+ + o(d(x, t)))$$

για κάποιο $\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in (0, +\infty]$ (αντ. $\alpha \in [0, +\infty)$), όπου με ν συμβολίζουμε το εσωτερικό (αντ. εξωτερικό) διάνυσμα στη διεύθυνση της ακτίνας της $B^{(n+1)} \cap \{t = 0\}$ στο $(0, 0)$, και $d(x, t) = \sqrt{|x|^2 + t^2}$.

Απόδειξη. Έστω πρώτα $B^{(n+1)} \subset \Omega$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας $\nu_x = e_n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi(x,t) := \alpha x_n + \beta t + \frac{\beta}{2\lambda} x_n^2 - c_1(t^2 + \frac{t|x|^2}{\lambda n}) - c_2(\frac{|x'|^2}{\Lambda 4^n} - \frac{x_n^2}{\lambda})$$

όπου α όπως στο Λήμμα 5.1 και χωρίς βλάβη $\beta \geq 0$. Οι σταθερές $c_1 >> 0$, $c_2 > 0$ επιλέγονται έτσι ώστε η υπερεπιφάνεια $\psi(x,t) = 0$ να εφάπτεται στην $B^{(n+1)}$ στο $(0,0)$ και το σύνολο $\{\psi(x,t) > 0\}$ να είναι υποσύνολο της $B^{(n+1)}$ σε μια γειτονιά του $(0,0)$, ας πούμε $B_\varepsilon^{(n+1)}(0,0)$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι για $(x,t) \in \{\psi(x,t) > 0\} \cap B_\varepsilon^{(n+1)}(0,0)$,

$$F(D^2\psi(x,t)) - \psi_t(x,t) \geq 0$$

διότι η F είναι κοίλη. Το Λήμμα θα προκύψει αν κοντά στο $(0,0)$ για $t \leq 0$ δείξουμε ότι

$$u(x,t) \geq \psi(x,t) + o(d(x,t))$$

με $(x,t) \in \{\psi(x,t) > 0\} \cap B_\varepsilon^{(n+1)}(0,0)$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ μικρό και για $h > 0$ επίσης μικρό, κοντά στην αρχή $(0,0)$,

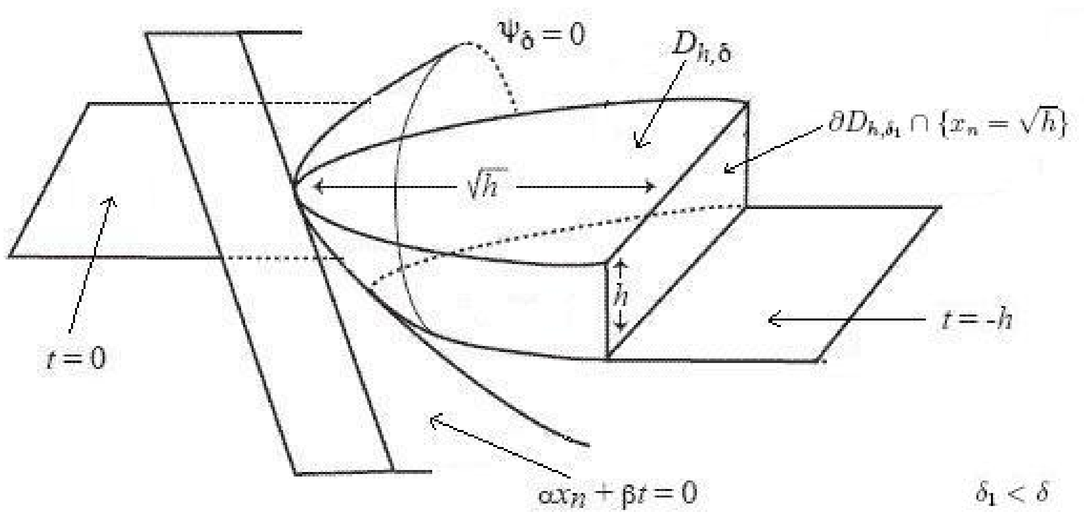
$$u(x,t) \geq \psi_\delta(x,t) + o(d(x,t))$$

στο σύνολο

$$D_{h,\delta} := \left\{ \ \psi_\delta(x,t) > 0 \ \right\} \cap \left\{ \ |x_n| < \sqrt{h}, -h \leq t \leq 0 \ \right\}$$

όπου η συνάρτηση ψ_δ ορίζεται ως εξής

$$\psi_\delta(x,t) := \psi(x,t) - \delta(x_n + \frac{\beta}{2\alpha\Lambda} x_n^2 + \frac{\beta}{\alpha} t).$$



Σχήμα 5.2: Η επιλογή της συνάρτησης ψ_δ

Παρατηρείστε ότι αφού η F είναι κοίλη και άρα μπορεί να γραφεί ως infimum ομοιόμορφα ελλειπτικών γραμμικών τελεστών με σταθερούς συντελεστές, η ψ_δ με τον τρόπο που ορίστηκε είναι υπολύση, δηλαδή $F(D^2\psi_\delta) - (\psi_\delta)_t \geq 0$. Έστω τώρα $\delta_1 > 0$ με $\delta_1 < \delta$.

1) Στο $\partial D_{h,\delta_1} \cap \{\psi_{\delta_1}(x,t) = 0\}$ έχουμε

$$u(x,t) - \psi_{\delta_1}(x,t) = u(x,t) \geq 0.$$

2) Στο $\partial D_{h,\delta_1} \cap \{x_n = \sqrt{h}\}$ και στο $\partial D_{h,\delta_1} \cap \{(x,-h) : x_n > (cot\bar{\theta})h\}$ από τον κώνο μονοτονίας και το προηγούμενο Λήμμα θα προκύψει

$$u(x', x_n, t) - \psi_{\delta_1}(x,t) \geq u(x', x_n - (cot\theta)h, 0) - \psi_{\delta_1}(x,t) \geq -ch + o(|x|) + o(h)$$

για $0 < \theta < \bar{\theta}$.

3) Τέλος στο $\partial D_{h,\delta_1} \cap \{(x,-h) : x_n \leq (cot\bar{\theta})h\}$ ισχύει

$$u(x,t) - \psi_{\delta_1}(x,t) \geq -ch + o(d(x,t))$$

διότι $u \sim o(d(x,t))$ και $\psi_{\delta_1} = -ch + o(h)$.

Έστω τώρα $g(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} g_t(x,t) - \mathcal{M}^-(D^2 g(x,t)) = 0, & (x,t) \in D_{h,\delta_1} \\ g(x,t) = -\bar{c}h, & (x,t) \in \partial D_{h,\delta_1} \setminus \{\psi_{\delta_1}(x,t) = 0\} \\ g(x,t) = 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}. \end{cases}$$

Αν επιλέξουμε το $\bar{c}$ αρκετά μεγάλο από αρχή μεγίστου θα έχουμε

$$u(x,t) - \psi_{\delta_1}(x,t) \geq g(x,t)$$

για $(x,t) \in D_{h,\delta_1}$. Πράγματι $H = u - \psi_{\delta_1} \in \bar{S}$ άρα $\mathcal{M}^-(D^2 H) - H_t \leq 0$, οπότε και $H - g \in \bar{S}$. Αν τώρα $\bar{c}$ είναι αρκετά μεγάλο στο σύνορο θα έχουμε $H - g \geq -ch + o(d(x,t)) + \bar{c}h \geq 0$.

Από εσωτερικές εκτιμήσεις έχουμε $|\nabla_x g(x,t)| \leq \frac{c}{\sqrt{h}} sup|g| = c\sqrt{h}$ στο $D_{h/2,\delta_1}$ δηλαδή και $g(x,t) \geq -c\sqrt{h}x_n$ στο $D_{h/2,\delta_1}$ άρα

$$u(x,t) - \psi_{\delta_1}(x,t) \geq -c\sqrt{h}x_n + o(d(x,t))$$

στο $D_{h/2,\delta_1}$. Επιλέγοντας το h έτσι ώστε $c\sqrt{h} < \delta - \delta_1$ θα προκύψει το ζητούμενο

$$u(x,t) \geq \psi(x,t) + o(d(x,t))$$

στο $D_{h/2,\delta_1}$.

Στη δεύτερη περίπτωση όπου $B^{(n+1)} \subset \Omega^c$, θέτουμε $\tilde{\psi}(x,t) = -\psi(-x,t)$ και παρατηρούμε ότι κοντά στο $(0,0)$ ισχύει ότι $\{\tilde{\psi} < 0\} \subset B^{(n+1)}$.
Επεκτείνουμε την u με μηδέν στο $\partial\Omega$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω, οπότε δείχνουμε κοντά στο $(0,0)$ για $t \leq 0$ ότι

$$u(x,t) \leq \tilde{\psi}(x,t) + o(d(x,t))$$

στο $\{\tilde{\psi} > 0\}$. $\square$

Το προηγούμενο λήμμα μπορεί να αποδειχθεί κοντά στην αρχή και για $t > 0$.

Κεφάλαιο 6

Ομαλότητα της Λύσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε το Θεώρημα 2.4. Αρκεί να δείξουμε ότι το $|\nabla u^+|$ είναι φραγμένο (τροποποιώντας ελάχιστα την απόδειξη, μπορούμε να δείξουμε το ίδιο και για το $|\nabla u^-|$). Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι η κατασκεύη μιας υπολύσης στο πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου σύμφωνα με τον Ορισμό 2.6, της οποίας το ελεύθερο σύνορο έχει ταχύτητα όσο μεγάλη θέλουμε (στη περίπτωση που το $|\nabla u^+|$ δεν είναι φραγμένο) και η οποία βρίσκεται γνήσια κάτω από τη λύση με την έννοια του ιξώδους. Από την άλλη όμως το ελεύθερο σύνορο της u είναι *Lipschitz* δηλαδή έχει πεπερασμένη ταχύτητα οπότε τα γραφήματα της λύσης και της υπολύσης θα πρέπει να τέμνονται.

Στο τέλος της παραγράφου χρησιμοποιώντας την ιδέα στην απόδειξη της ομαλότητας της λύσης, θα εξετάσουμε το (ασυμπτωτικό) τρόπο με τον οποίο ικανοποιείται η συνθήκη πάνω στο ελεύθερο σύνορο (ή ειδικότερα η συνθήκη του Stefan) για την λύση στο πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου με την έννοια του ιξώδους.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4. Έστω το σημείο $(x_0, t_0) \in \Omega^+$ βρίσκεται σε απόσταση d από το ελεύθερο σύνορο όπου

$$d < \frac{1}{2} dist\left((x_0, t_0), \partial_p D_1\right)$$

και αρκετά μικρό έτσι ώστε το Θεώρημα μονοτονίας της λύσης και το Λήμμα 5.1 να μπορούν να εφαρμοστούν. Έστω τώρα ότι η $(n+1)$-διάστατη μπάλα $B_d^{n+1}(x_0, t_0)$ ακουμπάει το ελεύθερο σύνορο στην αρχή των αξόνων και $h := dist((x_0, 0), (0, 0))$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει σταθερά c που εξαρτάται από την *Lipscitz* σταθερά του $\partial\Omega^+$ τέτοια ώστε $cd \leq h \leq d$. Ας θέσουμε τώρα $u(x_0, 0) = Mh$ και κοιτώντας το Λήμμα 4.6 βλέπουμε ότι οι w_+ και w_- είναι υπολύση και υπερλύση αντίστοιχα. Επειδή η w_+ είναι υφαρμονική με την έννοια του ιξώδους για $t = 0$ έχουμε

$$w_+(x_0, 0) \leq \fint_{B_{h/4}(x_0)} w_+.$$

Αν πάρουμε το k αρκετά μεγάλο και το h ακόμα μικρότερο (αν χρειαστεί), για $t = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} & Mh \leq u(x_0, 0) \leq w_+(x_0, 0) \leq \fint_{B_{h/4}(x_0)} w_+ \leq (1 + c^{-k}) \fint_{B_{h/4}(x_0)} w_- \\ & \leq C \inf_{B_{h/4}(x_0)} w_-(x). \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί ως εξής: έστω x_1 το σημείο στο οποίο λαμβάνεται το $\inf_{B_{h/4}(x_0)} w_-(x)$, τότε

$$\begin{aligned} w_-(x_1, 0) & \geq \fint_{B_r(x_1)} w_- \geq \fint_{B_R(x_1)} w_- = \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x_1)} w_- \geq \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_{h/4}(x_0)} w_- \\ & = \frac{2^n}{w_n h^n} \int_{B_{h/4}(x_0)} w_- = \frac{2^n}{w_n h^n} \int_{B_{h/4}(x_0)} w_-. \end{aligned}$$

Λύνουμε τώρα το πρόβλημα

$$\begin{cases} F(D^2 H) = 0, & B_h(x_0) \setminus B_{h/4}(x_0) \\ H = 0, & \partial B_h(x_0) \\ H = CMh, & \partial B_{h/4}(x_0) \end{cases}$$

οπότε από αρχή μεγίστου, επειδή η H είναι λύση, η w_- είναι υπερλύση και $H - w_- \leq 0$ στο σύνορο, θα έχουμε

$$w_-(x) \geq H(x)$$

για κάθε $x \in B_h(x_0) \setminus B_{h/4}(x_0)$.

Επιλέγουμε τώρα ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε $x_0 = |x_0|e_n$ και θεωρούμε το σύνολο

$$R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \xi h, i = 1, .., n-1, |x_n| \leq h/8\}$$

όπου ξ είναι σταθερά, που εξαρτάται από τη *Lipschitz* σταθερά του ελευθέρου συνόρου, επιλεγμένη ώστε

$$(x_1, ..., x_{n-1}, \frac{h}{8}) \in B_h(x_0)$$

και

$$(x_1, ..., x_{n-1}, -\frac{h}{8}) \in \{u < 0\}$$

όταν $|x_i| \leq \xi h$ για $i = 1, ..., n-1$. Παρατηρούμε ότι $R \subset B_{h/2}(0)$ για ξ μικρό, οπότε ολοκληρώνοντας την w_+ κατά μήκος γραμμών παράλληλων στο e_n από το ελεύθερο σύνορο, μέχρι τη πλευρά $(x_1, ..., x_{n-1}, h/8)$ του R, θα έχουμε

$$w_+(x_1, ..., x_{n-1}, \frac{h}{8}) = \int_l (w_+)_{x_n} dx_n.$$

Προφανώς το μήκος κάθε τέτοιας γραμμής θα είναι ανάλογο του h. Από τα παραπάνω

$$\int_l (w_+)_{x_n} dx_n = w_+(x_1, ..., x_{n-1}, \frac{h}{8}) \geq w_-(x_1, ..., x_{n-1}, \frac{h}{8}) \geq CMh.$$

Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς τις υπόλοιπες συντεταγμένες $x_1, ..., x_{n-1}$ και από την ανισότητα *Hölder* θα προκύψει

$$C^2 M^2 |R| \leq \int_R |\nabla (w_+)^+|^2 dx$$

ή ισοδύναμα

$$C_1 M^2 \leq \fint_{B_{h/2}} |\nabla (w_+)^+|^2 dx. \tag{6.1}$$

Επίσης, από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης κοντά στην αρχή έχουμε

$$w_+(x, 0) = -\alpha x_n^+ + o(|x|))$$

για $x \in B_{h/2}(0)$ και $\alpha > 0$, άρα

$$C_2 \alpha^2 \leq \fint_{B_{h/2}} |\nabla (w_+)^-|^2 dx. \tag{6.2}$$

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα A′.3 (Monotonicity Formula) από το Παράρτημα A′ οι (6.1), (6.2) θα δώσουν

$$M^2 \alpha^2 \leq C,$$

δηλαδή, αν το M είναι μεγάλο τότε το α θα πρέπει να είναι μικρό.

Έστω τώρα $B_\rho \subset \{u > 0\}$ είναι εφαπτόμενη της $B_h(x_0)$ στην αρχή. Επιλέγουμε $\rho < h/8$ και $\delta > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $u > \frac{1}{2} M x_n^+$ στο $B_\delta(0) \cap B_\rho$ και $u > -\frac{1}{2} \alpha_- x_n^-$ στο $B_\delta(0) \setminus B_\rho$, όπου $\alpha_- = \alpha$ άν $\alpha > 0$ και α_- αρκετά μικρή θετική σταθερά σε κάθε άλλη περίπτωση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi(x, t) := \frac{1}{3} M x_n^+ + \beta_+ t + \frac{1}{2\lambda} \beta_+ x_n^2 - c_1 (t^2 + \frac{1}{\Lambda n} t |x|^2) - c_2 (\frac{1}{4^n \Lambda} |x'|^2 - \frac{1}{\lambda} x_n^2)$$

όπου β_+, c_1, c_2 σταθερές που θα επιλεγούν παρακάτω. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση ψ ικανοποιεί

$$F(D^2\psi) - \psi_t > 0 \tag{6.3}$$

κοντά στο $(0,0)$. Επιλέγουμε τα c_1, $c_2 > 0$ έτσι ώστε $\{\psi > 0\} \cap B_\delta(0) \subset B_\rho$ και το β_+ έτσι ώστε

$$\frac{M}{10} G((0,0), e_n, \frac{1}{3}M, \frac{3}{2}\alpha_-) < \beta_+ < \frac{M}{3} G((0,0), e_n, \frac{1}{3}M, \frac{3}{2}\alpha_-) \tag{6.4}$$

με M πολύ μεγάλο. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\phi(x,t) := \psi^+(x,t) - \frac{9}{2M}\alpha_- \psi^-(x,t)$$

και θα δείξουμε ότι αν $\delta, t_0 > 0$ είναι αρκετά μικρά τότε η ϕ είναι υπολύση στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο $B_\delta(0) \times (0, t_0)$ σύμφωνα με τον Ορισμό 2.6. Πράγματι εκ κατασκευής

$$\phi = \begin{cases} \psi, & \psi \geq 0 \\ \frac{9}{2M}\alpha_- \psi, & \psi < 0 \end{cases}$$

άρα λόγω της (6.3) τα (i), (ii), (iii) του Ορισμού 2.6 ικανοποιούνται και αρκεί να δείξουμε το (iv). Έστω $(x,t) \in \{\phi = 0\}$ και ν είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην υπερεπιφάνεια αυτή στο σημείο (x,t) με κατεύθυνση στο εσωτερικό της μπάλας B_ρ. Από συνέχεια το $\frac{\phi_t^+(x,t)}{\phi_\nu^+(x,t)}$ είναι κοντά στο $\frac{\phi_t^+(0,0)}{\phi_\nu^+(0,0)} = 3\frac{\beta_+}{M}$. Επειδή η G είναι συνεχής ως προς όλες τις μεταβλητές η επιλογή (6.4) του β_+ θα δώσει

$$\frac{\phi_t^+(x,t)}{\phi_\nu^+(x,t)} - G((x,t), \nu, \phi_\nu^+, \phi_\nu^-) = \frac{\phi_t^+}{\phi_\nu^+} - 3\frac{\beta_+}{M} + 3\frac{\beta_+}{M} - G + G(0) - G(0) < \eta$$

για κάθε $\eta > 0$, άρα

$$\frac{\phi_t^+(x,t)}{\phi_\nu^+(x,t)} \leq G((x,t), \nu, \phi_\nu^+, \phi_\nu^-)$$

υπό την προυπόθεση ότι $\delta, t_0 > 0$ είναι αρκετά μικρά.

Παίρνοντας τα $\delta, t_0 > 0$ ακόμα μικρότερα, αν χρειαστεί, έχουμε $u > \phi$ στο $\partial B_\delta(0) \times [0, t_0]$ και στο $B_\delta(0) \times \{0\}$. Άρα, επειδή η u είναι λύση με την έννοια του ιξώδους σύμφωνα με τον Ορισμό 2.7, $u > \phi$ στο $B_\delta(0) \times (0, t_0)$.

Από την άλλη , αν το M είναι αρκετά μεγάλο τότε το $\frac{\phi_t^+(0,0)}{\phi_{x_n}^+(0,0)}$ είναι αρκετά μεγάλο και επειδή το ελεύθερο σύνορο της u είναι *Lipschitz* θα πρέπει οι u και ϕ να τέμνονται κάπου στο $B_\delta(0) \times (0, t_0)$ άτοπο. Το M λοιπόν ελέγχεται από μια σταθερά που εξαρτάται από την *Lipschitz* σταθερά του ελευθέρου συνόρου, άρα

$$u(x,t) \leq C d_{x,t}.$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα μας καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο ικανοποιείται η συνθήκη του ελευθέρου συνόρου από τη λύση με την έννοια του ιξώδους.

Θεώρημα 6.1. *Έστω u μια λύση με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου στο μοναδιαίο κύλινδρο $B_1(0) \times (-1, 1)$ με Lipschitz ελεύθερο σύνορο και $(0,0) \in \mathcal{F}$. Υποθέτουμε ότι κοντά στο $(0,0)$ και για $t \leq 0$ ισχύει*

$$u(x,t) \geq (\alpha_+(x,\nu) + \beta_+ t)^+ - (\alpha_-(x,\nu) + \beta_- t)^- + o(d(x,t)) \qquad (6.5)$$

με $\alpha_+ > 0,\ a_- \geq 0$, $d(x,t) = \sqrt{|x|^2 + t^2}$ *και η ισότητα ισχυεί για* $t = 0$. *Τότε*

$$\frac{\beta_+}{\alpha_+} \geq G((0,0), \nu, \alpha_+, \alpha_-) \tag{6.6}$$

όπου ν *είναι το εσωτερικό χωριακό διάνυσμα ως προς το* $\mathcal{F}$ *στο σημείο* $(0,0)$.

Απόδειξη. Για απλότητα έστω $\nu = e_n$ και U είναι μια περιοχή της αρχής στην οποία η σχέση (6.5) ικανοποιείται. Προφανώς αν η $u(x,t)$ είναι *Lipschitz* λύση με την έννοια του ιξώδους τότε θα είναι λύση και η $u_k(x,t) := \frac{1}{k}u(kx,kt)$, για κάθε $k > 0$.

Έστω ότι η (6.6) δεν ισχύει, τότε θα υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\beta_+}{\alpha_+} \leq G((0,0), \nu, \alpha_+, \alpha_-) - \eta.$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$R = \{(x,t) : |x'| < a, |x_n| < b, -t_0 < t \leq 0\}$$

με $a, b, t_0 > 0$ αρκετά μικρά για να έχουμε $R \subset U_k := \frac{1}{k}U$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$\psi(x,t) := \overline{\alpha}_+ x_n + \overline{\beta}_+ t - Ct^2 + \frac{x_n^2}{\lambda} - \frac{|x'|^2}{2(n-1)\Lambda}$$

όπου $\overline{\alpha}_+ = \alpha_+ - \varepsilon$, $\overline{\beta}_+ = \beta_+ + \varepsilon$, για $\varepsilon > 0$ που θα επιλέξουμε παρακάτω και $C > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{\psi = 0\}$ να είναι αυστηρά κυρτό ως προς τη μεταβλητή x_n. Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για k και R αρκετά μικρά, η συνάρτηση

$$\varphi(x,t) = \psi^+(x,t) - \frac{\overline{\alpha}_+}{\overline{\alpha}_-}\psi^-(x,t)$$

είναι υπολύση στο πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου στο R. Αν επιλέξουμε το k ακόμα μικρότερο θα προκύψει το άτοπο χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.5) και τον ορισμό των λύσεων με την έννοια του ιξώδους. $\square$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το αντίστοιχο για το αρνητικό μέρος:

Θεώρημα 6.2. *Έστω u μια λύση με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα του ελευθέρου συνόρου στο μοναδιαίο κύλινδρο $B_1(0) \times (-1,1)$ με Lipschitz ελεύθερο σύνορο και $(0,0) \in \mathcal{F}$. Υποθέτουμε ότι κοντά στο $(0,0)$ και για $t \leq 0$ ισχύει*

$$u(x,t) \leq (\alpha_+(x,\nu) + \beta_+ t)^+ - (\alpha_-(x,\nu) + \beta_- t)^- + o(d(x,t)) \tag{6.7}$$

με $\alpha_+ \geq 0$, $a_- > 0$, $d(x,t) = \sqrt{|x|^2 + t^2}$ και η ισότητα ισχυεί για $t = 0$. Τότε

$$\frac{\beta_-}{\alpha_-} \leq G((0,0), \nu, \alpha_+, \alpha_-) \tag{6.8}$$

όπου ν είναι το εξωτερικό χωριακό διάνυσμα ως προς το $\mathcal{F}$ στο σημείο $(0,0)$.

Κεφάλαιο 7

Η αρχή του Harnack

Στη παράγραφο αυτή, καθώς και στις επόμενες, υποθέτουμε ότι η u είναι λύση με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο $B_1(0) \times (-1, 1)$, η οποία είναι μονότονη σε ένα κώνο διευθύνσεων και η αρχή $(0, 0)$ ανήκει στο ελεύθερο σύνορο. Επίσης υποθέτουμε ότι ο συντελεστής του u_t στην εξίσωση είναι αρκετά μικρός και ότι $B_{1/4}(\frac{3}{4}e_n) \times (-1, 1) \subset \{u > 0\}$, $B_{1/4}(-\frac{3}{4}e_n) \times (-1, 1) \subset \{u < 0\}$. Όπως θα δούμε και παρακάτω αυτό δεν αποτελεί ουσιαστικό περιορισμό διότι μπορούμε να ξεκινήσουμε από μια μικρή περιοχή ενός σημείου στο ελεύθερο σύνορο και να εφαρμόσουμε μια ομοιοθεσία (*scaling*) της μορφής $u(\lambda x, \lambda t)/\lambda$ και στη συνέχεια, αν χρειαστεί, μια της μορφής $u(x, \lambda t)$.

Σκοπός της παραγράφου αυτής θα είναι να αποδείξουμε ότι αν η λύση μας u είναι μονότονη σε ένα κώνο διευθύνσεων Γ (δηλαδή $D_\nu u \geq 0$ για κάθε διάνυσμα $\nu \in \Gamma$) σε ένα παραβολικό χωρίο, τότε θα είναι μονότονη σε ένα μεγαλύτερο κώνο σε κάθε μικρότερο χωρίο. Το Λήμμα που ακολουθεί αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο για την απόδειξη των αποτελεσμάτων της εργασίας αυτής και η απόδειξη του μπορεί να βρεθεί στην εργασία [C1]. Θα συμβολίζουμε με $\alpha(e_1, e_2)$ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων e_1, e_2 και με $\Gamma(e, \theta)$ τον κυκλικό κώνο με άξονα στην e- διεύθυνση και άνοιγμα θ (προφανώς όταν λέμε ότι $\nu \in \Gamma(e,\theta)$ εννοούμε $\alpha(\nu, e) \leq \theta$).

Λήμμα 7.1. *Έστω $0 < \theta^* < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\delta := \frac{\pi}{2} - \theta$ και*

$$\Gamma(e,\theta) \subset \Gamma(\nu, \frac{\pi}{2}).$$

Για $\tau \in \Gamma(e, \frac{\theta}{2})$, έστω

$$E(\tau) = \frac{\pi}{2} - (\alpha(\tau,\nu) + \frac{\theta}{2}),$$

και για h αρκετά μικρό ορίζουμε

$$\rho(\tau) := |\tau| sin(\frac{\theta}{2} + hE(\tau))$$

και

$$S_h := \bigcup_{\tau \in \Gamma(e,\theta/2)} B_{\rho(\tau)}(\tau).$$

Τότε υπάρχει γωνία $\bar{\theta}$ και διάνυσμα $\bar{e}$ έτσι ώστε

$$\Gamma(e,\theta) \subset \Gamma(\bar{e},\bar{\theta}) \subset S_h$$

και

$$\frac{\bar{\delta}}{\delta} \leq b(\theta^*, h) < 1$$

όπου $\bar{\delta} = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}$.

Το επόμενο Λήμμα αποτελεί την αρχή $Harnack$, με τη βοήθεια της οποίας θα μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι ο κώνος δύναται να μεγαλώσει. Όπως όμως θα δούμε αυτό δεν θα είναι αρκετό διότι η αύξηση αυτή ισχύει σε μια παραβολική περιοχή και εμείς χρειαζόμαστε χωρία που παραμένουν αμετάβλητα κάτω από υπερβολική κλιμάκωση (*scaling*). Η υπόθεση $v_\varepsilon \le u_2$ απλά σημαίνει ότι η u_2 είναι μονότονη σε κάποιο κώνο διευθύνσεων.

Λήμμα 7.2. *Έστω $u_1 \le u_2$ δυο λύσεις με την έννοια του ιξώδους σε ένα πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο Q_1 που είναι μονότονα αύξουσες για κάθε $\tau \in \Gamma(\nu, \theta)$, $\nu \in \mathbb{R}^{n+1}$. Έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό*

$$v_\varepsilon(x,t) := \sup_{(y,s)\in B_\varepsilon^{n+1}(x,t)} u_1(y,s) \le u_2(x,t)$$

με

$$u_2(p) - v_\varepsilon(p) \ge \sigma\varepsilon u_2(p)$$

για $p = (\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})$ και

$$B_{1/4}(\frac{3}{4}e_n) \times (-1,1) \subset \Omega_1^+ := \{u_1 > 0\} \cap Q_1.$$

Τότε υπάρχουν σταθερές C και h τέτοιες ώστε για $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (0, \frac{1}{4})$ θα ισχύει

$$u_2(x,t) - v_{(1+h\sigma)\varepsilon}(x,t) \ge C\sigma\varepsilon u_2(p).$$

Απόδειξη. Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{\nu}$ θεωρούμε

$$w(x,t) + z(x,t) = u_2(x,t) - u_1((x,t) + \varepsilon\bar{\nu}(1+\sigma h))$$

όπου

$$w(x,t) := u_2(x,t) - u_1((x,t)+\varepsilon\bar{\nu}), z(x,t) := u_1((x,t)+\varepsilon\bar{\nu}) - u_1((x,t)+\varepsilon\bar{\nu}(1+\sigma h)).$$

Τώρα $(x,t)+\varepsilon\bar{\nu} \in B_\varepsilon^{n+1}$ διότι το $\bar{\nu}$ είναι μοναδιαίο άρα από την υπόθεση $w(x,t) \geq 0$. Επίσης $w(x,t) \in S(\lambda,\Lambda)$ διότι u_1, u_2 είναι λύσεις, όπου $S(\lambda,\Lambda)$ είναι η κλάση των λύσεων όλων των ομοιόμορφα ελλειπτικών εξισώσεων που ορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Από την ανισότητα *Harnack* για $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (0,\frac{1}{4})$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &\geq Cw(p) = C(u_2(p) - u_1(p+\varepsilon\bar{\nu})) \\
&\geq C(u_2(p) - v_\varepsilon(p)) \\
&\geq C\sigma\varepsilon u_2(p) \qquad .
\end{aligned}
$$

Από το Θεώρημα μονοτονίας και επειδή $u_1 \leq u_2$ για $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (0,\frac{1}{4})$ προκύπτει

$$|\nabla u_i(x,t)| \leq u_i(x,t) \leq Cu_2(p)$$

άρα

$$
\begin{aligned}
z(x,t) &= u_1((x,t)+\varepsilon\bar{\nu}) - u_1((x,t)+\varepsilon\bar{\nu}(1+\sigma h)) \\
&\geq Ch\sigma\varepsilon u_2(p)
\end{aligned}
$$

για h αρκετά μικρό, άρα

$$w(x,t) + z(x,t) \geq C\sigma\varepsilon u_2(p) + Ch\sigma\varepsilon u_2(p) \geq \bar{C}\sigma\varepsilon u_2(p).$$

□

Η παραπάνω αρχή *Harnack* ισχύει και στη περίπτωση που το *supremum* λαμβάνεται πάνω από n-διάστατες μπάλες. Συγκεκριμένα,

Πόρισμα 7.3. *Έστω $u_1 \le u_2$ όπως στο Λήμμα 7.2. Υποθέτουμε ότι για $\varepsilon > 0$ μικρό*

$$\sup_{y\in B_\varepsilon(x)} u_1(y,t) \le u_2(x,t)$$

για $(x,t) \in Q_1$,

$$u_2(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4}) - \sup_{y\in B_\varepsilon(\frac{3}{4}e_n)} u_1(y, -\frac{1}{4}) \ge \sigma\varepsilon u_2(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})$$

και

$$B_{1/4}(\frac{3}{4}e_n) \times (-1,1) \subset \Omega_1^+ := \{u_1 > 0\} \cap Q_1.$$

Τότε υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $h > 0$ τέτοιες ώστε στο $B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (0, \frac{1}{4})$ θα ισχύει

$$u_2(x,t) - \sup_{B_{(1+h\sigma)\varepsilon}(x)} u_1(y,t) \ge C\sigma\varepsilon u_2(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4}).$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το παραπάνω Πόρισμα στο θετικό μέρος της λύσης στη περίπτωση που έχουμε $\nu = e_n$. Συμβολίζουμε με $\Gamma_x(e_n, \theta)$ το τμήμα του κώνου $\Gamma(e_n, \theta)$ που βρίσκεται στο χώρο και $u_1(x,t) = u(x-\tau, t)$ με $\tau \in \Gamma_x(e_n, \theta/2)$ να είναι μικρό και $\varepsilon = |\tau| sin(\theta/2)$.

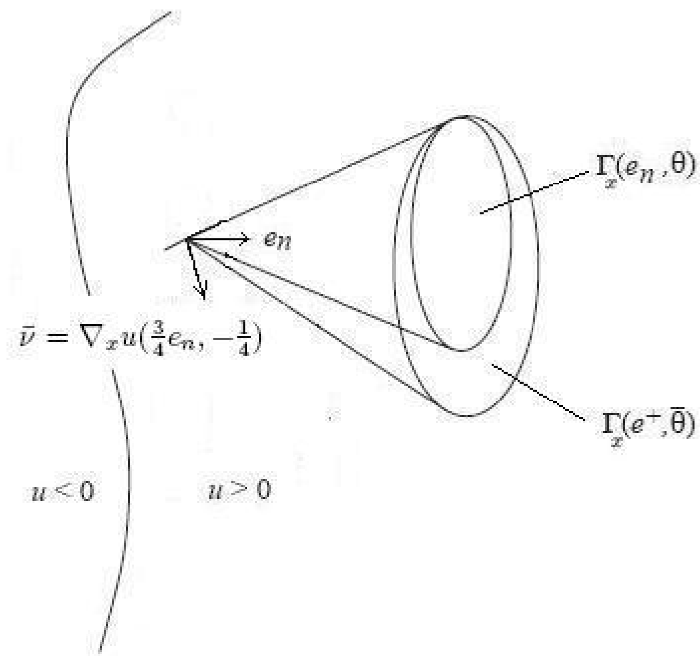
Λήμμα 7.4. *Υπάρχουν σταθερές $C = C(n,\lambda,\Lambda,\theta)$ και $h = h(n,\lambda,\Lambda,\theta)$ τέτοιες ώστε*

$$\sup_{B_{(1+h\sigma)\varepsilon}(x)} u_1(y,t) \le u(x,t) - C\sigma\varepsilon u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (0, \frac{1}{4})$.

Απόδειξη. Για $y \in B_\varepsilon(\frac{3}{4}e_n)$ επειδή $u_1(x,t) = u(x-\tau,t)$ έχουμε

$$u_1(y, -\frac{1}{4}) = u(y-\tau, -\frac{1}{4}) = u(\frac{3}{4}e_n - \bar{\tau}, -\frac{1}{4})$$



Σχήμα 7.1: Αύξηση του κώνου μονοτονίας

για $\bar{\tau} = \frac{3}{4}e_n - y + \tau$ και από $Taylor$

$$u(\frac{3}{4}e_n - \bar{\tau}, -\frac{1}{4}) = u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4}) - D_{\bar{\tau}}u(x^*, -\frac{1}{4})|\bar{\tau}|.$$

Τώρα $D_{\bar{\tau}}u \in S(\lambda, \Lambda)$ και $D_{\bar{\tau}}u \geq 0$ στο Ω^+ διότι $\alpha(\tau, \bar{\tau}) < \frac{\theta}{2}$ και εφαρμόζεται το Θεώρημα μονοτονίας (η u είναι αύξουσα σε κάθε διεύθυνση που εισέρχεται στο χωρίο Ω^+), οπότε η ανισότητα $Harnack$ θα δώσει

$$\inf_{y \in B_{|\tau|+\varepsilon}(\frac{3}{4}e_n)} D_{\bar{\tau}}u(y, -\frac{1}{4}) \geq C D_{\bar{\tau}}u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4}) = C|\nabla u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})||\bar{\tau}|cos\alpha(\bar{\nu}, \bar{\tau})$$

για $\bar{\nu} = \nabla_x u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})$. Επειδή τώρα $|\bar{\tau}| > \frac{1}{2}|\tau|$ και $\alpha(\bar{\nu},\bar{\tau}) \leq \alpha(\bar{\nu},\tau) + \frac{1}{2}\theta$ από το Θεώρημα μονοτονίας

$$\inf_{y \in B_{|\tau|+\varepsilon}(\frac{3}{4}e_n)} D_{\bar{\tau}} u(y, -\frac{1}{4}) \geq Cu(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})|\tau| cos(\alpha(\bar{\nu},\tau) + \frac{1}{2}\theta)$$

$$= Cu(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})|\tau| sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha(\bar{\nu},\tau) + \frac{1}{2}\theta))$$

οπότε για $y \in B_\varepsilon(\frac{3}{4}e_n)$ με $\varepsilon = |\tau| sin\frac{\theta}{2} < |\tau|$,

$$\begin{aligned} u_1(y, -\frac{1}{4}) &\leq u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4}) - Cu(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})|\tau| sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha(\bar{\nu},\tau) + \frac{1}{2}\theta)) \\ &\leq u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})[1 - C|\tau| sin(\frac{\pi}{2} - \alpha(\bar{\nu},\tau) - \frac{1}{2}\theta)] \\ &\leq u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})[1 - C|\tau|(\frac{\pi}{2} - \alpha(\bar{\nu},\tau) - \frac{1}{2}\theta)] \\ &\leq u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})[1 - C\varepsilon(\frac{\pi}{2} - \alpha(\bar{\nu},\tau) - \frac{1}{2}\theta)] \\ &=: u(\frac{3}{4}e_n, -\frac{1}{4})[1 - \sigma\varepsilon] \quad . \end{aligned}$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε το Πόρισμα 7.3 θα έχουμε το ζητούμενο. □

Από το Λήμμα 7.4 και το γεωμετρικό Λήμμα 7.1 (για $\nu = \bar{\nu}$ και $E(\tau) = \sigma$) προκύπτει ότι η λύση u είναι μονότονη σε ένα μεγαλύτερο κώνο $\Gamma_x(e^+, \bar{\theta}) \supset \Gamma_x(e_n, \theta)$ όπου

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}}{\frac{\pi}{2} - \theta} = b_0 < 1.$$

Στη περίπτωση που βρισκόμαστε στην αρνητική πλευρά της λύσης μπορούν να αποδειχθούν ανάλογα τα Λήμματα 7.2, 7.4 και το Πόρισμα 7.3 χωρίς ουσιαστική τροποποίηση στις αποδείξεις τους.

Κεφάλαιο 8

Αύξηση του κώνου μονοτονίας στο χώρο-χρόνο

Όπως είδαμε πριν, ο κώνος μονοτονίας μπορεί να μεγαλώσει σε ένα παραβολικό χωρίο μακριά από το ελεύθερο σύνορο. Παρατηρούμε όμως ότι αν αφαιρέσουμε ένα τμήμα του κώνου $\Gamma_x(\nu, \bar{\theta})$ θα μπορούμε πάντα να έχουμε την αύξηση αυτή σε ένα υπερβολικό χωρίο.

Συγκεκριμένα για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{\tau} \in \Gamma_x(\nu, \bar{\theta})$ η σχέση $D_{\bar{\tau}}u \geq 0$ είναι ισοδύναμη με την $D_\tau u \geq (\beta/\alpha) D_{e_n} u$ όπου $\bar{\tau} = \alpha\tau - \beta e_n$ για $\tau \in \Gamma_x(e_n, \theta)$, $|\tau| = 1$ με $1 \leq \alpha \leq sin(2\bar{\theta} - \theta)/sin\theta$, $\beta \geq 0$. Παρατηρείστε ότι αν οι κώνοι ακουμπάνε τότε $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Οπότε αν αφαιρέσουμε ένα μικρό τμήμα του $\Gamma_x(e_n, \theta)$ κατά μήκος της ευθείας επαφής θα έχουμε

$$\frac{\beta}{\alpha} \geq c\delta$$

όπου το c εξαρτάται από το μέγεθος του τμήματος που αποκόπηκε και $\delta = \frac{\pi}{2} - \theta$ είναι η συμπληρωματική γωνία στο χώρο. Οπότε η ανισότητα

$$D_\tau u \geq c\delta D_{e_n} u$$

ισχύει στο $B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (0, \frac{1}{2})$. Θα δείξουμε ότι αυτή διαδίδεται στο χρόνο σε ένα διάστημα τάξης δ/μ όπου μ είναι η συμπληρωματική γωνία στο χρόνο, δηλαδή $\mu = \frac{\pi}{2} - \theta^t$ όπου θ^t είναι το άνοιγμα του τμήματος του κώνου που βρίσκεται στο (e_n, e_t) επίπεδο.

Να σημειώσουμε εδώ ότι παρόλο που ξεκινάμε με κυκλικό κώνο δηλαδή $\mu = \delta$ στην επαναληπτική μέθοδο που θα εφαρμόσουμε η γωνία στο χώρο πηγαίνει στο μηδέν πολύ γρηγορότερα από ότι η αντίστοιχη γωνία στο χρόνο και άρα θα πρέπει να υποθέσουμε $\delta \le \mu$. Η διάδοση στο χρόνο γίνεται στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 8.1. *Έστω u είναι λύση του ιξώδους ενός προβλήματος ελευθέρου συνόρου στο Q_1. Έστω δ και μ οι συμπληρωματικές γωνίες στο χώρο και το χρόνο αντίστοιχα με $0 < \delta \le \mu < \frac{\pi}{2}$. Αν για $\tau \in \Gamma_x(e_n, \theta)$,*

$$D_\tau u(x,t) \ge c\delta D_{e_n} u(x,t)$$

για κάθε $(x,t) \in (B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \cup B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n)) \times (0, \frac{1}{4})$, τότε υπάρχουν σταθερές $\bar{c}$ και C τέτοιες ώστε

$$D_\tau u(x,t) \ge \bar{c}\delta D_{e_n} u(x,t)$$

για κάθε $(x,t) \in (B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \cup B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n)) \times (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$.

Απόδειξη. Έστω $\gamma = ae_n + be_t$ με $a^2 + b^2 = 1$ και $e_t = (0, ..., 0, 1)$ είναι κάθετο στον άξονα συμμετρίας του κώνου μονοτονίας. Σύμφωνα με τα όσα είδαμε πριν μπορούμε να πούμε ότι

$$|D_\gamma u(x,t)| \le C\mu D_{e_n} u(x,t)$$

για κάθε (x,t) όπου η παράγωγος υπάρχει. Επειδή η F είναι κοίλη από $C^{1,1}$ εκτιμήσεις για μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις έχουμε

$$|D^2 u|_{L^\infty(Q')} \leq C|u|_{L^\infty(Q)}$$

δηλαδή

$$|D_{\gamma\tau}u(x,t)| \leq C|u(x,t)| \tag{8.1}$$

για κάθε (x,t) ομοιόμορφα μακριά από το παραβολικό σύνορο και το ελεύθερο σύνορο. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα μονοτονίας και την σχέση (8.1) θα προκύψει

$$|D_{\gamma\tau}u(x,t)| \leq C\mu D_{e_n}u(x,t) \tag{8.2}$$

λόγω και του τμήματος του κώνου που αφαιρέσαμε.

Έστω $p = (x,0)$ με $x \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n)$, τότε για $0 < |\bar{k}| < |k|$ από το ανάπτυγμα $Taylor$ έχουμε

$$D_\tau u(p+k\gamma) = D_\tau u(p) + kD_{\gamma\tau}u(p+\bar{k}\gamma) \geq c\delta D_{e_n}u(p) + kD_{\gamma\tau}u(p+\bar{k}\gamma)$$

και λόγω του θεωρήματος μονοτονίας

$$D_\tau u(p+k\gamma) \geq c\delta u(p) + kD_{\gamma\tau}u(p+\bar{k}\gamma).$$

Ας εξετάσουμε τώρα τις διάφορες περιπτώσεις για το πρόσημο του k.

Περίπτωση 1: Έστω $k > 0$, τότε από την εκτίμηση για τη δεύτερη παράγωγο έχουμε

$$kD_{\gamma\tau}u(p+\bar{k}\gamma) \geq -kC\mu D_{e_n}u(p+\bar{k}\gamma).$$

Από την ανισότητα *Harnack* για την $D_{e_n}u$ προκύπτει ότι:

$$-D_{e_n}u(p+\bar{k}\gamma) \geq -CD_{e_n}u(p+k\gamma),$$

άρα, $k = |k|$

$$D_\tau u(p+k\gamma) \geq c\delta u(p) - |k|C\mu D_{e_n}u(p+k\gamma).$$

Η συνάρτηση u ικανοποιεί την *backward Harnack* άρα από το Θεώρημα 3.1 για $\rho = d_{x,0}/b_0, b_0 = max\{4L, 1\}$, δηλαδή για $\rho = 3/4b_0$ και $t = \rho^2$, έχουμε:

$$u(x, 2\rho^2) \leq Cu(x, 0) = Cu(p).$$

Επιλέγουμε το k αρκετά μικρό ώστε $k < 2\rho^2$, για να βρίσκεται το σημείο $\bar{p}$ "πιο πάνω" από το $p + k\gamma$. Από την ανισότητα *Harnack* για τη u θα έχουμε

$$u(p+k\gamma) \leq u(\bar{p})$$

άρα τελικά,

$$D_\tau u(p+k\gamma) \geq c\delta u(p) - |k|C\mu D_{e_n}u(p+k\gamma) \geq C\delta u(\bar{p}) - |k|C\mu D_{e_n}u(p+k\gamma)$$

$$\geq c\delta u(p+k\gamma) - |k|C\mu D_{e_n}u(p+k\gamma) \geq (c\delta - |k|C\mu)D_{e_n}u(p+k\gamma).$$

Επιλέγουμε το k πιο μικρό αν χρειάζεται, ώστε $|k| < c\delta/2C\mu$, άρα :

$$D_\tau u(p+k\gamma) \geq c\delta D_{e_n}u(p+k\gamma).$$

Περίπτωση 2: Ας υποθέσουμε ότι $k < 0$. Τότε όπως στην 1η περίπτωση από την εκτίμηση για τη δεύτερη παράγωγο έχουμε:

$$kD_{\gamma\tau}u(p+\bar{k}\gamma) \geq kC\mu D_{e_n}u(p+\bar{k}\gamma).$$

Άρα

$$kD_\tau u(p+k\gamma) \geq c\delta D_{e_n} u(p) + kC\mu D_{e_n} u(p+\bar{k}\gamma) \geq c\delta D_{e_n} u(p+k\gamma) - |k|C\mu D_{e_n} u(p)$$

$$\geq c\delta D_{e_n} u(p+k\gamma) - |k|C\mu u(p).$$

Επιλέγουμε το k αρκετά μικρό έτσι ώστε $|k| < 2\rho^2 := 9/8b_0$, τότε το σημείο $p+k\gamma$ βρίσκεται "πάνω" από το $\bar{p} := (x, -2\rho^2)$ άρα από την *backward Harnack*

$$u(p) \leq Cu(x, -2\rho^2) =: Cu(\bar{p})$$

και από *Harnack* για τη u έχουμε $u(\bar{p}) \leq Cu(p+k\gamma)$ άρα

$$u(p) \leq Cu(p+k\gamma).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες

$$D_\tau u(p+k\gamma) \geq c\delta D_{e_n} u(p+k\gamma) - |k|C\mu u(p+k\gamma) \geq C\delta D_{e_n} u(p+k\gamma) - |k|C\mu D_{e_n} u(p+k\gamma)$$

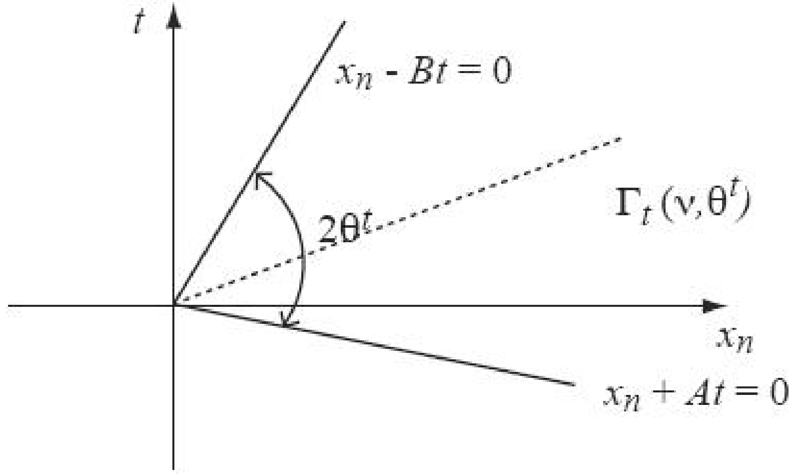
$$\geq (c\delta - |k|C\mu) D_{e_n} u(p+k\gamma) \geq c\delta D_{e_n} u(p+k\gamma)$$

επιλέγοντας το k πιο μικρό αν χρειάζεται.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει η ανισότητα

$$D_\tau u(q) \leq c\delta D_{e_n} u(q) \tag{8.3}$$

όπου το $q = p + k\gamma$. Από την επιλογή του k προκύπτει ότι η (8.3) θα ισχύει τουλάχιστον σε ένα σύνολο της μορφής $B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$. $\square$



Σχήμα 8.1: Ο κώνος στο (e_n, e_t)-επίπεδο

Το σύνολο των διευθύνσεων του Λήμματος 8.1, των διευθύνσεων του κώνου $\Gamma_x(\theta, e_n)$ και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους, περιέχουν ένα κώνο $\Gamma_x(\bar{\theta}, \nu)$ όπου η u είναι μονότονη και

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}}{\frac{\pi}{2} - \theta} < 1 - c(\theta, n)\delta.$$

Αν προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε τον κώνο και στο χρόνο εφαρμόζοντας την προηγούμενη μέθοδο, βλέπουμε ότι αυτή αποτυγχάνει. Για το λόγο αυτό θα προχωρήσουμε με διαφορετικό τρόπο. Έστω e_n είναι η προβολή στο χώρο του άξονα του κώνου μονοτονίας, του οποίου η συμπληρωματική γωνία είναι $\mu = \frac{\pi}{2} - \theta^t$ δηλαδή υπάρχουν $A, B \in \mathbb{R}$ με $A < B$ τέτοια ώστε $B - A = \mu$ και

$$A \leq -\frac{D_t u^+(x,t)}{D_{e_n} u^+(x,t)} \leq B$$

και αντίστοιχα

$$A \leq -\frac{D_t u^-(x,t)}{D_{e_n} u^-(x,t)} \leq B$$

για κάθε (x,t) που δεν ανήκει στο ελεύθερο σύνορο και σχεδόν παντού στο ελεύθερο σύνορο. Αν υποθέσουμε τώρα ότι η συμπληρωματική γωνία στο χώρο δ ικανοποιεί τη σχέση $\delta < \delta/\mu << \mu$ μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω Λήμμα που αποτελεί μια σημειακή εκτίμηση στο εσωτερικό του $D_{e_n}u$ ως προς δ/μ.

Λήμμα 8.2. *Έστω u είναι λύση του προβλήματος ελευθέρου συνόρου με την έννοια του ιξώδους. Τότε*

$$u(x,t) = u(\pm\frac{3}{4}e_n, 0) + \alpha_\pm(x_n \mp \frac{3}{4}) + \alpha_\pm O(\delta/\mu)$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$ όπου $\alpha_\pm := D_n u(\pm\frac{3}{4}e_n, 0)$ και $D_n = D_{e_n}$.

Απόδειξη. Έστω $D_j = D_{e_j}$, $D_{ij} = D_{e_i e_j}$ τότε για κάθε $x \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n)$ από $Taylor$

$$u(x,t) = u(\frac{3}{4}e_n, t) + D_n u(\frac{3}{4}e_n, t)(x_n - \frac{3}{4}) + \sum_{i=1}^{n-1} D_i u(\frac{3}{4}e_n, t)x_i + R(u,x) \quad (8.4)$$

όπου

$$R(u,x) = \int_0^1 \int_0^s \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}u((1-r)\frac{3}{4}e_n + rx, t)(x-\frac{3}{4})_i(x-\frac{3}{4})_j drds.$$

Θα εκτιμήσουμε κάθε όρο από την (8.4) χωριστά.

Για τον πρώτο όρο παρατηρείστε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$u(\frac{3}{4}e_n, t) = u(\frac{3}{4}e_n, 0) + \int_0^t D_t u(\frac{3}{4}e_n, s)ds$$

και από τον κώνο μονοτονίας $|D_t u| \leq CD_n u$, οπότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα μονοτονίας έχουμε για $|t| < C\delta/\mu$

$$u(\frac{3}{4}e_n, t) = u(\frac{3}{4}e_n, 0) + D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0)O(\frac{\delta}{\mu}). \tag{8.5}$$

Για το δεύτερο όρο,

$$D_n u(\frac{3}{4}e_n, t) = D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0) + \int_0^t D_{nt} u(\frac{3}{4}e_n, s)ds$$

οπότε από εσωτερικές εκτιμήσεις (βλέπε [WL2]) και το Θεώρημα μονοτονίας έχουμε

$$|D_{nt} u(\frac{3}{4}e_n, t)| \leq CD_n u(\frac{3}{4}e_n, 0),$$

άρα για $|t| < C\delta/\mu$

$$D_n u(\frac{3}{4}e_n, t) = D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0) + D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0)O(\frac{\delta}{\mu}). \tag{8.6}$$

Για τον τρίτο όρο επειδή για $i = 1, ...n-1$, $|D_i u| \leq c\delta D_n u$ θα ισχύει

$$D_i u(\frac{3}{4}e_n, t) = D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0)O(\delta). \tag{8.7}$$

με $|t| < C\delta/\mu$.

Τέλος για τον τέταρτο όρο, αν το σημείο p βρίσκεται μακριά από το ελεύθερο σύνορο, από το Θεώρημα μονοτονίας τις εσωτερικές εκτιμήσεις και τη σχέση $|D_i u(p)| \leq c\delta D_n u(p)$ για $i = 1, ...n-1$ θα έχουμε

$$|D_{ij} u(p)| \leq c\delta D_n u(p)$$

με $i = 1, ...n-1,\ j = 1, ..., n$. Η u λύνει την εξίσωση $\sigma F(D^2u) = u_t$ ή αν γραμμικοποιήσουμε την

$$u_t(x,t) - \sigma a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}(x,t) = 0$$

όπου το σ θα προκύψει από την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου και όπως είδαμε και στην αρχή του Κεφαλαίου 7 μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι πολύ μεγάλος αριθμός, έστω $\frac{1}{\sigma} << \delta$. Οπότε

$$|D_{nn}u(p)| \leq \frac{1}{|a_{nn}|}[c\delta D_n u(p) + C\delta\mu D_n u(p)] \leq C\delta D_n u(p) \leq C\delta D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα μονοτονίας και την *Backward Harnack*. Έχουμε λοιπόν και την εκτίμηση για τον τέταρτο όρο

$$|D_{ij}u(p)| \leq C\delta D_n u(\frac{3}{4}e_n, 0) \tag{8.8}$$

για $i, j = 1, ..., n$. Από τις σχέσεις (8.5), (8.6), (8.7), (8.8) προκύπτει το ζητούμενο για το θετικό μέρος. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το αντίστοιχο για το αρνητικό μέρος. $\square$

Στο επόμενο Λήμμα θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του συνόλου όπου η παράγωγος $D_n u^+$ είναι κοντά στο α_+.

Λήμμα 8.3. *Έστω $\mathcal{F}_t$ το ελεύθερο σύνορο της λύσης u στο χρόνο t. Τότε για κάθε $|t| < C\delta/\mu$,*

$$⨍_{B_{1/8}(0)\cap\mathcal{F}_t} |D_n u^{\pm}(x,t) - \alpha_{\pm}|^2 dS \leq \alpha_{\pm}^2 O(\delta/\mu)$$

όπου $\alpha_{\pm} := D_n u^{\pm}(\pm\frac{3}{4}, 0)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο για την u^+.

Βήμα 1^o. Θα δείξουμε ότι

$$\left| \fint_{B_{1/8}(0)\cap \mathcal{F}_t} (D_n u^+ - \alpha_+) dS \right| \leq \alpha_+ O(\delta/\mu).$$

Έστω $D := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < \frac{1}{8}, |x_n| < \frac{3}{4}\} \cap \{u > 0\}$. Η συνάρτηση $w_+ := u + cu^{1+\varepsilon}$ είναι υπολύση στο D και $c < \delta$ για κάποιο $\varepsilon > 0$ (δείτε το Λήμμα 4.6). Τότε σχεδόν για κάθε $|t| < C\delta/\mu$ όπου υπάρχει η παράγωγος,

$$0 \leq \int_D F(D^2 w_+(x,t))dx = \int_D \inf_{\alpha \in A} L_\alpha w_+(x,t)dx \leq \int_D \Delta w_+(x,t)dx$$

$$\leq \int_{\partial D} D_\nu w_+(x,t)dS$$

άρα

$$0 \leq \int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} D_\nu w_+ dS + \int_S D_\nu w_+ dS + \int_T D_\nu w_+ dS$$

όπου $S := \{|x'| = \frac{1}{8}, |x_n| < \frac{3}{4}\} \cap \{u > 0\}$, $T := \{|x'| < \frac{1}{8}, |x_n| = \frac{3}{4}\} \cap \{u > 0\}$, δηλαδή

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} D_{\nu_{int}} w_+ dS \leq \int_S D_\nu w_+ dS + \int_T D_\nu w_+ dS.$$

Τώρα επειδή $w_+ = u + cu^{1+\varepsilon}$, $|D_i w_+| \leq |D_i u|(1 + c\delta)$, $|D_i u| \leq c\delta D_n u$ για $i = 1, ..., n-1$ και $D_{\nu_{int}} u^+ \geq D_n u^+$ (διότι στην κάθετη κατεύθυνση η αύξηση είναι μεγαλύτερη) προκύπτει

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} D_n u^+ dS \leq c\delta \int_S D_n u^+ dS + \int_T |D_n u^+|(1 + c\delta)dS$$

$$\leq c\delta \int_{\partial S \cap \{x_n = 3/4\}} u^+ dS + \int_T |D_n u^+|(1 + c\delta)dS$$

λόγω του Θεωρήματος μονοτονίας. Από το Λήμμα 8.2 στο T, $|D_n u^+|(1+c\delta) \leq \alpha_+(1+O(\delta/\mu))$, άρα

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} D_n u^+ dS \leq c\delta \int_{\partial S \cap \{x_n = 3/4\}} u^+ dS + \alpha_+(1+O(\delta/\mu))|T|$$

$$= c\delta \int_{\partial S \cap \{x_n = 3/4\}} u^+ dS + \alpha_+(1+O(\delta/\mu))|T| + \alpha_+|\mathcal{F}_t \cap \overline{D}| - \alpha_+|\mathcal{F}_t \cap \overline{D}|$$

δηλαδή

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} (D_n u^+ - \alpha_+) dS \leq c\delta \int_{\partial S \cap \{x_n = 3/4\}} u^+ dS + \alpha_+(|T| - |\mathcal{F}_t \cap \overline{D}|).$$

Από το Λήμμα 8.2 και επειδή $|T| - |\mathcal{F}_t \cap \overline{D}| = O(\delta)$,

$$⨍_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} (D_n u^+ - \alpha_+) dS \leq \alpha_+ O(\delta/\mu).$$

Με τον ίδιο τρόπο, η $w_- := u - cu^{1+\varepsilon}$ είναι υπερλύση οπότε η $\bar{w} := -w_-$ είναι υπολύση, δηλαδή

$$0 \leq \int_{\partial D} D_\nu \bar{w} dS$$

και

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} D_n w_- dS &\geq \int_S D_\nu w_- dS + \int_T D_\nu w_- dS \\ &\geq -c\delta \int_S D_n u^+ dS - \int_T D_n u^+ (1+c\delta) dS \\ &\geq -\alpha_+ O(\delta/\mu) - \alpha_+(1+O(\delta/\mu))|T|\end{aligned}$$

οπότε

$$⨍_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}} (D_n u^+ - \alpha_+) dS \geq -\alpha_+ O(\delta/\mu).$$

Βήμα 2^o. Θα δείξουμε τώρα

$$\left| ⨍_{B_{1/10}(0) \cap \mathcal{F}_t} [(D_n u^+)^2 - \alpha_+^2] dS \right| \leq \alpha_+^2 O(\delta/\mu).$$

Για κάθε $0 \leq r \leq 1/8$, ορίζουμε το σύνολο

$$D_r := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x'| < r, |x_n| < \frac{3}{4}\} \cap \{u > 0\}$$

και τα αντίστοιχα σύνορα,

$$S_r := \{|x'| = r, |x_n| < \frac{3}{4}\} \cap \{u > 0\}, \quad T_r := \{|x'| < r, x_n = \frac{3}{4}\} \cap \{u > 0\}.$$

Όπως ακριβώς και στο πρώτο βήμα επειδή η w_+ είναι υπολύση, είναι και υφαρμονική με την έννοια του ιξώδους άρα $\Delta w_+ \geq 0$ και $D_n w_+ \geq 0$ λόγω του κώνου μονοτονίας. Οπότε σχεδόν για κάθε $|t| < C\delta/\mu$,

$$\begin{aligned} \int_{D_r} \nabla(D_n w_+) \nabla w_+ dx &\leq \int_{D_r} (\nabla(D_n w_+) \nabla w_+ + D_n w_+ \Delta w_+) dx \\ &= \int_{\partial D_r} D_n w_+ D_\nu w_+ dS \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_r} D_n u^+ D_{\nu_{int}} u^+ dS + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{D_r} D_n(|\nabla w_+|^2) dx}_{M} &\leq \int_{S_r} D_n w_+ D_\nu w_+ dS \\ &+ \int_{T_r} (D_n w_+)^2 dS. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τον όρο (M) ως προς x_n και επειδή $D_{\nu_{int}} u^+ \geq D_n u^+$ προκύπτει

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_r} (D_n u^+)^2 dS \leq \int_{S_r} D_n w_+ D_\nu w_+ dS + \frac{1}{2} \int_{T_r} (D_n w_+)^2 dS.$$

Τώρα επειδή $|D_i u| \leq c\delta D_n u$ για $i = 1, ..., n-1$ θα ισχύει και $|D_i w_+| \leq c\delta D_n w_+$ για $i = 1, ..., n-1$, άρα

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_r} (D_n u^+)^2 dS \leq c\delta \int_{S_r} (D_n w_+)^2 dS + \int_{T_r} (D_n w_+)^2 dS. \tag{8.9}$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση (8.9) από $\frac{1}{10}$ έως $R \leq \frac{1}{8}$ τότε

$$\int_{1/10}^{R} \int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_r} (D_n u^+)^2 dS dr \leq c\delta \int_{1/10}^{R} \int_{S_r} (D_n w_+)^2 dS dr + \int_{1/10}^{R} \int_{T_r} (D_n w_+)^2 dS dr$$

ισοδύναμα

$$(R - \frac{1}{10}) \int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_{1/10}} (D_n u^+)^2 dS \leq (R - \frac{1}{10}) \int_{T_R} (D_n w_+)^2 dS + c\delta \underbrace{\int_{1/10}^{R} \int_{S_r} |\nabla w_+|^2 dS dr}_{N} .$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέρη τον όρο (N) και επειδή η w_+ είναι υφαρμονική με την έννοια του ιξώδους προκύπτει

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_{1/10}} (D_n u^+)^2 dS \leq \int_{T_R} (D_n w_+)^2 dS$$

$$+ \frac{c\delta}{R - \frac{1}{10}} \left\{ \int_{S_R} w_+ D_\nu w_+ dS + \int_{S_{1/10}} w_+ D_\nu w_+ dS + \int_{T_R - T_{1/10}} w_+ D_n w_+ dS \right\} .$$

Όμως $|D_i w_+| \leq |D_i u|(1 + c\delta)$ για $i = 1, ..., n$ και $|D_j u| \leq c\delta D_n u$ για $=$ $1, ..., n-1$ άρα,

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_{1/10}} (D_n u^+)^2 dS \leq \frac{c\delta^2 (1 + c\delta)}{R - \frac{1}{10}} \left\{ \int_{S_R} \frac{1}{2} D_n(u^2) dS + \int_{S_{1/10}} \frac{1}{2} D_n(u^2) dS \right\}$$

$$+ \frac{c\delta(1 + c\delta)}{R - \frac{1}{10}} \int_{T_R - T_{1/10}} u D_n u dS + \int_{T_R} (D_n u)^2 dS.$$

Ολοκληρώνουμε τους δυο πρώτους όρους στο δεξί μέλος ως προς x_n και από το Θεώρημα μονοτονίας

$$\int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{D}_{1/10}} (D_n u^+)^2 dS \leq \frac{C\delta^2}{R - \frac{1}{10}} \left\{ \int_{\partial S_R \cap \{x_n = 3/4\}} (D_n u)^2 dS + \int_{\partial S_{1/10} \cap \{x_n = 3/4\}} (D_n u)^2 dS \right\}$$

$$+ \frac{c\delta}{R - \frac{1}{10}} \int_{T_R - T_{1/10}} (D_n u)^2 dS + \int_{T_R} (D_n u)^2 dS.$$

Αν προσθαφαιρέσουμε τον όρο που λείπει και χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 8.2 θα προκύψει

$$\fint_{\mathcal{F}_t\cap D_{1/10}}[(D_nu^+)^2-\alpha_+^2]dS \leq \alpha_+^2\left[\frac{C\delta^2}{R-\frac{1}{10}}+\left(\frac{c\delta}{R\frac{1}{10}}+1+O(\delta/\mu)\right)|T_R-T_{1/10}|\right]$$

από όπου, αν επιλέξουμε $R-\frac{1}{10}\sim\delta$, έχουμε το ζητούμενο

$$\fint_{\mathcal{F}_t\cap D_{1/10}}[(D_nu^+)^2-\alpha_+^2]dS \leq \alpha_+^2 O(\delta/\mu).$$

Με όμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την υπερλύση w_- και την υπολύση $\bar{w}=-w_-$, η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Θα δείξουμε τώρα ότι, αν μείνουμε μακριά από το ελεύθερο σύνορο, ο κώνος μονοτονίας αυξάνεται στο χρόνο.

Λήμμα 8.4. *Αν $G(\alpha_+,\alpha_-,e_n)\geq -b := -\frac{1}{2}A+B$ (ή $G(\alpha_+,\alpha_-,e_n)\leq -b$), τότε υπάρχουν σταθερές $c,\bar{c}>0$ τέτοιες ώστε αν η γωνία δ είναι αρκετά μικρή με $\delta\leq c\mu^3$,*

$$-\frac{D_tu}{D_nu}\leq B-c\mu, \quad \left(-\frac{D_tu}{D_nu}\geq A+c\mu\right)$$

για $(x,t)\in(B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n)\cup B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n))\times(-C\delta/\mu,C\delta/\mu)$.

Απόδειξη. Η u είναι λύση της εξίσωσης $u_t-F(D^2u)=0$ στο $\Omega^+=\{B_1\times(-1,1)\}\cap\{u>0\}$ και $\Omega^-=\{B_1\times(-1,1)\}\cap\{u<0\}$. Για κάθε σημείο $(x,t)\in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n)\times(-C\delta/\mu,C\delta/\mu)$ θεωρούμε το σύνολο $R_t:=\Omega^+\cap(t-1,t)$ και $\omega^{(x,t)}$ το μέτρο που προκύπτει από την εξίσωση υπολογισμένο στο (x,t). Επειδή η F είναι κοίλη ο τελεστής τυπικά, βρίσκεται "κοντά" σε ένα τελεστή με σταθερούς συντελεστές. Πάνω στο ελεύθερο σύνορο, σχεδόν παντού ως προς το επιφανειακό μέτρο, ισχύει

$$\frac{D_t u^+}{D_n u^+} = \frac{D_t u^+}{D_\nu u^+}(1+O(\delta)) = (1+O(\delta))G(\nu, D_\nu u^+, D_\nu u^-)$$

διότι $D_\nu u^+ = D_n u^+(1+O(\delta))$ και $|D_i u^+| \leq c\delta D_n u^+$ για $i = 1, ..., n-1$. Έστω

$$\Sigma_t := \{p \in \mathcal{F}_t \cap \overline{R}_t : D_n u^\pm(p) = \alpha_\pm(1+O(\delta^{1/3}))\}.$$

Από το προηγούμενο λήμμα για κάθε $t \in (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$ προκύπτει $|\Sigma_t| \geq \frac{1}{2}|\mathcal{F}_t \cap \overline{R}_t|$. Πράγματι,

$$\int_{\Sigma_t} (D_n u)^2 dx = \alpha_\pm^2(1+O(\delta^{1/3}))|\Sigma_t| = \int_{\mathcal{F}_t} (D_n u)^2 dx - \int_P (D_n u)^2 dx$$
$$\geq \alpha_\pm^2(1-O(\delta/\mu))|\mathcal{F}_t| - \int_P (D_n u)^2 dx.$$

Οπότε αν $p \in P$ τότε

$$D_n u(p) \leq \alpha_\pm(1-C\delta^{1/3}) \qquad ή \qquad D_n u(p) \geq \alpha_\pm(1+C\delta^{1/3})$$

δηλαδή

$$\int_{\Sigma_t} (D_n u)^2 dx \geq \alpha_\pm^2(1-O(\delta/\mu))|\mathcal{F}_t| - |P|(\alpha_\pm^2 - C\delta^{1/3})$$

ισοδύναμα

$$(1+C\delta^{1/3})|\Sigma_t| \geq (1-C\delta/\mu)|\mathcal{F}_t| - (1-C\delta^{1/3})|P|$$

ή

$$C\delta^{1/3}|\Sigma_t| \geq C\delta|\mathcal{F}_t| - C\frac{\delta}{\mu}|P|$$

διότι $|\mathcal{F}_t| = |\Sigma_t| + |P|$. Με δ μικρό η παραπάνω σχέση δίνει

$$|\Sigma_t| \geq C|P| - C\frac{\delta^{2/3}}{\mu}|\mathcal{F}_t| \geq C|P|,$$

οπότε

$$|\mathcal{F}_t| = |\Sigma_t| + |P| \leq C|\Sigma_t|.$$

Αν γυρίσουμε τώρα πίσω στην εξίσωση βλέπουμε ότι το αντίστοιχο μέτρο που ορίσαμε στο $\mathcal{F}_t \cap \overline{R}_t$ είναι A_∞ βάρος ως προς το επιφανειακό μέτρο διότι η F είναι κοίλη άρα εφαρμόζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [N], δηλαδή

$$\omega^{(x,t)}(\Sigma_t) \geq c. \tag{8.10}$$

Από την άλλη στο Σ_t έχουμε

$$G(\nu, D_\nu u^+, D_\nu u^-) = G(e_n, \alpha_+, \alpha_-) + O(\delta^{1/3}) \geq -b + O(\delta^{1/3})$$

$$\geq -B + c\mu + O(\delta^{1/3}) \geq -B + C\mu$$

για δ μικρό. Έστω v_1, v_2 λύσεις των προβλημάτων

$$(*)\begin{cases} F(D^2 v_1) - D_t v_1 = 0 & \sigma\tau o \;\; R_t \\ v_1 = u_{x_n} & \sigma\tau o \;\; \partial_p R_t \end{cases} \qquad (**)\begin{cases} F(D^2 v_2) - D_t v_2 = 0 & \sigma\tau o \;\; R_t \\ v_2 = u_t & \sigma\tau o \;\; \partial_p R_t \end{cases}$$

και επειδή $F = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} L_\alpha$ έχουμε (δείτε την απόδειξη του λήμματος 4.3),

$$u_t + Bu_{x_n} \geq v_2 + Bv_1 = \int_{\partial_p R_t} (v_2 + Bv_1) d\omega^{(x,t)} = \int_{\partial_p R_t} (D_t u + BD_n u) d\omega^{(x,t)}$$

$$= \int_{\mathcal{F}_t \cap \overline{R}_t} (D_t u + BD_n u) d\omega^{(x,t)} \geq \int_{\Sigma_t} D_n u (\frac{D_t u}{D_n u} + B) d\omega^{(x,t)}$$

$$= \alpha_\pm (1 + O(\delta^{1/3}))[(1 + O(\delta))G + B]\omega(\Sigma_t)$$

$$\geq \alpha_{\pm}(1+O(\delta^{1/3}))[(1+O(\delta))(-B+C\mu)+B]c$$

$$\geq \alpha_{\pm}\bar{C}\mu.$$

Τέλος επειδή $\delta/\mu << \mu$ και $D_n u = \alpha_+(1+O(\delta/\mu))$ στο $B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (t-1,t)$ προκύπτει ότι

$$(D_t u + BD_n u)(x,t) \geq C\mu D_n u$$

για $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$. Αν αντί του Ω^+ χρησιμοποιήσουμε το Ω^- έχουμε το ζητούμενο και για $(x,t) \in B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \times (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$. $\square$

Κεφάλαιο 9

Συνεχείς οικογένειες υπολύσεων

Στη παράγραφο αυτή θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια υπολύσεων, αρχίζοντας από μια δοσμένη λύση. Οι υπολύσεις αυτές θα μας βοηθήσουν να μεταφέρουμε στο ελεύθερο σύνορο, τις εσωτερικές αυξήσεις που αποδείξαμε πριν. Αυτό θα γίνει χρησιμοποιώντας την τοπολογική μέθοδο που παρουσιάστηκε από τον Caffarelli στην εργασία [C1], την οποία θα πρέπει να τροποποιήσουμε κατάλληλα λόγω της μη γραμμικότητας της εξίσωσης.

Λήμμα 9.1. *Υποθέτουμε ότι η u είναι μια λύση με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ και μονότονα αύξουσα σε κάθε διεύθυνση $\sigma \in \Gamma(\theta_0, e_n)$. Έστω φ είναι μια C^2 συνάρτηση τέτοια ώστε $1 \leq \varphi \leq 2$ και ικανοποιεί*

$$D_t\varphi \geq 0, \qquad \mathcal{M}^-(D^2\varphi) - c_1 D_t\varphi - C\frac{|\nabla_x\varphi|^2}{\varphi} - c_2|\nabla_x\varphi| \geq 0$$

σε ένα χωρίο $D' \subset D$ με $dist(D, D') \geq d > 0$, για θετικές σταθερές $c_1, c_2, C > 1$ που εξαρτώνται από $n, \theta_0, d, \lambda, \Lambda$ και $\mathcal{M}^-$ είναι ο τελεστής του Pucci που ορίσαμε πριν ή ισοδύναμα $\mathcal{M}^-(A) = inf_B trace(BA)$ με τις ιδιοτιμές του B ανάμεσα στις σταθερές λ, Λ. Τότε η

$$v(x,t) := \sup_{B_{\varphi(x,t)}(x,t)} u(y,s)$$

είναι F-υπολύση στο $\{v > 0\} \cap D'$ και στο $\{v < 0\} \cap D'$.

Απόδειξη. Έστω $v(0,0) > 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$F(D^2 v(0,0)) - v_t(0,0) \geq 0.$$

Επειδή η F είναι κοίλη μπορούμε να γράψουμε

$$F(D^2 v) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha v$$

όπου $L_\alpha v$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές και τις ίδιες σταθερές ελλειπτικότητας λ , Λ με την F. Ας συμβολίσουμε $L_\alpha v = \alpha_{ij}^\alpha v_{x_i x_j}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$L_\alpha v(0,0) - v_t(0,0) \geq 0.$$

Παρατηρείστε ότι επειδή η u είναι λύση της $F(D^2 u) - u_t = 0$, τότε θα είναι και υπολύση της αντίστοιχης με σταθερούς συντελεστές για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$ δηλαδή,

$$L_\alpha u - u_t \geq 0. \tag{9.1}$$

Έστω A ο σταθερός πίνακας με στοιχεία τα $[\alpha_{ij}^\alpha]$, τότε ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα μπορεί να οριστεί ο $A^{1/2}$. Έστω

$$\tilde{u}(x,t) = u(A^{1/2}x, t),$$

$$\tilde{v}(x,t) = v(A^{1/2}x, t),$$

$$\psi(x,t) = \varphi(A^{1/2}x, t).$$

Η $\tilde{u}$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας στο $\{\tilde{u} > 0\}$ λόγω της (9.1) και η ψ, από τον τρόπο που ορίστηκε, ικανοποιεί

$$\Delta\psi - c_1 D_t\psi - \tilde{C}\frac{|\nabla_x\psi|^2}{\psi} - \tilde{c}_2|\nabla_x\psi| \geq 0 \tag{9.2}$$

διότι

$$L_\alpha\varphi \geq \mathcal{M}^-(D^2\varphi) \geq c_1 D_t\varphi + C\frac{|\nabla_x\varphi|^2}{\varphi} + c_2|\nabla_x\varphi|$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$, όπου $\tilde{C} = \lambda C$, $\tilde{c}_2 = \lambda c_2$. Από την άλλη παρατηρούμε ότι επειδή

$$v(x,t) = \sup_{B_{\varphi(x,t)}(x,t)} u(y,s)$$

τότε

$$v(x,t) = \sup_{|\nu|=1} u((x,t) + \varphi(x,t)\nu)$$

με $\nu = (\nu_x, \nu_t)$, άρα

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x,t) = v(A^{1/2}x,t) &= \sup_{|\nu|=1} u((A^{1/2}x,t) + \varphi(A^{1/2}x,t)\bar{\nu}) \\ &= \sup_{|\bar{\nu}|=1} u(A^{1/2}x + A^{1/2}\nu_x\psi(x,t), t + \psi(x,t)\nu_t) \\ &= \sup_{|\bar{\nu}|=1} \tilde{u}((x,t) + \psi(x,t)\nu)\end{aligned}$$

όπου $\bar{\nu} = (A^{1/2}\nu_x, \nu_t)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\tilde{v}$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας, δηλαδή ότι η παράσταση

$$T = \liminf_{r\downarrow 0}\left\{\frac{2(n+2)}{r^2}\fint_{B_r(\xi)}[\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(\xi,\tau)]dx\right\} - \limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}[\tilde{v}(\xi,\tau+h) - \tilde{v}(\xi,\tau)] \tag{9.3}$$

είναι μη αρνητική για κάθε $(\xi,\tau) \in D'$. Για απλότητα υποθέσουμε ότι $(\xi,\tau) = 0$. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε,

$$\tilde{v}(0,0) = \tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})$$

όπου $\bar{\nu} = \frac{\varepsilon}{|A^{1/2}e_n|}e_n + \delta e_{n+1}$ με $|A^{1/2}\nu_x, \nu_t| = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2} = 1$, $\varepsilon > 0$ και

$$\nabla_x \psi(0,0) = \alpha(cos\theta)e_1 - \alpha(sin\theta)e_2 + \beta e_n$$

$$< A\xi, \xi >= a(\xi_n^2 + \tilde{b}_1\xi_1\xi_n + \tilde{b}_2\xi_2\xi_n + \sum_{i \le j=1}^{n-1} c_{ij}\xi_i\xi_j) \tag{9.4}$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta, \theta, a, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, c_{ij}$ είναι σταθερές. Από τον ορισμό της $\tilde{v}$ έχουμε

$$\tilde{v}(x,0) \ge \tilde{u}(y(x), \psi(0,0)\delta),\ \mu\varepsilon\ \ y(x) := x + \sqrt{\psi^2(x,0) - \psi^2(0,0)\delta^2}\frac{\nu_x}{|A^{1/2}\nu_x|}$$

όπου

$$\nu_x := e_n + \frac{l_1x_1 + l_2x_n}{\varepsilon^2\psi(0,0)}e_1 + \frac{\gamma}{\varepsilon\psi(0,0)}\sum_{i=2}^{n-1} x_ie_i$$

διότι

$$(y(x), \psi(0,0)\delta) = (x,0) + (\sqrt{\psi^2(x,0) - \psi^2(0,0)\delta^2}\frac{\nu_x}{|A^{1/2}\nu_x|}, \psi(0,0)\delta)$$

$$= (x,0) + \psi(x,0)\underbrace{(\sqrt{1 - \frac{\psi^2(0,0)\delta^2}{\psi^2(x,0)}}\frac{\nu_x}{|A^{1/2}\nu_x|}, \frac{\psi(0,0)\delta}{\psi(x,0)})}_{\nu}$$

$$= (x,0) + \psi(x,0)\nu$$

και

$$\left| (A^{1/2}\sqrt{1 - \frac{\psi^2(0,0)\delta^2}{\psi^2(x,0)}}\frac{\nu_x}{|A^{1/2}\nu_x|}, \frac{\psi(0,0)\delta}{\psi(x,0)}) \right| = \sqrt{1 - \frac{\psi^2(0,0)\delta^2}{\psi^2(x,0)} + \frac{\psi^2(0,0)\delta^2}{\psi^2(x,0)}} = 1.$$

Τα l_1, l_2, γ θα τα επιλέξουμε αργότερα. Τώρα από το ανάπτυγμα *Taylor*

$$\sqrt{\psi^2(x,0) - \psi^2(0,0)\delta^2} = \varepsilon\psi(0,0) + \frac{1}{\varepsilon}[\alpha cos\theta e_1 - \alpha sin\theta e_2 + \beta e_n]\cdot x$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_{x_ix_j}(0,0)x_ix_j + \frac{1}{2\varepsilon\psi(0,0)}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_{x_i}(0,0)\psi_{x_j}(0,0)x_ix_j$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon^3\psi(0,0)}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_{x_i}(0,0)\psi_{x_j}(0,0)x_ix_j+O(|x|^3).$$

Επίσης

$$\frac{\nu_x}{|\nu_x|}=\frac{1}{\sqrt{a}}[e_n+\frac{l_1x_1+l_2x_n}{\varepsilon^2\psi(0,0)}e_1+\frac{\gamma}{\varepsilon\psi(0,0)}\sum_{i=2}^{n-1}x_ie_i]\cdot$$

$$\cdot[1-\frac{\tilde{b}_1}{2\varepsilon^2\psi(0,0)}l(x)-\frac{\gamma\tilde{b}_2}{2\varepsilon\psi(0,0)}x_2+\frac{1}{\psi(0,0)}Q(x,x)+O(|x|^3)]$$

όπου $l(x)=l_1x_1+l_2x_n$ και

$$Q(x,x)=\frac{\tilde{b}_1-c_{11}}{2\varepsilon^4}l(x)^2-\frac{\tilde{b}_1^2}{4\varepsilon^4}(l_1^2x_1^2+l_2^2x_n^2)-\frac{\tilde{b}_2^2\gamma^2}{4\varepsilon^2}x_2^2+$$

$$+\frac{\gamma}{2\varepsilon^3}[\tilde{b}_1\tilde{b}_2x_2-\sum_{i=1}^{n-1}c_{1i}x_i]l(x)+\frac{\gamma^2}{2\varepsilon^2}(\tilde{b}_2x_2^2-\sum_{i\leq j=1}^{n-1}c_{ij}x_ix_j).$$

Ο όρος πρώτης τάξης του $y(x)$ θα είναι

$$y^*(x)-\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}\psi(0,0)e_n}=x+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{a}}[\alpha cos\theta x_1-\alpha sin\theta x_2+\beta x_n]e_n+$$

$$+[-\frac{\tilde{b}_1}{2\varepsilon\sqrt{a}}l(x)-\frac{\gamma\tilde{b}_2}{2\sqrt{a}}x_2]e_n+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{a}}l(x)e_1+\frac{\gamma}{\sqrt{a}}\sum_{i=2}^{n-1}x_ie_i.$$

Επιλέγοντας θ και γ έτσι ώστε

$$\alpha sin\theta=-\varepsilon\frac{\gamma}{2}\tilde{b}_2 \tag{9.5}$$

έχουμε

$$y^*(x)-\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}\psi(0,0)e_n}=M\cdot x$$

όπου

$$M=\begin{bmatrix} 1+\frac{l_1}{\varepsilon\sqrt{a}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{l_2}{\varepsilon\sqrt{a}} \\ 0 & 1+\gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\gamma & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{a}}(\alpha cos\theta-\frac{\tilde{b}_1l_1}{2}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{a}}(\beta-\frac{\tilde{b}_1l_2}{2}) \end{bmatrix}$$

Αν τώρα επιλέξουμε

$$l_1 = \beta - \frac{\tilde{b}_1 l_2}{2}, \quad -l_2 = \alpha cos\theta - \frac{\tilde{b}_1 l_1}{2} \tag{9.6}$$

και

$$(1+\gamma)^2 = (1 + \frac{l_1}{\varepsilon\sqrt{a}})^2 + \frac{l_2^2}{\varepsilon^2 a} \tag{9.7}$$

θα έχουμε $M = 0$ ή $M = (1+\gamma)M'$ όπου M' είναι ορθογώνιος πίνακας. Από την (9.6) εύκολα προκύπτει

$$l_1 = 2\frac{\tilde{b}_1 \alpha cos\theta + 2\beta}{4\tilde{b}_1^2}, \quad l_2 = 2\frac{-2\alpha cos\theta + \tilde{b}_1\beta}{4+\tilde{b}_1^2} \tag{9.8}$$

από όπου για κατάλληλο θ έχουμε

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{4}{a}\frac{[(b_1 cos\theta + b_2 sin\theta)\alpha cos\theta + 2\beta]\sqrt{a} + \alpha^2 cos^2\theta + \beta^2}{4 + (b_1 cos\theta + b_2 sin\theta)^2}} - 1 \tag{9.9}$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Αρκεί τώρα να βρούμε $\theta \in [-\pi, \pi]$ έτσι ώστε να ισχύει η (9.5) και το γ να ορίζεται από την (9.9). Αν

$$L(\theta) := \alpha sin\theta, \quad R(\theta) := -\frac{\varepsilon\gamma}{2}(-b_1 sin\theta + b_2 cos\theta)$$

η (9.5) γράφεται

$$L(\theta) = R(\theta),$$

Έστω $\theta_1 = cot^{-1}(\frac{b_1}{b_2})$ για $b_2 \neq 0$ και $\theta_1 = 0$ για $b_2 = 0$. Τότε $R(\theta_1) = R(\theta_1 - \pi) = 0$ και επειδή $L(\theta_1 - \pi) = -L(\theta_1)$ θα υπάρχει λύση της (9.9) στο διάστημα $[\theta_1 - \pi, \theta_1]$.

Ο όρος δεύτερης τάξης του $y(x)$ θα είναι

$$B = y(x) - y^*(x) - O(|x|^3) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_{x_i x_j}(0)x_i x_j + \frac{\varepsilon}{\psi(0,0)}Q(x,x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\varepsilon^3\psi(0,0)}(cos\theta b_1 + sin\theta b_2)(l_1x_1 + l_2x_n)(\alpha cos\theta x_1 - \alpha sin\theta x_2 + \beta x_n)\right] e_n$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{l_1x_1 + l_2x_2}{\varepsilon^2\psi(0,0)}e_1 + \frac{\gamma}{\varepsilon\psi(0,0)}\sum_{i=2}^{n-1} x_i e_i\right]\left\{\frac{1}{\varepsilon}[\alpha cos\theta x_1 - \alpha sin\theta x_2 + \beta x_n - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(cos\theta b_1 + sin\theta b_2)(l_1x_1 + l_2x_n)] - \frac{\gamma}{2}(cos\theta b_2 - sin\theta b_1)x_2\right\}$$

όπου

$$h_{x_ix_j}(0) = \left(\frac{(\psi_{x_i}\psi_{x_j} + \psi\psi_{x_ix_j})\varepsilon^2\psi^2 - \psi^2\psi_{x_i}\psi_{x_j}}{\varepsilon^3\psi^3}\right)(0,0)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\psi_{x_ix_j}(0,0) - \frac{\delta^2}{\varepsilon^3\psi(0,0)}\psi_{x_i}(0,0)\psi_{x_j}(0,0)$$

οπότε

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{x_ix_j}(0)x_ix_j = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_{x_ix_j}(0,0)x_ix_j - \frac{\delta^2}{\varepsilon^3\psi(0,0)}(\alpha cos\theta x_1 - \alpha sin\theta x_2 + \beta x_n)^2.$$

Από τα παραπάνω λόγω της στροφής θα προκύψει

$$\lim_{r\downarrow 0}\left\{\frac{n}{\omega_n r^{n+2}}\int_{B_r(0)}[\tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\delta) - \tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})]dx\right\} = \frac{(1+\gamma)^2}{2(n+2)}\Delta\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})$$

Το $\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})$ θα είναι κάθετο στην επιφάνεια

$$S = \{\nu = (\nu_x,\nu_t) : |(A^{1/2}\nu_x,\nu_t)| = \psi(0,0)\}$$

στο σημείο $\psi(0,0)\bar{\nu}$, άρα

$$\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu}) = |\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})|\eta,\ \text{όπου}\ \eta = \frac{\nabla(< Ax, x > + t^2)}{|\nabla(< Ax, x > + t^2)|}\Bigg|_{x=e_n, t=\delta}.$$

Από τη συνθήκη ελλειπτικότητας και την (9.4) έχουμε

$$\lambda \leq a \leq \Lambda, \;\; \lambda \leq ac_{ii} \leq \Lambda, \;\; |ac_{ij}| \leq 2\Lambda, \;\; |ab_i| \leq 2\Lambda$$

άρα οι (9.8), (9.9) δίνουν

$$|l_1|, \;\; |l_2|, \;\; |\gamma| \leq C(\lambda,\Lambda)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Ο όρος δεύτερης τάξης που είδαμε πριν θα είναι

$$B = \frac{1}{2\sqrt{a}}[\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}\psi)x_ix_j]e_n - \frac{\delta^2}{2\varepsilon^3\psi(0,0)\sqrt{a}}(\alpha cos\theta x_1 - \alpha sin\theta x_2 + \beta x_n)^2 e_n$$

$$-\frac{1}{\psi(0,0)\sqrt{a}}\sum_{i=1}^{n}Q_i(x,x)e_i$$

και από τις προηγούμενες εκτιμήσεις προκύπτει

$$Q_i(x,x) \leq C(\lambda,\Lambda,n,\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2)|x|^2.$$

Επίσης

$$\tilde{Q}_n(x,x) := \frac{\delta^2}{2\varepsilon^3\psi(0,0)\sqrt{a}}(\alpha cos\theta x_1 - \alpha sin\theta x_2 + \beta x_n)^2 + \frac{1}{\psi(0,0)\sqrt{a}}Q_n(x,x)$$

άρα

$$\tilde{Q}_n(x,x) \leq C(\lambda,\Lambda,n,\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2)|x|^2.$$

Τώρα $\eta \cdot e_n = \frac{2a}{|\nabla(<Ax,x>+t^2)|}\Bigg|_{(x,t)=(e_n,\delta)} \geq c(n,\Lambda,\varepsilon) =: k > 0$ και έστω $\sigma_i :=< \eta, e_i >$ για $i = 1,..,n$, οπότε $|\sigma_i| \leq 1$ και $\sigma_n \geq k$. Τώρα

$$\tilde{u}(y(x),\psi(0,0)\delta) - \tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\delta) = \nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})| \left[\frac{1}{2\varepsilon}\sigma_n \sum_{i,j=1}^{n}\psi_{x_ix_j}(0,0)x_ix_j - \frac{1}{\psi(0,0)}\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(x,x)\sigma_i - \right.$$

$$-\frac{1}{\psi(0,0)}\tilde{Q}_n(x,x)\sigma_n + O(|x|^3)\ \Bigg]$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})|\ \Bigg[\ \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_n \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{x_i x_j}(0,0)x_i x_j - \frac{C(\lambda,\Lambda,n,\varepsilon)}{\psi(0,0)}(\alpha^2+\beta^2)|x|^2\ \Bigg]$$

$$+O(|x|^3).$$

Οπότε

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r^2}\fint_{B_r(0)}[\tilde{u}(y(x),\psi(0,0)\delta) - \tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\delta)]dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})|\ \Bigg[\ \frac{1}{2\varepsilon}\sigma_n\Delta\psi(0,0) - \frac{C}{\psi(0,0)}(\alpha^2+\beta^2)|x|^2\ \Bigg]$$

$$\geq \frac{k}{2\varepsilon(n+2)\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})|\ \Bigg[\ \Delta\psi(0,0) - C\frac{|\nabla_x\psi(0,0)|^2}{\psi(0,0)}\ \Bigg]$$

δηλαδή

$$\liminf_{r\downarrow 0}\left\{\ \frac{2(n+2)}{r^2}\fint_{B_r(0)}[\tilde{v}(x,0)-\tilde{x}(0,0)]dx\ \right\}\geq$$

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{2(n+2)}{r^2}\fint_{B_r(0)}[\tilde{u}(y(x),\psi(0,0)\delta) - \tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\bar{\nu})]dx =$$

$$= \lim_{r\downarrow 0}\frac{2(n+2)}{r^2}\fint_{B_r(0)}[\tilde{u}(y(x),\psi(0,0)\delta) - \tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\delta)]dx +$$

$$+\lim_{r\downarrow 0}\frac{2(n+2)}{r^2}\fint_{B_r(0)}[\tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\delta) - \tilde{u}(y^*(x),\psi(0,0)\bar{\nu})]dx \geq$$

$$\geq \frac{k}{\varepsilon\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})|\ \Bigg[\ \Delta\psi(0,0) - C\frac{|\nabla_x\psi(0,0)|^2}{\psi(0,0)}\ \Bigg] + (1+\gamma)^2\Delta\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu}).$$

Τέλος εύκολα αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $\tilde{v}$, ότι ο δεύτερος όρος στην (9.3) φράσσεται από πάνω από

$$|\nabla_x\tilde{u}(\psi(0,0)\bar{\nu})|\frac{\varepsilon}{|A^{1/2}e_n|}\psi_t(0,0) + u_t(\psi(0,0)\bar{\nu})\ \Bigg[\ 1+\delta\psi_t(0,0)\ \Bigg].$$

Επειδή τώρα η $\tilde{u}$ είναι υπολύση της εξίσωσης της θερμότητας, η έκφραση (9.3) θα είναι

$$T \geq \frac{k}{\varepsilon\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}|\left[\Delta\psi - C\frac{|\nabla_x\psi|^2}{\psi}\right] + \tilde{u}_t\left[(1+\gamma)^2 - 1 - \delta\psi_t\right] - \frac{\varepsilon}{\lambda}|\nabla_x\tilde{u}|\psi_t.$$

Επειδή η $\tilde{u}$ είναι μονότονη στο κώνο έχουμε $|\tilde{u}_t| \leq cot\theta_0|\nabla_x\tilde{u}|$ και $\varepsilon \geq sin\theta_0 \geq |A^{1/2}e_n|sin\theta_0$ οπότε η παραπάνω έκφραση θα είναι

$$\geq \frac{k}{\varepsilon\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}|\left[\Delta\psi - C\frac{|\nabla_x\psi|^2}{\psi} - \frac{\varepsilon^2\sqrt{a}}{k\lambda}\psi_t\right] + \tilde{u}_t\left[\frac{2l_1}{\varepsilon\sqrt{a}} + \frac{l_1^2 + l_2^2}{\varepsilon^2 a}\right] - \tilde{u}_t\delta\psi_t$$

$$\geq \frac{k}{\varepsilon\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}|\left[\Delta\psi - C\frac{|\nabla_x\psi|^2}{\psi} - \frac{\varepsilon^2\sqrt{a}}{k\lambda}\psi_t - \frac{\sqrt{a}\varepsilon cot\theta_0}{k}\delta\psi_t\right] -$$

$$-cot\theta_0|\nabla\tilde{u}|\left[\frac{2C(\lambda,\Lambda)}{\varepsilon\sqrt{a}}|\nabla\psi| + \frac{C(\lambda,\Lambda)}{\varepsilon^2 a}|\nabla\psi|^2\right] \geq$$

$$\geq \frac{k}{\varepsilon\sqrt{a}}|\nabla\tilde{u}|\left[\Delta\psi - C\frac{|\nabla_x\psi|^2}{\psi} - c_1\psi_t - c_2|\nabla\psi|\right] \geq 0$$

διότι $1 \leq \psi \leq 2$. □

Λήμμα 9.2. *Έστω u είναι λύση με την έννοια του ιξώδους στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου στο Q_2 και*

$$v(x,t) := \sup_{B_{\varphi(x,t)}(x,t)} u(y,s)$$

με φ όπως στο προηγούμενο λήμμα και $|\nabla\varphi| < 1$. Αν $(x_0,t_0) \in \partial\{v > 0\} \cap Q_{3/2}$, $(y_0,s_0) \in \mathcal{F}$ και $(y_0,s_0) \in \partial B_{\varphi(x_0,t_0)}(x_0,t_0)$ τότε

(i) Το $\partial\{v > 0\}$ έχει μια εφαπτόμενη μπάλα στο σημείο (x_0,t_0) από τα δεξιά (δηλαδή υπάρχει $B^{(n+1)} \subset \{v > 0\}$) τέτοια ώστε $\overline{B}^{(n+1)} \cap \partial\{v > 0\} = \{(x_0,t_0)\}$.

(ii) Αν το $\partial\{u>0\}$ είναι γράφημα μιας Lipschitz συνάρτησης και το $|\nabla\varphi|$ είναι αρκετά μικρό (εξαρτόμενο από τη Lipschitz σταθερά του $\partial\{v>0\}$), το σύνολο $\partial\{v>0\}$ είναι στην ουσία γράφημα μιας Lipschitz συνάρτησης με σταθερά

$$L' \leq L + C|\nabla\varphi|.$$

(iii) Αν κοντά στο σημείο (y_0, s_0), στο s_0-επίπεδο, η u έχει το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$u(y,s_0) = \alpha_+ < y-y_0, \nu >^+ -\alpha_- < y-y_0, \nu >^- +o(|y-y_0|)$$

όπου $\nu = (y_0-x_0)/|y_0-x_0|$, τότε κοντά στο σημείο (x_0,t_0) στο t_0-επίπεδο ισχύει

$$v(x,t_0) \geq \alpha_+ < x-x_0, \nu + \frac{\varphi(x_0,t_0)}{|y_0-x_0|}\nabla_x\varphi >^+ -\alpha_- < x-x_0, \nu + \frac{\varphi(x_0,t_0)}{|y_0-x_0|}\nabla_x\varphi >^- +o(|x-x_0|).$$

Απόδειξη. Για τις αποδείξεις των (i) και (ii) παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην απόδειξη του Λήμματος 10 του [C1]. Για το (iii) με x κοντά στο x_0 θεωρούμε $y = x + \nu\overline{\varphi}(x)$ όπου $\overline{\varphi}(x) := \sqrt{\varphi^2(x,t_0) - (s_0-t_0)^2}$. Τώρα εκ κατασκευής

$$v(x,t_0) \geq u(y,s_0)$$

και από το ανάπτυγμα $Taylor$

$$\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(x_0) = x - x_0 + \frac{\varphi(x_0,t_0)}{|y_0-x_0|}\nabla_x\varphi(x_0,t_0) + o(|x-x_0|)$$

οπότε από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης

$$v^+(x,t_0) \geq \alpha_+ < x-x_0, \nu + \frac{\varphi(x_0,t_0)}{|y_0-x_0|}\nabla_x\varphi >^+ +o(|x-x_0|)$$

και

$$v^{-}(x,t_0) \leq \alpha_{-} < x - x_0, \nu + \frac{\varphi(x_0,t_0)}{|y_0 - x_0|}\nabla_x \varphi >^{-} + o(|x - x_0|).$$

$\square$

Κεφάλαιο 10

Μεταφορά στο Ελεύθερο Σύνορο

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο η αύξηση του κώνου μονοτονίας μπορεί να μεταφερθεί στο ελεύθερο σύνορο. Θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια συναρτήσεων ϕ_η με παράμετρο $\eta \in [0,1]$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 9.1. Στη συνέχεια μια συνάρτηση της μορφής $v_{\varepsilon\phi_\eta}$ (ορισμένη ως *supremum* όπως πριν) θα μεταφέρει τις εκτιμήσεις από κυλίνδρους μακρυά από το ελεύθερο σύνορο σε χωρία στο ελεύθερο σύνορο καθώς το η θα παίρνει τιμές από το 0 έως το 1.

Λήμμα 10.1. *Έστω $0 < m_0 \leq T$ και C αρκετά μεγάλο. Τότε υπάρχουν $\bar{C},\ k,\ h_0 > 0$ που εξαρτώνται από τα m_0 και C, τέτοια ώστε, για κάθε $h \in (0, h_0)$ υπάρχει οικογένεια συναρτήσεων $\phi_\eta \in C^2,\ 0 \leq \eta \leq 1$, που ορίζεται στο $D := [B_1 \setminus \{\bar{B}_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \cup \bar{B}_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n)\}] \times (-T, T)$ τέτοια ώστε*

(i) $1 \leq \phi_\eta \leq 1 + \eta h$ *στο* D,

(ii) $\mathcal{M}^-(D^2\phi_\eta) - c_1 D_t\phi_\eta - C\frac{|\nabla_x\phi_\eta|^2}{\phi_\eta} - c_2|\nabla_x\phi_\eta| \geq 0$ *στο* D,

(iii) $\phi_\eta \equiv 1$ *έξω από το* $B_{8/9} \times (-\frac{7}{8}T, T)$

(iv) $\phi_\eta \geq 1 + k\eta h$, *για* $(x,t) \in B_{1/2} \times (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

(v) $|\nabla\phi_\eta| \leq \bar{C}\eta h$ *και* $D_t\phi_\eta \geq 0$ *στο* D,

δεδομένου ότι οι σταθερές $c_1, \ c_2$ είναι αρκετά μικρές.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε συναρτήσεις $\psi_\eta \in C^2$ μη αρνητικές στο D τέτοιες ώστε

$$\mathcal{M}^+(D^2\psi_\eta) - c_1 D_t\psi_\eta + c_2|\nabla_x\psi_\eta| \leq 0 \ \textit{στο}\ D$$

και

α) $-a\eta h \leq \psi_\eta$ στο D,

β) $\psi_\eta \equiv 0$ έξω από το $B_{9/10} \times (-\frac{7}{8}T, T)$,

γ) $\psi_\eta \leq -bk\eta h$ στο $\bar{B}_{1/2} \times [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$,

δ) $|\nabla\psi_\eta| \leq \tilde{C}\eta h$ και $D_t\psi_\eta \leq 0$ στο D

όπου h είναι μικρό και $b < a$, $\tilde{C}$ είναι σταθερές που θα επιλέξουμε παρακάτω. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,t) := -\frac{1}{(|x|^2 + T - t)^M}$$

στο χωρίο $Q := Q_1 \setminus Q_{1/8}$ όπου $Q_r := B_r(0) \times (-T, T)$. Εύκολα προκύπτει ότι η f ικανοποιεί στο Q

$$L_\alpha f - c_1 D_t f + c_2|\nabla_x f| \leq 0$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$ με M αρκετά μεγάλο και

$$|\nabla f| \leq C.$$

Έστω τώρα

$$f_1(x,t) := -\max\left\{ (|x - \frac{3}{4}e_n|^2 + T - t)^{-M} - \max_{B_{9/10}\times(-\frac{7}{8}T,T)} |x - \frac{3}{4}e_n|^2 + T - t)^{-M}, 0 \right\}$$

τότε προφανώς $f_1 \equiv 0$ έξω από το $B_{9/10} \times (-\frac{7}{8}T, T)$ και

$$L_\alpha f_1 - c_1 D_t f_1 + c_2|\nabla_x f_1| \leq 0$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$ και για M αρκετά μεγάλο. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε ομαλή (συγκεκριμένα C^2) συνάρτηση με τις ίδιες ιδιότητες. Θεωρούμε την $f_2 = -\gamma f_1^4$, όπου το $\gamma > 0$ το επιλέγουμε έτσι ώστε

$$-\alpha\eta h \leq f_2 \leq -bK\eta h \chi_{\overline{B}_{1/9}\times[-T/2,T/2]}.$$

Από τον ορισμό της η $f_2 \in C^2$ και επειδή $f_1 \leq 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} L_\alpha f_2 - c_1 D_t f_2 + c_2|\nabla_x f_2| &\leq -4\gamma f_1^3 \left\{ L_\alpha f_1 - c_1 D_t f_1 - c_2|\nabla_x f_1| \right\} \\ &\leq -4\gamma f_1^3 \left\{ -c_1|\nabla_x f_1| - c_2|\nabla_x f_1| \right\} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

για $(x,t) \in [B_1 \setminus \bar{B}_{1/8}(\frac{3}{4}e_n)] \times (-T,T)$. Από τον ορισμό της η f_2 ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες. Εργαζόμαστε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο θεωρώντας μια συνάρτηση $\bar{f}_2$ στο χωρίο $[B_1 \setminus \bar{B}_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n)] \times (-T,T)$ και τελικά ορίζουμε την

$$\psi_\eta := f_2 + \bar{f}_2.$$

Για την κατασκευή των ϕ_η θεωρούμε

$$\phi_\eta = (\psi_\eta + 1)^{\frac{1}{K-C}}$$

όπου $K \leq C$ θα επιλεχθεί αργότερα. Τότε

$$\mathcal{M}^-(D^2\phi_\eta) \geq \frac{1}{K-C}(\psi_\eta+1)^{\frac{1-2K+2C}{K-C}} \left\{ (\psi_\eta+1)\mathcal{M}^+(D^2\psi_\eta) + \frac{1-K+C}{K-C} c(n)\lambda|\nabla\psi_\eta|^2 \right\}.$$

Δηλαδή

$$\mathcal{M}^-(D^2\phi_\eta) - c_1 D_t\phi_\eta - C\frac{|\nabla_x\phi_\eta|^2}{\phi_\eta} - c_2|\nabla_x\phi_\eta| \geq$$

$$\geq \frac{|\nabla\psi_\eta|^2}{(K-C)^2}\left\{ (1-K+C)c(n)\lambda - C \right\}(\psi_\eta+1)^{\frac{1-2K+2C}{K-C}} \geq 0$$

αν διαλέξουμε το K έτσι ώστε $(1-K+C)c(n)\lambda \geq C$. Τώρα διαλέγουμε τις σταθερές $a, b, \tilde{C}$ έτσι ώστε

$$1 - bk\eta h \leq (1+k\eta h)^{K-C}, \quad 1 - a\eta h \leq (1+\eta h)^{K-C}, \quad \tilde{C}(C-K) < 2^{1+C-K}\bar{C}.$$

□

Λήμμα 10.2. *Έστω $u_1 \leq u_2$ δυο λύσεις με την έννοια του ιξώδους του προβλήματος ελευθέρου συνόρου στο Q_2 με το ελεύθερο σύνορο της u_2, έστω $\mathcal{F}(u_2)$, να είναι ένα Lipschitz γράφημα που περνά από την αρχή. Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

$$v_\varepsilon(x,t) := \sup_{B_\varepsilon^{(n+1)}(x,t)} u_1 \leq u_2(x,t)$$

για $(x,t) \in B_1 \times (-T,T)$ και για κάποιο h μικρό,

$$u_2(x,t) - v_{(1+h\sigma)\varepsilon}(x,t) \geq C\sigma\varepsilon u_2(\frac{3}{4}e_n, 0)$$

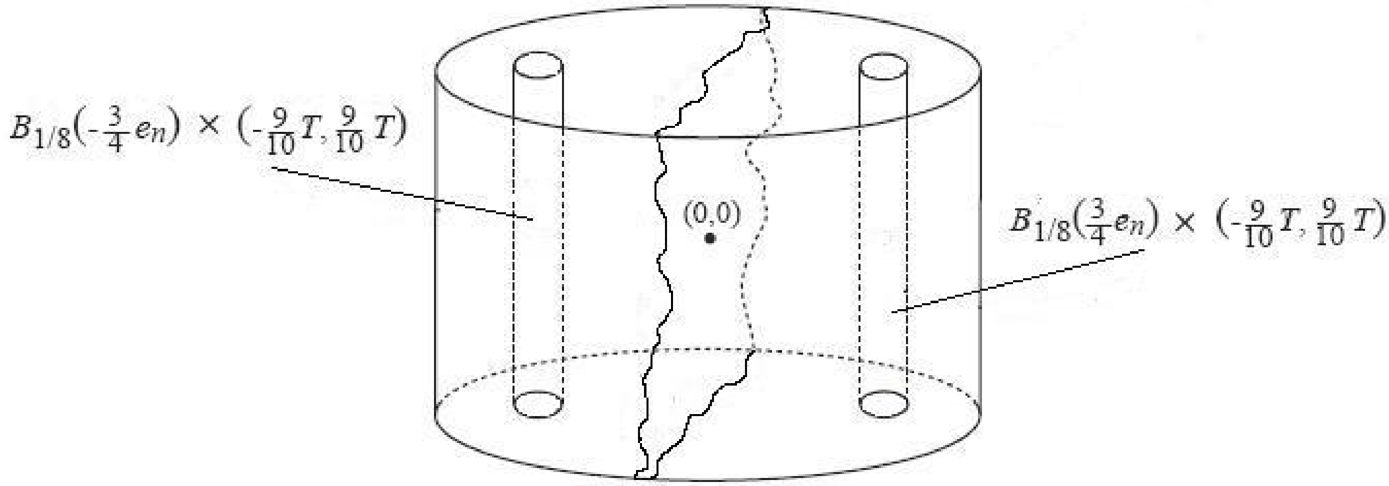
για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (-T,T) \subset \{u_2 > 0\}$,

$$u_2(x,t) - v_{(1+h\sigma)\varepsilon}(x,t) \geq -C\sigma\varepsilon u_2(-\frac{3}{4}e_n, 0)$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \times (-T,T) \subset \{u_2 < 0\}$. Τότε αν $\varepsilon > 0$ και $h > 0$ είναι αρκετά μικρά, θα υπάρχει c με $0 < c < 1$ τέτοιο ώστε

$$v_{(1+ch\sigma)\varepsilon}(x,t) \leq u_2(x,t)$$

για $(x,t) \in B_{1/2} \times (-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$.



Σχήμα 10.1: Μεταφορά στο ελεύθερο σύνορο

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μια συνεχή οικογένεια υπολύσεων $\overline{v}_\eta$ τέτοια ώστε

$$v_{(1+ch\sigma)\varepsilon}(x,t) \leq \overline{v}_1(x,t)$$

για $(x,t) \in B_{1/2} \times (-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$ και $\overline{v}_\eta \leq u_2$ με $0 \leq \eta \leq 1$. Θεωρούμε

$$\overline{v}_\eta(x,t) := v_\eta(x,t) + C\sigma\varepsilon w(x,t)$$

όπου

$$v_\eta(x,t) := \sup_{B^{(n+1)}_{\varepsilon\varphi\sigma\eta}(x,t)} u_1(y,s),$$

η w είναι συνεχής στο

$$D := \Big[\ B_{\frac{9}{10}}(0) \setminus \{B_{\frac{1}{8}}(\frac{3}{4}e_n) \cup B_{\frac{1}{8}}(-\frac{3}{4}e_n)\}\ \Big] \times \Big(\ -\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T\ \Big)$$

και ικανοποιεί:

$$\begin{cases} F(D^2w) - D_t w = 0 & \sigma\tau o \;\; D \cap \{u_2 > 0\}, \\ F(D^2w) - D_t w = 0 & \sigma\tau o \;\; D \cap \{u_2 < 0\}, \\ w = 0 & \sigma\tau o \;\; D \cap \{u_2 = 0\}, \\ w = u_2(\frac{3}{4}e_n, 0) & \sigma\tau o \;\; \partial B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T), \\ w = -u_2(-\frac{3}{4}e_n, 0) & \sigma\tau o \;\; \partial B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T), \\ w = 0 & \sigma\tau o \;\; \partial_p D \setminus \{\partial(B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \cup B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n)) \times (-\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T)\}. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο των η για τα οποία ισχύει η σχέση $\overline{v}_\eta \leq u_2$ είναι ανοικτό και κλειστό. Στη συνέχεια επειδή το σύνολο θα περιέχει την τιμή $\eta = 0$ θα προκύψει ότι ισχύει για κάθε η το οποίο και θα ολοκληρώσει την απόδειξη του λήμματος. Το γεγονός ότι $\overline{v}_0 \leq u_2$ προκύπτει από τις υποθέσεις και την αρχή μεγίστου. Πράγματι:

$$\overline{v}_0 = v_0 + C\sigma\varepsilon w = \sup_{B^{(n+1)}_{\varepsilon\varphi_0}(x,t)} u_1 + C\sigma\varepsilon w = \sup_{B^{(n+1)}_{\varepsilon}(x,t)} u_1 + C\sigma\varepsilon w.$$

- Στο $\partial_p D \setminus \{\partial(B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \cup B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n)) \times (-\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T)\}$:

$$\overline{v}_0 = \sup_{B^{(n+1)}_{\varepsilon}(x,t)} u_1 + 0 \leq u_2.$$

- Στο $\partial B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T)$:

$$\overline{v}_0 = v_0 + C\sigma\varepsilon u_2(\frac{3}{4}e_n, 0) \leq v_{(1+h\sigma)\varepsilon} + C\sigma\varepsilon u_2(\frac{3}{4}e_n, 0) \leq u_2$$

- Στο $\partial B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{9}{10}T, \frac{9}{10}T)$ ομοίως:

$$\overline{v}_0 = v_0 - C\sigma\varepsilon u_2(-\frac{3}{4}e_n, 0) \leq v_{(1+h\sigma)\varepsilon} - C\sigma\varepsilon u_2(-\frac{3}{4}e_n, 0) \leq u_2.$$

Επίσης από το Λήμμα 9.1 η $\overline{v}_\eta$ είναι υπολύση. Εύκολα αποδεικνύεται, λόγω της συνέχειας της οικογένειας των υπολύσεων ότι το σύνολο των η είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι και ανοικτό. Για το σκοπό αυτό ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $\eta_0 \in [0,1]$ ισχύει $\overline{v}_{\eta_0} \leq u_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $D \cap \{\overline{v}_{\eta_0} > 0\}$ περιέχεται συμπαγώς στο $D \cap \{u_2 > 0\}$. Έστω ότι δεν ισχύει, τότε θα υπάρχει σημείο (x_0, t_0) τέτοιο ώστε

$$(x_0, t_0) \in \mathcal{F}(\overline{v}_{\eta_0}) \cap \mathcal{F}(u_2) \cap D$$

και από το Λήμμα 9.2 γύρω από το σημείο αυτό θα ισχύει

$$v_{\eta_0}(x, t_0) \geq \alpha_+^* < x - x_0, \nu^* >^+ - \alpha_-^* < x - x_0, \nu^* >^- + o(|x - x_0|)$$

όπου $\alpha_+^* = \alpha_+^{(1)}|\tau^*|$, $\alpha_-^* = \alpha_-^{(1)}|\tau^*|$, $\nu^* = \frac{\tau^*}{|\tau^*|}$ για

$$\tau^* := \nu^{(1)} + \frac{\varepsilon^2 \varphi_{\sigma\eta_0}(x_0, t_0)}{|y_0 - x_0|} \nabla_x \varphi_{\sigma\eta_0}(x_0, t_0), \quad \nu^{(1)} := \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|}$$

και

$$\frac{s_0 - t_0}{|y_0 - x_0|} =: \frac{\beta_+^{(1)}}{\alpha_+^{(1)}} \leq G(\nu^{(1)}, \alpha_+^{(1)}, \alpha_-^{(1)}).$$

Από την ασυμπτωτική έκφραση της λύσης u_2 θα έχουμε

$$u_2(x, t_0) = \alpha_+^{(2)} < x - x_0, \nu^{(2)} >^+ - \alpha_-^{(2)} < x - x_0, \nu^{(2)} >^- + o(|x - x_0|)$$

όπου $\nu^{(2)} = \nu^*$ και

$$G(\nu^{(2)}, \alpha_+^{(2)}, \alpha_-^{(2)}) \leq \frac{\beta_+^{(2)}}{\alpha_+^{(2)}} := \left(\frac{s_0 - t_0}{|y_0 - x_0|} + \frac{\varepsilon^2 \varphi_{\sigma\eta_0}(x_0, t_0)}{|y_0 - x_0|} D_t \varphi_{\sigma\eta_0}(x_0, t_0) \right) |\tau^*|^{-1}.$$

Επειδή το ελεύθερο σύνορο $\mathcal{F}(u_2)$ είναι *Lipschitz* από το Λήμμα 3.2 έχουμε $w \geq Cu_2$ στο $\{u_2 > 0\}$ και $w \geq -Cu_2$ στο $\{u_2 < 0\}$ μακριά από το παραβολικό σύνορο. Οπότε κοντά στο x_0, πάνω στο υπερεπίπεδο $t = t_0$ θα έχουμε:

$$\overline{v}_{\eta_0}(x, t_0) \geq \overline{\alpha}_+ < x - x_0, \nu^* >^+ - \overline{\alpha}_- < x - x_0, \nu^* >^- + o(|x - x_0|)$$

όπου $\overline{\alpha}_+ = \alpha_+^* + C\sigma\varepsilon\alpha_+^{(2)}$ και $\overline{\alpha}_- = \alpha_-^* - C\sigma\varepsilon\alpha_-^{(2)}$. Επίσης εκ κατασκευής

$$G(\nu^{(2)}, \alpha_+^{(2)}, \alpha_-^{(2)}) \leq \frac{\beta_+^{(2)}}{\alpha_+^{(2)}} \leq \left(\frac{\beta_+^{(1)}}{\alpha_+^{(1)}} + C\sigma\varepsilon h \right) (1 + C\sigma\varepsilon h)$$
$$\leq G(\nu^{(1)}, \alpha_+^{(1)}, \alpha_-^{(1)}) + \overline{C}\sigma\varepsilon h.$$

Επειδή τώρα

$$\alpha_+^{(1)} \leq \overline{\alpha}_+ - C\sigma\varepsilon\alpha_+^{(2)} + C\sigma\varepsilon h, \quad \alpha_-^{(1)} \geq \overline{\alpha}_- + C\sigma\varepsilon\alpha_-^{(2)} - C\sigma\varepsilon h$$

και από τις υποθέσεις για τη συνάρτηση G

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_+} > c^* > 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha_-} < -c^*$$

προκύπτει

$$G(\nu^{(1)}, \alpha_+^{(1)}, \alpha_-^{(1)}) < G(\nu^{(1)}, \overline{\alpha}_+ - C\sigma\varepsilon\alpha_+^{(2)} + C\sigma\varepsilon h, \overline{\alpha}_- + C\sigma\varepsilon\alpha_-^{(2)} - C\sigma\varepsilon h).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για κάθε μεταβλητή της συνάρτησης G καθώς και τη *Lipschitz* συνέχεια της έχουμε

$$G(\nu^{(1)}, \alpha_+^{(1)}, \alpha_-^{(1)}) < G(\nu^{(2)}, \overline{\alpha}_+, \overline{\alpha}_-) + C|\nu^{(2)} - \nu^{(1)}| - c^* C\sigma\varepsilon(\alpha_+^{(2)} + \alpha_-^{(2)}) + C\sigma\varepsilon h.$$

Επίσης η υπόθεση για τον μη εκφυλισμό δίνει

$$\alpha_+^{(2)} + \alpha_-^{(2)} \geq m > 0$$

και με $|\nu^{(2)} - \nu^{(1)}| \leq C\sigma\varepsilon h$ έχουμε

$$G(\nu^{(1)}, \alpha_+^{(1)}, \alpha_-^{(1)}) < G(\nu^{(2)}, \overline{\alpha}_+, \overline{\alpha}_-) - (c^* m - h)C\sigma\varepsilon.$$

Οπότε αν επιλέξουμε $h < c^* m$ θα έχουμε

$$G(\nu^{(2)}, \alpha_+^{(2)}, \alpha_-^{(2)}) < G(\nu^{(2)}, \overline{\alpha}_+, \overline{\alpha}_-).$$

Από την άλλη $u_2 - \overline{v}_{\eta_0} \geq 0$ και είναι υπερλύση στο $\{\overline{v}_{\eta_0} > 0\}$, δηλαδή $\alpha_-^{(2)} \leq \overline{\alpha}_-$ και $\alpha_+^{(2)} > \overline{\alpha}_+$. Όμως η G είναι γνήσια μονότονη (αύξουσα ως προς v_ν^+, φθίνουσα ως προς v_ν^-) και άρα

$$G(\nu^{(2)}, \alpha_+^{(2)}, \alpha_-^{(2)}) > G(\nu^{(2)}, \overline{\alpha}_+, \overline{\alpha}_-) > G(\nu^{(2)}, \alpha_+^{(2)}, \alpha_-^{(2)})$$

άτοπο. $\square$

Κεφάλαιο 11

Ομαλότητα του Ελευθέρου Συνόρου

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εκτιμήσεις αποδεικνύουμε την ομαλότητα του ελευθέρου συνόρου. Η απόδειξη της λειότητας στο χώρο (Θεώρημα 11.2) προκύπτει εφαρμόζοντας επαναληπτικά το επόμενο Λήμμα. Το σύμβολο $\Gamma(\nu, \theta^x, \theta^t)$ εκφράζει έναν ελλειπτικό κώνο με άξονα ν και άνοιγμα θ^x, στο χώρο και θ^t, στο χρόνο. Ωστόσο στην περίπτωση του χώρου και του χρόνου πρέπει να είμαστε περισσότερο προσεκτικοί.

Λήμμα 11.1. *Έστω u η λύση με την έννοια του ιξώδους στο προβλήμα ελεύθερου συνόρου στο $Q_1 = B_1 \times (-1, 1)$ που είναι μονότονα αύξουσα σε κάθε διεύθυνση $\tau \in \Gamma(e_n, \theta, \theta^t)$, για κάποιο $0 < \theta_0 \leq \theta^t < \theta < \pi/2$. Τότε υπάρχουν σταθερές (θετικές) $c, \bar{c}$ και μοναδιαίο διάνυσμα ν_1 τέτοια ώστε στο $B_{1/2} \times (-1, 1)$, η συνάρτηση $u_1(x, t) = u(x, \bar{c}\delta^2 t)$ είναι αύξουσα ως προς κάθε κατεύθυνση $\tau \in \Gamma(\nu_1, \theta_1, {\theta_1}^t)$, με $\theta_1 \geq \theta + c\delta^3, {\theta_1}^t \geq \theta_0$.*

Απόδειξη. Από τη Harnack, θα υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα ν και $b < 1$ τέτοια ώστε για $\theta^* := \pi/2 - b(\pi/2 - \theta)$ η u μονότονα αύξουσα σε κάθε χωριακή διεύθυνση $\tau_x \in \Gamma_x(\nu, \theta^*) \supset \Gamma_x(e_n, \theta)$ για κάθε $(x, t) \in B_{1/8} \times (-1/10, -1/10)$. Θεωρούμε τις διευθύνσεις $\tau_x \in \Gamma_x(e_n, \theta) - \aleph$ όπου $\aleph$ είναι ένα υποσύνολο του $\partial\Gamma_x(e_n, \theta) \cap \Gamma_x(\nu, \theta^*)$. Τότε από το Λήμμα 8.1 θα υπάρχουν θετικές σταθερές

C, $\overline{c}$ που εξαρτώνται μόνο από το κομμάτι $\aleph$ που διαγράψαμε, τέτοιες ώστε:

$$D_{\tau_x} u(x,t) \geq \overline{c}\delta D_{e_n} u(x,t)$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-C\delta/\mu, C\delta/\mu)$ όπου $\mu = \frac{1}{2}\pi - \theta_0$. Επιλέγουμε σταθερά $c_1 << 1$ και $c^* = (C/\mu)c_1$. Αν τώρα εφαρμόσουμε μια ομοιοθεσία ως προς το χρόνο τάξης $c^*\delta^2$, δηλαδή θεωρήσουμε την συνάρτηση $u_1(x,t) := u(x, c^*\delta^2 t)$, τότε στην εξίσωση η παράγωγος ως προς τον χρόνο καθώς και η συνθήκη στο ελεύθερο σύνορο θα πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα $\frac{1}{c^*\delta^2}$, το σύνολο $B_1 \times (-C\delta/\mu, -C\delta/\mu)$ απεικονίζεται στο σύνολο $B_1 \times (-1/c_1\delta, 1/c_1\delta)$ και ο κώνος $\Gamma(e_n, \theta, \theta^t)$ μετασχηματίζεται σε ένα ελλειπτικό κώνο ο οποίος προφανώς περιέχει τον κώνο $\overline{\Gamma}(e_n, \theta)$.

Για κάθε κατεύθυνση $\rho \in \overline{\Gamma}(e_n, \theta)$ στο χώρο και τον χρόνο, δηλαδή $\rho = \lambda_1\sigma + \lambda_2 e_t$ όπου σ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο $\Gamma_x(e_n, \theta) - \aleph$ και $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ ισχύει:

$$D_\rho u_1(x,t) \geq c\delta D_{e_n} u_1(x,t) \tag{11.1}$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-1/c_1\delta, 1/c_1\delta)$, δεδομένου ότι $D_t u_1 \leq c^*\delta^2 D_{e_n} u_1$. Θεωρούμε τώρα ένα διάνυσμα $\tau \in \overline{\Gamma}(e_n, \frac{1}{2}\theta)$ της μορφής $\tau = \eta\rho$ με $0 < \eta << 1$ και ένα σημείο $(x_0, t_0) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-1/c_1\delta, 1/c_1\delta)$. Τότε για κάθε $(y,s) \in B_\varepsilon^{(n+1)}(x_0, t_0)$ με $\varepsilon = |\tau| sin\frac{1}{2}\theta$ ισχύει:

$$u_1(y,s) := u_1((y,s) - \overline{\tau}) = u_1((x_0, t_0) - \tau) = u_1(x_0, t_0) - D_\tau u_1(x^*, t^*)|\tau|$$

όπου $\overline{\tau} = \tau + (x_0 - y, t_0 - s)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $D_{e_n} u$ είναι της τάξης του $u/d_{x,t}$ και την σχέση (11.1) έχουμε:

$$\overline{v}_\varepsilon(x_0,t_0) := \sup_{B_\varepsilon^{(n+1)}(x_0,t_0)} u_1(y,s) \leq u_1((x_0,t_0) - c\varepsilon\delta u_1((x_0,t_0).$$

Από το Λήμμα 10.2 υπάρχει $h>0$ και σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε

$$\overline{v}_{(1+h\delta)\varepsilon}(x,t) \leq u_1(x,t) - C\varepsilon\delta u_1(x_0,t_0)$$

για κάθε (x,t) στη παραβολική γειτονιά του (x_0,t_0). Από την άλλη μεριά όμως για

$$(x_0,t_0) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{1}{c_1\delta}, \frac{1}{c_1\delta})$$

έχουμε $u_1(x_0,t_0) \sim u_1(\frac{3}{4}e_n,0)$ και $u_1(x_0,t_0) \sim u_1(-\frac{3}{4}e_n,0)$ αντίστοιχα, οπότε

$$\overline{v}_{(1+h\delta)\varepsilon}(x,t) \leq u_1(x,t) - C\varepsilon\delta u_1(\frac{3}{4}e_n,0)$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{1}{c_1\delta}, \frac{1}{c_1\delta})$ και

$$\overline{v}_{(1+h\delta)\varepsilon}(x,t) \leq u_1(x,t) - C\varepsilon\delta u_1(-\frac{3}{4}e_n,0)$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1/8}(-\frac{3}{4}e_n) \times (-\frac{1}{c_1\delta}, \frac{1}{c_1\delta})$ αντίστοιχα. Επειδή όμως οι συναρτήσεις $u_1(x,t)$ και $\overline{u}_1(x,t) := u_1((x,t)-\tau)$ είναι λύσεις με την έννοια του ιξώδους στο σύνολο $B_1 \times (-1/c_1\delta, 1/c_1\delta)$ και ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 10.2* προκύπτει ότι

$$v_{(1+ch\delta^3)\varepsilon}(x,t) \leq u_1(x,t) \tag{11.2}$$

για $(x,t) \in B_{1/2} \times (-1/2c_1\delta, 1/2c_1\delta)$ όπου $c>0$ είναι μικρή σταθερά.

*Παρατηρείστε ότι για να εφαρμόσουμε το Λήμμα 10.2 θα πρέπει ο συντελεστής του u_t στην εξίσωση να είναι μικρός, αλλά όπως είδαμε και στο Λήμμα 8.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι όσο μικρός θέλουμε.

Η ανισότητα (11.2) υποδεικνύει ότι η συνάρτηση u_1 είναι αύξουσα κατά μήκος οποιασδήποτε διεύθυνσης της μορφής $\tau + (1 + ch\delta^3)\varepsilon\nu$ όπου $\nu \in I\!R^{n+1}$, $|\nu| = 1$. Εύκολα προκύπτει ότι η κυρτή περιβάλλουσα αυτής της οικογένειας διευθύνσεων και του κώνου $\overline{\Gamma}(e_n, \theta)$ περιέχει ένα καινούργιο κώνο $\Gamma(\nu_1, \theta_1, \theta_1^t)$ με $\theta_1^t \geq \theta_0$ και

$$\theta_1 - \theta \geq c\delta^3.$$

$\square$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα επαναληπτικά, αποδεικνύουμε την C^1 ομαλότητα του ελευθέρου συνόρου σε t-επίπεδα παράλληλα στον $I\!R^n$.

Θεώρημα 11.2. *Έστω u μια λύση με την έννοια του ιξώδους στο $Q_1 = B_1 \times (-1, 1)$. Τότε για κάθε χρόνο t, το $F_t := \mathcal{F} \times \{t\}$ είναι μια C^1 επιφάνεια.*

Απόδειξη. Έστω $u_1(x,t) = u(x, c^*\delta_0^2 t)$, όπου $\delta_0 = \delta$, c^* επιλέγονται όπως στο Λήμμα 11.1. Από τον ορισμό της η u_1 είναι αύξουσα κατά μήκος οποιασδήποτε κατεύθυνσης που περιέχεται στον κώνο $\Gamma(\nu_1, \theta_1, \theta_1^t)$ με $\theta_1^t \geq \theta_0$ και $\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \leq \delta_0 - c\delta_0^3$ στο $B_{1/2} \times (-1, 1)$. Υποθέτουμε τώρα ότι οι $u_k = u_k(x,t)$ για $k \geq 1$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 11.1 στον κώνο $\Gamma(\nu_k, \theta_k, \theta_k^t)$ με $\theta_k^t \geq \theta_0$ για $(x,t) \in B_{1/2} \times (-1, 1)$. Τότε θεωρώντας:

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(2^{-r_k}x, c^* 2^{-r_k}\delta_k^2 t) \cdot 2^{r_k}$$

όπου $\delta_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k$ και r_k έχει επιλεχθεί έτσι ώστε $2^{-r_k} < c^*\delta_k^2$. Από το Λήμμα 11.1 η u_{k+1} είναι μονότονη στον κώνο $\Gamma(\nu_{k+1}, \theta_{k+1}, \theta_{k+1}^t)$ με $\theta_{k+1}^t \geq \theta_0$ και

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k - c\delta_k^3$$

για $(x,t) \in B_{1/2} \times (-1,1)$, από όπου προκύπτει ότι

$$\lim_{k\to+\infty} \delta_k = 0,$$

δηλαδή το ελεύθερο σύνορο $F_t := \mathcal{F} \times \{t\}$ είναι μια C^1 επιφάνεια στο χώρο. $\square$

Το γεγονός ότι η γωνία στο χώρο μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 8. Η εκλεπτυσμένη ισορροπία μεταξύ της γωνίας του κώνου στο χώρο και της γωνίας στο χρόνο θα μας δώσει ένα μέτρο συνεχείας ως προς τον χρόνο καθώς και ένα βελτιωμένο ως προς το χώρο. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 8 αν ξεκινήσουμε με μια γωνία στον χρόνο, έστω μ, αυτό σημαίνει ότι η λύση u θα είναι αύξουσα κατά μήκος των διευθύνσεων $e_t + Be_n$ και $-e_t - Ae_n$. Για να βελτιωθεί (μεγαλώσει) ο κώνος στο χρόνο θα πρέπει να μικρύνουμε το B ή να μεγαλώσουμε το A. Αυτό θα είναι το περιεχόμενο του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 11.3. *Έστω u μια λύση με την έννοια του ιξώδους του προβλήματος ελευθέρου συνόρου στο χωρίο $B_1 \times (-1,1)$ η οποία είναι αύξουσα σε κάθε διεύθυνση του κώνου (στο χώρο)*

$$\Gamma_x(e_n, \theta),\ \text{για}\ 0 < \theta_0 \le \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Επιπλέον υπάρχουν σταθερές $\bar{c}_1 > 0$ και A, B τέτοιες ώστε η u είναι αύξουσα κατά μήκος των διευθύνσεων $e_t + Be_n$ και $-e_t - Ae_n$ με

$$0 < B - A \le \bar{c}_1 \mu.$$

Τότε για $\delta := \frac{\pi}{2} - \theta << \mu^3$ υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, c και A_1, B_2 που εξαρτώνται μόνο από τα n και θ_0 και χωριακό διάνυσμα ν_1 τέτοια ώστε για

$(x,t) \in B_{1/2} \times (-c\delta/2\mu, c\delta/2\mu)$:

(α) Η u είναι αύξουσα σε κάθε διεύθυνση $\tau \in \Gamma_x(\nu_1, \theta_1)$ με

$$\frac{\pi}{2} - \theta_1 := \delta_1 \leq \delta - c_1 \frac{\delta^2}{\mu}.$$

(β) Η u είναι αύξουσα κατά μήκος των διευθύνσεων $e_t + B_1\nu_1$ και $-e_t - A_1\nu_1$ με

$$0 < B_1 - A_1 \leq \bar{c}_1 \mu_1$$

όπου $\mu_1 \leq \mu - c_2\delta$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $w(x,t) := u(x, \delta t/\mu)$ οπότε στην εξίσωση ο συντελεστής της παραγώγου ως προς t καθώς επίσης και η σχέση στο ελεύθερο σύνορο θα πολλαπλασιαστεί με μ/δ. Επίσης τα χωρία $B_1 \times (-1,1)$ και $B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-c\mu/\delta, c\mu/\delta)$ απεικονίζονται στα $B_1 \times (-\mu/\delta, \mu/\delta)$ και $B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-c, c)$ αντίστοιχα. Από τον ορισμό της η w είναι αύξουσα κατά μήκος των διευθύνσεων $e_t + Be_n$ και $-e_t - Ae_n$ με $0 < B - A \leq \bar{c}_1\delta$.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\tau \in \Gamma_x(e_n, \theta - \delta)$ με $|\tau| << \delta$ και έστω $\varepsilon = |\tau| \sin\delta$. Τότε για τη συνάρτηση $w_1(x,t) := w(x - \tau, t)$ θα ισχύει

$$\sup_{B_\varepsilon(x)} w_1(y,t) \leq w(x,t)$$

για κάθε $(x,t) \in B_{1-\varepsilon} \times (-\frac{\mu}{\delta}, \frac{\mu}{\delta})$ λόγω της μονοτονίας. Ακολουθώντας τώρα τη μέθοδο που είδαμε στην απόδειξη του Πορίσματος 7.3 και του Λήμματος 8.1 (αφαιρώντας ένα κομμάτι του αρχικού κώνου) προκύπτει ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα σ στο κώνο που απέμεινε και για $(x,t) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-c,c)$ θα ισχύει:

$$D_\sigma w \geq c\delta D_n w. \tag{11.3}$$

Η ανισότητα (11.3) επεκτείνεται σε διευθύνσεις που έχουν t-συντεταγμένη τάξης δ. Πράγματι, έστω σ ένα μοναδιαίο διάνυσμα για το οποίο ισχύει η (11.3), τότε για $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ και επειδή

$$|D_t w| \leq C^* \frac{\delta}{\mu} D_{e_n} w$$

θα έχουμε[†]

$$\lambda_1 D_\sigma w + \lambda_2 D_t w \geq (c\lambda_1\delta - C^*\lambda_2 \frac{\delta}{\mu}) D_{e_n} w \geq C\delta D_{e_n} w$$

διότι $|\lambda_2| \leq \delta$ και $\frac{\delta}{\mu} << 1$. Έστω τώρα ρ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο $I\!R^{n+1}$ και για $\overline{\tau} = \tau + \varepsilon\rho$ στο $B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-c, c)$ θα έχουμε

$$w((x,t) - \overline{\tau}) - w(x,t) = -D_{\overline{\tau}} w(\tilde{x}, \tilde{t}) \leq -c\delta\varepsilon D_{e_n} w(x,t) \leq -c\delta\varepsilon w^{\pm}(\pm\frac{3}{4}e_n, 0)$$

διότι $D_\tau w \in S(\lambda, \lambda^{-1})$, $|\overline{\tau}| \geq c\varepsilon$ και εφαρμόζεται το Πόρισμα 4.5. Οπότε για $(x,t) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-c, c)$ προκύπτει

$$v_\varepsilon(x,t) := \sup_{B_\varepsilon^{(n+1)}(x,t)} w_1(y,s) \leq w(x,t) - c\varepsilon\delta w^{\pm}(\pm\frac{3}{4}e_n, 0).$$

Οπότε όπως στην απόδειξη του Λήμματος 7.2, για $\overline{h}$ αρκετά μικρό και για $(x,t) \in B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}e_n) \times (-c, c)$ προκύπτει

$$v_{(1+\overline{h}\delta)\varepsilon}(x,t) \leq w(x,t) - c\varepsilon\delta w^{\pm}(\pm\frac{3}{4}e_n, 0).$$

[†] θυμηθείτε ότι $\delta < \frac{\delta}{\mu} << \mu$.

Επομένως η w ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Λήμματος 10.2 με $T = c$ και $h = \overline{h}\delta/\mu$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$v_{(1+c\overline{h}\frac{\delta^2}{\mu})\varepsilon}(x,t) \leq w(x,t) \tag{11.4}$$

για μικρό c και $(x,t) \in B_{1/2} \times (-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c)$.

Η ανισότητα (11.4) υποδηλώνει ότι η συνάρτηση w είναι αύξουσα κατά μήκος των διευθύνσεων της μορφής

$$\overline{\tau} = \tau + \big(1 + c\overline{h}\frac{\delta^2}{\mu}\big)\varepsilon\rho, \tag{11.5}$$

στο χωρίο $B_{1/2} \times (-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c)$. Η κυρτή περιβάλλουσα του αρχικού κώνου $\Gamma_x^1(e_n,\theta)$ και το σύνολο των διευθύνσεων (11.5) περιέχουν ένα καινούργιο κώνο στο χώρο $\Gamma_x(\nu_1,\theta_1)$ έτσι ώστε

$$\theta_1 - \theta = c^*\overline{h}\frac{\delta^2}{\mu},$$

οπότε κάνοντας *rescaling* πίσω στο χρόνο ολοκληρώνουμε την απόδειξη του (α) για $c_1 = c^*\overline{h}$.

(β) Ο καινούργιος άξονας ν_1 στο χώρο μετατοπίζεται[‡] σε μια καινούργια χωριακή διεύθυνση η οποία είναι κάθετη στο e_n. Επειδή τώρα το δ είναι πολύ μικρότερο από το μ^3 ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 8.4 δηλαδή θα ισχύει

$$D_t w + \frac{\delta}{\mu} B D_n w \geq c\delta D_n w \tag{11.6}$$

ή αντίστοιχα

$$-D_t w - \frac{\delta}{\mu} A D_n w \geq c\delta D_n w. \tag{11.7}$$

[‡]Η μετατόπιση όπως είδαμε είναι της τάξης δ.

έστω τώρα $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_1$ τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις $e_t + \frac{\delta}{\mu} B e_n$ και $e_t + \frac{\delta}{\mu} B \nu_1$. Αν τώρα e^1 είναι οποιοδήποτε χωριακό διάνυσμα κάθετο στο e_n και $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ θα ισχύει

$$\lambda_1 D_{\overline{\rho}_1} w + \lambda_2 D_{e^1} w \geq \big(c\delta - \overline{c}\frac{\delta^2}{\mu} B - \overline{c}_1 \delta^2\big) D_n w \geq \tilde{C} \delta D_{\nu_1} w$$

στο χωρίο $B_{1/8}(\pm\frac{3}{4}) \times (-c, c)$, διότι $|\lambda_2| \leq 2\delta$ και

$$D_{\overline{\rho}_1} w \geq c D_{\overline{\rho}} w - \overline{c}\frac{\delta^2}{\mu} B D_n w.$$

Έστω τώρα ρ^* η διεύθυνση που βρίσκεται κάτω (ως προς το χρόνο) από την $\overline{\rho}_1$, η οποία σχηματίζει γωνία δ με το $\overline{\rho}_1$ και βρίσκεται στο (e_t, ν_1)-επίπεδο. Για κάθε μικρό διάνυσμα τ στην διεύθυνση του ρ^* επιλέγουμε $\varepsilon = |\tau| \sin\delta$ και $w_1(x,t) = w((x,t) - \tau)$. Τότε προφανώς

$$v_\varepsilon(x,t) \leq w(x,t)$$

για $(x,t) \in B_{1-\varepsilon} \times (-\frac{\mu}{\delta} + \varepsilon, \frac{\mu}{\delta} - \varepsilon)$, δηλαδή τελικά

$$v_{(1+\overline{c}\overline{h}\frac{\delta^2}{\mu})\varepsilon}(x,t) \leq w(x,t) \tag{11.8}$$

για $(x,t) \in B_{1/8} \times (-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c)$. Η ανισότητα (11.8) θα μας δώσει τη μονοτονία της συνάρτησης w κατά μήκος των διευθύνσεων

$$e_t + (\frac{\delta}{\mu} B - c^* \overline{h}\frac{\delta^2}{\mu})\nu_1.$$

Εφαρμόζοντας την ομοιοθεσία πίσω στο χρόνο, η συνάρτηση u θα είναι αύξουσα κατά μήκος της διεύθυνσης

$$e_t + (B - c^* \overline{h}\delta)\nu_1,$$

που μας δίνει την απόδειξη του (β) για

$$B_1 = B - c^* \overline{h} \delta, \quad A_1 = A$$

και

$$B_1 - A_1 = B - A - c^* \overline{h} \delta \leq c_1(\mu - c_2 \delta).$$

$\square$

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά το Λήμμα 11.3 θα αποδείξουμε το βασικό θεώρημα της διατριβής, που μας δίνει και την ομαλότητα του ελευθέρου συνόρου:

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5. Η συνάρτηση $u_\lambda := u(\lambda x, \lambda t)/\lambda$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Λήμματος 11.3, οπότε αν εφαρμόσουμε επαναληπτικά το Λήμμα αυτό για τη συνάρτηση

$$(u_\lambda)_k(x,t) = u_\lambda(2^{-k}x, 2^{-k}t) \cdot 2^k$$

με $k \geq 1$ θα προκύψει μια ακολουθία κώνων $\Gamma_x(\nu_k, \theta_k)$ με άξονα ν_k και άνοιγμα θ_k και ακολουθίες σταθερών $\{A_k\}$, $\{B_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\mu_k\}$ τέτοιες ώστε αν $(x,t) \in B_{2^{-k}} \times \big(-\frac{c\delta_k}{2^k m_k}, \frac{c\delta_k}{2^k m_k}\big)$, τότε :

(α) Η $u_\lambda(x,t)$ είναι αύξουσα σε κάθε χωριακή διεύθυνση που ανήκει στον κώνο $\Gamma_x(\nu_k, \theta_k)$.

(β) Η $u_\lambda(x,t)$ είναι αύξουσα κατά μήκος των διευθύνσεων $e_t + B_k \nu_k$ και $-e_t - A_k \nu_k$, όπου

$$0 \leq B_k - A_k \leq \overline{c}_1 \mu_k.$$

(γ) Οι ακολουθίες $\{\delta_k\}$ και $\{\mu_k\}$ ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k - c_1 \frac{\delta_k^2}{\mu_k},$$

$$\mu_{k+1} \leq \mu_k - c_2\delta_k$$

με $\delta_k := \frac{\pi}{2} - \theta_k$ και $\delta_k << \mu_k^3$. Από τις προηγούμενες αναδρομικές σχέσεις μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε ότι

$$\delta_k \sim \frac{c_1(\eta)}{k^{3/2-\eta}}, \quad \mu_k \sim \frac{c_2(\eta)}{k^{1/2-\eta}}$$

για κάθε μικρό θετικό η. $\square$

Παράρτημα Α΄

Ο Τύπος Μονοτονίας

Στο παράρτημα αυτό δίνουμε τον τύπο μονοτονίας των Alt, Caffarelli και Friedman για αρμονικές συναρτήσεις.

Θεώρημα Α΄.1. *Έστω w μια συνάρτηση στον $C^0(B_R(x_0) \cap H^{1,2}(B_R(x_0))$, $w(x_0) = 0$ και η w είναι αρμονική στο $B_R(x_0) \setminus \{w = 0\}$. Έστω*

$$\phi(r) = \frac{1}{r^4} \int_{B_r(0)} \rho^{2-n} |\nabla(w)^+|^2 dx \int_{B_r(0)} \rho^{2-n} |\nabla(w)^-|^2 dx$$

όπου $\rho = |x - x_0|$. Τότε $\phi(r)$ είναι αύξουσα και $\phi(r) < \infty$.

Απόδειξη. Έστω χωρίς βλάβη

$$\phi(r) = \frac{1}{r^4} \int_{B_r(0)} \rho^{2-n} |\nabla w^+|^2 dx \int_{B_r(0)} \rho^{2-n} |\nabla w^-|^2 dx$$

όπου $\rho = |x|$. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι φραγμένη και αύξουσα για $r \in (0, R)$. Πράγματι, έστω $\min_{S_r} w < 0 < \max_{S_r} w$ όπου $S_r = \partial B_r(0)$. Συμβολίζουμε με v_m τους ομαλοποιητές της w^+. Τότε

$$\Delta v_m^2 = 2|\nabla v_m|^2 + 2v_m \Delta v_m \geq 2|\nabla v_m|^2$$

σχεδόν παντού στο $B_r(0)$, άρα

$$2\int_{B_r \setminus B_\delta} |\nabla v_m|^2 \rho^{2-n} \leq \int_{B_r \setminus B_\delta} \Delta v_m^2 \rho^{2-n} = \int_{\partial(B_r \setminus B_\delta)} \rho^{2-n} \frac{\partial v_m^2}{\partial \nu} - \int_{\partial(B_r \setminus B_\delta)} v_m^2 \frac{\partial \rho^{2-n}}{\partial \nu} =$$

$$= r^{2-n}\int_{S_r}(v_m^2)_r + (n-2)r^{1-n}\int_{S_r} v_m^2 - \underbrace{(\delta^{2-n}\int_{S_\delta}(v_m^2)_r + (n-2)\delta^{1-n}\int_{S_\delta} v_m^2)}_{I_\delta}.$$

Επειδή το $|Dv_m|$ είναι φραγμένο έχουμε για $\delta \longrightarrow 0$

$$|I_\delta| \leq \delta^{2-n}\int_{S_\delta}|(v_m^2)_r| + (n-2)\delta^{1-n}\int_{S_\delta} v_m^2 \longrightarrow (n-2)|S_1|v_m^2(0).$$

Οπότε

$$2\int_{B_r\setminus B_\delta}|\nabla v_m|^2\rho^{2-n} \leq r^{2-n}\int_{S_r}(v_m^2)_r + (n-2)r^{1-n}\int_{S_r} v_m^2.$$

Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς r με $r_0 < r < r_0+\eta$ και διαιρούμε με το η οπότε όταν αφήσουμε το $m \longrightarrow +\infty$ θα έχουμε

$$\frac{2}{\eta}\int_{r_0}^{r_0+\eta}\int_{B_r\setminus B_\delta}|\nabla w^+|^2\rho^{2-n}dr \leq \frac{2}{\eta}\int_{r_0}^{r_0+\eta} r^{2-n}\int_{S_r} w^+w_r^+dr+$$

$$+\frac{n-2}{\eta}\int_{r_0}^{r_0+\eta} r^{1-n}\int_{S_r}(w^+)^2dr.$$

άρα για $\eta \longrightarrow 0$ θα έχουμε για σχεδόν όλα τα r_0

$$2\int_{B_{r_0}\setminus B_\delta}|\nabla w^+|^2\rho^{2-n} \leq 2r_0^{2-n}\int_{S_{r_0}} w^+w_r^+ + (n-2)r_0^{1-n}\int_{S_{r_0}}(w^+)^2$$

δηλαδή σχεδόν για κάθε r θα έχουμε

$$2\int_{B_r}|\nabla w^+|^2\rho^{2-n} \leq 2r^{2-n}\int_{S_r} w^+w_r^+ + (n-2)r^{1-n}\int_{S_r}(w^+)^2.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε την παραπάνω ανισότητα και για την w^-, οπότε $\phi(r) < +\infty$. Επειδή τώρα η απεικόνιση $r \rightarrow \int_{S_r}|\nabla w^+|^2\rho^{2-n}$ ανήκει στον $L^1(0,R)$ ισχύει

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r}|\nabla w^+|^2\rho^{2-n} = \int_{S_r}|\nabla w^+|^2 r^{2-n} \qquad \sigma.\pi.$$

παραγωγίζοντας λοιπόν προκύπτει

$$\phi'(r) = -\frac{4}{r^5}\int_{B_r}|\nabla w^+|^2\rho^{2-n}\cdot\int_{B_r}|\nabla w^-|^2\rho^{2-n} + \frac{1}{r^4}\int_{S_r}|\nabla w^+|^2 r^{2-n}\cdot$$

$$\cdot\int_{B_r}|\nabla w^-|^2\rho^{2-n} + \frac{1}{r^4}\int_{S_r}|\nabla w^+|^2 r^{2-n}\cdot\int_{B_r}|\nabla w^-|^2\rho^{2-n}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi'(r) \geq 0$ σ. π. στο $(0, R)$. Λόγω της ομοιοθεσίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r = 1$. Έστω $\nabla_\theta v$ το *gradient* της v πάνω στο S_1. Συμβολίζουμε με Γ_1 το φορέα της w^+ στο S_1 και με Γ_2 το φορέα της w^- στο S_1. Από υπόθεση έχουμε $meas(\Gamma_i) \neq 0$ για $i = 1, 2$ και θεωρούμε τις σταθερές

$$\frac{1}{\alpha_i} = \inf_{H_0^{1,2}}\frac{\int_{\Gamma_i}|\nabla_\theta v|^2}{\int_{\Gamma_i} v^2}.$$

Για κάθε $0 < \beta_i < 1$ θα ισχύει

$$\int_{S_1}[(w_r^+)^2 + \beta_1|\nabla_\theta w^+|^2] \geq 2\beta_1\left\{\int_{S_1}(w_r^+)^2\cdot\int_{S_1}|\nabla_\theta w^+|^2\right\}^{1/2}$$

$$\geq 2\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}}\left\{\int_{S_1}(w_r^+)^2\cdot\int_{S_1}(w^+)^2\right\}^{1/2} \geq \frac{2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}}\int_{S_1}|w^+w_r^+|.$$

Επίσης από τον ορισμό του α_1 για $\beta_1 < 1$ έχουμε

$$(1-\beta_1^2)\int_{S_1}|\nabla_\theta w^+|^2 \geq \frac{1-\beta_1^2}{\alpha_1}\int_{S_1}(w^+)^2.$$

Επιλέγουμε το β_1 έτσι ώστε

$$\frac{1-\beta_1^2}{\alpha_1} = (n-2)\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}} \tag{A'.1}$$

οπότε

$$\int_{S_1}|\nabla w^+|^2 = \int_{S_1}[(w_r^+)^2 + |\nabla_\theta w^+|^2] \geq \frac{2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}}\int_{S_1}|w^+w_r^+|$$

$$+(1-\beta_1^2)\int_{S_1}|\nabla_\theta w^+|^2 \geq \frac{2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}}\int_{S_1}|w^+ w_r^+| + \frac{(1-\beta_1^2)}{\alpha_1}\int_{S_1}(w^+)^2.$$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για την w^- οπότε από την έκφραση για την $\phi'(r)$ προκύπτει ότι $\phi \nearrow$ αν

$$\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2}} \geq 2.$$

Λύνουμε τη σχέση $(A.1)$ ως προς β_i άρα

$$\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(n-2)^2+\frac{4}{\alpha_i}}-(n-2)\right\}.$$

Ορίζουμε τώρα το γ_i ως τη θετική λύση της εξίσωσης

$$\gamma_i(\gamma_i+n-2) = \frac{1}{\alpha_i}$$

οπότε

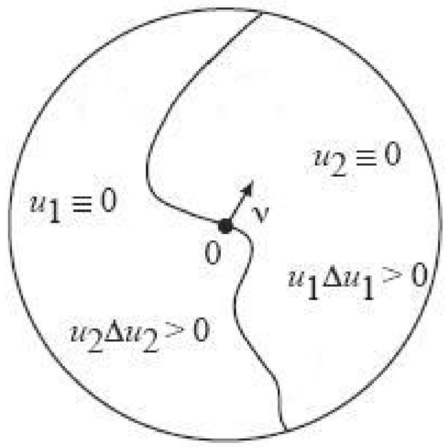
$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2}}.$$

Η συνολοσυνάρτηση γ_1 ως συνάρτηση του Γ_1 έχει μελετηθεί από τον *Sperner* και τους *Friedland*, *Hayman* στην εργασία (βλέπε [Sp], [FH]). Πιο συγκεκριμένα στην [Sp] αποδεικνύεται ότι $\gamma_1(E) \geq \gamma_1(E^*)$ όπου E, $E^* \subset S_1$ δεδομένου ότι το E^* είναι ημισφαίριο που έχει το ίδιο $(n-1)$ - $Hausdorff$ μέτρο με το E, ενώ από την [FH] προκύπτει ότι $\gamma_1(E) \geq \psi(s)$ όπου $s = \frac{meas(E)}{meas(S_1)}$ και $\psi(s)$ είναι κυρτή και φθίνουσα

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}log\frac{1}{4s}+\frac{3}{2}, & s < \frac{1}{4} \\ 2(1-s), & \frac{1}{4} < s < 1 \end{cases}$$

Θέτοντας $s_i = \frac{meas(\Gamma_i)}{meas(S_1)}$ έχουμε

$$\gamma_1+\gamma_2 \geq \psi(s_1)+\psi(s_2) \geq 2\psi(\frac{s_1+s_2}{2}) \geq 2\psi(\frac{1}{2}) = 2$$



Σχήμα Α′.1: Ο Τύπος Μονοτονίας

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει το αντίστοιχο ανάλογο για υ-φαρμονικές συναρτήσεις.

Πόρισμα Α′.2. *Έστω u_1, u_2 μη αρνητικές, συνεχείς, υφαρμονικές στο $B_1(0)$ τέτοιες ώστε $u_1(0) = u_2(0) = 0$ και $u_1 \cdot u_2 = 0$ στο $B_1(0)$ τότε η συνάρτηση*

$$\phi(r) = \frac{1}{r^4} \int_{B_r(0)} |\nabla u_1|^2 \rho d\rho d\sigma \cdot \int_{B_r(0)} |\nabla u_2|^2 \rho d\rho d\sigma$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του r. Επιπλέον αν θέσουμε $w = u_1 + u_2$, για $r \leq 1/2$ θα έχουμε

$$\phi(r) \leq c(n) ||w||^4_{L^\infty(B_1)}.$$

Όπως φαίνεται από το προηγούμενο πόρισμα η απόδειξη του τύπου της μονοτονίας στηρίζεται στη γραμμική μορφή του τελεστή. Αν και μπορούμε να αποδείξουμε το αντίστοιχο θεώρημα για εξισώσεις σε *divergence*-μορφή, δεν ισχύει το ίδιο σε πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις που όπως είδαμε βρίσκονται πιο κοντά σε εξισώσεις με *nondivergence*-μορφή. Στην πραγματικότητα υπάρχουν παραδείγματα για τα οποία η συνάρτηση ϕ δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε και φραγμένη. Από την άλλη όμως αν έχουμε μια κοίλη συνάρτηση F τότε η ϕ μπορεί να μην είναι αύξουσα αλλά είναι φραγμένη. Αυτό είναι το περιέχομενο του επόμενου πορίσματος.

Πόρισμα Α΄.3. *Έστω w με $w(0) = 0$ και $w^+ = max\{w, 0\}$ τέτοια ώστε $F(D^2w^+) \geq 0$ και $F(D^2w^-) \geq 0$ στο $B_1(0)$. Τότε για κάθε $r \leq R$ και κάθε n-διάστατη μπάλα $B_r(0)$ η συνάρτηση*

$$\phi(r) = \frac{1}{r^4}\int_{B_{r/2}(0)} |\nabla w^+|^2 \rho^{2-n} dx \cdot \int_{B_{r/2}(0)} |\nabla w^-|^2 \rho^{2-n} dx$$

είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Επειδή $F(D^2v) = inf_{\alpha\in\mathcal{A}} L_\alpha v$ θα έχουμε $L_\alpha w^+ \geq 0$ και $L_\alpha w^- \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$. Έστω $w_\alpha(x) = w(A_\alpha^{1/2}x)$ όπου $A_\alpha = [\alpha_{ij}^\alpha]$. Τότε $\Delta w_\alpha^+ = L_\alpha w^+ \geq 0$ και $\Delta w_\alpha^- = L_\alpha w^- \geq 0$ άρα

$$\phi_\alpha(r) \leq \frac{C}{R^4}||w_\alpha^+||^2_{L^\infty(B_{2R})}||w_\alpha^-||^2_{L^\infty(B_{2R})}$$

για κάθε $r \leq R/2$, ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{r^4}\int_{A_r} |A_\alpha^{1/2}\nabla w^+|^2 |A_\alpha^{1/2}\rho|^{2-n} det(A_\alpha^{1/2}) dx \int_{A_r} |A_\alpha^{1/2}\nabla w^-|^2 |A_\alpha^{1/2}\rho|^{2-n} det(A_\alpha^{1/2}) dx$$

$$\leq \frac{C}{R^4}||w_\alpha^+||^2_{L^\infty(A_{2R})}||w_\alpha^-||^2_{L^\infty(A_{2R})}$$

για κάθε $r \leq R$ όπου $A_r := \{x : |A_\alpha^{1/2}x| = r\}$. Από την άλλη μπορούμε να βρούμε μια απόλυτη σταθερά C τέτοια ώστε

$$B_{r/C} \subset A_r \subset B_{Cr}$$

και ο πίνακας A_α έχει τις ίδιες σταθερές ελλειπτικότητας, λ, Λ με την F άρα για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$, θα πρέπει να έχουμε

$$\frac{1}{r^4}\int_{B_{r/2}} |\nabla w^+|^2 \rho^{2-n} dx \int_{B_{r/2}} |\nabla w^-|^2 \rho^{2-n} dx \leq \frac{C}{R^4}||w^+||^2_{L^\infty(B_{4R})}||w^-||^2_{L^\infty(B_{4R})}$$

για κάθε $r \leq R$. □

Παράρτημα Β′

Μη Γραμμικές Εξισώσεις

Τέλος στο παράρτημα αυτό θα δώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των πλήρως μη γραμμικών εξισώσεων.

Λήμμα Β′.1. *Έστω F_m, F ομαλές συναρτήσεις ομοιόμορφα ελλειπτικές με τις ίδιες σταθερές ελλειπτικότητας λ, Λ και u_m λύση της εξίσωσης*

$$u_{mt} - F_m(D^2 u_m, x, t) = 0 \ \ \sigma\tau o \ \ Q_1.$$

Αν $u_m \to u$ ομοιόμορφα και $F_m \to F$ όταν $m \to +\infty$ τότε η u είναι λύση της εξίσωσης

$$u_t - F(D^2 u, x, t) = 0 \ \ \sigma\tau o \ \ Q_1.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η u είναι υπολύση. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι είναι και υπερλύση. Έστω ότι δεν είναι τότε $\exists (x_0, t_0) \in Q_1$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $r > 0$ και $\varphi \in C^2$ τ.ω

$$\varphi_t - F(D^2\varphi, x, t) \geq \varepsilon$$

και $(u - \varphi)(x_0, t_0) = 0$, $u - \varphi < -\delta$ στο $\partial_p Q_r$, $Q_r \subset Q_1$. Έστω $\varphi_m \in C^2(Q_r) \cap C(\overline{Q}_r)$ τέτοια ώστε $||\varphi_m||_{L\infty(Q_r)} \to 0$, $m \to \infty$ και

$$\varphi_t + \varphi_{mt} - F_m(D^2(\varphi + \varphi_m), x, t) \geq \varepsilon$$

για μεγάλα m. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w_m = u_m - (\varphi + \varphi_m)$. Είναι φανερό ότι $\forall \varepsilon_1\ \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m > m_0\ |w_m(x_0, t_0)| \leq \varepsilon_1$. Επίσης στο σύνορο έχουμε $u_m - \varphi - \varphi_m \to u - \varphi$ οπότε $w_m < -\frac{\delta}{2}$. Επιλέγοντας κατάλληλα το ε_1 παρατηρούμε ότι η w_m είναι μεγαλύτερη στο (x_0, t_0) από τις τιμές στο σύνορο για μεγάλο m, οπότε λόγω συνέχειας θα λαμβάνει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο. Άτοπο διότι οι u_m είναι υπολύσεις. Για την κατασκευή των συναρτήσεων φ_m παρατηρούμε ότι

$$\varphi_t + \varphi_{mt} - F_m(D^2(\varphi + \varphi_m), x, t) = \varphi_t + \varphi_{mt} - F_m(D^2\varphi + D^2\varphi_m, x, t) \geq$$

$$\geq \varphi_t + \varphi_{mt} - F_m(D^2\varphi, x, t) - \mathcal{M}^+(D^2\varphi_m, \frac{\lambda}{n}, \Lambda) =$$

$$= \varphi_t + \varphi_{mt} - F_m(D^2\varphi, x, t) - \mathcal{M}^+(D^2\varphi_m) + F(D^2\varphi) - F(D^2\varphi) \geq$$

$$\geq \varepsilon + \varphi_{mt} - \mathcal{M}^+(D^2\varphi_m) - (F_m - F)(D^2\varphi).$$

Έστω $f_m = F_m - F$ οπότε αρκεί να κατασκευάσουμε τις φ_m έτσι ώστε

$$\varphi_{mt} - \mathcal{M}^+(D^2\varphi_m) \geq f_m.$$

□

Αν η λύση μια γραμμικής παραβολικής εξίσωσης μηδενίζεται σε ένα κομμάτι του παραβολικού συνόρου και η κάτω βάση ικανοποιεί την παρακάτω *Lipschitz* συνθήκη (με σταθερές r_0, m) : για κάθε $y \in \partial D$ υπάρχει ορθοκανονικό σύστημα με κέντρο το y και συντεταγμένες $x = (x', x_n)$ έτσι ώστε

$$D \cap B_{r_0}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > \phi(x'), |x| < r_0\}$$

όπου $||\nabla\phi||_{L^\infty} \leq m$, τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα σύγκρισης η απόδειξη του οποίου υπάρχει στο [S] (βλέπε επίσης [FSY], [SY]).

Θεώρημα Β΄.2. *Έστω u, v θετικές λύσεις της γραμμικής παραβολικής εξίσωσης $Lu = 0$ στο χωρίο $Q = D \times (0, \infty)$ οι οποίες μηδενίζονται στο $(\partial_x Q) \cap C_{(K+2)r,2r}(Y)$, όπου $Y = (y, s) \in \overline{Q}$, $\partial_x Q = \partial D \times (0, \infty)$, $C_{R,r}(Y) = B_R(y) \times (s - r^2, s + r^2)$, $K \geq 1$, $s \geq 5r^2$, $0 < r < r_0/4$. Τότε*

$$\sup_{Q_{Kr,r}(Y)} \frac{v}{u} \leq N(n, m, \lambda, \Lambda) \frac{v(\overline{X}_r)}{u(\underline{X}_r)}.$$

Από τον ορισμό των τελεστών του Pucci εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω Λήμματα.

Λήμμα Β΄.3. *Για $M, N \in \mathcal{S}$, όπου $\mathcal{S}$ είναι ο χώρος των πραγματικών $n \times n$ συμμετρικών πινάκων, ισχύει:*

(α) $\mathcal{M}^-(M) \leq \mathcal{M}^+(M)$.

(β) $\mathcal{M}^-(M) = -\mathcal{M}^+(-M)$.

(γ) $\mathcal{M}^\pm(\alpha M) = \alpha \mathcal{M}^\pm(M)$, *για* $\alpha > 0$.

(δ) $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(N) \leq \mathcal{M}^+(M + N) \leq \mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^+(N)$.

(ε) $\mathcal{M}^-(M) + \mathcal{M}^-(N) \leq \mathcal{M}^-(M + N) \leq \mathcal{M}^-(M) + \mathcal{M}^+(N)$.

(στ) Αν $N \geq 0$ *τότε* $\lambda ||N|| \leq \mathcal{M}^-(N) \leq \mathcal{M}^+(N) \leq n\Lambda ||N||$.

Λήμμα Β΄.4. *Οι τελεστές του Pucci, $\mathcal{M}^+$ και $\mathcal{M}^-$ είναι ομοιόμορφα ελλιπτικοί.*

Μια απλή κατασκευή ενός πλήρως μη γραμμικού τελεστή.

Έστω ότι βρισκόμαστε στο κέντρο x_0 ενός δωματίου και εκτελούμε το παρακάτω πείραμα. Έχουμε δυο νομίσματα, ένα σε κάθε χέρι. Όταν στο δεξί χέρι έρθει κορώνα κάνουμε ένα βήμα (μήκους 1) προς τα πάνω ενώ αν έρθουν γράμματα κάνουμε ένα βήμα κάτω. Αντίστοιχα το νόμισμα στο αριστερό χέρι μας καθορίζει τα βήματα δεξιά και αριστερά. Σκοπός μας θα είναι να φτάσουμε στη πόρτα του δωματίου. Οπότε

$$u(x_0) = \frac{1}{4}\sum u(x_i) \Rightarrow 0 = \frac{1}{4}\sum [u(x_i) - u(x_0)] \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{4}\sum [u(x_{right}) + u(x_{left}) - 2u(x_0)] + [u(x_{up}) + u(x_{down}) - 2u(x_0)]$$

και αν περάσουμε στο όριο θα έχουμε

$$0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 \\ u & = 0 \quad (x,y) \in W \\ u & = 1 \quad (x,y) \in D. \end{cases}$$

όπου αν $(x,y) \in W$ βρισκόμαστε στο τοίχο του δωματίου ενώ αν $(x,y) \in D$ βρισκόμαστε στην πόρτα. Η $u(x_0)$ είναι ουσιαστικά το αρμονικό μέτρο ω_{x_0} της πόρτας. Έστω τώρα ότι αλλάζουμε την μέθοδο μας και πριν από κάθε γύρισμα του νομίσματος επιτρέπεται να επιλέγουμε τους άξονες που θα κινηθούμε (όχι αναγκαστικά πάνω-κάτω, δεξιά-αριστερά) αλλά και το μήκος του βήματος l με $l \in [1, \alpha]$. Τότε ο τυχαίος περίπατος αντιστοιχεί στη λύση της εξίσωσης

$$\alpha_{ij}(x) D_{ij} u = 0$$

με $I \leq \alpha_{ij} \leq \alpha I$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε την καλύτερη στρατηγική. Έστω μια συνάρτηση $\overline{u}$, υπολογίζουμε τον πίνακα $D^2\overline{u}$ και έστω λ_i οι ιδιοτιμές με e_i, $i = 1, 2$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Ισχυριζόμαστε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} \alpha\lambda_{max} + \lambda_{min} & = 0 \\ \overline{u} & = 0 \quad (x,y) \in W \\ \overline{u} & = 1 \quad (x,y) \in D. \end{cases}$$

θα μας δώσει την βέλτιστη στρατηγική. Πράγματι η $\overline{u}$ θα είναι υπερλύση σε κάθε επιλογή των α_{ij} με $I \leq \alpha_{ij} \leq \alpha I$:

$$\alpha_{ij} D_{ij} \overline{u} \leq 0$$

διότι μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στο σύστημα συντεταγμένων που δίνεται από τα e_1, e_2 άρα τα α_{ij} μετασχηματίζονται στα β_{ij} με $I \leq \beta_{ij} \leq \alpha I$ και ο πίνακας $(Hessian)$ θα γίνει

$$\begin{bmatrix} \lambda_{max} & 0 \\ 0 & \lambda_{min} \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\beta_{11} \lambda_{max} + \beta_{22} \lambda_{min} \leq 0$$

το οποίο και αποδεικνύει ότι η αρχική επιλογή $\overline{u}$ είναι καλύτερη από οποιαδήποτε άλλη. Τέλος

$$\alpha \lambda_{max} + \lambda_{min} = \alpha \overline{u}_{xx} + 1 \cdot \overline{u}_{yy}$$

άρα είναι και αποδεκτή.

Βιβλιογραφία

[A] I. Athanasopoulos, *Free boundary regularity in Stefan type problems.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 15 (2004), no. 3-4, 345–355.

[AC] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, *A theorem of real analysis and its application to free boundary problems.* Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), no 5, 499-502.

[ACF] H. W. Alt, L. A. Caffarelli, A. Friedman, *Variational problems with two phases and their free boundaries.* T.A.M.S, 282 (1984), 431-461.

[ACS1] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, S. Salsa, *Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems.* Annals of Math., 143 (1996), 413-434.

[ACS2] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, S. Salsa, *Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems.* Acta Mathematica, 176 (1996), 245-282.

[ACS3] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, S. Salsa, *Phase Transition Problems of Parabolic Type: Flat Free Boundaries Are Smooth.* Comm. Pure Appl. Math., 51 (1998), 77-112.

[ACS4] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, S. Salsa, *Stefan-like problems with curvature.* J. Geom. Anal. 13 (2003), no. 1, 21–27.

[AS] I. Athanasopoulos, S. Salsa, *An application of a parabolic comparison principle to free boundary problems.* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), no. 1, 29–32.

[C1] L. A. Caffarelli, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part I: Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$.* Rev. Mat Iberoamericana, 3 (1987), no 2, 139-162.

[C2] L. A. Caffarelli, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part II: Flat free boundaries are Lipschitz.* Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), no 1, 55-78.

[CC] Caffarelli L. A., Cabré X.,*Fully nonlinear elliptic equations.* AMS Colloquium Publications, 43, 1995.

[CE] L. A. Caffarelli, L. C. Evans, *Continuity of the temperature in the two-phase Stefan problems.* Arch. Rational Mech. Anal., 81 (1983), 199-220.

[CF] J. Cannon, A. Fasano, *A nonlinear parabolic free boundary problem.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 112 (1977), 119–149.

[CH] J. Cannon, D. Hill, *Existence, uniqueness, stability, and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation.* J. Math. Mech. 17 (1967) 1–19.

[CHK] J. Cannon, D. Henry, D. Kotlow, *Classical solutions of the one-dimensional, two-phase Stefan problem.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 107 (1975), 311–341.

[CIL] M. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (27) 1 (1992), 1–67

[CKLS] M. G. Crandall, M. Kocan, P. L. Lions, A. Świech, *Existence results for boundary problems for uniformly elliptic and parabolic fully nonlinear equations.* Electr. J. Diff. Eq. 1999 (1999), no 24, 1-20.

[CKS] M. G. Crandall, M. Kocan, A. Świech, *L^p- Theory for fully nonlinear uniformly parabolic equations*, preprint.

[CP] J. Cannon, M. Primicerio, *A two phase Stefan problem: regularity of the free boundary.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 88 (1971), 217–228.

[CS] L. A. Caffarelli, S. Salsa, *A geometric approach to free boundary problems.* Graduate Studies in Mathematics, 68, AMS, Providence, RI, 2005.

[D] G. Duvaut, *Resolution d'un probleme de Stefan (fusion d'un bloc de glace a zero degre).* (French) C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 276 (1973), A1461–A1463.

[F1] M. Feldman, *Regularity for nonisotropic two-phase problems with lipschitz free boundaries.* Diff. Int. Eq., 10 (1997), no 6, 1171-1179.

[F2] M. Feldman, *Regularity of Lipschitz free boundaries in two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations.* Indiana Univ. Math. J., 50 (2001), no 3, 1171-1200.

[FH] S. Friedland, W. Hayman, *Eigenvalue inequalities for Dirichlet problem on spheres and the growth of subharmonic functions,* Comment. Math. Helv. 51 (1976) 133–161.

[FK] A. Friedman, D. Kinderlehrer, *A one phase Stefan problem.* Indiana Univ. Math. J. 24 (1974/75), no. 11, 1005–1035.

[FSY] E. B. Fabes, M. V. Safonov, Y. Yuan, *Behavior near the boundary of positive solutions of second order parabolic equations. II.* T.A.M.S, 351 (1999), no 12 4947-4961.

[GT] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag (2001) xiv+517.

[H] E. Hanzawa, *Classical solutions of the Stefan problem.* Tohoku Math. J. (2) 33 (1981), no. 3, 297–335.

[K] S. L. Kamenomostskaja, *On Stefan's problem.* (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 53 (95) (1961) 489–514.

[KN] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, *The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem.* Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), no. 3, 257–282.

[LC] G. Lamé, B. P. Clapeyron, *Mémoire sur la solidification par refroidissement d' un globe solide.* Ann. Chem. Phys. 47 (1831), 250-256.

[LSU] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* (Russian) Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 AMS, Providence, R.I. 1967 xi+648 pp.

[M] A. M. Meirmanov, *The Stefan Problem.* De Gruyter Expositions in Mathematics 3 (1992).

[M1] E. Milakis, *Two-phase transition problems for fully nonlinear parabolic equations of second order.* Indiana Univ. Math. J. 54 (2005), no. 6, 1751-1768.

[M2] E. Milakis, *Lipschitz regularity of viscosity solutions in some nonlinear parabolic free boundary problems.* Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications 2005

[M3] E. Milakis, *Nonlinear parabolic phase transition problems: Flat free boundaries are smooth.* In Preparation

[N] K. Nyström, *The Dirichlet problem for second order parabolic operators.* Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), no. 1, 183-245.

[O] O. A. Oleinik, *A method of solution of the general Stefan problem.* Soviet Math. Dokl. 1 (1960) 1350–1354.

[R] L. I. Rubinstein, *The Stefan Problem.* AMS Translations of Mathematical Monographs, 27 (1971).

[S1] J. Stefan, *Über einige Probleme der Theorie de Wärmeleitung.* S.-B.Wien. Akad. Mat. Natur. 98 (1889), 173-484.

[S2] J. Stefan, *Über die Diffusion von Säuren und Basen gegen einander.* S.-B.Wien. Akad. Mat. Natur. 98 (1889), 616-634.

[S3] J. Stefan,, *Über die Theorie der Eisbildung insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere.* S.-B.Wien. Akad. Mat. Natur. 98 (1889), 965-983.

[S4] J. Stefan,, *Über die Verdampfung und die Auflösung als Vorgänge der Diffusion.* S.-B.Wien. Akad. Mat. Natur. 98 (1889), 1418-1442.

[Sf] M. V. Safonov, *Estimates near the boundary for solutions of second order parabolic equations.* Doc. Math. Extra Vol ICM I (1998), 637-647.

[Sp] E. Sperner, *Zur symmetrisierung von funktionen auf sphären,* Math. Z. 134 (1973) 317–327.

[SY] M. V. Safonov, Y. Yuan, *Doubling properties for second order parabolic equations.* Annals of Math., 150 (1999), 313-327.

[WL1] L. Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I.* Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no 1, 27-76.

[WL2] L. Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations II.* Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no 2, 141-178.

[WP1] P. Wang, *Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. Part I: Lipschitz free boundaries are* $C^{1,\alpha}$. Comm. Pure Appl. Math., 53 (2000), no 7, 799-810.

[WP2] P. Wang, *Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. Part II: Flat free boundaries are Lipschitz.* Comm. in PDE, 27 (2002), 1497-1514.

[WP3] P. Wang, *Existence of solutions of two-phase free boundary problems for fully nonlinear elliptic equations of second order.* J. Geom. Anal. 13 (2003), no. 4, 715–738.

Η Διδακτορική Διατριβή δακτυλογραφήθηκε από τον συγγραφέα χρησιμοποιώντας το σύστημα στοιχειοθεσίας LaTeX.[†]

[†]το LaTeX είναι ένα σύστημα στοιχειοθεσίας που δημιουργήθηκε από τον Leslie Lamport σαν μια ειδική έκδοση του προγράμματος TeX του Donald Knuth.