ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΜΑΡΚΟΥΛΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

Τυχαία Πολύτοπα

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ, 2006

Ευχαριστίες

Η Διδακτορική Διατριβή υποστηρίχτηκε οικονομικά από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών, στο οποίο θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Το βασικό αποτέλεσμα της διατριβής είναι ένα κάτω φράγμα για το μέγιστο δυνατό πλήθος εδρών ενός 0/1 πολυτόπου στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο 0/1 πολύτοπο εννοούμε την κυρτή θήκη ενός υποσυνόλου του συνόλου του κορυφών του $[0,1]^n$.

Γενικά, αν P είναι ένα πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $f_{n-1}(P)$ το πλήθος των εδρών του. Θέτουμε

$$g(n) := \max\big\{f_{n-1}(P_n) : P_n \text{ είναι ένα } 0/1 \text{ πολύτοπο στον } \mathbb{R}^n\big\}.$$

Οι Fukuda και Ziegler έθεσαν το πρόβλημα να προσδιοριστεί η τάξη μεγέθους της $g(n)$ όταν το $n \to \infty$. Το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα είναι

$$g(n) \leq 30(n-2)!$$

(για n αρκούντως μεγάλο), το οποίο αποδείχτηκε από τους Fleiner, Kaibel και Rote. Στην αντίθετη κατεύθυνση, οι Bárány και Pór απέδειξαν ότι $g(n) \geq \left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/4}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Δείχνουμε ότι ο εκθέτης $n/4$ μπορεί να βελτιωθεί σε $n/2$:

Υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$g(n) \geq \left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/2}.$$

Η ύπαρξη 0/1 πολυτόπων με πολλές έδρες εξασφαλίζεται με ισχυροποίηση της μεθόδου που ανέπτυξαν οι Bárány και Pór. Θεωρούμε ± 1 πολύτοπα (δηλαδή, πολύτοπα που οι κορυφές τους είναι ακολουθίες προσήμων). Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες ± 1 τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με κατανομή

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

Θέτουμε $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ και, για σταθερό N που ικανοποιεί την $n < N \leq 2^n$, θεωρούμε N ανεξάρτητα αντίγραφα $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N$ του $\vec{X}$. Αυτή η διαδικασία ορίζει το τυχαίο 0/1 πολύτοπο $K_N = \mathrm{conv}\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N\}$. Κάτω από κάποιους περιορισμούς για το εύρος των τιμών του N, δίνουμε ένα κάυω φράγμα για τη μέση τιμή $\mathbb{E}[f_{n-1}(K_N)]$ του πλήθους των εδρών, για κάθε σταθερό N:

Υπάρχουν δύο θετικές σταθερές a και b ώστε: για αρκούντως μεγάλο n, και για κάθε N που ικανοποιεί την $n^a \leq N \leq \exp(bn)$, έχουμε

$$\mathbb{E}[f_{n-1}(K_N)] \geq \left(\frac{\log N}{a \log n}\right)^{n/2}.$$

Το κάτω φράγμα για την $g(n)$ προκύπτει τότε αν επιλέξουμε $N = \lfloor \exp(bn/\log n) \rfloor$.

Το δεύτερο μέρος της διατριβής σχετίζεται με την ισχυρή μορφή του κλασικού προβλήματος του Sylvester για τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα σε επίπεδα κυρτά χωρία. Αποδεικνύουμε τα εξής: (1) Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στο επίπεδο, με εμβαδόν $|K| = 1$, και αν A_K είναι η συνάρτηση κατανομής του εμβαδού ενός τυχαίου τριγώνου στο K, τότε $A_K(\alpha) \geq A_\Delta(\alpha)$ για κάθε $\alpha > 0$, όπου Δ είναι τυχόν τρίγωνο. Αν $A_K = A_\Delta$ τότε το K είναι τρίγωνο. (2) Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στο επίπεδο, με εμβαδόν $|K| = 1$, και αν B_K είναι η συνάρτηση κατανομής του εμβαδού ενός τυχαίου συμμετρικού παραλληλογράμμου στο K, τότε $B_K(\alpha) \geq B_P(\alpha)$ για κάθε $\alpha > 0$, όπου P είναι τυχόν παραλληλόγραμμο. Αν $B_K = B_P$ τότε το K είναι παραλληλόγραμμο.

Abstract

The main result of the Thesis is a lower bound for the maximal possible number of facets of a 0/1 polytope in $\mathbb{R}^n$. By definition, a 0/1 polytope is the convex hull of a subset of the vertices of $[0,1]^n$.

In general, if P is a polytope in $\mathbb{R}^n$, we write $f_{n-1}(P)$ for the number of its facets. Let $g(n) := \max\left\{f_{n-1}(P_n) : P_n \text{ a } 0/1 \text{ polytope in } \mathbb{R}^n\right\}$. Fukuda and Ziegler asked what the behaviour of $g(n)$ is as $n \to \infty$. The best known upper bound to date is

$$g(n) \leq 30(n-2)!$$

(for n large enough), which is established by Fleiner, Kaibel and Rote. Regarding lower bounds, a major breakthrough was made by Bárány and Pór who proved that $g(n) \geq \left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/4}$, where $c > 0$ is an absolute constant. We show that the exponent $n/4$ can in fact be improved to $n/2$:

There exists a constant $c > 0$ such that

$$g(n) \geq \left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/2}.$$

The existence of 0/1 polytopes with many facets is established by a refinement of the probabilistic method developed by Bárány and Pór. We work with ± 1 polytopes (i.e., polytopes whose vertices are sequences of signs). Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent and identically distributed ± 1 random variables, defined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, with distribution

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \tfrac{1}{2}.$$

Set $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ and, for a fixed N satisfying $n < N \leq 2^n$, consider N independent copies $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N$ of $\vec{X}$. This procedure defines the random 0/1 polytope $K_N = \mathrm{conv}\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N\}$. Under some restrictions on the range of values of N, we obtain a lower bound for the expected number of facets $\mathbb{E}[f_{n-1}(K_N)]$, for each fixed N:

There exist two positive constants a and b such that: for all sufficiently large n, and all N satisfying $n^a \leq N \leq \exp(bn)$, one has that

$$\mathbb{E}[f_{n-1}(K_N)] \geq \left(\frac{\log N}{a \log n}\right)^{n/2}.$$

For the lower bound for $g(n)$ one only has to choose $N = \lfloor \exp(bn/\log n) \rfloor$.

The second part of the Thesis is related to the strong form of Sylvester's classical problem about random points uniformly distributed in plane convex regions. We prove the following two facts: (1) If K is a plane convex body with area $|K| = 1$ and if A_K denotes the distribution function of the area of a random triangle in K, then $A_K(\alpha) \geq A_\Delta(\alpha)$ for all $\alpha > 0$, where Δ is a triangle. If $A_K = A_\Delta$ then K is a triangle. (2) If K is a symmetric plane convex body with area $|K| = 1$ and if B_K denotes the distribution function of the area of a random symmetric parallelogram in K, then $B_K(\alpha) \geq B_P(\alpha)$ for all $\alpha > 0$, where P is a parallelogram. If $B_K = B_P$ then K is a parallelogram.

Μέρος I

0/1 – πολύτοπα με πολλές έδρες

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Με τον όρο 0/1 πολύτοπο εννοούμε την κυρτή θήκη ενός υποσυνόλου του συνόλου των κορυφών του κύβου $[0,1]^n$. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα είναι το πολύτοπο των διπλά στοχαστικών πινάκων (ή πολύτοπο του Birkhoff) που ορίζεται να είναι η κυρτή θήκη του συνόλου των $d \times d$ διπλά στοχαστικών πινάκων στον $\mathbb{R}^{d^2}$. Έχει $d!$ κορυφές, d^2 έδρες και η διάσταση του είναι $(d-1)^2$.

Τα 0/1 πολύτοπα παίζουν σημαντικό ρόλο στην συνδυαστική βελτιστοποίηση. Ένα παράδειγμα που δείχνει πώς εμφανίζονται σε αυτήν την θεωρία μας δίνει το *πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή*. Δίνονται ένα πλήρες γράφημα K_d με d κορυφές, καθώς και το «μήκος» κάθε ακμής του (δηλαδή, σε κάθε ακμή αντιστοιχίζουμε κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό). Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή που περνάει από κάθε κορυφή ακριβώς μία φορά και επιστρέφει στην αρχική. Κάθε διαδρομή μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα υποσύνολο T, με ακριβώς d στοιχεία, του συνόλου $E(K_d)$ των ακμών του γραφήματος. Στην T αντιστοιχεί φυσιολογικά ένα 0/1 διάνυσμα $\chi_T \in \{0,1\}^{\binom{d}{2}}$ του οποίου οι συντεταγμένες δείχνουν ακριβώς ποιές ακμές περιέχει η T. Το *πολύτοπο του πλανόδιου πωλητή* είναι η κυρτή θήκη $Q(d)$ αυτών των σημείων στον $\mathbb{R}^{\binom{d}{2}}$. Το $Q(d)$ έχει διάσταση $\binom{d}{2} - d$ και $(d-1)!/2$ κορυφές. Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με αυτό της εύρεσης μιας κορυφής του $Q(d)$ στην οποία ελαχιστοποιείται κάποια γραμμική συνάρτηση (που εξαρτάται από τα δοθέντα μήκη). Δηλαδή, μεταφράζεται σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στο $Q(d)$.

Βασικό ερώτημα που προκύπτει στην προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων με αυτήν την μέθοδο είναι να προσδιοριστούν οι ανισότητες που ορίζουν τις έδρες αυτών των πολυέδρων. Οι δυσκολίες πολλαπλασιάζονται όταν το πλήθος των εδρών είναι πολύ μεγάλο. Ένα πολύ φυσιολογικό ερώτημα για την «γενική θεωρία των 0/1 πολυτόπων» είναι λοιπόν το εξής: ποιό είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος $(n-1)$-διάστατων εδρών που μπορεί να έχει ένα 0/1 πολύτοπο διάστασης n στον $\mathbb{R}^n$. Σκοπός του πρώτου μέρους της διατριβής είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν 0/1 πολύτοπα με υπερεκθετικό πλήθος εδρών.

1.1 Το πρόβλημα

Γενικά, αν P είναι ένα πολύτοπο (πλήρους διάστασης) στον $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $f_{n-1}(P)$ το πλήθος των $(n-1)$-διάστατων εδρών του. Θέτουμε

$$g(n) := \max\left\{f_{n-1}(P_n) : P_n \text{ είναι ένα } 0/1 \text{ πολύτοπο στον } \mathbb{R}^n\right\}. \tag{1.1.1}$$

Οι Fukuda και Ziegler (βλέπε [13], [24], [36]) έθεσαν το πρόβλημα να προσδιοριστεί η συμπεριφορά της ακολουθίας $g(n)$ καθώς το $n \to \infty$. Το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα είναι

$$g(n) \leq 30(n-2)! \tag{1.1.2}$$

για n αρκετά μεγάλο. Η ανισότητα αυτή αποδείχθηκε από τους Fleiner, Kaibel και Rote στην εργασία [14].

Θα αποδείξουμε ένα κάτω φράγμα για την $g(n)$. Σε αυτήν την κατεύθυνση, σημαντική πρόοδος σημειώθηκε από τους Bárány και Pór στην εργασία [3], όπου αποδεικνύεται ότι

$$g(n) \geq \left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/4} \tag{1.1.3}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Θα αποδείξουμε ότι στην θέση του εκθέτη $n/4$ μπορεί κανείς να βάλει τον $n/2$:

Θεώρημα 1.1.1. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την ιδιότητα*

$$g(n) \geq \left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/2}. \tag{1.1.4}$$

Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε αυτήν την εκτίμηση με τα γνωστά φράγματα για τη μέση τιμή του πλήθους των εδρών της κυρτής θήκης N ανεξάρτητων τυχαίων σημείων που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Συμβολίζουμε το τυχαίο αυτό πολύτοπο με $P_{N,n}$. Στην εργασία [7] αποδεικνύεται ότι υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε

$$\left(c_1 \log\frac{N}{n}\right)^{n/2} \leq \mathbb{E}\left[f_{n-1}(P_{N,n})\right] \leq \left(c_2 \log\frac{N}{n}\right)^{n/2} \tag{1.1.5}$$

για όλους τους φυσικούς n και N που ικανοποιούν την $2n \leq N \leq (3/2)^n$. Δεδομένου ότι στην περίπτωση των $0/1$ πολυτόπων το N μπορεί να πάρει τιμές μέχρι 2^n, θα μπορούσε να διατυπωθεί η εικασία ότι η $g(n)$ είναι της τάξης του $n^{n/2}$. Το Θεώρημα 1.1.1 δίνει ένα κάτω φράγμα αυτής πρακτικά της τάξης: για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$g(n) > n^{(0.5-\varepsilon)n} \tag{1.1.6}$$

αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Για την απόδειξη της ύπαρξης $0/1$ πολυτόπων με πολλές έδρες, θα ισχυροποιήσουμε την πιθανοθεωρητική μέθοδο που ξεκίνησε στην εργασία [10] και αναπτύχθηκε στην εργασία [3] για το υπό μελέτη πρόβλημα. Για το σκοπό αυτό είναι πιό βολικό να δουλεύουμε με ± 1 πολύτοπα (δηλαδή, πολύτοπα των οποίων οι κορυφές είναι ακολουθίες προσήμων). Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες ± 1 τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με κατανομή

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ και, για δοσμένο φυσικό αριθμό N που ικανοποιεί την $n < N \leq 2^n$, θεωρούμε N ανεξάρτητα αντίτυπα $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N$ του τυχαίου διανύσματος $\vec{X}$. Με αυτήν την διαδικασία ορίζεται το τυχαίο $0/1$ πολύτοπο

$$K_N = \mathrm{conv}\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N\}. \tag{1.1.7}$$

Παρατηρήστε ότι το πλήθος των κορυφών του K_N είναι μικρότερο ή ίσο από N.

Κάτω από κάποιους περιορισμούς για το εύρος των τιμών της παραμέτρου N, θα δώσουμε ένα κάτω φράγμα για τη μέση τιμή του πλήθους των εδρών $\mathbb{E}\left[f_{n-1}(K_N)\right]$, για σταθερό N. Ειδικότερα, έχουμε:

Θεώρημα 1.1.2. *Υπάρχουν θετικές σταθερές a και b με την εξής ιδιότητα: για αρκούντως μεγάλα n, και για όλα τα N που ικανοποιούν την $n^a \leq N \leq \exp(bn)$, ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}[f_{n-1}(K_N)] \geq \left(\frac{\log N}{a \log n}\right)^{n/2}. \tag{1.1.8}$$

Το Θεώρημα 1.1.1 είναι άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος: αρκεί να επιλέξουμε

$$N = \lfloor \exp(bn) \rfloor.$$

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$ τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, με $\|\cdot\|_\infty$ την max-νόρμα, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος, το εμβαδόν της επιφάνειας και ο πληθάριθμος ενός πεπερασμένου συνόλου συμβολίζονται με $|\cdot|$. Όλοι οι λογάριθμοι είναι φυσικοί. Όταν γράφουμε $a \simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 a \leq b \leq c_2 a$. Τα γράμματα c, c', C, c_1, c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές των οποίων η τιμή μπορεί να μην είναι πάντα η ίδια.

1.2 Ένα άνω φράγμα για το πλήθος των εδρών

Κλείνοντας αυτό το εισαγωγικό Κεφάλαιο, περιγράφουμε ένα επιχείρημα των Bárány και Pór, το οποίο δίνει άνω φράγμα για το πλήθος των εδρών ενός $0/1$ πολυτόπου με N κορυφές, συναρτήσει του N και της διάστασης n:

Πρόταση 1.2.1. *Για κάθε $0/1$ πολύτοπο P με N κορυφές στον $\mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$f_{n-1}(P) \leq \left(cn \log \frac{N}{n}\right)^{n/2}, \tag{1.2.1}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός (βλέπε, για παράδειγμα, [2]) ότι για κάθε N–άδα σημείων $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N$ στην Ευκλείδεια μπάλα B_2^n ισχύει

$$\frac{|\mathrm{conv}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N\}|}{|B_2^n|} \leq \left(\frac{c_1}{n} \log \frac{N}{n}\right)^{n/2}, \tag{1.2.2}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Ας υποθέσουμε ότι $P = \mathrm{conv}\{\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_N\}$ είναι ένα $0/1$ πολύτοπο με N κορυφές στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ θεωρούμε την ορθογώνια προβολή $\pi_j(P)$ του P στον υπόχωρο $\{\vec{x} : x_j = 0\}$. Αφού όλες οι κορυφές του $\pi_j(P)$ απέχουν το πολύ $\sqrt{n-1}$ από το 0, η (1.2.2) δείχνει ότι

$$\frac{|\pi_j(P)|}{|\sqrt{n-1}B_2^{n-1}|} \leq \left(\frac{c_1}{n-1} \log \frac{N}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{1.2.3}$$

Έστω $\{F_k : k = 1, \ldots, M\}$ το σύνολο των εδρών του P. Αν σταθεροποιήσουμε μια έδρα F_k, τότε τουλάχιστον μία προβολή $\pi_{j(k)}(F_k)$ έχει μη μηδενικό όγκο. Όλες οι κορυφές της $\pi_{j(k)}(F_k)$ έχουν συντεταγμένες 0 ή 1, και η $\pi_{j(k)}(F_k)$ περιέχει ένα simplex με μη μηδενικό όγκο. Χρησιμοποιώντας την τετριμμένη εκτίμηση ότι αν η ορίζουσα ενός πίνακα με ακέραιες συντεταγμένες δεν μηδενίζεται τότε έχει απόλυτη τιμή τουλάχιστον 1, συμπεραίνουμε ότι $|\pi_{j(k)}(F_k)| \geq \frac{1}{(n-1)!}$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{n} |\pi_j(F_k)| \geq \frac{1}{(n-1)!} \tag{1.2.4}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, M$. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{M} |\pi_j(F_k)| = 2|\pi_j(P)| \tag{1.2.5}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο ανισότητες, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{M}{(n-1)!} &\leq \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} |\pi_j(F_k)| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M} |\pi_j(F_k)| \\
&= 2n\sum_{j=1}^{n} |\pi_j(P)| \\
&\leq 2n|\sqrt{n-1}B_2^{n-1}| \left(\frac{c_1}{n-1} \log \frac{N}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|\sqrt{n-1}B_2^{n-1}| \leq c_2^{n-1}$ και $(n-1)! \leq [c_3(n-1)]^{n-1}$, καταλήγουμε στην (1.2.1). □

Σημείωση. Το άνω φράγμα της Πρότασης 1.2.1 είναι καλύτερο από το γενικό άνω φράγμα $30(n-2)!$ των Fleiner, Kaibel και Rote, τουλάχιστον όταν $\log \frac{N}{n} \ll n$.

Δεν υπερέχει όμως στην περίπτωση που το N είναι εκθετικό ως προς την διάσταση n. Το επιχείρημα «χάνει πολύ» στο εξής σημείο: η απόλυτη τιμή της ορίζουσας ένας $n \times n$ 0/1–πίνακα είναι με «μεγάλη πιθανότητα» – σχεδόν ίση με 1 – της τάξης του $n^{n/2}$, εμείς όμως αναγκαστήκαμε να χρησιμοποιήσουμε το τετριμμένο κάτω φράγμα 1.

Κεφάλαιο 2

Μεγάλες αποκλίσεις

2.1 Λογαριθμική ροπογεννήτρια και μετασχηματισμός Legendre

Έστω X μια φραγμένη τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, και έστω $\mu(B) := P(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, η κατανομή της. Υποθέτουμε ότι η X είναι συμμετρική, δηλαδή $\mu(B) = \mu(-B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\mathrm{Var}(X) > 0$. Ειδικότερα, $p(\mu) := \max_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) < 1$. Θέτουμε $r := \sup\{x \in \mathbb{R} \colon \mu([x, \infty)) > 0\}$. Δηλαδή, r είναι το «δεξιό άκρο» του φορέα του μ.

Θεωρούμε την ροπογεννήτρια της X,

$$\varphi(t) := \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.1.1}$$

και την λογαριθμική ροπογεννήτρια της X,

$$\psi(t) := \log \varphi(t). \tag{2.1.2}$$

Έχουμε υποθέσει ότι η X είναι φραγμένη, άρα $\varphi(t) < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από την συμμετρία της X έπεται επίσης ότι οι φ και ψ είναι άρτιες συναρτήσεις. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e^{\psi(\lambda t + (1-\lambda)s)} &= \varphi(\lambda t + (1-\lambda)s) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda t X} e^{(1-\lambda)sX}\right) \\ &\leq \left[\mathbb{E}\, e^{tX}\right]^{\lambda} \left[\mathbb{E}\, e^{sX}\right]^{1-\lambda} = e^{\lambda\psi(t) + (1-\lambda)\psi(s)} \end{aligned}$$

για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και για κάθε $0 \leq \lambda \leq 1$, άρα η ψ είναι κυρτή. Έπεται ότι η φ είναι επίσης κυρτή. Εύκολα ελέγχουμε ότι η φ είναι C^∞ στο $\mathbb{R}$. Η n-οστή παράγωγος της φ είναι η συνάρτηση

$$\varphi^{(n)}(t) = \mathbb{E}\left(X^n e^{tX}\right). \tag{2.1.3}$$

Ορισμός 2.1.1. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας P_t στον $(\Omega, \mathcal{F})$ θέτοντας*

$$P_t(A) := \mathbb{E}\left(e^{tX - \psi(t)} \mathbf{1}_A\right) = \frac{\int_A e^{tX} dP}{\int_\Omega e^{tX} dP} \qquad (A \in \mathcal{F}). \tag{2.1.4}$$

Επίσης, ορίζουμε $\mu_t(A) := P_t(X \in A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε, το μ_t έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης, και ισχύουν οι

$$\mathbb{E}_t(X) = \psi'(t) \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}_t(X) = \psi''(t). \tag{2.1.5}$$

Παρατηρήστε ότι $P_0 = P$ και $\mu_0 = \mu$.

Λήμμα 2.1.2. *Η $\psi' : \mathbb{R} \to (-r, r)$ είναι γνησίως αύξουσα και επί. Ειδικότερα,*

$$\lim_{t \to \pm\infty} \psi'(t) = \pm r. \tag{2.1.6}$$

Απόδειξη. Αφού

$$(\psi')'(t) = \psi''(t) = \mathrm{Var}_t(X) > 0, \tag{2.1.7}$$

η ψ' είναι γνησίως αύξουσα. Από την ανισότητα $-re^{tX} \leq Xe^{tX} \leq re^{tX}$, η οποία ισχύει με πιθανότητα 1 για κάθε (σταθερό) t, και από την $\psi'(t) = \mathbb{E}\left(Xe^{tX}\right)/\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ η οποία προκύπτει από την (2.1.3), παίρνοντας υπ' όψιν και τις $P(X = \pm r) < 1$, συμπεραίνουμε ότι $\psi'(t) \in (-r, r)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Μένει να δείξουμε ότι η ψ' είναι επί. Έστω $m : [0, r] \to [0, \infty]$ η συνάρτηση

$$m(x) = -\log \mu([x, \infty)). \tag{2.1.8}$$

Η m είναι αύξουσα και $m(r) < \infty$ αν και μόνο αν $P(X = r) > 0$. Παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα του Markov, για κάθε $x \in (0, r)$ και για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \geq e^{tx}\mu([x, \infty)), \tag{2.1.9}$$

και συνεπώς,

$$\psi(t) \geq tx - m(x). \tag{2.1.10}$$

Έστω $x \in (0, r)$ και $y \in (x, r)$. Από την (2.1.10) έχουμε $\psi(t) \geq ty - m(y)$ για κάθε $t \geq 0$. Ειδικότερα,

$$\psi\big(m(y)/(y - x)\big) \geq xm(y)/(y - x). \tag{2.1.11}$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g_x(s) := sx - \psi(s)$, έχουμε $g_x(0) = 0$ και $g_x\big(m(y)/(y-x)\big) \leq 0$. Αφού η g_x είναι κοίλη και $g_x'(0) = x > 0$, αυτό δείχνει ότι η g_x παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του $\big(0, m(y)/(y-x)\big)$. Συνεπώς, $\psi'(t) = x$ για κάποιο σημείο t του διαστήματος. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται στην περίπτωση $x \in (-r, 0)$. Τέλος, για $x = 0$ έχουμε $\psi'(0) = x$. □

Ορισμός 2.1.3. *Ορίζουμε $h \colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ με $h := (\psi')^{-1}$. Παρατηρούμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα C^∞ συνάρτηση και*

$$h'(x) = \frac{1}{\psi''(h(x))}. \tag{2.1.12}$$

Ορισμός 2.1.4. *Ο μετασχηματισμός Legendre της ψ είναι η συνάρτηση*

$$f(x) := \sup\left\{tx - \psi(t) \colon t \in \mathbb{R}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.13}$$

Οι βασικές ιδιότητες της f περιγράφονται στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 2.1.5. (α) *$f \geq 0$, $f(0) = 0$ και $f(x) = \infty$ για $x \in \mathbb{R} \setminus [-r, r]$.*
(β) *Για κάθε $x \in (-r, r)$ έχουμε $f(x) = tx - \psi(t)$ αν και μόνο αν $\psi'(t) = x$. Άρα,*

$$f(x) = xh(x) - \psi(h(x)) \qquad \text{για } x \in (-r, r). \tag{2.1.14}$$

(γ) *Η f είναι γνησίως κυρτή C^∞ συνάρτηση στο $(-r, r)$, και*

$$f'(x) = h(x). \tag{2.1.15}$$

Απόδειξη. (α) Η $f \geq 0$ προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $t \mapsto tx - \psi(t)$ παίρνει την τιμή 0 για $t = 0$. Η $f(0) = 0$ είναι προφανής. Για τον τρίτο ισχυρισμό, παρατηρούμε πρώτα ότι $\varphi(t) \leq e^{tr}$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα,

$$tx - \psi(t) \geq t(x - r) \qquad \text{για } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.1.16}$$

και συνεπώς,

$$f(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx - \psi(t)] \geq \lim_{t \to \infty} [t(x - r)] = \infty \tag{2.1.17}$$

αν $x > r$. Λόγω συμμετρίας, έχουμε $f(x) = \infty$ αν $x < -r$.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\psi'(t) = x$. Τότε, $x \in (-r, r)$ και η γνησίως κοίλη συνάρτηση $g_x(s) = sx - \psi(s)$ έχει τοπικό ακρότατο, άρα ολικό μέγιστο, στο $s = t$. Έπεται ότι

$$tx - \psi(t) = \max\{sx - \psi(s) \colon s \in \mathbb{R}\} = f(x). \tag{2.1.18}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $x \in (-r, r)$ και ότι $f(x) = tx - \psi(t)$ για κάποιο t. Υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ ώστε $\psi'(u) = x$, και από το προηγούμενο επιχείρημα, πρέπει να έχουμε $f(x) = ux - \psi(u)$. Αφού η $g_x(s) = sx - \psi(s)$ είναι γνησίως κοίλη και συνεχής, έχει μοναδικό μέγιστο. Έπεται ότι $u = t$, και συνεπώς, $\psi'(t) = x$.

(γ) Οι ψ και h είναι C^∞, οπότε το ίδιο ισχύει για την f από το (β). Επιπλέον,

$$\frac{d}{dx} f(x) = h(x) + xh'(x) - \psi'(h(x))h'(x) = h(x), \tag{2.1.19}$$

από το (β) και από τον ορισμό της h, άρα

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} h(x) \tag{2.1.20}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = h'(x) = \frac{1}{\psi''(h(x))} > 0, \tag{2.1.21}$$

άρα η f είναι γνησίως κυρτή στο $(-r, r)$. □

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση των ± 1-πολυτόπων. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες ± 1 τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με κατανομή $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$\varphi(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \cosh(t), \tag{2.1.22}$$

και

$$\psi(t) := \log \varphi(t) = \log \cosh(t). \tag{2.1.23}$$

Λήμμα 2.1.6. *Η f (ο μετασχηματισμός Legendre της ψ) είναι άρτια και γνησίως κυρτή συνάρτηση στο $(-1,1)$. Για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(1+x)\log(1+x) + \tfrac{1}{2}(1-x)\log(1-x). \tag{2.1.24}$$

Επίσης, $\lim_{x\to\pm 1} f(x) = \log 2$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = xt - \log\cosh(t), \quad \text{όπου } x = \psi'(t) = \tanh t. \tag{2.1.25}$$

Από την $\tanh t = x$ βλέπουμε ότι

$$e^{2t} = \frac{1+x}{1-x}, \text{ ή ισοδύναμα, } t = h(x) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \tag{2.1.26}$$

Πάλι από την $\tanh t = x$, βλέπουμε ότι $e^{-2t} = \frac{1-x}{1+x}$, και συνεπώς,

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^t(1+e^{-2t})}{2} = \frac{e^t}{1+x}. \tag{2.1.27}$$

Επιστρέφοντας στην (2.1.25) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= xt - \log\cosh t \\ &= xt - t + \log(1+x) \\ &= \log(1+x) - (1-x)\cdot\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \log(1+x) - (1-x)\cdot\tfrac{1}{2}\log(1+x) + \tfrac{1}{2}(1-x)\log(1-x), \end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει η (2.1.24). □

Για δοσμένα $x_1, \ldots, x_n$ στο $(-1,1)$, θέτουμε

$$t_i := h(x_i) \qquad (i \leq n). \tag{2.1.28}$$

Σε ότι ακολουθεί, θα θεωρούμε πάντα ότι τα t_i και x_i βρίσκονται σε αυτήν την σχέση. Ειδικότερα, θα χρησιμοποιούμε συχνά την αντίστροφη σχέση τους (θυμηθείτε ότι $\psi(t) = \log\cosh t$):

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $x_i \in (-1,1)$ και έστω $t_i = h(x_i)$. Τότε,*

$$x_i = \psi'(t_i) = \tanh(t_i) \qquad (i \leq n). \tag{2.1.29}$$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g(t) = \frac{f(\tanh(t))}{t^2}. \tag{2.1.30}$$

Λήμμα 2.1.8. *Η g ικανοποιεί την*

$$g(t) = -\frac{1}{t^2}\log\cosh(t) + \frac{\tanh(t)}{t}, \tag{2.1.31}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$, και $\lim_{t\to 0} g(t) = \frac{1}{2}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $t = h(x)$ όπου $x \in [0,1)$. Από το Λήμμα 2.1.7 έχουμε $x = \tanh(t)$. Τότε,

$$f(\tanh(t)) = -\log\cosh(t) + \tanh(t)t \tag{2.1.32}$$

από την (2.1.25). Έπεται η (2.1.31). Για τη μονοτονία της g θα χρησιμοποιήσουμε την

$$[f(\tanh(t))]' = h(\tanh(t))\tanh'(t) = t/\cosh^2(t). \tag{2.1.33}$$

Παραγωγίζοντας την g και παίρνοντας υπ' όψιν την παραπάνω ισότητα, βλέπουμε ότι η g' έχει το ίδιο πρόσημο με την

$$w(t) := t^2 - 2\cosh^2(t)f(\tanh(t)). \tag{2.1.34}$$

Παρατηρούμε ότι $w(0) = 0$ και

$$\begin{aligned} w'(t) &= 2t - 2\cosh^2(t)[f(\tanh(t))]' - 4\cosh(t)\sinh(t)f(\tanh(t)) \\ &= -4\cosh(t)\sinh(t)f(\tanh(t)) < 0 \end{aligned}$$

για $t \in (0,\infty)$. Άρα $w < 0$ και, ομοίως, $g' < 0$ στο $(0,\infty)$. Έπεται ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για το $\lim_{t\to 0} g(t)$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{[f(\tanh(t))]'}{(t^2)'} = \frac{1}{2\cosh^2(t)} \to \frac{1}{2} \tag{2.1.35}$$

όταν $t \to 0$. Σύμφωνα με τον κανόνα του l' Hôspital, $\lim_{t\to 0} g(t) = \frac{1}{2}$. □

2.2 Η μέθοδος των Dyer, Füredi και McDiarmid

Όπως είπαμε στην εισαγωγή, η απόδειξη του κεντρικού μας θεωρήματος ακολουθεί ως ένα σημείο την προσέγγιση των Bárány και Pór. Αυτή η προσέγγιση με τη σειρά της έχει σαν αφετηρία τη δουλειά των Dyer, Füredi και McDiarmid [10], οι οποίοι απέδειξαν το εξής: Έστω $\kappa = \log 2 - \frac{1}{2}$ και έστω K_N το τυχαίο πολύτοπο που ορίζεται από την (1.1.7). Για κάθε $\varepsilon \in (0,\kappa)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{2^{-n}\mathbb{E}\,|K_N| : N \leq \exp((\kappa-\varepsilon)n)\right\} = 0 \tag{2.2.1}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left\{2^{-n}\mathbb{E}\,|K_N| : N \geq \exp((\kappa+\varepsilon)n)\right\} = 1. \tag{2.2.2}$$

Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζουμε συνοπτικά τη μέθοδο της απόδειξης αυτού του αποτελέσματος. Αυτό θα μας επιτρέψει να ορίσουμε κάποιες έννοιες που θα παίξουν κεντρικό ρόλο στα επόμενα, και να δούμε πώς η θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων εμπλέκεται στη μελέτη των τυχαίων 0/1 πολυτόπων. Αρκετά από τα λήμματα που χρησιμοποιούνται εδώ θα αποδειχθούν (σε ισχυρότερη μορφή και με απλούστερο τρόπο) στα επόμενα Κεφάλαια.

Για να προσδιορίσουν την κρίσιμη τιμή κ, οι Dyer, Füredi και McDiarmid χρησιμοποίησαν την ακόλουθη συνάρτηση.

Ορισμός 2.2.1. *Θέτουμε $C = [-1,1]^n$. Για κάθε $\vec{x} \in (-1,1)^n$, θέτουμε*

$$q(\vec{x}) := \inf\big\{\mathrm{Prob}\big(\vec{X} \in H\big) : \vec{x} \in H,\ H \text{ κλειστός ημίχωρος}\big\}. \tag{2.2.3}$$

Επίσης, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $A \subset (-1,1)^n$ ορίζουμε

$$q_+(A) = \max_{\vec{x} \in C \setminus A} q(\vec{x}) \quad \text{και} \quad q_-(A) = \min_{\vec{x} \in \partial(A)} q(\vec{x}), \tag{2.2.4}$$

όπου $\partial(A)$ είναι το σύνορο του A.

Παρατηρήστε ότι το infimum στην (2.2.3) προσδιορίζεται από εκείνους τους ημιχώρους H για τους οποίους $\vec{x} \in \partial(H)$.

2.2 (α) Ιδέα της απόδειξης της (2.2.1)

Η απόδειξη βασίζεται στο εξής απλό Λήμμα:

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $N > n$ και έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα που περιέχεται στο $(-1,1)^n$. Τότε,*

$$\mathbb{E}(|K_N|) \leq |A| + 2^n \cdot N\, q_+(A). \tag{2.2.5}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\mathbb{E}\left(|K_N|\right) = \mathbb{E}\left(|K_N \cap A|\right) + \mathbb{E}\left(|K_N \setminus A|\right) \leq |A| + \mathbb{E}\left(|K_N \setminus A|\right). \tag{2.2.6}$$

Παρατηρούμε ότι αν H είναι ένας κλειστός ημίχωρος που περιέχει το $\vec{x}$, και αν $\vec{x} \in K_N$, τότε υπάρχει $i \leq N$ ώστε $\vec{X}_i \in H$ (αλλιώς, θα είχαμε $\vec{x} \in K_N \subseteq H'$, όπου H' είναι ο συμπληρωματικός ημίχωρος του H). Έπεται ότι $\mathrm{Prob}\big(\vec{x} \in K_N\big) \leq N \cdot \mathrm{Prob}\big(\vec{X} \in H\big)$, και αφού ο H ήταν τυχών,

$$\mathrm{Prob}\big(\vec{x} \in K_N\big) \leq N \cdot q(\vec{x}). \tag{2.2.7}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fubini βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|K_N \setminus A|\right) &= \int_{C\setminus A} \left[\mathbb{E}\left(\chi_{K_N}(\vec{x})\right)\right] d\vec{x} \\ &= \int_{C\setminus A} \mathrm{Prob}(\vec{x} \in K_N)\, d\vec{x} \\ &\leq \int_{C\setminus A} N q(\vec{x})\, d\vec{x} \leq N\, q_+(A)\, |C \setminus A|\,. \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην (2.2.6) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Η ιδέα είναι τώρα η εξής: αν επιλέξουμε κατάλληλο A (το οποίο θα εξαρτάται από τα N και n) ώστε, για $N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)$ να έχουμε ταυτόχρονα $|A|/2^n \to 0$ και $Nq_+(A) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, τότε παίρνουμε την (2.2.1).

2.2 (β) Ιδέα της απόδειξης της (2.2.2)

Η δεύτερη βασική παρατήρηση είναι η εξής.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα που περιέχεται στο $(-1,1)^n$. Τότε,*

$$1 - \mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq A\big) \leq \binom{N}{n} 2^{-(N-n)} + 2\binom{N}{n}\big(1 - q_-(A)\big)^{N-n}. \tag{2.2.8}$$

Η απόδειξη του Λήμματος 2.2.3 θα δοθεί στο Κεφάλαιο 5. Αυτό που θέλουμε να σημειώσουμε εδώ είναι ότι συνδέει την συνάρτηση q με την (2.2.2). Πράγματι, αν επιλέξουμε κατάλληλο A (το οποίο θα εξαρτάται από τα N και n) ώστε, για $N \geq \exp((\kappa+\varepsilon)n)$ να έχουμε ταυτόχρονα $|A|/2^n \to 1$ και $1 - \mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq A\big) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, τότε παίρνουμε την (2.2.2).

2.2 (γ) Υπολογισμός του $q(\vec{x})$

Από τις δύο προηγούμενες παραγράφους φαίνεται ότι τόσο η (2.2.1) όσο και η (2.2.2) σχετίζονται άμεσα με την συμπεριφορά της συνάρτησης $q(\vec{x})$ στο $(-1,1)^n$. Ένα καλό άνω φράγμα για την $q(\vec{x})$ προκύπτει σχετικά εύκολα, με χρήση της ανισότητας του Markov.

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε $\vec{x} \in (-1,1)^n$ έχουμε $q(\vec{x}) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n f(x_i)\right)$.*

Απόδειξη. Αν H είναι ένας κλειστός ημίχωρος ώστε $\vec{x} \in \partial(H)$, υπάρχει $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$H = H(\vec{t}) = \{\vec{y} : \langle \vec{t}, \vec{y} - \vec{x}\rangle \geq 0\}. \tag{2.2.9}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\big(\vec{X} \in H(\vec{t})\big) &= \mathrm{Prob}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i)\right\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp(t_i(X_i - x_i)\right] \\
&= \prod_{i=1}^n e^{\psi(t_i) - t_i x_i}.
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό της $q(\vec{x})$ έχουμε

$$\begin{aligned}
q(\vec{x}) &\leq \inf_{\vec{t} \in \mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{\psi(t_i) - t_i x_i} = \prod_{i=1}^n e^{-\sup\{t x_i - \psi(t) :\, t \in \mathbb{R}\}} \\
&= \prod_{i=1}^n e^{-f(x_i)}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, το ζητούμενο. □

Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[-1,1]$ θέτοντας $f(\pm 1) = \log 2$ και για κάθε $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in (-1,1)^n$ θέτουμε

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{2.2.10}$$

Για κάθε $0 < \alpha < \log 2$, ορίζουμε

$$F^\alpha = \{\vec{x} \in (-1,1)^n \colon F(\vec{x}) \leq \alpha\}. \tag{2.2.11}$$

Αφού η f είναι άρτια και κυρτή στο $(-1,1)$, το F^α είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα που περιέχεται στο $(-1,1)^n$. Από τον ορισμό του F^α βλέπουμε ότι $\sum_{i=1}^n f(x_i) = nF(\vec{x}) = \alpha n$ για κάθε $\vec{x} \in \partial(F^\alpha)$. Συνεπώς, το Λήμμα 2.2.4 αποδεικνύει το εξής.

Λήμμα 2.2.5. *Έστω $0 < \alpha < \log 2$. Για κάθε $\vec{x} \in \partial(F^\alpha)$ έχουμε*

$$q(\vec{x}) \leq \exp(-\alpha n). \tag{2.2.12}$$

Έπεται ότι

$$q_+(F^\alpha) \leq \exp(-\alpha n). \tag{2.2.13}$$

Το Λήμμα 2.2.5 θα φανεί χρήσιμο για την απόδειξη της (2.2.1). Για την απόδειξη της (2.2.2) χρειάζεται να εκτιμήσουμε την $q(\vec{x})$ από κάτω ώστε να εκμεταλλευτούμε το Λήμμα 2.2.3. Το βασικό τεχνικό βήμα είναι η απόδειξη της επόμενης Πρότασης, η οποία βασίζεται στην θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων (και θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 4).

Πρόταση 2.2.6. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται μόνο από το ε, ώστε για κάθε $0 < \alpha < \log 2$ και για κάθε $n \geq n(\varepsilon)$ να έχουμε*

$$q_-(F^\alpha) \geq \exp(-\alpha(1+\varepsilon)n - \varepsilon n). \tag{2.2.13}$$

2.2 (δ) Προσδιορισμός της σταθεράς κ και η απόδειξη του θεωρήματος

Έστω $U_1, \ldots, U_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(-1,1)$. Τότε, για κάθε $0 < \alpha < \log 2$,

$$2^{-n}\,|F^\alpha| = \mathrm{Prob}((U_1, \ldots, U_n) \in F^\alpha) = \mathrm{Prob}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \leq \alpha\right). \tag{2.2.14}$$

Ορίζουμε

$$\kappa = \mathbb{E}\,(f(U_i)) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \log 2 - \tfrac{1}{2}. \tag{2.2.15}$$

Από το νόμο των μεγάλων αριθμών συμπεραίνουμε το εξής.

Λήμμα 2.2.7. *Για κάθε $\alpha \in (0,\kappa)$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\,|F^{\alpha}| = 0, \tag{2.2.16}$$

και, όμοια, για κάθε $\alpha \in (\kappa, \log 2)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\,|F^{\alpha}| = 1. \tag{2.2.17}$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το πρώτο μισό του θεωρήματος των Dyer, Füredi και McDiarmid.

Πρόταση 2.2.8. *Για κάθε $\varepsilon \in (0,\kappa)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{2^{-n}E(|K_N|) \colon N \leq \exp((\kappa-\varepsilon)n)\right\} = 0. \tag{2.2.18}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\alpha = \kappa - \varepsilon/2$. Από το Λήμμα 2.2.7 έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\,|F^{\alpha}| = 0. \tag{2.2.19}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $N \leq \exp((\kappa-\varepsilon)n)$, το Λήμμα 2.2.5 μας δίνει

$$Nq_+(F^{\alpha}) \leq \exp(-\varepsilon n/2). \tag{2.2.20}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.2 με $A = F^{\alpha}$ παίρνουμε

$$2^{-n}\mathbb{E}\left(|K_N|\right) \leq 2^{-n}\,|F^{\alpha}| + \exp(-\varepsilon n/2), \tag{2.2.21}$$

και το δεξιό μέλος τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$. □

Για το δεύτερο μισό του θεωρήματος χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.2.6:

Πρόταση 2.2.9. *Για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left\{2^{-n}\mathbb{E}\left(|K_N|\right) \colon N \geq \exp((\kappa+\varepsilon)n)\right\} = 1. \tag{2.2.22}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$. Αφού $(\kappa + x)(1+x) + x \to \kappa$ όταν $x \to 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε, αν θέσουμε $\alpha = \kappa + \delta$ να έχουμε $(1+\delta)\alpha + \delta < \kappa + \varepsilon$. Γι' αυτήν την τιμή του α η Πρόταση 2.2.6 – σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.2.3 – δείχνει ότι αν $n \geq n(\alpha,\delta)$, και αν $N \geq \exp((\kappa+\varepsilon)n) \geq \exp((1+\delta)\alpha n + \delta n)$, τότε

$$\mathbb{E}\left(|K_N|\right) \geq |F^{\alpha}| \cdot \mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq F^{\alpha}\big) \geq |F^{\alpha}|\,(1 - 2^{-n+1}). \tag{2.2.23}$$

Παραλείπουμε τους υπολογισμούς, αφού εντελώς αντίστοιχοι υπολογισμοί θα γίνουν στο Κεφάλαιο 5. Αφού $\alpha > \kappa$, το Λήμμα 2.2.7 δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\,|F^{\alpha}| = 1. \tag{2.2.24}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 3

Πιθανοθεωρητικά λήμματα

Σε αυτό το Κεφάλαιο αποδεικνύουμε δύο βασικά πιθανοθεωρητικά λήμματα που δίνουν κάτω φράγματα για τις ουρές της κατανομής των αθροισμάτων Rademacher.

3.1 Στοιχειώδες κάτω φράγμα

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω $X_1, X_2, \dots, X_m$ ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες ± 1 τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με κατανομή $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^m s_i > 0$ και $r > 0$. Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε ένα πρώτο κάτω φράγμα για την

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m s_i X_i \geq r\right)$$

μέσω της συνάρτησης f, για κατάλληλο εύρος τιμών του r. Η απόδειξη ακολουθεί, ως ένα βαθμό, αυτήν του Λήμματος 8.2 στην εργασία [3].

Πρόταση 3.1.1. *Έστω $0 < \gamma \leq 1/10$. Υπάρχει σταθερά $c(\gamma) > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $s_1, \dots, s_m$ με $\sum_{i=1}^m s_i > 0$, ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m s_i (X_i - \gamma) \geq 0\right) \geq c(\gamma)\, m^{-3/2}\, e^{-mf(\gamma)}. \tag{3.1.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τους κλειστούς ημίχωρους

$$\begin{aligned} H^* &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m s_i (x_i - \gamma) \geq 0\right\} \\ H &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m (x_i - \gamma) \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ την απεικόνιση που μεταθέτει κυκλικά τις συντεταγμένες του $\vec{x}$:

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_m, x_1, \dots, x_{m-1}). \tag{3.1.2}$$

Αφού $\sigma^m(\vec{x}) = \vec{x}$, η τροχιά $\{\sigma^k(\vec{x}) : k \geq 0\}$ του $\vec{x}$ έχει το πολύ m στοιχεία. Λόγω της συμμετρίας του H ως προς x_i, αν $\vec{x} \in H$ τότε $\sigma^k(\vec{x}) \in H$ για κάθε $k \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι αν $\vec{x} \in H$ τότε υπάρχει $k \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιος ώστε $\sigma^k(\vec{x}) \in H^*$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} s_i([\sigma^k(\vec{x})]_i - \gamma) < 0 \tag{3.1.3}$$

για κάθε k. Τότε, προσθέτοντας τις ανισότητες και παρατηρώντας ότι

$$[\sigma^1(\vec{x})]_i + \cdots + [\sigma^m(\vec{x})]_i = x_1 + \cdots + x_m \tag{3.1.4}$$

για κάθε $i = 1, \dots, m$, καταλήγουμε στην

$$(s_1 + \cdots + s_m) \sum_{i=1}^{m} (x_i - \gamma) < 0. \tag{3.1.5}$$

Άτοπο, αφού $\vec{x} \in H$.

Έπεται ότι

$$m \cdot \mathbb{P}\left(\vec{X} \in H^*\right) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\left(\sigma^k(\vec{X}) \in H^*\right) \geq \mathbb{P}\left(\vec{X} \in H\right). \tag{3.1.6}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} s_i(X_i - \gamma) \geq 0\right) &\geq \frac{1}{m}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i \geq \gamma m\right) \\ &= \frac{1}{m}\mathbb{P}\left(|\{i : X_i = 1\}| \geq \frac{(1+\gamma)m}{2}\right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} s_i(X_i - \gamma) \geq 0\right) \geq \frac{1}{m}\frac{1}{2^m} \sum_{\frac{\gamma+1}{2} \leq \frac{k}{m} \leq 1} \binom{m}{k} \geq \frac{1}{m}\frac{1}{2^m}\binom{m}{k_\gamma}, \tag{3.1.7}$$

όπου $k_\gamma := \lceil m(\gamma+1)/2 \rceil$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από $m(\gamma+1)/2$. Ειδικότερα,

$$\frac{k_\gamma}{m} < \frac{1 + \gamma + 2m^{-1}}{2}. \tag{3.1.8}$$

Θα χρειαστούμε κάποιες ακριβείς εκτιμήσεις του H. E. Robbins (βλέπε [11, II, (9.15)]).

Λήμμα 3.1.2. *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \cdot e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \cdot e^{(12n)^{-1}}. \tag{3.1.9}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία

$$d_n := \log n! - (n + \tfrac{1}{2}) \log n + n. \tag{3.1.10}$$

Παρατηρούμε ότι

$$d_n - d_{n+1} = (n + \tfrac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n} - 1. \tag{3.1.11}$$

Γράφουμε

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}, \tag{3.1.12}$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + \cdots$ παίρνουμε

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots . \tag{3.1.13}$$

Συγκρίνοντας το δεξιό μέλος με την γεωμετρική σειρά λόγου $(2n+1)^{-2}$ βλέπουμε ότι

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3[(2n+1)^2 - 1]} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}. \tag{3.1.14}$$

Από την (3.1.13) η $\{d_n\}$ είναι φθίνουσα και από την (3.1.14) η $\{d_n - (12n)^{-1}\}$ είναι αύξουσα. Άρα, το όριο $C := \lim d_n$ υπάρχει. Από την (3.1.13) βλέπουμε επίσης ότι

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{3(2n+1)^2} \geq \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}, \tag{3.1.15}$$

δηλαδή η $\{d_n - (12n+1)^{-1}\}$ είναι φθίνουσα. Άρα,

$$C + \frac{1}{12n+1} < d_n < C + \frac{1}{12n} \tag{3.1.16}$$

Μένει να ελέγξουμε ότι $C = \log(\sqrt{2\pi})$. Μια πολύ σύντομη απόδειξη γι' αυτό είναι η εξής: από την $d_n \to C$ έπεται εύκολα ότι

$$\binom{2n}{n} \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \to \frac{\sqrt{2}}{e^C} \tag{3.1.17}$$

καθώς το $n \to \infty$. Θεωρούμε την συνάρτηση $u(x) = (1+x)^{2n+1}$. Από το θεώρημα του Taylor,
(3.1.18)

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{u''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!} \int_0^x u^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{2n+1}{k} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (2n+1)(2n) \cdots (n+1)(1+t)^n (1-t)^n dt \\ &= 2^{2n} + \binom{2n}{n} (2n+1) \int_0^1 (1-t^2)^n dt. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\cdot\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\int_0^1(1-t^2)^n dt = 1. \tag{3.1.19}$$

Ομως,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\int_0^1(1-t^2)^n dt = \frac{2n+1}{n}\int_0^{\sqrt{n}}(1-u^2/n)^n du \to 2\int_0^{\infty}e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} \tag{3.1.20}$$

καθώς το $n\to\infty$. Από τις (3.1.17), (3.1.19) και (3.1.20) παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{2}}{e^C}\cdot\sqrt{\pi} = 1, \tag{3.1.21}$$

δηλαδή, $C = \log(\sqrt{2\pi})$. □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της Πρότασης 3.1.1. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $m \geq 3$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.2 και την ανισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m}{k_\gamma(m-k_\gamma)}} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \tag{3.1.22}$$

(η οποία προκύπτει από την ανισότητα $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ για $0\leq x\leq 1$) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\binom{m}{k_\gamma} &\geq \sqrt{\frac{2}{\pi m}}\ \exp\left(m\log m - k_\gamma\log k_\gamma - (m-k_\gamma)\log(m-k_\gamma)\right)\\ &\quad\times\exp\left((12m+1)^{-1} - (12k_\gamma)^{-1} - [12(m-k_\gamma)]^{-1}\right)\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi m}}\ \exp\left(-m\left[\frac{k_\gamma}{m}\log\left(\frac{k_\gamma}{m}\right) + \left(1-\frac{k_\gamma}{m}\right)\log\left(1-\frac{k_\gamma}{m}\right)\right]\right)\\ &\qquad\times\exp\left(\frac{1}{12m+1} - \frac{1}{12k_\gamma} - \frac{1}{12(m-k_\gamma)}\right).\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του k_γ έχουμε

$$\frac{1+\gamma}{2} \leq \frac{k_\gamma}{m} < \frac{1+\gamma+2m^{-1}}{2}, \tag{3.1.23}$$

και αφού η $x\mapsto -x\log x-(1-x)\log(1-x)$ είναι φθίνουσα στο $[\frac{1}{2},1]$, συμπεραίνουμε ότι

$$\binom{m}{k_\gamma} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi m}}\ 2^m\ \exp(-mf(\gamma+2m^{-1}))\ \exp\left(\frac{1}{12m+1} - \frac{m}{12k_\gamma(m-k_\gamma)}\right).$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής και από την μονοτονία της $f' = h$ βλέπουμε ότι

$$f(\gamma+2m^{-1}) \leq f(\gamma) + 2m^{-1}h(\gamma+2m^{-1}), \tag{3.1.24}$$

οπότε

$$\binom{m}{k_\gamma} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi m}}\, 2^m \, \exp(-mf(\gamma))$$
$$\times \exp\left(-2h(\gamma+2m^{-1}) + \frac{1}{12m+1} - \frac{m}{12k_\gamma(m-k_\gamma)}\right).$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, παρατηρούμε ότι, από την μονοτονία της h έχουμε $h(\gamma+2m^{-1}) \leq h(\gamma+2/3)$, και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\frac{m}{12k_\gamma(m-k_\gamma)} \leq \frac{1}{12m}\cdot\frac{4}{1-(\gamma+2m^{-1})^2}, \tag{3.1.25}$$

που ισχύει γιατί $k_\gamma < m(\gamma+1)/2+1$ και η συνάρτηση $x \mapsto x(m-x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[m/2, m]$. Επομένως, αν $\gamma \leq 1/10$ έχουμε

$$\binom{m}{k_\gamma} \geq \frac{c(\gamma)}{\sqrt{m}} 2^m \exp(-mf(\gamma)), \tag{3.1.26}$$

και, επιστρέφοντας στην (3.1.7), παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.1.3. Η Πρόταση 3.1.1 γενικεύεται στο πλαίσιο των ανεξάρτητων φραγμένων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_m$ με κατανομή μ. Αν $0 < \gamma \leq \gamma(\mu)$, τότε υπάρχει $m_0 = m_0(\gamma)$ ώστε, για κάθε $m \geq m_0$, και για κάθε $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^m s_i > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m s_i(X_i-\gamma) \geq 0\right) \geq c(\gamma)\, m^{-3/2}\, e^{-mf(\gamma)}, \tag{3.1.27}$$

όπου η σταθερά $c(\gamma) > 0$ εξαρτάται μόνο από τα γ και μ.

Πράγματι, το πρώτο μέρος του επιχειρήματος που περιγράψαμε παραπάνω αποδεικνύει ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m s_i(X_i-\gamma) \geq 0\right) \geq \frac{1}{m}\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m (X_i-\gamma) \geq 0\right). \tag{3.1.28}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα των Bahadur–Rao (βλέπε [1, Θεώρημα 1]) δείχνει ότι υπάρχει ακολουθία b_m θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$\frac{\sqrt{2\pi m}}{b_m}\, e^{mf(\gamma)}\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m (X_i-\gamma) \geq 0\right) \to 1 \tag{3.1.29}$$

καθώς το $m \to \infty$, με την $\log b_m$ φραγμένη, άρα και την b_m φραγμένη από μια γνήσια θετική σταθερά.

3.2 Η μέθοδος της παρεμβολής

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την απόδειξη του εξής αποτελέσματος του Montgomery-Smith (βλέπε [29]):

Θεώρημα 3.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$, η ανισότητα*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i X_i \geq c^{-1} t \|\vec{s}\|_2\right) \geq c^{-1} e^{-ct^2} \tag{3.2.1}$$

ισχύει για κάθε $t > 0$ με $t \leq \|\vec{s}\|_2 / \|\vec{s}\|_\infty$, όπου $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τη σύγκριση δύο «νορμών παρεμβολής» που ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3.2.2. Για $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \geq 0$ ορίζουμε

$$\|\vec{s}\|_{K(t)} = \inf\left\{\|\vec{z}\|_1 + \sqrt{t}\|\vec{s} - \vec{z}\|_2 : \vec{z} \in \mathbb{R}^n\right\}. \tag{3.2.2}$$

Για $m \in \mathbb{N}$ και για $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\vec{s}\|_{P(m)} = \sup\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i \in B_j} s_i^2\right)^{1/2}\right\}, \tag{3.2.3}$$

όπου το sup παίρνεται πάνω από όλες τις m–άδες ξένων υποσυνόλων $B_1, \ldots, B_m$ του $\{1, \ldots, n\}$. Παρατηρεί κανείς αμέσως ότι

$$\|\vec{s}\|_{P(m)} = \sup\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i \in B_j} s_i^2\right)^{1/2}\right\}, \tag{3.2.4}$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλους τους $k \leq \min\{m, n\}$ και όλες τις διαμερίσεις $(B_1, \ldots, B_k)$ του $\{1, \ldots, n\}$, και ότι $P(k) = P(n)$ για κάθε $k \geq n$. Εύκολα ελέγχεται ότι οι $\|\cdot\|_{P(m)}$ και $\|\cdot\|_{K(t)}$ είναι νόρμες για κάθε $t \geq 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Είναι επίσης άμεσο ότι

$$\|\vec{s}\|_{K(t)} \leq \min\{\|\vec{s}\|_1, \|\vec{s}\|_2/\sqrt{t}\}.$$

Λήμμα 3.2.3. *Για κάθε $t > 0$, η δυϊκή νόρμα της $\|\cdot\|_{K(t)}$ είναι η*

$$\|\vec{u}\|_{K(t)}^{*} = \max\left\{\|\vec{u}\|_\infty, \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2\right\}. \tag{3.2.5}$$

Δηλαδή,

$$\|\vec{s}\|_{K(t)} = \max\{\langle \vec{u}, \vec{s}\rangle : \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{u}\|_\infty \leq 1, \|\vec{u}\|_2 \leq \sqrt{t}\} \tag{3.2.6}$$

για κάθε $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $t > 0$ και $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Για $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} s_i u_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} z_i u_i + \sum_{i=1}^{n}(s_i - z_i) u_i\right| \\
&\leq \|\vec{u}\|_\infty \|\vec{z}\|_1 + \|\vec{s} - \vec{z}\|_2 \|\vec{u}\|_2 \\
&\leq \max\{\|\vec{u}\|_\infty, \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2\} \cdot (\|\vec{z}\|_1 + \sqrt{t}\|\vec{s} - \vec{z}\|_2)
\end{aligned}$$

για κάθε $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, απ΄ όπου έπεται ότι

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i s_i\right| \leq \max\{\|\vec{u}\|_\infty, \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2\} \cdot \|\vec{s}\|_{K(t)}, \tag{3.2.7}$$

και άρα,

$$\|\vec{u}\|^*_{K(t)} \leq \max\{\|\vec{u}\|_\infty, \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2\}. \tag{3.2.8}$$

Τώρα, για $\vec{s} = \vec{u}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} s_i u_i &= \|\vec{u}\|_2\|\vec{s}\|_2 = \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2\sqrt{t}\|\vec{s}\|_2 \\ &\geq \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_\infty\|\vec{s}\|_{K(t)}, \end{aligned}$$

και, αν $|u_i| = \|\vec{u}\|_\infty$, η επιλογή $s_i = u_i$, $s_j = 0$ για $j \neq i$, δίνει

$$\sum_{i=1}^{n} u_i s_i = \|\vec{u}\|_\infty = \|\vec{u}\|_\infty\|\vec{s}\|_1 \geq \|\vec{u}\|_\infty\|\vec{s}\|_{K(t)}. \tag{3.2.9}$$

Έπεται ότι

$$\max\{\langle \vec{u}, \vec{s}\rangle : \|\vec{s}\|_{K(t)} = 1\} = \max\{\|\vec{u}\|_\infty, \sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2\}. \tag{3.2.10}$$

□

Λήμμα 3.2.4. *Για $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 \leq t \leq \|\vec{s}\|_2^2/\|\vec{s}\|_\infty^2$ ισχύει ότι*

$$\|\vec{s}\|_{K(t)} = \|\vec{s}\|_2\sqrt{t}. \tag{3.2.11}$$

Απόδειξη. Όπως ήδη παρατηρήσαμε, $\|\vec{s}\|_{K(t)} \leq \sqrt{t}\|\vec{s}\|_2$ και μένει να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα. Αν λοιπόν $0 \leq t \leq \|\vec{s}\|_2^2/\|\vec{s}\|_\infty^2$, θέτοντας $u_i = \sqrt{t}s_i/\|\vec{s}\|_2$, $i = 1, \ldots, n$, παίρνουμε ότι $\|\vec{u}\|_\infty \leq 1$ και $\sqrt{t^{-1}}\|\vec{u}\|_2 = 1$, και $\langle \vec{u}, \vec{s}\rangle = \sqrt{t}\|\vec{s}\|_2$. Το Λήμμα έπεται τώρα από το Λήμμα 3.2.3. □

Παρατήρηση. Αν $\mathrm{supp}(\vec{s}) = \{i \leq n : s_i \neq 0\}$, τότε βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει επίσης η $\|\vec{s}\|_{K(t)} = \|\vec{s}\|_1$ για $t \geq |\mathrm{supp}(\vec{s})|$. Αρκεί να θέσουμε $u_i = \mathrm{sign}(s_i)$, να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.2.3 και την παρατήρηση $\|\vec{s}\|_{K(t)} \leq \|\vec{s}\|_1$.

Λήμμα 3.2.5. *Για κάθε $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\|\vec{s}\|_{P(m)} \leq \|\vec{s}\|_{K(m)} \leq \sqrt{2}\|\vec{s}\|_{P(m)}. \tag{3.2.12}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\vec{s}\|_{P(m)} \leq \min\{\sqrt{m}\|\vec{s}\|_2, \|\vec{s}\|_1\}. \tag{3.2.13}$$

Πράγματι, αν $(B_1, \ldots, B_k)$, $k \leq m$, είναι μια διαμέριση του $\{1, \ldots, n\}$, και αν θέσουμε

$$b_j := \left(\sum_{i \in B_j} s_i^2\right)^{1/2},$$

τότε

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i\in B_j} s_i^2\right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{k} b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\right)^{1/2} \sqrt{k} \leq \sqrt{m}\|\vec{s}\|_2, \tag{3.2.14}$$

και, προφανώς, επίσης

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i\in B_j} s_i^2\right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in B_j}|s_i| = \|\vec{s}\|_1. \tag{3.2.15}$$

Τώρα, για $\vec{s}\in\mathbb{R}^n$, από την (3.2.13) έχουμε ότι

$$\|\vec{z}\|_1 + \sqrt{m}\|\vec{s}-\vec{t}\|_2 \geq \|\vec{z}\|_{P(m)} + \|\vec{s}-\vec{z}\|_{P(m)} \geq \|\vec{s}\|_{P(m)} \tag{3.2.16}$$

για κάθε $\vec{z}\in\mathbb{R}^n$, και έπεται η αριστερή ανισότητα.

Για την δεξιά ανισότητα σταθεροποιούμε $\vec{s}\in\mathbb{R}^n$ και επιλέγουμε $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $\|\vec{u}\|_\infty \leq 1$, $\|\vec{u}\|_2 \leq \sqrt{m}$ και $\|\vec{s}\|_{K(m)} = \sum_{i=1}^{n} u_i s_i$ (από το Λήμμα 3.2.3). Ορίζουμε $n_0 = 0$, και επαγωγικά,

$$n_j = \min\left\{ s\leq n : \sum_{i=n_{j-1}+1}^{s} u_i^2 > 1\right\} \tag{3.2.17}$$

για εκείνα τα j για τα οποία $n_{j-1} < n$. Αν για κάποιον J έχουμε ότι $n_{J-1} < n$ και $\sum_{n_{J-1}+1}^{n} u_i^2 \leq 1$, θέτουμε $n_J = n$ και σταματάμε.

Παρατηρούμε ότι, αν $J > 1$,

$$m \geq \|\vec{u}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{n_{j-1}+1}^{n_j} u_i^2 > J - 1 + \sum_{n_{J-1}+1}^{n} u_i^2 \geq J-1, \tag{3.2.18}$$

και άρα $J\leq m$, ενώ αν $J=1$ τότε πάλι $J\leq m$. Τα σύνολα $B_j = \{n_{j-1}+1,\ldots,n_j\}$, $j=1,\ldots,J$, είναι ξένα. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i\in B_j} u_i^2 = \sum_{n_{j-1}+1}^{n_j} u_i^2 + u_{n_j}^2 \leq 1 + \|\vec{u}\|_\infty \leq 2 \tag{3.2.19}$$

για όλα τα $j=1,\ldots,J$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|\vec{s}\|_{K(m)} &= \sum_{i=1}^{n} u_i s_i = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i\in B_j} u_i s_i \\
&\leq \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i\in B_j} u_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in B_j} s_i^2\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i\in B_j} s_i^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|\vec{s}\|_{P(m)},
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $J\leq m$. □

Χρειαζόμαστε επίσης μια στοιχειώδη ανισότητα των Paley και Zygmund (βλέπε [23, Κεφάλαιο 3]:

Λήμμα 3.2.6. *Έστω $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i X_i > \lambda \|\vec{s}\|_2\right) \geq \tfrac{1}{6}(1-\lambda^2)^2 \tag{3.2.20}$$

για κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\vec{s}\|_2 = 1$. Θέτουμε $Y := (s_1X_1 + \cdots + s_nX_n)^2$ και για κάθε $t \in (0,1)$ ορίζουμε $Z_t = \chi_{\{Y \geq t\,\mathbb{E}(Y)\}} \cdot Y$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$[\mathbb{E}(Z_t)]^2 \leq \mathbb{P}(Y \geq t\mathbb{E}(Y)) \cdot \mathbb{E}(Y^2). \tag{3.2.21}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(Z_t) + t\,\mathbb{E}(Y). \tag{3.2.22}$$

Άρα,

$$(1-t)^2[\mathbb{E}(Y)]^2 \leq \mathbb{P}(Y \geq t\mathbb{E}(Y)) \cdot \mathbb{E}(Y^2). \tag{3.2.23}$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\mathbb{E}(Y) = \|\vec{s}\|_2^2 = 1$ και

$$[\mathbb{E}(Y^2)] = \sum_{i=1}^{n} s_i^4 + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_i^2 s_j^2 \leq 3. \tag{3.2.24}$$

Θέτοντας $t = \lambda^2$ στην (3.2.23) και χρησιμοποιώντας την συμμετρία της $s_1X_1 + \cdots + s_nX_n$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Το βασικό αποτέλεσμα του Montgomery-Smith είναι το εξής.

Θεώρημα 3.2.7. *Για κάθε $t > 0$ και $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i X_i \geq c^{-1}\|\vec{s}\|_{K(t^2)}\right) \geq \frac{1}{6}\exp(-ct^2), \tag{3.2.25}$$

όπου $c = \frac{3}{2}\log 24$.

Απόδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει διαμέριση $(B_1, \ldots, B_k)$ του $\{1, \ldots, n\}$ με $k \leq n$, τέτοια ώστε

$$\|\vec{s}\|_{P(m)} = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i \in B_j} s_i^2\right)^{1/2}. \tag{3.2.26}$$

Τότε, από τα Λήμματα 3.2.5 και 3.2.6 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{2}\|\vec{s}\|_{K(m)}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{s}\|_{P(m)}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k\sum_{i\in B_j} s_iX_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^k\left(\sum_{i\in B_j} s_i^2\right)^{1/2}\right)\\
&\geq \prod_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\sum_{i\in B_j} s_iX_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i\in B_j} s_i^2\right)^{1/2}\right)\\
&\geq \left[\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right]^k\\
&\geq 24^{-m}.
\end{aligned}$$

Τώρα, για $t>0$, $t\in\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι $\|\vec{s}\|_{K(t^2)} \leq \|\vec{s}\|_{K(\lceil t^2\rceil)}$, και αν $t\geq\sqrt{2}$ τότε επίσης $\lceil t^2\rceil \leq \frac{3}{2}t^2$. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{2}\|\vec{s}\|_{K(t^2)}\right) \geq \exp\left(-\frac{3}{2}(\log 24)t^2\right) \tag{3.2.27}$$

για $t\geq\sqrt{2}$. Τώρα, για $t\leq\sqrt{2}$, έχουμε ότι

$$\|\vec{s}\|_{K(t^2)} \leq \|\vec{s}\|_{K(2)} \leq \sqrt{2}\|\vec{s}\|_2 = \sqrt{2}\|\vec{s}\|_{P(1)}, \tag{3.2.28}$$

και έτσι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{2}\|\vec{s}\|_{K(t^2)}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{s}\|_{P(1)}\right)\\
&\geq 24^{-1} \geq \exp\left(-\frac{3}{2}(\log 24)t^2\right)
\end{aligned}$$

για $\sqrt{2/3}\leq t\leq\sqrt{2}$ επίσης. Τέλος, για $0<t<1$ χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.2.4 και την ανισότητα Paley–Zygmund, σε συνδυασμό με την $\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^2 \leq e^{-ct^2}$ για $0\leq t\leq 1$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Από το Λήμμα 3.2.4, για $0\leq t\leq \|\vec{s}\|_2/\|\vec{s}\|_\infty$, έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{2}t\|\vec{s}\|_2\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n s_iX_i \geq \frac{1}{2}\|\vec{s}\|_{K(t^2)}\right) \geq \frac{1}{6}e^{-ct^2}, \tag{3.2.29}$$

όπου $c>0$ η σταθερά στο Θεώρημα 3.2.7. $\square$

Παρατήρηση 3.2.8. Το Θεώρημα 3.2.1 γενικεύεται στο πλαίσιο των ανεξάρτητων φραγμένων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών $X_1,\ldots,X_m$ με κατανομή μ.

Η απόδειξη υπάρχει στο [26] (δείτε ακόμα το [15, Λήμμα 4.12]): Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, η ανισότητα

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i X_i \geq \tfrac{1}{2} t \, \|\vec{s}\|_2\right) \geq e^{-C_\mu t^2} \tag{3.2.30}$$

ισχύει για κάθε $t > 0$ με $t \leq \|\vec{s}\|_2 \,/\, \|\vec{s}\|_\infty$, όπου η σταθερά $C_\mu > 0$ εξαρτάται από το μ.

Κεφάλαιο 4

Το βασικό πιθανοθεωρητικό λήμμα

Σε αυτό το Κεφάλαιο αποδεικνύουμε το βασικό πιθανοθεωρητικό λήμμα της διατριβής: Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ ώστε, αν $n \geq n_0(\gamma)$ και $4\log n/n \leq \alpha \leq \log 2$, τότε υπάρχει $\varepsilon \leq 3\log n/n$ για το οποίο

$$\min_{\partial F^{\alpha-\varepsilon}\cap\gamma C} q(\vec{x}) \geq \exp(-\alpha n).$$

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς: Για κάθε $\vec{x} \in C$, θέτουμε

$$q(\vec{x}) := \inf\left\{\mathrm{Prob}\big(\vec{X} \in H\big) : \vec{x} \in H,\ H \text{ κλειστός ημίχωρος}\right\}.$$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(1+x)\log(1+x)+\frac{1}{2}(1-x)\log(1-x)$ στο $[-1,1]$, θέτουμε $F(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ και για δοσμένο $0 < \beta < \log 2$ ορίζουμε

$$F^\beta = \{\vec{x} \in (-1,1)^n : F(\vec{x}) \leq \beta\}.$$

4.1 Η μέθοδος των μεγάλων αποκλίσεων

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες ± 1 τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, με κατανομή $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$\varphi(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \cosh(t) \tag{4.1.1}$$

(την κοινή ροπογεννήτρια των X_i) και

$$\psi(t) := \log\varphi(t) = \log\cosh(t). \tag{4.1.2}$$

Τέλος, ορίζουμε $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) := \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \tag{4.1.3}$$

Στην §2.1 είδαμε ότι η h είναι γνησίως κυρτή και γνησίως αύξουσα στο $[0,1)$. Θυμηθείτε επίσης ότι

$$f(x) = -\psi(h(x)) + x\,h(x) \quad \text{και} \quad f'(x) = h(x). \tag{4.1.4}$$

Δοθέντων $x_1, \dots, x_n$ στο $(-1,1)$, ορίζουμε

$$t_i := h(x_i) \qquad (i \leq n). \tag{4.1.5}$$

Στη συνέχεια, τα t_i και x_i θα συνδέονται πάντα με αυτήν την σχέση. Υπενθυμίζουμε ότι

$$x_i = \psi'(t_i) = \tanh(t_i) \qquad (i \leq n). \tag{4.1.6}$$

Ορίζουμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$, θέτοντας

$$\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}(A) := \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^n t_i X_i\right)\right] \prod_{i=1}^n [\varphi(t_i)]^{-1} \tag{4.1.7}$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$.

Λήμμα 4.1.1. *Στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n})$, οι τυχαίες μεταβλητές $t_1X_1, \dots, t_nX_n$ είναι ανεξάρτητες και έχουν μέση τιμή, διασπορά και απόλυτη κεντρική τρίτη ροπή που δίνονται από τις*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_n}[t_iX_i] &= t_i x_i,\\
\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_n}\left[t_i^2(X_i - x_i)^2\right] &= \frac{t_i^2}{\cosh^2(t_i)},\\
\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_n}\left[|t_i(X_i - x_i)|^3\right] &= |t_i|^3\frac{\cosh(2t_i)}{\cosh^4(t_i)},
\end{aligned}$$

αντίστοιχα.

Απόδειξη. Όλοι οι ισχυρισμοί επαληθεύονται με απλές πράξεις. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_n}[t_iX_i] &= t_i\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}(X_i = 1) - t_i\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}(X_i = -1)\\
&= t_i \cdot \frac{e^{t_i}}{2\cosh(t_i)} - t_i \cdot \frac{e^{-t_i}}{2\cosh(t_i)}\\
&= t_i \tanh(t_i) = t_i x_i,
\end{aligned}$$

και, εντελώς ανάλογα,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_n}[t_i^2(X_i - x_i)^2] &= t_i^2(1-x_i)^2 \cdot \frac{e^{t_i}}{2\cosh(t_i)} + t_i^2(1+x_i)^2 \cdot \frac{e^{-t_i}}{2\cosh(t_i)}\\
&= t_i^2 + t_i^2x_i^2 - 2x_it_i^2\tanh(t_i)\\
&= t_i^2 - t_i^2\tanh^2(t_i) = \frac{t_i^2}{\cosh^2(t_i)}.
\end{aligned}$$

Η ανεξαρτησία των $t_1X_1, \dots, t_nX_n$ ελέγχεται επίσης εύκολα. □

Ορίζουμε

$$\sigma_n^2 := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{x_1,\ldots,x_n}\left[t_i^2(X_i-x_i)^2\right] = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{\cosh^2(t_i)} \tag{4.1.8}$$

και

$$S_n := \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i), \tag{4.1.9}$$

και θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής $F_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της τυχαίας μεταβλητής S_n ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_{x_1,\ldots,x_n}$:

$$F_n(x) := \mathbb{P}_{x_1,\ldots,x_n}(S_n\leq x) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{4.1.10}$$

Με μ_n συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$\mu_n(-\infty,x] := F_n(x) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{4.1.11}$$

Τέλος, θέτουμε

$$\rho_n^{(3)} := \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{x_1,\ldots,x_n}\left[|t_i(X_i-x_i)|^3\right] = \sum_{i=1}^n |t_i|^3\frac{\cosh(2t_i)}{\cosh^4(t_i)}. \tag{4.1.12}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\cosh(2y)\leq 2\cosh^2(y)$, βλέπουμε ότι

$$\frac{\rho_n^{(3)}}{\sigma_n^2} \leq 2\max_{1\leq i\leq n}|t_i|. \tag{4.1.13}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\mathbb{E}_{x_1,\ldots,x_n}[S_n]=0 \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}_{x_1,\ldots,x_n}[S_n]=1.$$

Από την (4.1.7) έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right) = \mathbb{E}_{x_1,\ldots,x_n}\left[\mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\right)\cdot\exp\left(-\sum_{i=1}^n t_iX_i\right)\right]\prod_{i=1}^n\varphi(t_i).$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις (4.1.2), (4.1.9) και (4.1.11), συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right) = \left[\int_{[0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u)\right]\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^n[\psi(t_i)-t_ix_i]\right).$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και τις (4.1.4), (4.1.5) καταλήγουμε στην

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right) = \left[\int_{[0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u)\right]\cdot\exp\left(-\sum_{i=1}^n f(x_i)\right). \tag{4.1.14}$$

Θεωρούμε την τυπική κανονική πυκνότητα

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.1.15}$$

και γράφουμε

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.1.16}$$

για την τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής και μ για το τυπικό κανονικό μέτρο πιθανότητας: $\mu(-\infty, x] := \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα των Berry–Esseen [12, Θεώρημα XVI.5.2]:

Θεώρημα 4.1.2 (Berry–Esseen). *Έστω $Y_1, \ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, $\mathbb{E}(Y_i^2) = a_i^2$ και $\mathbb{E}(|Y_i|^3) = b_i$ για $i = 1, \ldots, n$. Θέτουμε*

$$\sigma_n^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \quad \text{και} \quad \rho_n^{(3)} = b_1 + \cdots + b_n.$$

Αν F_n είναι η κατανομή του κανονικοποιημένου αθροίσματος

$$S_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/\sigma_n,$$

τότε

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq 6 \frac{\rho_n^{(3)}}{\sigma_n^2}$$

για κάθε x. □

Από το Θεώρημα 4.1.2 και το Λήμμα 4.1.1, έχουμε

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq 6\, \frac{\rho_n^{(3)}}{\sigma_n^3} \tag{4.1.17}$$

για κάθε x, επομένως η (4.1.13) μας δίνει

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{12}{\sigma_n} \max_{1 \leq i \leq n} |t_i| \tag{4.1.18}$$

για κάθε x.

Λήμμα 4.1.3. *Ισχύει η ανισότητα*

$$\left| \int_{(0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\, d\mu_n(u) - \int_{(0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\, d\mu(u) \right| \leq \frac{24}{\sigma_n} \max_{1 \leq i \leq n} |t_i|.$$

Απόδειξη. Αφού

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\, d\mu_n(u) &= \int_0^{\infty} \mu_n\left(\{u \colon e^{-\sigma_n u}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(u) \geq r\}\right) dr \\ &= \int_0^1 \mu_n\left(0, -\sigma_n^{-1} \log r\right] dr \\ &= \int_0^1 \left[F_n\left(-\sigma_n^{-1} \log r\right) - F_n(0)\right] dr, \end{aligned}$$

και όμοια
$$\int_0^\infty e^{-\sigma_n u}\,d\mu(u) = \int_0^1 \left[\Phi\left(-\sigma_n^{-1}\log r\right) - \Phi(0)\right]\,dr,$$
το ζητούμενο προκύπτει από την (4.1.18). □

Θα χρειαστούμε ένα λήμμα για την τυπική κανονική πυκνότητα (οι συγκεκριμένες εκτιμήσεις αποδεικνύονται στην εργασία [34]).

Λήμμα 4.1.4. *Για κάθε $x>0$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$\frac{1}{x}\,m_1(x)\,e^{-x^2/2} \le \int_x^\infty \phi(u)\,du \le \frac{1}{x}\,m_2(x)\,e^{-x^2/2} \qquad (x>0), \tag{4.1.19}$$

όπου

$$m_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2x}{x+\sqrt{x^2+4}} \qquad \textit{και} \qquad m_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{4x}{3x+\sqrt{x^2+8}}. \tag{4.1.20}$$

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Θέτουμε

$$g(x) = e^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt \qquad \text{και} \qquad g_+(x) = \frac{4}{3x+\sqrt{x^2+8}}. \tag{4.1.21}$$

Ελέγχουμε ότι $g'(x) = xg(x)-1$ και $g_+'(x) \le xg_+(x)-1$. Συνεπώς, για την συνάρτηση $h := g_+ - g$ έχουμε $h'(x) \le xh(x)$ για κάθε $x>0$. Παρατηρούμε ότι

$$g(x) \le \frac{1}{x}e^{x^2/2}\int_x^\infty te^{-t^2/2}dt = \frac{1}{x} \tag{4.1.22}$$

για κάθε $x>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$. Με απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι $h(0) > 0$. Έπεται ότι $h\ge 0$ στο $[0,+\infty)$: αν έπαιρνε και αρνητικές τιμές, θα είχε κάποιο σημείο ελαχίστου y στο οποίο θα είχαμε $0 = h'(y) \le yh(y) < 0$.

Το παραπάνω επιχείρημα αποδεικνύει την δεξιά ανισότητα στην (4.1.19). Για την αριστερή ανισότητα δουλεύουμε με ανάλογο τρόπο. □

Αφού

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_n u}\,d\mu(u) = \frac{e^{\sigma_n^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(\sigma_n+u)^2/2}\,du = e^{\sigma_n^2/2}\int_{\sigma_n}^\infty \phi(u)\,du,$$

έπεται ότι

$$\frac{m_1(\sigma_n)}{\sigma_n} \le \int_0^\infty e^{-\sigma_n u}\,d\mu(u) \le \frac{m_2(\sigma_n)}{\sigma_n}. \tag{4.1.23}$$

Συνδυάζοντας την (4.1.23) με το Λήμμα 4.1.3, παίρνουμε τις εκτιμήσεις

$$\frac{m_1(\sigma_n)}{\sigma_n} - \frac{24}{\sigma_n}\max_{1\le i\le n}|t_i| \le \int_{(0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u) \le \frac{m_2(\sigma_n)}{\sigma_n} + \frac{24}{\sigma_n}\max_{1\le i\le n}|t_i|. \tag{4.1.24}$$

Τότε, από την (4.1.14) προκύπτουν οι εξής ανισότητες:

Θεώρημα 4.1.5. *Εστω* $x_1,\dots,x_n\in(-1,1)$ *και έστω* $t_i=h(x_i)$, $i=1,\dots,n$. *Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right)\geq \frac{1}{\sigma_n}\,e^{-nF(\vec{x})}\left(m_1(\sigma_n)-24\max_{1\leq i\leq n}|t_i|\right) \tag{4.1.25}$$

και

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right)\leq \frac{1}{\sigma_n}\,e^{-nF(\vec{x})}\left(m_2(\sigma_n)+48\max_{1\leq i\leq n}|t_i|\right). \tag{4.1.26}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος παράγοντας στο δεξιό μέλος της (4.1.14) ισούται με

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u)\geq \int_{(0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u).$$

Επομένως, η πρώτη ανισότητα (4.1.25) προκύπτει αν συνδυάσουμε τις (4.1.14) και (4.1.24). Για την δεύτερη ανισότητα, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u)=\int_{(0,\infty)} e^{-\sigma_n u}\,d\mu_n(u)+\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}(S_n=0),$$

και κατόπιν, χρησιμοποιώντας την (4.1.18), βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}(S_n=0)\leq F_n(\epsilon)-F_n(-\epsilon)\leq \Phi(\epsilon)-\Phi(-\epsilon)+\frac{24}{\sigma_n}\max_{1\leq i\leq n}|t_i|$$

για κάθε $\epsilon>0$. Άρα,

$$\mathbb{P}_{x_1,\dots,x_n}(S_n=0)\leq \frac{24}{\sigma_n}\max_{1\leq i\leq n}|t_i|, \tag{4.1.27}$$

και η δεύτερη ανισότητα (4.1.26) προκύπτει τώρα αν συνδυάσουμε τις (4.1.14), (4.1.24) και (4.1.27). □

Πόρισμα 4.1.6. *Εστω* $\delta\in(0,1)$. *Αν* $x_1,\dots,x_n\in(-\delta,\delta)$ *και* $t_i=h(x_i)$, $i=1,\dots,n$, *τότε*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right)&\geq \frac{1}{\sqrt{nF(\vec{x})}}\,e^{-nF(\vec{x})}\\ &\quad\times\frac{\sqrt{f(\delta)}}{h(\delta)}\left(m_1\Big((\cosh(h(\delta)))^{-1}\sqrt{2nF(\vec{x})}\Big)-24\,h(\delta)\right).\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-x_i)\geq 0\right)&\leq \frac{1}{\sqrt{nF(\vec{x})}}\,e^{-nF(\vec{x})}\\ &\quad\times\frac{\cosh(h(\delta))}{\sqrt{2}}\left(m_2\Big(h(\delta)(f(\delta))^{-1/2}\sqrt{nF(\vec{x})}\Big)+48\,h(\delta)\right).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.1.8. Η συνάρτηση

$$g(t) = \frac{f(\tanh(t))}{t^2} = -\frac{1}{t^2}\log\cosh(t) + \frac{\tanh(t)}{t} \tag{4.1.28}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\infty)$ και $\lim_{t\to 0} g(t) = \frac{1}{2}$. Έπεται ότι

$$\frac{f(\delta)}{h^2(\delta)}t_i^2 \leq f(x_i) \leq \frac{1}{2}t_i^2 \tag{4.1.29}$$

για κάθε $i \leq n$ (χρησιμοποιούμε εδώ και το γεγονός ότι η h είναι αύξουσα στο $[0,1)$, οπότε από την $0 < x_i < \delta$ έχουμε $h(x_i) < h(\delta)$). Αφού $1 \leq \cosh^2(t_i) \leq \cosh^2(h(\delta))$, από την (4.1.8) παίρνουμε

$$\frac{f(\delta)}{h^2(\delta)}\,\sigma_n^2 \leq nF(\vec{x}) \leq \frac{\cosh^2(h(\delta))}{2}\,\sigma_n^2. \tag{4.1.30}$$

Τέλος, έχουμε

$$\max_{1\leq i\leq n} |t_i| \leq h(\delta). \tag{4.1.31}$$

Εισάγοντας αυτές τις εκτιμήσεις στο συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.1.5, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι συναρτήσεις m_1 και m_2 είναι αύξουσες στο $[0,\infty)$, ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Σημείωση: Το άνω φράγμα της (4.1.26), καθώς και η αντίστοιχη ανισότητα του Πορίσματος 4.1.6, δεν θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια και δίνονται εδώ μόνο για λόγους πληρότητας. Παρατηρήστε όμως ότι τα φράγματα αυτά δίνουν ισχυρότερη πληροφορία απ' ότι το Λήμμα 2.2.4.

4.2 Το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα

Θα εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.1.6 στην εξής μορφή:

Πρόταση 4.2.1. *Υπάρχουν $\gamma \in (0,1)$ και $k = k(\gamma) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν τα $x_1,\dots,x_n \in (-\gamma,\gamma)$ ικανοποιούν την $\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq k(\gamma)$, και αν $t_i = h(x_i)$, $i = 1,\dots,n$, τότε*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \frac{\sqrt{f(\gamma)}}{10\,h(\gamma)} \times \frac{1}{\sqrt{nF(\vec{x})}}\,e^{-nF(\vec{x})}. \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Πρώτα επιλέγουμε $\gamma \in (0,1)$ έτσι ώστε $24h(\gamma) \leq (2\sqrt{2\pi})^{-1}$. Αυτό είναι δυνατόν, διότι $\lim_{\delta\to 0} h(\delta) = 0$.

Ξέρουμε ότι η m_1 αυξάνει στο $(2\pi)^{-1/2}$ καθώς $x \to \infty$. Άρα, υπάρχει $k = k(\gamma) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$m_1\left(\frac{\sqrt{2k(\gamma)}}{\cosh\left(h(\gamma)\right)}\right) \geq \frac{5}{6\sqrt{2\pi}}. \tag{4.2.2}$$

Από τον πρώτο ισχυρισμό του Πορίσματος 4.1.6, βλέπουμε ότι, για όλα τα $x_i \in (-\gamma, \gamma)$ που ικανοποιούν την $nF(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq k(\gamma)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) &\geq \frac{1}{\sqrt{nF(\vec{x})}}\, e^{-nF(\vec{x})} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{f(\gamma)}}{h(\gamma)} \left(m_1\left(\frac{\sqrt{2k(\gamma)}}{\cosh(h(\gamma))}\right) - 24\,h(\gamma)\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{nF(\vec{x})}}\, e^{-nF(\vec{x})} \times \frac{\sqrt{f(\gamma)}}{h(\gamma)} \left(\frac{5}{6\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η (4.2.1). □

Ορισμός 4.2.2. Στη συνέχεια σταθεροποιούμε μια σταθερά $\gamma \in (0,1)$ που ικανοποιεί την Πρόταση 4.2.1 καθώς και την $\gamma \leq \tanh(c^{-1})$, όπου c είναι η απόλυτη σταθερά στο Θεώρημα 3.2.1. Απλός έλεγχος των σταθερών που υπεισέρχονται στις αποδείξεις της §3.2 δείχνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε

$$\gamma = \tanh\left(\frac{1}{48\sqrt{2\pi}}\right). \tag{4.2.3}$$

Θεώρημα 4.2.3. *Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ ώστε, αν $n \geq n_0(\gamma)$ και $4\log n/n \leq \alpha \leq f(\gamma)$, τότε υπάρχει $\varepsilon \leq 3\log n/n$ για το οποίο*

$$\min_{\partial(F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C)} q(\vec{x}) \geq \exp(-\alpha n). \tag{4.2.4}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\varepsilon = 3\log n/n$. Πρέπει να ελέγξουμε ότι $q(\vec{x}) \geq \exp(-\alpha n)$ για κάθε $\vec{x}$ στο $\partial(F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C)$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}\big(\vec{X} \in H\big) \geq \exp(-\alpha n) \tag{4.2.5}$$

για κάθε ημίχωρο H που εφάπτεται στο $F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C$. Σταθεροποιούμε λοιπόν έναν τέτοιον ημίχωρο H.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $\vec{x}$ στο σύνορο του H τέτοιο ώστε $F(\vec{x}) = \alpha - \varepsilon$ (δηλαδή, $\vec{x} \in \partial(F^{\alpha-\varepsilon})$).

Απόδειξη. Πράγματι: αν το σύνορο ∂H του H ακουμπάει το $F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C$ σε κάποιο σημείο $\vec{x}$ του $\partial(F^{\alpha-\varepsilon})$, τότε το $\vec{x}$ έχει αυτήν την ιδιότητα. Διαφορετικά, ο H περιέχει κάποιο σημείο $\vec{y}$ (στο σύνορο του γC) για το οποίο $F(\vec{y}) < \alpha - \varepsilon$. Υπάρχει έδρα $E(\vec{y})$ του γC (με την ελάχιστη δυνατή διάσταση) στην οποία ανήκει το $\vec{y}$. Οι κορυφές της $E(\vec{y})$ είναι κορυφές του γC, οπότε δεν ανήκουν στο $F^{\alpha-\varepsilon}$ (αν $\vec{z}$ είναι κορυφή του γC τότε $F(\vec{z}) = f(\gamma) > \alpha - \varepsilon$, από την υπόθεση). Αν λοιπόν ενώσουμε το $\vec{y}$ με οποιαδήποτε από τις κορυφές της $E(\vec{y})$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής βρίσκουμε $\vec{x} \in E(\vec{y})$ που ικανοποιεί την $F(\vec{x}) = \alpha - \varepsilon$. Αφού $E(\vec{y}) \subset H$, έπεται ο ισχυρισμός. □

Αφού το ∂H είναι εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του $F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C$, μπορούμε να γράψουμε

$$H = \big\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \vec{t}_*, \vec{y} - \vec{x}\rangle \geq 0\big\} \tag{4.2.6}$$

για κάποια $\vec{t}_* \neq \vec{0}$ και $\vec{x} \in \partial(F^{\alpha-\varepsilon}) \cap \gamma C$.

Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Αφού το $\vec{x}$ ανήκει στο $\partial(F^{\alpha-\varepsilon}) \cap \gamma C$ (και δεν είναι κορυφή του γC), υπάρχει $n_1 \in \{1,\dots,n\}$ τέτοιος ώστε $x_{n_1} < \gamma$ και $x_{n_1+1} = \gamma$. Θέτουμε $\vec{t} = (t_1,\dots,t_n) = n\nabla F(\vec{x})$ και γράφουμε $\vec{t}_* = (t_1^*,\dots,t_n^*)$ για ένα κάθετο διάνυσμα του ∂H το οποίο θα επιλέξουμε ως εξής: Αν $n_1 = n$, δηλαδή $x_i < \gamma$ για κάθε i, τότε μπορούμε να πάρουμε $\vec{t}_* = \vec{t}$. Αν $n_1 < n$, δηλαδή $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n_1} < \gamma = x_{n_1+1} = \cdots = x_n$, τότε το $\vec{t}_*$ πρέπει να ανήκει στον κάθετο κώνο του $F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C$ στο $\vec{x}$. Με τον συμβολισμό του [32],

$$\vec{t}_* \in N(\vec{x}, F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C) = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \vec{v}, \vec{y} - \vec{x}\rangle \leq 0 \ \forall \vec{y} \in F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C\right\}. \tag{4.2.7}$$

Σύμφωνα με το [32, Θεώρημα 2.2.1],

$$N(\vec{x}, F^{\alpha-\varepsilon} \cap \gamma C) = N(\vec{x}, F^{\alpha-\varepsilon}) + N(\vec{x}, \gamma C). \tag{4.2.8}$$

Όμως,

$$N(\vec{x}, F^{\alpha-\varepsilon}) = \{\lambda \nabla F(\vec{x}) \colon \lambda \geq 0\} \tag{4.2.9}$$

και

$$\begin{aligned} N(\vec{x}, \gamma C) &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \vec{v}, \vec{y} - \vec{x}\rangle \leq 0 \ \forall \vec{y} \in \gamma C\} \\ &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \colon v_1 = \cdots v_{n_1} = 0,\ v_{k+1},\dots,v_n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε το $\vec{t}_*$ έτσι ώστε

$$t_i^* = t_i = f'(x_i) \quad \text{αν} \quad i \leq n_1 \quad \text{και} \quad t_i^* \geq t_i = f'(\gamma) \quad \text{αν} \quad i > n_1. \tag{4.2.10}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n t_i^*(X_i - x_i) \geq 0\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i(X_i - x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n} t_i^*(X_i - \gamma) \geq 0\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \ \mathbb{P}\left(\sum_{i=n_1+1}^{n} t_i^*(X_i - \gamma) \geq 0\right). \end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε τη δεύτερη πιθανότητα στο τελευταίο γινόμενο, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.1.1: έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=n_1+1}^{n} t_i^*(X_i - \gamma) \geq 0\right) \geq \exp\left(-(n-n_1)f(\gamma) - \tfrac{3}{2}\log(n-n_1) - c_1(\gamma)\right). \tag{4.2.11}$$

Για να εκτιμήσουμε την πρώτη πιθανότητα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: $\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i) \geq k(\gamma)$. Μπορούμε τότε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.2.1 για να εκτιμήσουμε την πρώτη πιθανότητα:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i) - \tfrac{1}{2}\log\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i) - c_2(\gamma)\right). \tag{4.2.12}$$

Συνδυάζοντας τις (4.2.11) και (4.2.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^*(X_i - x_i) \geq 0\right) &\geq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i) - \tfrac{1}{2}\log\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i)\right)\\ &\quad\times \exp\left(-(n-n_1)f(\gamma) - \tfrac{3}{2}\log(n-n_1) - c(\gamma)\right)\\ &\geq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - 2\log n - c(\gamma)\right)\\ &= \exp\left(-(\alpha-\varepsilon)n - 2\log n - c(\gamma)\right)\\ &\geq \exp(-\alpha n),\end{aligned}$$

αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να έχουμε $\log n \geq c(\gamma)$.

2η Περίπτωση: $\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i) < k(\gamma)$. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.2.1 για να εκτιμήσουμε την πρώτη πιθανότητα. Έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_iX_i \geq c^{-1}\theta\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^2}\right), \tag{4.2.13}$$

αν θέσουμε

$$\theta = c\,\frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_ix_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^2}}. \tag{4.2.14}$$

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.2.1 πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$\theta \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^2}}{\max_{1\leq i\leq n_1} t_i}. \tag{4.2.15}$$

Η συνάρτηση h είναι κυρτή στο $[0,1)$ και η παράγωγος της στο $x=0$ ισούται με 1. Επομένως, $x \leq h(x)$ για κάθε $x \in [0,1)$. Έπεται ότι $\sum_{i=1}^{n_1} t_ix_i \leq \sum_{i=1}^{n_1} t_i^2$. Άρα,

$$\theta \leq c\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^2} \leq c\,h(\gamma)\,\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^2}}{\max\limits_{1\leq i\leq n_1} t_i}, \tag{4.2.16}$$

αφού ισχύει και η $t_i = h(x_i) \leq h(\gamma)$ για κάθε i, από τη μονοτονία της h. Από την (4.2.3) και τη μονοτονία της h, έχουμε $c\,h(\gamma) \leq 1$ οπότε το θ ικανοποιεί την συνθήκη του Θεωρήματος 3.2.1. Από το Θεώρημα 3.2.1 και την (4.2.13) παίρνουμε το φράγμα

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq c^{-1}e^{-c\theta^2} \geq \frac{1}{c}\exp\left(-c^3\,\frac{h^2(\gamma)}{f(\gamma)}\,\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i)\right), \tag{4.2.17}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την πρώτη ανισότητα στην (4.2.16) και την (4.1.29). Τότε, οι (4.2.17) και (4.2.11) δίνουν το φράγμα

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right)\\
&\quad \geq \exp\left(-(n-n_1)f(\gamma) - \tfrac{3}{2}\log(n-n_1) - c_1(\gamma) - c_3(\gamma)\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i) - c_4(\gamma)\right)\\
&\quad \geq \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \tfrac{3}{2}\log(n-n_1) - c_1(\gamma) - |1-c_3(\gamma)|k(\gamma) - c_4(\gamma)\right)\\
&\quad = \exp\left(-(\alpha-\varepsilon)n - \tfrac{3}{2}\log(n-n_1) - C(\gamma)\right)\\
&\quad \geq \exp\left(-\alpha n\right),
\end{aligned}$$

αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να έχουμε $\log n \geq C(\gamma)$.

Ελέγξαμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, ισχύει η

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^*(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \exp\big(-\alpha n\big) \tag{4.2.18}$$

για $n \geq n_0(\gamma)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

4.3 Ένα τελευταίο κάτω φράγμα

Σε αυτήν την Παράγραφο αποδεικνύουμε ένα κάτω φράγμα για την ποσότητα $q_-(F^\alpha)$, το οποίο απαιτείται για την απόδειξη του Θεωρήματος των Dyer, Füredi και McDiarmid της §2.2. Η απόδειξη που δίνουμε είναι ως ένα βαθμό διαφορετική από αυτήν της εργασίας [10], και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να γενικευτεί στο πλαίσιο των ανεξάρτητων φραγμένων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_m$ με κατανομή μ.

Πρόταση 4.3.1. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, και για κάθε $\alpha \in (0, \log 2)$ υπάρχει $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n(\varepsilon)$ να ισχύει*

$$q_-(F^\alpha) \geq \exp\big(-(1+\varepsilon)\alpha n - \varepsilon n\big). \tag{4.3.1}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}\big(\vec{X} \in H\big) \geq \exp\big(-(1+\varepsilon)\alpha n - \varepsilon n\big) \tag{4.3.2}$$

για κάθε κλειστό ημίχωρο H που το σύνορό του στηρίζει το F^α. Τώρα, αν H είναι ένας κλειστός ημίχωρος που στηρίζει το F^α, υπάρχει $\vec{x} \in \partial(F^\alpha)$ ώστε

$$\mathbb{P}\big(\vec{X} \in H\big) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \qquad (t_i := h(x_i),\ 1 \leq i \leq n).$$

Σταθεροποιούμε αυτό το $\vec{x}$ για τη συνέχεια της απόδειξης. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ που ικανοποιεί τα εξής:

(i) $0 < \delta < \min\left\{\gamma, \psi'(\tfrac{1}{4})\right\}$, όπου το γ ικανοποιεί τον Ορισμό 4.2.2.

(ii) Αν $|x| < \delta$ τότε $|x| \leq 2|h(x)|$ και $x^2 \leq 4f(x)$ (αυτό είναι δυνατόν, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$).

(iii) Αν $1-\delta < x < 1$ τότε $P(X \geq x) \geq \exp(-f(x)(1+\varepsilon))$ (αυτό είναι δυνατόν, διότι $\lim_{x\to 1} \frac{\mathbb{P}(X\geq x)}{\exp(-f(x))} = 1$).

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1(\vec{x}) := \{i : x_i < \delta\} \\ I_2 &= I_2(\vec{x}) := \{i : \delta \leq x_i \leq 1-\delta\}, \\ I_3 &= I_3(\vec{x}) := \{i : x_i > 1-\delta\} \end{aligned}$$

και ορίζουμε

$$P_j = P_j(\vec{x}) := \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I_j} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \qquad (j = 1,2,3).$$

Λόγω ανεξαρτησίας έχουμε

$$\mathbb{P}\big(\vec{X} \in H\big) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq P_1P_2P_3.$$

Μελετάμε τις πιθανότητες P_j χωριστά.

Πρώτα εξετάζουμε το I_3. Λόγω ανεξαρτησίας μπορούμε να γράψουμε

$$P_2 = \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I_3} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \prod_{i\in I_3} \mathbb{P}\left(X_i \geq x_i\right). \tag{4.3.3}$$

Από την επιλογή του δ,

$$\mathbb{P}\left(X_i \geq x_i\right) \geq e^{-f(x_i)(1+\varepsilon)}$$

για κάθε $i \in I_3$, οπότε παίρνουμε αμέσως το εξής:

Λήμμα 4.3.2. *Έχουμε*

$$P_3 \geq \exp\left(-(1+\varepsilon)\sum_{i\in I_3} f(x_i)\right). \tag{4.3.4}$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το I_1. Από την Πρόταση 4.2.1 και από την επιλογή του δ, αν το $\vec{x}$ ικανοποιεί την $\sum_{i\in I_1} f(x_i) \geq k(\gamma)$, τότε

$$P_1 = \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \exp\left(-\sum_{i\in I_1} f(x_i) - \tfrac{1}{2}\log\sum_{i\in I_1} f(x_i) - c\right), \tag{4.3.5}$$

όπου η c εξαρτάται μόνο από το γ.

Αν πάλι $\sum_{i\in I_1} f(x_i) < k(\gamma)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Montgomery-Smith για να εκτιμήσουμε την P_1. Έχουμε

$$P_1 = \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i\in I_1} t_iX_i \geq \tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\sum_{i\in I_1} t_i^2}\right), \tag{4.3.6}$$

με

$$\theta = 2\,\frac{\sum_{i\in I_1} t_i x_i}{\sqrt{\sum_{i\in I_1} t_i^2}}. \tag{4.3.7}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Montgomery-Smith πρέπει πρώτα να ελέγξουμε ότι

$$\theta \leq \frac{\sqrt{\sum_{i\in I_1} t_i^2}}{\max_{i\in I_1} t_i}. \tag{4.3.8}$$

Από την επιλογή του δ, έχουμε $|x| \leq 2\,|h(x)|$ για κάθε $x \in (-\delta,\delta)$. Άρα, $\sum_{i\in I_1} t_i x_i \leq 2\sum_{i\in I_1} t_i^2$, και συνεπώς,

$$\theta \leq 4\sqrt{\sum_{i\in I_1} t_i^2} \leq 4\,h(\delta)\,\frac{\sqrt{\sum_{i\in I_1} t_i^2}}{\max\limits_{i\in I_1} t_i}, \tag{4.3.9}$$

αν πάρουμε υπ' όψιν μας και την $t_i = h(x_i) \leq h(\delta)$ που ισχύει για κάθε i, από τη μονοτονία της h. Αφού το $\delta \leq \psi'(\frac{1}{4})$ είναι αρκετά μικρό, έχουμε $h(\delta) \leq \frac{1}{4}$ και το θ ικανοποιεί την (4.3.8).

Από την (4.3.2) και από το θεώρημα του Montgomery-Smith παίρνουμε την ανισότητα

$$P_1 \geq e^{-C\theta^2},$$

η οποία, σε συνδυασμό με την ανισότητα Cauchy-Schwarz, την (4.3.7) και την δεύτερη υπόθεση για το δ, δίνει το φράγμα

$$\begin{aligned} P_1 &\geq \exp\Bigg(-4C\sum_{i\in I_1} x_i^2\Bigg) \geq \exp\Bigg(-16C\sum_{i\in I_1} f(x_i)\Bigg) \\ &\geq \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_1} f(x_i) - |1-16C|\,k(\gamma)\Bigg) \end{aligned}$$

στην περίπτωση που $\sum_{i\in I_1} f(x_i) < k(\gamma)$. Συνδυάζοντας με την (4.3.5) παίρνουμε την εξής εκτίμηση για την P_1:

Λήμμα 4.3.3. *Έχουμε*

$$P_1 \geq \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_1} f(x_i) - c_1\log|I_1| - c_2\Bigg), \tag{4.3.10}$$

όπου οι $c_1, c_2 > 0$ εξαρτώνται μόνο από τα δ,γ.

Τέλος, δίνουμε εκτίμηση για την P_2. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_2 = \{1,\dots,k\}$ για κάποιον $k \leq n$. Θυμηθείτε ότι $t_i = h(x_i)$ για κάθε i, και ότι αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με την $x_i = \psi'(t_i)$ για κάθε i. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας $P_{x_1,\dots,x_k}$ στον $(\Omega,\mathcal{F})$, με

$$P_{x_1,\dots,x_k}(A) := \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_A \cdot e^{\sum_{i\in I_2}[t_iX_i - \psi(t_i)]}\Big) \qquad (A \in \mathcal{F}).$$

Είδαμε ότι, κάτω από το $P_{x_1,\dots,x_k}$, οι τυχαίες μεταβλητές $t_1X_1,\dots,t_kX_k$ είναι ανεξάρτητες, και

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_k}(t_iX_i) &= t_i\psi'(t_i) = t_ix_i,\\ \mathbb{E}_{x_1,\dots,x_k}\big(|t_i(X_i-x_i)|^2\big) &= t_i^2/\cosh^2(t_i),\\ \mathbb{E}_{x_1,\dots,x_k}\big(|t_i(X_i-x_i)|^3\big) &= |t_i|^3\cosh(2t_i)/\cosh^4(t_i).\end{aligned}$$

Θέτουμε $\sigma_i^2 := t_i^2\psi''(t_i)$,

$$s_k^2 := \sum_{i\in I_2}\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_k}\big(|t_i(X_i-x_i)|^2\big) = \sum_{i\in I_2} t_i^2/\cosh^2(t_i) = \sum_{i\in I_2}\sigma_i^2$$

και

$$S_k := \sum_{i\in I_2} t_i(X_i-x_i),$$

και ορίζουμε $F_k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S_k/s_k κάτω από το $P_{x_1,\dots,x_k}$: $F_k(x) := P_{x_1,\dots,x_k}(S_k\le xs_k)$ $(x\in\mathbb{R})$. Με μ_k συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\mu_k(-\infty,x] := F_k(x)$ $(x\in\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_k}(S_k/s_k) = 0$ και $\mathrm{Var}_{x_1,\dots,x_k}(S_k/s_k) = 1$. Όπως στην §4.2, έχουμε το εξής:

Λήμμα 4.3.4. *Ισχύει η ταυτότητα:*

$$P_2 = \left(\int_{[0,\infty)} e^{-u}\,d\mu_k(u)\right)\exp\left(-\sum_{i\in I_2} f(x_i)\right). \tag{4.3.11}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την ακόλουθη συνέπεια του θεωρήματος Berry-Esseen (βλέπε [12], σελ. 544).

Λήμμα 4.3.5. *Για κάθε $a,b>0$, υπάρχουν $k_0\in\mathbb{N}$ και $\eta>0$ με την εξής ιδιότητα: Αν $k\ge k_0$, και αν $Y_1,\dots,Y_k$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με*

$$\mathbb{E}(Y_i)=0,\quad \sigma_i^2 := \mathbb{E}(Y_i^2)\ge a,\quad \mathbb{E}(|Y_i|^3)\le b,$$

τότε

$$\mathbb{P}\left(0\le\sum_{i=1}^k Y_j\le\sigma\right)\ge\eta,$$

όπου $\sigma^2=\sigma_1^2+\cdots+\sigma_k^2$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το I_2: Αφού $\delta\le x_i\le 1-\delta$ για κάθε $i\in I_2$, μπορούμε να βρούμε $A,B>0$, που εξαρτώνται μόνο από το δ, έτσι ώστε οι τυχαίες μεταβλητές $Y_i := t_i(X_i-x_i)$, $i\in I_2$, να ικανοποιούν τις

$$\sigma_i^2 = \mathbb{E}_{x_1,\dots,x_m}(Y_i^2) = t_i^2/\cosh^2(t_i)\ge A$$

και

$$\mathbb{E}_{x_1,\dots,x_m}(|Y_i|^3) = |t_i|^3\cosh(2t_i)/\cosh^4(t_i)\le B$$

για κάθε $i\in I_2$. Θέτουμε k_0 την σταθερά του Λήμματος 4.3.5 που αντιστοιχεί στα A και B, και υπενθυμίζουμε ότι $|I_2|=k$.

Περίπτωση 1: $|I_2| < k_0$. Τότε, δουλεύοντας όπως για το I_3, βλέπουμε ότι
(4.3.12)
$$P_2 = \mathbb{P}\Bigg(\sum_{i\in I_2} t_i(X_i - x_i) \geq 0\Bigg) \geq \prod_{i\in I_2} P(X_i \geq x_i) = e^{-|I_2|m(1-\delta)} \geq e^{-k_0 m(1-\delta)},$$
όπου (θυμίζουμε ότι) $m(x) = -\log \mathbb{P}(X \geq x)$.

Περίπτωση 2: $|I_2| \geq k_0$. Από το Λήμμα 4.3.4 έχουμε

$$P_2 \geq e^{-s_k}\mu_k([0, s_k]) \cdot \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_2} f(x_i)\Bigg). \tag{4.3.13}$$

Αφού

$$s_k^2 = \sum_{i\in I_2} t_i^2 \psi''(t_i) \leq B^{2/3}\,|I_2|\,, \tag{4.3.14}$$

η (4.3.13) και το Λήμμα 4.3.5 δίνουν

$$P_2 \geq \eta \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_2} f(x_i) - c_3\sqrt{|I_2|}\Bigg), \tag{4.3.15}$$

όπου $c_3 = B^{/3} > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το δ.

Συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στην εξής εκτίμηση για την P_2:

Λήμμα 4.3.6. *Έχουμε*

$$P_2 \geq \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_2} f(x_i) - c_3\sqrt{|I_2|} - c_4\Bigg), \tag{4.3.16}$$

όπου οι σταθερές $c_3, c_4 > 0$ εξαρτώνται μόνο από τα δ, γ.

Έχουμε έτσι αποδείξει την Πρόταση 4.3.1: Βάζοντας μαζί τις εκτιμήσεις από το Λήμμα 4.3.2, το Λήμμα 4.3.3 και το Λήμμα 4.3.6, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} t_i(X_i - x_i) \geq 0\Bigg) &\geq P_1 P_2 P_3 \\
&\geq \exp\Bigg(-(1+\varepsilon)\sum_{i\in I_3} f(x_i)\Bigg) \\
&\quad \times \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_1} f(x_i) - c_1\log|I_1| - c_2\Bigg) \\
&\quad \times \exp\Bigg(-\sum_{i\in I_2} f(x_i) - c_3\sqrt{|I_2|} - c_4\Bigg) \\
&\geq \exp\Bigg(-(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \varepsilon n\Bigg),
\end{aligned}$$

για αρκούντως μεγάλα n. $\square$

Κεφάλαιο 5

Προσέγγιση του τυχαίου K_N

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δούμε με ποιόν τρόπο η μελέτη της συνάρτησης $q(\vec{x})$ και τα πιθανοθεωρητικά Λήμματα των προηγούμενων Κεφαλαίων δίνουν πληροφορίες για την συμπεριφορά του τυχαίου πολυτόπου K_N. Σταθεροποιούμε N με $n < N \leq 2^n$ και ορίζουμε $\alpha > 0$ μέσω της εξίσωσης $N = e^{\alpha n}$. Δηλαδή, θέτουμε

$$\alpha = \frac{\log N}{n}.$$

Οι βασικές εκτιμήσεις που θα δείξουμε είναι οι ακόλουθες:

- Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ ώστε: αν το n είναι αρκετά μεγάλο και αν $n^8 < N \leq e^{nf(\gamma)}$, τότε
  $$\mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq F^{\alpha-2\varepsilon} \cap \gamma C\big) \geq 1 - 2^{-n+1}$$
  για κάθε $\varepsilon \geq 3\log n/n$.

- Αν το n είναι αρκετά μεγάλο και αν $\alpha < \log 2 - 12n^{-1}$, τότε υπάρχει θετική σταθερά $\delta \leq 6/n$ ώστε
  $$\mathrm{Prob}\big(\ |\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C \cap K_N| \geq \tfrac{1}{2}|\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C|\ \big) \leq \tfrac{1}{100}.$$

5.1 Δύο λήμματα

Σε αυτήν την παράγραφο, η παράμετρος $\alpha < \log 2$ ικανοποιεί κάποιους πολύ α-σθενείς περιορισμούς: $8(\log n/n) < \alpha < \log 2 - (12/n)$. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $\varepsilon \leq 3\log n/n$ ώστε η πιθανότητα $\mathrm{Prob}\big(K_N \not\supseteq F^{\alpha-2\varepsilon} \cap \gamma C\big)$ να είναι πολύ μικρή αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Πρόταση 5.1.1. *Έστω $\gamma \in (0,1)$ και έστω $0 < \beta < f(\gamma)$. Τότε,*

$$1 - \mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq F^{\beta} \cap \gamma C\big) \leq \binom{N}{n}\frac{1}{2^{N-n}} + 2\binom{N}{n}\big(1 - \min q(\vec{x})\big)^{N-n}, \tag{5.1.1}$$

όπου το $\min$ παίρνεται πάνω από όλα τα $\vec{x} \in \partial(F^{\beta}) \cap \gamma C$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τα β και γ και γράφουμε q_* για την ελάχιστη τιμή της $q(\vec{x})$ στο $\partial(F^\beta)\cap\gamma C$. Έστω E το ενδεχόμενο να έχει μη κενό εσωτερικό το K_N.

Για κάθε υποσύνολο $J=\{j_1,\dots,j_n\}$ του $\{1,\dots,N\}$, που έχει n στοιχεία, ορίζουμε το ενδεχόμενο E_J ως εξής: τα $\vec{X}_{j_1},\dots,\vec{X}_{j_n}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, και για κάποιον από τους δύο κλειστούς ημιχώρους H_1,H_2 που ορίζουν, τον H_i, έχουμε ταυτόχρονα $K_N\subset H_i$ και $\mathbb{P}\big(\vec{X}\notin H_i\big)\geq q_*$.

Θεωρούμε τώρα το ενδεχόμενο E όπου το K_N έχει μη κενό εσωτερικό. Αν $(F^\beta\cap\gamma C)\nsubseteq K_N$, τότε υπάρχει $\vec{x}\in\partial(F^\beta)\cap\gamma C\setminus K_N$. Αυτό προκύπτει από το επόμενο Λήμμα, το οποίο θα αποδείξουμε παρακάτω.

Λήμμα 5.1.2. *Η κυρτή θήκη* $\mathrm{conv}\big(\partial(F^\beta)\cap\gamma C\big)$ *του* $\partial(F^\beta)\cap\gamma C$ *είναι ίση με το* $F^\beta\cap\gamma C$.

Αφού $\vec{x}\notin K_N$, υπάρχει έδρα F του K_N με την εξής ιδιότητα: Ένας από τους δύο κλειστούς ημιχώρους H_1 και H_2 που ορίζονται από την F περιέχει το K_N αλλά δεν περιέχει το $\vec{x}$. Αν H_i είναι αυτός ο ημίχωρος, τότε έχουμε ταυτόχρονα $K_N\subset H_i$ και $\mathbb{P}\big(\vec{X}\notin H_i\big)\geq q(\vec{x})$. Αφού $\vec{x}\in\partial(F^\beta)\cap\gamma C$, συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{P}\big(\vec{X}\notin H_i\big)\geq q_*$. Αφού το σύνορο του H_i προσδιορίζεται από κάποιες αφφινικά ανεξάρτητες κορυφές $\vec{X}_{j_1},\dots,\vec{X}_{j_n}$ του K_N (οι οποίες ανήκουν στην F), έχουμε έτσι δείξει ότι

$$E\cap\big\{F^\beta\cap\gamma C\nsubseteq K_N\big\}\subseteq\bigcup_J E_J. \tag{5.1.2}$$

Από την (5.1.2) έχουμε

$$\big\{F^\beta\cap\gamma C\nsubseteq K_N\big\}\subseteq E^c\cup\bigcup_J E_J. \tag{5.1.3}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\big(F^\beta\cap\gamma C\nsubseteq K_N\big)&\leq\mathrm{Prob}(E^c)+\sum_J\mathrm{Prob}(E_J)\\&=\mathrm{Prob}(E^c)+\binom{N}{n}\mathrm{Prob}(E'),\end{aligned}$$

όπου $E':=E_{\{1,\dots,n\}}$.

Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$\mathrm{Prob}(E')\leq 2(1-q_*)^{N-n}. \tag{5.1.4}$$

Πράγματι, έστω E'' το ενδεχόμενο όπου τα $\vec{X}_1,\dots,\vec{X}_n$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Στο E'', τα $\vec{X}_1,\dots,\vec{X}_n$ προσδιορίζουν δύο κλειστούς ημιχώρους $H_i=H_i(\vec{X}_1,\dots,\vec{X}_n)$, $i=1,2$. Έστω E^i το ενδεχόμενο όπου τα $\vec{X}_1,\dots,\vec{X}_n$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα και $\mathbb{P}\big(\vec{X}\notin H_i\big)\geq q_*$. Τότε, γράφοντας Exp για την μέση τιμή ως προς το μέτρο Prob, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(E') &\leq \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Prob}\big(\{\vec{X}_{n+1},\dots,\vec{X}_N \in H_i\} \cap E^i\big)\\ &= \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Exp}\big(\mathrm{Prob}\big(\{\vec{X}_{n+1},\dots,\vec{X}_N \in H_i\} \mid \vec{X}_1,\dots,\vec{X}_n\big)\mathbf{1}_{E^i}\big)\\ &\leq (1-q_*)^{N-n} \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Prob}(E^i).\end{aligned}$$

Για να φράξουμε την $\mathrm{Prob}(E^c)$ σκεφτόμαστε ως εξής. Αν το K_N έχει μη κενό εσωτερικό, υπάρχει $J = \{j_1,\dots,j_n\} \subset \{1,\dots,N\}$ ώστε το σύνολο $\{\vec{X}_j : j \notin J\}$ να περιέχεται στην αφφινική θήκη του $\{\vec{X}_j : j \in J\}$. Θα χρειαστούμε το εξής.

Λήμμα 5.1.3. *Αν η αφφινική διάσταση του S είναι μικρότερη από n, τότε $\mathbb{P}\big(\vec{X} \in S\big) \leq \frac{1}{2}$.*

Έπεται ότι

$$\mathrm{Prob}(E^c) \leq \binom{N}{n} 2^{-(N-n)}. \tag{5.1.5}$$

Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση. □

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.2. Είναι φανερό ότι $\mathrm{conv}\big(\partial(F^\beta)\cap\gamma C\big) \subseteq F^\beta \cap \gamma C$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Θεωρούμε $\vec{x} \in F^\beta \cap \gamma C$, και υποθέτουμε ότι $f(\vec{x}) < \beta$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Αφού $\vec{x} \in \gamma C$, υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_{2^n} \geq 0$ με $\sum_i \lambda_i = 1$ ώστε

$$\vec{x} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i, \tag{5.1.6}$$

όπου $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{2^n}$ είναι οι κορυφές του γC. Από τη συνθήκη $f(\gamma) \geq \beta$ που ικανοποιούν τα β και γ, έπεται ότι $f(\vec{v}_i) \geq \beta$ για κάθε i. Έχουμε υποθέσει ότι $f(\vec{x}) < \beta$, άρα υπάρχουν $t_i \in (0,1]$ ώστε $f(t_i\vec{v}_i + (1-t_i)\vec{x}) = \beta$. Θέτουμε $\vec{y}_i := t_i\vec{v}_i + (1-t_i)\vec{x}$. Τότε, $\vec{y}_i \in \partial(F^\beta)$ και $\vec{v}_i = t_i^{-1}\vec{y}_i - t_i^{-1}(1-t_i)\vec{x}$ για κάθε i. Από την (5.1.6) συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{x} = \left(1 + \sum_i \lambda_i \frac{1-t_i}{t_i}\right)^{-1} \sum_i \frac{\lambda_i}{t_i}\vec{y}_i, \tag{5.1.7}$$

και το $\vec{x}$ είναι κυρτός συνδυασμός των $\vec{y}_i \in \partial(F^\beta)\cap\gamma C$. □

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.3. Έστω S ένα σύνολο Borel που περιέχεται σε κάποιο υπερεπίπεδο H. Τότε, $H = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{u}, \vec{y}-\vec{x}\rangle = 0\}$ για κάποια $\vec{u} = (u_1,\dots,u_n) \neq \vec{0}$ και $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_i \neq 0$. Τότε,

$$\vec{X} \in H \iff X_i = x_i - u_i^{-1}\sum_{j\neq i} u_j(X_j - x_j). \tag{5.1.8}$$

Αφού $P(X_i = x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται το Λήμμα. □

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω $\gamma \in (0,1)$ η σταθερά του Θεωρήματος 4.2.3 και έστω ότι $n^8 < N \le e^{nf(\gamma)}$. Τότε,*

$$\mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq F^{\alpha-2\varepsilon} \cap \gamma C\big) \ge 1 - 2^{-n+1} \tag{5.1.9}$$

για κάθε $\varepsilon \ge 3\log n/n$, αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.2.3. Υπάρχει n_0 ώστε, αν $n \ge n_0$ και αν $\varepsilon = 3\log n/n$, τότε

$$\min q(\vec{x}) \ge \exp(-(\alpha-\varepsilon)n), \tag{5.1.10}$$

όπου το min είναι πάνω από όλα τα $\vec{x} \in \partial(F^{\alpha-2\varepsilon}) \cap \gamma C$. Παρατηρήστε ότι η συνθήκη $f(\gamma) \ge \alpha > 2\varepsilon$, η οποία χρειάζεται για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.2.3, ικανοποιείται λόγω της $N > n^6$. Συνδυάζοντας την (5.1.10) με την Πρόταση 5.1.1, βλέπουμε ότι

$$1-\mathrm{Prob}\big(K_N \supseteq F^{\alpha-2\varepsilon}\cap\gamma C\big) \le \binom{N}{n} 2^{-(N-n)} + 2\binom{N}{n}\big(1-\exp(-(\alpha-\varepsilon)n)\big)^{N-n}. \tag{5.1.11}$$

Λήμμα 5.1.5. *Αν το n είναι αρκετά μεγάλο και $N > n^6$, τότε*

$$\binom{N}{n} 2^{-(N-n)} < 2^{-n}. \tag{5.1.12}$$

Απόδειξη. Ισχύει $\binom{N}{n} \le (eN/n)^n$, οπότε αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$1 + \log\left(\frac{N}{n}\right) - \frac{N-n}{n}\log 2 < -\log 2. \tag{5.1.13}$$

Αν θέσουμε $x := N/n$, η (5.1.13) είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1)\log 2 - \log x > 1 - \log 2. \tag{5.1.14}$$

Το Λήμμα έπεται, γιατί η συνάρτηση στο αριστερό μέλος αυξάνει στο άπειρο όταν $x \to \infty$, και $x = N/n > n^5$. □

Λήμμα 5.1.6. *Αν το n είναι αρκετά μεγάλο και $N \ge 2n$, τότε*

$$2\binom{N}{n}\big(1-\exp(-(\alpha-\varepsilon)n)\big)^{N-n} < 2^{-n}. \tag{5.1.15}$$

Απόδειξη. Λόγω της $1 - x \le e^{-x}$, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\left(\frac{4eN}{n}\right)^n \exp\Big(-(N-n)e^{-(\alpha-\varepsilon)n}\Big) < 1. \tag{5.1.16}$$

Παρατηρούμε ότι $e^{-(\alpha-\varepsilon)n} = e^{\varepsilon n}/N$. Αφού $n\log(4eN/n) \le n^2 f(\gamma)$ (αν υποθέσουμε ότι $n \ge 4e$) και $(N-n)/N \ge \frac{1}{2}$, ζητάμε να ισχύει η

$$2n^2 f(\gamma) < e^{\varepsilon n}. \tag{5.1.17}$$

Αυτή ικανοποιείται για $\varepsilon = 3\log n/n$ και n αρκετά μεγάλο. $\square$

Συνδυάζοντας την (5.1.11) με τα δύο Λήμματα, παίρνουμε την

$$\text{Prob}\big(K_N \supseteq F^{\alpha-2\varepsilon} \cap \gamma C\big) \geq 1 - 2^{-n} - 2^{-n} \tag{5.1.18}$$

για n αρκετά μεγάλο. $\square$

Το δεύτερο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι υπάρχει $\delta \leq 6/n$ ώστε η μισή τουλάχιστον επιφάνεια του $F^{\alpha+\delta} \cap \gamma C$ να είναι έξω από το K_N αν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Λήμμα 5.1.7. *Υποθέτουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο και ότι $\alpha < \log 2 - 12n^{-1}$. Υπάρχει θετική σταθερά $\delta \leq 6/n$ τέτοια ώστε*

$$\text{Prob}\big(\ |\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C \cap K_N| \geq \tfrac{1}{2}|\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C|\ \big) \leq \tfrac{1}{100}. \tag{5.1.19}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\alpha < \beta < \log 2$ και γράφουμε $\beta = \alpha + \delta$ για κάποιο $\delta > 0$. Έστω $\vec{x}$ στο σύνορο του F^{β}. Αν H είναι ένας κλειστός ημίχωρος που περιέχει το $\vec{x}$, και αν $\vec{x} \in K_N = \text{conv}\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N\}$, τότε υπάρχει δείκτης $i \leq N$ τέτοιος ώστε $\vec{X}_i \in H$ (γιατί το $\mathbb{R}^n \setminus H$ είναι κυρτό.). Γράφουμε

$$\begin{aligned} \text{Prob}\big(\vec{x} \in K_N\big) &= \text{Prob}\big(\ \vec{x} \in \text{conv}\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N\}\ \big) \\ &\leq \text{Prob}\big(\ \vec{X}_i \in H \text{ για κάποιο } 1 \leq i \leq N\ \big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \text{Prob}\big(\ \vec{X}_i \in H\ \big) \\ &= N\,\text{Prob}\big(\vec{X} \in H\big). \end{aligned}$$

Αφού ο ημίχωρος $H \ni \vec{x}$ ήταν τυχών,

$$\text{Prob}\big(\vec{x} \in K_N\big) \leq N \inf\big\{\text{Prob}\big(\vec{X} \in H\big) \colon H \ni \vec{x}\big\} = Nq(\vec{x}). \tag{5.1.20}$$

Από το Λήμμα 2.2.4 έχουμε

$$Nq(\vec{x}) \leq N\exp(-nF(\vec{x})) = N\exp(-\alpha n - \delta n) = \exp(-\delta n) < \tfrac{1}{200} \tag{5.1.21}$$

αν $\delta \geq 6/n$. Παρατηρήστε ότι τέτοιες τιμές του δ επιτρέπονται από τον περιορισμό που έχει τεθεί στο α. Τώρα,

$$\mathbb{E}\,|\partial(F^{\beta}) \cap \gamma C \cap K_N| \leq \int_{\partial(F^{\beta})\cap\gamma C} \text{Prob}\big(\vec{x} \in K_N\big)\,d\vec{x} \leq \tfrac{1}{200}|\partial(F^{\beta}) \cap \gamma C|. \tag{5.1.22}$$

Επομένως,

$$\text{Prob}\big(\ |(\partial(F^{\beta}) \cap \gamma C \cap K_N| \geq \tfrac{1}{2}|\partial(F^{\beta}) \cap \gamma C|\ \big) \leq 10^{-2}, \tag{5.1.23}$$

από την ανισότητα του Markov. $\square$

Κεφάλαιο 6

Γεωμετρικά λήμματα

6.1 Καμπυλότητα και επιφάνεια του $\mathbf{F}^\beta$

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δώσουμε κάτω φράγμα για την επιφάνεια του κομματιού του συνόρου $\partial(F^\beta)$ που βρίσκεται μέσα στον κύβο γC.

6.1α΄ Το πρώτο γεωμετρικό Λήμμα

Θεώρημα 6.1.1. *Για κάθε $\gamma \in (0,1)$, υπάρχει σταθερά $c(\gamma) > 0$ τέτοια ώστε αν το n είναι αρκετά μεγάλο και αν $\beta \leq c(\gamma)$, τότε*

$$|\partial(F^\beta) \cap \gamma C| \geq c(\gamma)^{n-1}(2\beta n)^{(n-1)/2}|S^{n-1}|. \tag{6.1.1}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια σειρά από λήμματα.

Λήμμα 6.1.2. *Έστω $\beta < \log 2$ και έστω $\vec{x} \in \gamma C$ με $F(\vec{x}) = \beta$. Αν $\kappa(\vec{x})$ είναι η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας $F(\vec{x}) = \beta$ στο $\vec{x}$, τότε*

$$\frac{1}{\kappa(\vec{x})} \geq \left(1-\gamma^2\right)^{n-1}(2\beta n)^{(n-1)/2}. \tag{6.1.2}$$

Απόδειξη. Έστω $\nu(\vec{x}) = \nabla F(\vec{x})/\|\nabla F(\vec{x})\|_2$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του F^β στο $\vec{x}$. Σύμφωνα με το [32, Παράγραφος 2.5], γράφουμε $T_{\vec{x}}F^\beta$ για τον εφαπτόμενο χώρο του F^β στο $\vec{x}$, και θεωρούμε την απεικόνιση Weingarten $W_{\vec{x}} : T_{\vec{x}}F^\beta \to T_{\vec{x}}F^\beta$. Η απεικόνιση αυτή είναι ο περιορισμός στον $T_{\vec{x}}F^\beta$ του διαφορικού $D_{\vec{x}}$ της απεικόνισης $\vec{x} \mapsto \nu(\vec{x})$. Η $W_{\vec{x}}$ είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη, επομένως

$$\kappa(\vec{x}) = \det W_{\vec{x}} \leq \left(\frac{\mathrm{trace}(W_{\vec{x}})}{n-1}\right)^{n-1} \tag{6.1.3}$$

από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ ο πίνακας του $D_{\vec{x}}$ ως προς την συνήθη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Είναι γνωστό, και επαληθεύεται εύκολα με απευθείας υπολογισμό, ότι το $\nu(\vec{x})$ είναι ιδιοδιάνυσμα του συζυγούς του $D_{\vec{x}}$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Από την παρατήρηση αυτή και από το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές του $W_{\vec{x}}$ είναι επίσης ιδιοτιμές του $D_{\vec{x}}$ (όλες μη μηδενικές) έπεται ότι $\mathrm{tr}(W_{\vec{x}}) = \mathrm{tr}(D_{\vec{x}})$. Επίσης, ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$a_{ii} = \frac{f''(x_i)\big(\|n\nabla F(\vec{x})\|_2^2 - (f'(x_i))^2\big)}{\|n\nabla F(\vec{x})\|_2^3} = \frac{h'(x_i)\big(\|\vec{t}\|_2^2 - (h(x_i))^2\big)}{\|\vec{t}\|_2^3}. \tag{6.1.4}$$

Επομένως, για κάθε $\vec{x} \in \partial(F^\beta) \cap \gamma C$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{trace}(W_{\vec{x}})}{n-1} = \frac{\mathrm{trace}(D_{\vec{x}})}{n-1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h'(x_i)\big(\|\vec{t}\|_2^2 - (h(x_i))^2\big)}{(n-1)\|\vec{t}\|_2^3} \\ &\leq h'(\gamma)\frac{n\|\vec{t}\|_2^2 - \sum_{i=1}^n t_i^2}{(n-1)\|\vec{t}\|_2^3} \\ &= \frac{h'(\gamma)}{\|\vec{t}\|_2}.\end{aligned}$$

Από την $\psi' = \tanh$ έχουμε

$$h'(x) = \frac{1}{\psi''(h(x))} = \frac{1}{\tanh'(h(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(h(x))} = \frac{1}{1-x^2},$$

οπότε η (6.1.3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\kappa(\vec{x})} \geq \|\vec{t}\|_2^{n-1}(1-\gamma^2)^{n-1}. \tag{6.1.5}$$

Θυμηθείτε ότι $2f(x_i) \leq t_i^2$ από την (4.1.29). Άρα,

$$\|\vec{t}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n t_i^2 \geq 2nF(\vec{x}) = 2\beta n. \tag{6.1.6}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Σημείωση. Ο ακριβής υπολογισμός της καμπυλότητας Gauss της επιφάνειας $F(\vec{x}) = \beta$ στο $\vec{x} \in \partial(F^\beta)$ γίνεται στην επόμενη παράγραφο. Η εκτίμηση που αποδείξαμε στο Λήμμα 6.1.2 είναι αρκετή για τον σκοπό μας.

Λήμμα 6.1.3. *Εστω $\beta > 0$ και έστω $\vec{\theta} \in S^{n-1}$ με*

$$\beta < |\mathrm{supp}(\vec{\theta})|\,(\log 2)/n. \tag{6.1.7}$$

Υπάρχει μοναδικό σημείο $\vec{x}(\vec{\theta},\beta)$ στο σύνορο του F^β για το οποίο το

$$\vec{t}(\vec{\theta},\beta) := n\,\nabla F(\vec{x}(\vec{\theta},\beta)) = \rho(\vec{\theta},\beta)\vec{\theta} \tag{6.1.8}$$

είναι θετικό πολλαπλάσιο του $\vec{\theta}$. Επιπλέον, η συνάρτηση $\beta \mapsto \rho(\vec{\theta},\beta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, |\mathrm{supp}(\vec{\theta})|\,(\log 2)/n)$.

Απόδειξη. Για κάθε $\rho > 0$ ορίζουμε

$$\vec{x}(\vec{\theta},\rho) = (\tanh(\rho\theta_i))_{i\leq n}. \tag{6.1.9}$$

Το σημείο $\vec{x}(\vec{\theta},\rho)$ ανήκει στο C και

$$n\nabla F(\vec{x}(\vec{\theta},\rho)) = \rho\vec{\theta}. \tag{6.1.10}$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$\rho \mapsto F(\vec{x}(\vec{\theta},\rho)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\tanh(\rho\theta_i)) \tag{6.1.11}$$

είναι συνεχής, η τιμή της στο 0 είναι 0, και το όριο της καθώς το $\rho \to \infty$ είναι ίσο με $\frac{1}{n}|\mathrm{supp}(\vec{\theta})|(\log 2)$. Συνεπώς, αν το β ικανοποιεί την (6.1.7), από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\rho := \rho(\beta)$ τέτοιο ώστε το $\vec{x}(\vec{\theta},\beta) := \vec{x}(\vec{\theta},\rho(\beta))$ να ικανοποιεί την $F(\vec{x}(\vec{\theta},\beta)) = \beta$. Επιπλέον, από την (6.1.10) βλέπουμε ότι το $\vec{t}(\vec{\theta},\beta) := n\,\nabla F(\vec{x}(\vec{\theta},\beta))$ ικανοποιεί την (6.1.8). Τέλος, η συνάρτηση που ορίζεται από την (6.1.11) είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του ρ, το οποίο αποδεικνύει ότι η συνάρτηση $\beta \mapsto \rho(\vec{\theta},\beta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, |\mathrm{supp}(\vec{\theta})|\,(\log 2)/n)$. $\square$

Θεωρούμε μια απόλυτη σταθερά $r > 0$ (την οποία θα επιλέξουμε κατάλληλα) και θέτουμε

$$M_r = \big\{\vec{\theta} \in S^{n-1} : \sqrt{n/r}\,\vec{\theta} \in C\big\}. \tag{6.1.12}$$

Λήμμα 6.1.4. *Υπάρχει σταθερά $c(\gamma) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\beta < c(\gamma)/r$, τότε για κάθε $\vec{\theta} \in M_r$ έχουμε $\vec{x}(\vec{\theta},\beta) \in \mathrm{int}(\gamma C)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\lambda = \sqrt{n/r}$ και θεωρούμε τυχόν $\vec{\theta} \in M_r$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta_i \geq 0$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Από τον ορισμό του M_r έχουμε $\gamma\lambda\vec{\theta} \in \gamma C$, άρα, αν ορίσουμε $x_i = \tanh(\gamma\lambda\theta_i)$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$, έχουμε $n\nabla F(\vec{x}) = \gamma\lambda\vec{\theta}$.

Από την (4.1.29) έχουμε

$$F(\vec{x}) \geq \frac{f(\gamma)}{h^2(\gamma)} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\gamma\lambda)^2\theta_i^2 = \frac{\gamma^2 f(\gamma)}{3h^2(\gamma)r}. \tag{6.1.13}$$

Αν λοιπόν $\beta < c_1(\gamma)/r$, όπου $c_1(\gamma) > 0$ κατάλληλη σταθερά που εξαρτάται μόνο από το γ, τότε $F(\vec{x}) > \beta$.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $\vec{\theta} \in M_r$, τότε

$$|\mathrm{supp}(\vec{\theta})|\frac{r}{n} \geq \sum_{i=1}^{n}\theta_i^2 = 1. \tag{6.1.14}$$

Άρα, $|\mathrm{supp}(\vec{\theta})| \geq n/r$. Υπάρχει λοιπόν $c_2(\gamma) > 0$ τέτοια ώστε: αν $\beta < c_2(\gamma)/r$ τότε $\beta < |\mathrm{supp}(\vec{\theta})|\,(\log 2)/n$.

Θέτουμε $c(\gamma) = \min\{c_1(\gamma), c_2(\gamma)\}$. Αν $\beta < c(\gamma)/r$ τότε χρησιμοποιούμε τον δεύτερο ισχυρισμό του Λήμματος 6.1.3 ως εξής: αφού $F(\vec{x}) > \beta$ και $n\nabla F(\vec{x}) = \gamma\lambda\vec{\theta}$, για το $\vec{x}(\vec{\theta},\beta)$ ισχύει η ανισότητα

$$[\vec{x}(\vec{\theta},\beta)]_i < \tanh(\gamma\lambda\theta_i) \leq \tanh(\gamma) < \gamma \tag{6.1.15}$$

για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Δηλαδή, $\vec{x}(\vec{\theta},\beta) \in \gamma C$. $\square$

Το επόμενο Λήμμα δίνει εκτίμηση για το μέτρο του M_r.

Λήμμα 6.1.5. *Υπάρχει $r>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $n\geq 3$ τότε*

$$|M_r| \geq e^{-n/2}|S^{n-1}|. \tag{6.1.16}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με γ_n το τυπικό μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$ και με σ_n το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Θα χρειαστούμε το εξής.

Λήμμα 6.1.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma_n\big(S^{n-1}\cap \tfrac{1}{2}K\big) \leq \gamma_n(\sqrt{n}K) \leq \sigma_n(S^{n-1}\cap eK) + e^{-n/2}. \tag{6.1.17}$$

Απόδειξη (βλέπε [23]). Περιγράφουμε μόνο την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας (την οποία θα χρησιμοποιήσουμε). Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{n}K \subseteq \big(\tfrac{1}{e}\sqrt{n}B_2^n\big) \cup C\left(\tfrac{1}{e}\sqrt{n}S^{n-1}\cap \sqrt{n}K\right) \tag{6.1.18}$$

όπου, αν $A\subseteq \frac{1}{e}\sqrt{n}S^{n-1}$, γράφουμε $C(A)$ για τον θετικό κώνο που παράγεται από το A. Έπεται ότι

$$\gamma_n(\sqrt{n}K) \leq \gamma_n\big(\tfrac{1}{e}\sqrt{n}B_2^n\big) + \sigma\big(\tfrac{1}{e}\sqrt{n}S^{n-1}\cap\sqrt{n}K\big) \tag{6.1.19}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην $\frac{1}{e}\sqrt{n}S^{n-1}$. Τότε,

$$\sigma\big(\tfrac{1}{e}\sqrt{n}S^{n-1}\cap\sqrt{n}K\big) = \sigma_n(S^{n-1}\cap eK), \tag{6.1.20}$$

και απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\gamma_n\big(\rho\sqrt{n}B_2^n\big) \leq (\rho\sqrt{e})^n e^{-\rho^2 n/2} \tag{6.1.21}$$

για κάθε $0<\rho\leq 1$. Έπεται ότι

$$\gamma_n\big(\tfrac{1}{e}\sqrt{n}B_2^n\big) \leq \exp(-n/2). \tag{6.1.22}$$

Από τις (6.1.19)–(6.1.22) προκύπτει το Λήμμα. □

Απόδειξη του Λήμματος 6.1.5. Παρατηρούμε ότι

$$M_r = S^{n-1}\cap e\left(\sqrt{r/(e^2n)}\,C\right). \tag{6.1.23}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\frac{|M_r|}{|S^{n-1}|} = \sigma_n(M_r) &= \sigma_n\Big(S^{n-1}\cap e\big(\sqrt{r/(e^2n)}\,C\big)\Big)\\ &\geq \gamma_n\big((\sqrt{r}/e)\,C\big) - e^{-n/2}\\ &= d\big(\sqrt{r}/e\big)^n - e^{-n/2},\end{aligned}$$

όπου

$$d(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-s}^{s} e^{-t^2/2}dt. \tag{6.1.24}$$

Παρατηρούμε ότι $2e^{-n/2} < e^{-n/4}$ αν $n \geq 3$. Επιλέγουμε $r > 0$ ώστε να ικανοποιείται η

$$d\big(\sqrt{r}/e\big) > e^{-1/4}. \tag{6.1.25}$$

Αυτό είναι δυνατό, διότι $\lim_{s\to+\infty} d(s) = 1$. Τότε,

$$d\big(\sqrt{r}/e\big)^n > 2e^{-n/2} \tag{6.1.26}$$

για $n \geq 3$, κι αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1. Γράφοντας, για συντομία, $\vec{x}$ αντί του $\vec{x}(\vec{\theta},\beta)$, και χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο που συνδέει την επιφάνεια με την καμπυλότητα Gauss (βλέπε [32, Θεώρημα 4.2.4]), μπορούμε να γράψουμε

$$|\partial(F^{\beta}) \cap \gamma C| \geq \int_{M_r} \frac{1}{\kappa(\vec{x})}\, d\vec{\theta}, \tag{6.1.27}$$

όπου M_r το υποσύνολο της S^{n-1} που ορίσαμε στην (6.1.12). Πράγματι, αν $\vec{\theta} \in M_r$ τότε το $\vec{x}(\vec{\theta},\beta)$ ορίζεται καλά (από το Λήμμα 6.1.4) και ανήκει στο εσωτερικό του γC. Από το Λήμμα 6.1.2 έχουμε $\frac{1}{\kappa(\vec{x})} \geq \big(1-\gamma^2\big)^{n-1}(2\beta n)^{(n-1)/2}$ και από το Λήμμα 6.1.5 έχουμε $|M_r| \geq e^{-n/2}|S^{n-1}|$. Συνεπώς,

$$|\partial(F^{\beta}) \cap \gamma C| \geq e^{-n/2}\big(1-\gamma^2\big)^{n-1}(2\beta n)^{(n-1)/2}|S^{n-1}|, \tag{6.1.28}$$

και έπεται το ζητούμενο. □

6.1β′ Μια γενίκευση του Λήμματος 6.1.5

Η μέθοδος απόδειξης του Λήμματος 6.1.5 δίνει ένα γενικό κάτω φράγμα για το μέτρο της τομής τυχόντος συμμετρικού πολυέδρου με τη σφαίρα. Έστω $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m$ μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το συμμετρικό πολύεδρο

$$T = \bigcap_{j=1}^{m} \big\{\vec{x} : |\langle \vec{x}, \vec{u}_i\rangle| \leq 1\big\}. \tag{6.1.29}$$

Το επόμενο θεώρημα του Sidák (βλέπε [33]) δίνει εκτίμηση για το $\gamma_n(T)$.

Λήμμα 6.1.7 (Λήμμα του Sidák). *Αν T είναι το συμμετρικό πολύεδρο που ορίζεται από την (6.1.29) τότε*

$$\gamma_n(T) \geq \prod_{i=1}^{m} \gamma_n(\{\vec{x} : |\langle \vec{x}, \vec{u}_i\rangle| \leq 1\}) = \prod_{i=1}^{m} d\bigg(\frac{1}{\|\vec{u}_i\|_2}\bigg). \tag{6.1.30}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης μια εκτίμηση από το [17].

Λήμμα 6.1.8. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\lambda > 0$ ώστε, για κάθε $t_1,\dots,t_m > 0$,*

$$\prod_{i=1}^{m} d\left(\frac{1}{t_i}\right) \geq \exp\Bigg(-\lambda \sum_{i=1}^{m} t_i^2\Bigg). \tag{6.1.31}$$

Ορίζουμε μια παράμετρο $R = R(T)$ ως εξής:

$$R^2(T) = \sum_{i=1}^{m} \|\vec{u}_i\|_2^2. \tag{6.1.32}$$

Έστω $s > 0$. Το Λήμμα 6.1.7 δείχνει ότι

$$\gamma_n(sT) \geq \prod_{i=1}^{m} d\left(\frac{s}{\|\vec{u}_i\|_2}\right). \tag{6.1.33}$$

Τότε, το Λήμμα 6.1.8 δείχνει ότι

$$\gamma_n(sT) \geq \exp\bigl(-\lambda R^2(T)/s^2\bigr) \geq e^{-n/4} \geq 2e^{-n/2}, \tag{6.1.34}$$

αν $n \geq 3$ και

$$s \geq \frac{2\sqrt{\lambda}R(T)}{\sqrt{n}}. \tag{6.1.35}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.1.6 για το $K = (s/\sqrt{n})T$ παίρνουμε

$$\sigma_n\left(S^{n-1} \cap \frac{es}{\sqrt{n}}T\right) \geq e^{-\lambda R^2(T)/s^2} - e^{-n/2} \geq \tfrac{1}{2}e^{-\lambda R^2(T)/s^2}. \tag{6.1.36}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε την εξής.

Πρόταση 6.1.9. *Έστω $n \geq 3$ και έστω $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το συμμετρικό πολύεδρο*

$$T = \bigcap_{j=1}^{m} \bigl\{\vec{x} : |\langle \vec{x}, \vec{u}_i \rangle| \leq 1\bigr\}, \tag{6.1.37}$$

και ορίζουμε

$$R^2(T) = \sum_{i=1}^{m} \|\vec{u}_i\|_2^2. \tag{6.1.38}$$

Τότε, για κάθε $t \geq cR(T)/\sqrt{n}$ έχουμε

$$\sigma_n\bigl(S^{n-1} \cap (t/\sqrt{n})\,T\bigr) \geq \tfrac{1}{2}\exp\bigl(-cR^2(T)/t^2\bigr), \tag{6.1.39}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

6.1γ′ Το δεύτερο γεωμετρικό Λήμμα

Το δεύτερο γεωμετρικό λήμμα μας ισχυρίζεται ότι, αν το $\varepsilon > 0$ είναι μικρό, τότε το κομμάτι του $\partial(F^{\beta+\varepsilon}) \cap \gamma C$ που περιέχεται σε έναν ημίχωρο ξένο προς το $F^{\beta} \cap \gamma C$ είναι επίσης μικρό.

Πρόταση 6.1.10. *Έστω $\gamma \in (0,1)$ και έστω ότι $\beta + \varepsilon < \log 2$. Αν H είναι ένας ημίχωρος του οποίου το εσωτερικό είναι ξένο προς το $F^{\beta} \cap \gamma C$, τότε*

$$\bigl|\partial(F^{\beta+\varepsilon}) \cap \gamma C \cap H\bigr| \leq (2\varepsilon n)^{(n-1)/2}\,\bigl|S^{n-1}\bigr|. \tag{6.1.40}$$

Απόδειξη. Έστω H ένας κλειστός ημίχωρος του οποίου το εσωτερικό είναι ξένο προς το $F^{\beta} \cap \gamma C$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ∂H είναι εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του $F^{\beta} \cap \gamma C$, και τότε μπορούμε να γράψουμε

$$H = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{u}, \vec{y} - \vec{x} \rangle \geq 0\} \tag{6.1.41}$$

για κάποια $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{x} \in \partial(F^{\beta} \cap \gamma C)$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vec{x} \in \partial(F^{\beta})$, άρα $F(\vec{x}) = \beta$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Αν $x_i < \gamma$ για κάθε i τότε μπορούμε να πάρουμε $\vec{u} = \nabla F(\vec{x})$. Αν $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k < \gamma = x_{k+1} = \ldots = x_n$, στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3 είδαμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε το $\vec{u}$ έτσι ώστε

$$u_i = f'(x_i) \text{ αν } 1 \leq i \leq k \text{ και } u_j \geq f'(x_j) \text{ αν } k < j \leq n. \tag{6.1.42}$$

Έστω $\vec{y} \in H \cap \gamma C$. Αφού $y_i - x_i \leq 0$ για $k < i \leq n$, έχουμε

$$\langle \nabla F(\vec{x}), \vec{y} - \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)(y_i - x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i - x_i) \geq 0. \tag{6.1.43}$$

Τώρα, έστω $\vec{y} \in F^{\beta+\varepsilon} \cap \gamma C \cap H$. Από το θεώρημα του Taylor, υπάρχουν $\zeta_i \in [x_i \wedge y_i, x_i \vee y_i]$ (όπου $a \wedge b := \min\{a, b\}$ και $a \vee b := \max\{a, b\}$) τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} f(y_i) &= f(x_i) + f'(x_i)(y_i - x_i) + \tfrac{1}{2} f''(\zeta_i)(y_i - x_i)^2 \\ &= f(x_i) + f'(x_i)(y_i - x_i) + \tfrac{1}{2} \frac{(y_i - x_i)^2}{1 - \zeta_i^2}. \end{aligned}$$

Αφού $(1 - \zeta_i^2)^{-1} \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$f(y_i) \geq f(x_i) + f'(x_i)(y_i - x_i) + \tfrac{1}{2}(y_i - x_i)^2. \tag{6.1.44}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} F(\vec{y}) &\geq F(\vec{x}) + \langle \nabla F(\vec{x}), \vec{y} - \vec{x} \rangle + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \\ &= \beta + \langle \nabla F(\vec{x}), \vec{y} - \vec{x} \rangle + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \\ &\geq \beta + \frac{1}{2n} \|\vec{y} - \vec{x}\|_2^2, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την (6.1.43). Από την άλλη πλευρά, αφού $\vec{y} \in F^{\beta+\varepsilon}$, έχουμε επίσης

$$F(\vec{y}) \leq \beta + \varepsilon, \tag{6.1.45}$$

άρα

$$\|\vec{y} - \vec{x}\|_2 \leq \sqrt{2n\varepsilon}. \tag{6.1.46}$$

Αυτό δείχνει ότι το $F^{\beta+\varepsilon} \cap \gamma C \cap H$ περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας $\sqrt{2n\varepsilon}$ με κέντρο το $\vec{x}$, οπότε η επιφάνειά του είναι το πολύ ίση με $(2n\varepsilon)^{(n-1)/2} |S^{n-1}|$. $\square$

Σημείωση. Στο τελευταίο βήμα της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε τον εξής ισχυρισμό: αν A, B είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $A \subseteq B$, τότε $|\partial(A)| \leq |\partial(B)|$. Η ανισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του «τύπου του Cauchy»: έχουμε

$$|\partial(A)| = \frac{1}{|B_2^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |P_{\vec{u}}(A)| \, \sigma_n(d\vec{u}), \tag{6.1.47}$$

και όμοια για το B, όπου $P_{\vec{u}}(A)$ είναι η ορθογώνια προβολή του A στον $\{\vec{x} : \langle \vec{x}, \vec{u}\rangle = 0\}$.

6.2 Παράρτημα: ακριβής υπολογισμός της καμπυλότητας

Σε αυτήν την παράγραφο τα διανύσματα θεωρούνται γενικά ως διανύσματα–στήλες εκτός αν δηλώνεται το αντίθετο. Αν A είναι ένας $n \times m$ πίνακας, με A^* συμβολίζουμε τον ανάστροφό του. Συνεπώς, το διάνυσμα–γραμμή $(v_1, \ldots, v_n)$ είναι το $\vec{v}^*$, όπου $\vec{v}$ είναι το διάνυσμα–στήλη με συντεταγμένες $v_1, \ldots, v_n$.

Έστω $F \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ μια C^2-συνάρτηση, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\nu(\vec{x}) := \frac{\nabla F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|} \qquad (\vec{x} \in U,\ \nabla F(\vec{x}) \neq 0). \tag{6.2.1}$$

Αν γράψουμε $\nu(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \nu_i(\vec{x})\vec{e}_i$, όπου $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ είναι η συνήθης βάση στον $\mathbb{R}^n$, τότε η καμπυλότητα Gauss–Kronecker $\kappa(\vec{x})$ της επιφάνειας $F^{-1}(\beta) = \{\vec{x} \colon F(\vec{x}) = \beta\}$ στο σημείο $\vec{x} \in F^{-1}(\beta)$, είναι το γινόμενο των κυρίων καμπυλοτήτων

$$\kappa_1(\vec{x}), \ldots, \kappa_{n-1}(\vec{x}). \tag{6.2.2}$$

Με άλλα λόγια, είναι η ορίζουσα του περιορισμού $W_{\vec{x}}$ στον υπόχωρο

$$T_{\vec{x}}F^{\beta} \simeq \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \vec{v}, \nabla F(\vec{x})\rangle = 0\} \tag{6.2.3}$$

της γραμμικής απεικόνισης

$$\vec{v} \overset{D_{\vec{x}}}{\longmapsto} - \begin{pmatrix} \langle \nabla \nu_1(\vec{x}), \vec{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla \nu_n(\vec{x}), \vec{v}\rangle \end{pmatrix}, \tag{6.2.4}$$

που ορίζεται στον εφαπτόμενο χώρο $T_{\vec{x}}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ στο $\vec{x}$ (βλέπε [35, π. 55 και Θεώρημα 2 στην σελ. 25]). Παρατηρήστε ότι η $D_{\vec{x}}$ είναι το διαφορικό στο $\vec{x}$ της απεικόνισης $\vec{x} \longmapsto -\nu(\vec{x})$. Η γραμμική απεικόνιση $W_{\vec{x}} \colon T_{\vec{x}}F^{\beta} \longrightarrow T_{\vec{x}}F^{\beta}$, που ορίζεται από την $W_{\vec{x}} = (D_{\vec{x}})|_{T_{\vec{x}}F^{\beta}}$, λέγεται απεικόνιση Weingarten της επιφάνειας $F^{-1}(\beta)$. Ο πίνακας της $D_{\vec{x}}$ ως προς τη συνήθη βάση του $T_{\vec{x}}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ είναι (με $\partial_i = \partial/\partial x_i$ και $\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$) ο

$$D_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial_1 \left(\dfrac{\partial_1 F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|} \right) & \cdots & \partial_n \left(\dfrac{\partial_1 F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \left(\dfrac{\partial_n F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|} \right) & \cdots & \partial_n \left(\dfrac{\partial_n F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|} \right) \end{pmatrix}, \tag{6.2.5}$$

και ισούται με

$$D_{\vec{x}} = \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|} H_F(\vec{x}) - \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|^2} \begin{pmatrix} \partial_1 F(\vec{x})\,(\nabla \|\nabla F(\vec{x})\|)^* \\ \vdots \\ \partial_n F(\vec{x})\,(\nabla \|\nabla F(\vec{x})\|)^* \end{pmatrix}, \tag{6.2.6}$$

όπου $H_F(\vec{x})$ είναι η Hessian της F και $(\nabla \|\nabla F(\vec{x})\|)^*$ είναι το διάνυσμα–γραμμή

$$(\nabla \|\nabla F(\vec{x})\|)^* = \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|} \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_k F(\vec{x}) \partial_{1k} F(\vec{x}), \ldots, \sum_{k=1}^{n} \partial_k F(\vec{x}) \partial_{nk} F(\vec{x}) \right). \tag{6.2.7}$$

Άρα, η i-οστή γραμμή του πίνακα $\|\nabla F(\vec{x})\|^3 D_{\vec{x}}$ είναι το διάνυσμα–γραμμή

$$\begin{aligned} R_i(\vec{x}) = {} & \sum_{k=1}^{n} (\partial_k F(\vec{x}))^2 \,(\partial_{i1} F(\vec{x}), \ldots, \partial_{in} F(\vec{x})) \\ & - \partial_i F(\vec{x}) \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_k F(\vec{x}) \partial_{1k} F(\vec{x}), \ldots, \sum_{k=1}^{n} \partial_k F(\vec{x}) \partial_{nk} F(\vec{x}) \right), \end{aligned}$$

και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i F(\vec{x})\, R_i(\vec{x}) = (0, \ldots, 0), \tag{6.2.8}$$

το οποίο, αν πάρουμε υπ' όψιν την $\nabla F(\vec{x}) \neq 0$, δείχνει ότι οι γραμμές του $D_{\vec{x}}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, ή ισοδύναμα, ότι το $\nabla F(\vec{x})$ είναι ιδιοδιάνυσμα του ανάστροφου του $D_{\vec{x}}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή το 0.

Παρατηρούμε ότι

$$\nabla \|\nabla F(\vec{x})\| = \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|}\, H_F(\vec{x})\,(\nabla F(\vec{x})), \tag{6.2.9}$$

οπότε

$$\begin{aligned} D_{\vec{x}} &= \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|}\, H_F(\vec{x}) - \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|^3} \begin{pmatrix} \partial_1 F(\vec{x})\,(\nabla F(\vec{x}))^* H_F(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n F(\vec{x})\,(\nabla F(\vec{x}))^* H_F(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|}\, H_F(\vec{x}) - \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|^3}\, (\nabla F(\vec{x}))(\nabla F(\vec{x}))^*\, H_F(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|^3} \left(\|\nabla F(\vec{x})\|^2 I_n - (\nabla F(\vec{x}))(\nabla F(\vec{x}))^* \right) H_F(\vec{x}) \end{aligned}$$

σε πιό συμπαγή μορφή. Τώρα, είναι φανερό ότι

$$(\nabla F(\vec{x}))^* D_{\vec{x}} = (0, \ldots, 0), \tag{6.2.10}$$

κάτι που εκφράζει ξανά το γεγονός ότι το $\nabla F(\vec{x})$ είναι ιδιοδιάνυσμα του ανάστροφου του $D_{\vec{x}}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Παρατηρούμε επίσης ότι, η

(6.2.10) έχει σαν συνέπεια ότι ο $D_{\vec{x}}$ αφήνει αναλλοίωτο τον υπόχωρο $T_{\vec{x}}F^{\beta}$ που είναι κάθετος στο $\nabla F(\vec{x})$, αφού ο συζυγής του αφήνει αναλλοίωτο τον υπόχωρο που παράγεται από το $\nabla F(\vec{x})$. Άρα, $D_{\vec{x}}\colon T_{\vec{x}}F^{\beta} \longrightarrow T_{\vec{x}}F^{\beta}$, και η $W_{\vec{x}}$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση $T_{\vec{x}}F^{\beta} \longrightarrow T_{\vec{x}}F^{\beta}$. Έχει λοιπόν νόημα να μιλάμε για τις ιδιοτιμές $\kappa_1(\vec{x}), \dots, \kappa_{n-1}(\vec{x})$.

Έπεται ότι οι ιδιοτιμές του $D_{\vec{x}}$ είναι οι ιδιοτιμές $\kappa_1(\vec{x}), \dots, \kappa_{n-1}(\vec{x})$ του $W_{\vec{x}}$ συν την ιδιοτιμή 0. Δηλαδή,

$$\text{(6.2.11)} \quad \operatorname{spectrum}(D_{\vec{x}}) = \operatorname{spectrum}(W_{\vec{x}}) \cup \{0\} = \{\kappa_1(\vec{x}), \dots, \kappa_{n-1}(\vec{x})\} \cup \{0\}\,.$$

Ειδικότερα, τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των $D_{\vec{x}}$ και $W_{\vec{x}}$ συνδέονται ως εξής:

$$\text{(6.2.12)} \qquad p_{D_{\vec{x}}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - D_{\vec{x}}) = \lambda \det(\lambda I_{n-1} - W_{\vec{x}}) = \lambda\, p_{W_{\vec{x}}}(\lambda).$$

Άρα $\det(D_{\vec{x}}) = 0$,

$$\text{(6.2.13)} \qquad \operatorname{tr}(W_{\vec{x}}) = \operatorname{tr}(D_{\vec{x}})\,,$$

και

$$\text{(6.2.14)} \qquad \kappa(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i(\vec{x}) = \det(W_{\vec{x}}) = \text{συντελεστής του } \lambda \text{ στο } p_{D_{\vec{x}}}(\lambda).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και την (6.2.13), έχουμε

$$\text{(6.2.15)} \quad \kappa(\vec{x}) = \det(W_{\vec{x}}) \le \left((n-1)^{-1}\operatorname{tr}(W_{\vec{x}})\right)^{n-1} = \left((n-1)^{-1}\operatorname{tr}(D_{\vec{x}})\right)^{n-1},$$

κάτι που μας δίνει έναν πολύ απλό τρόπο για να εκτιμήσουμε την καμπυλότητα $\kappa(\vec{x})$ μέσω του ίχνους του $D_{\vec{x}}$. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(D_{\vec{x}}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\nabla F(\vec{x})\|^2\, \partial_{ii}F(\vec{x}) - \partial_i F(\vec{x}) \sum_{j=1}^{n} \partial_j F(\vec{x})\, \partial_{ij}F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|^3} \\ &= \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|}\, \operatorname{tr}(H_F(\vec{x})) - \frac{(\nabla F(\vec{x}))^*\, [H_F(\vec{x})]\, \nabla F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|^3}. \end{aligned}$$

Θεωρούμε την

$$\text{(6.2.16)} \qquad F(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)),$$

όπου $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η C^2-συνάρτηση

$$\text{(6.2.17)} \quad f(x) := \tfrac{1}{2}(1+x)\log(1+x) + \tfrac{1}{2}(1-x)\log(1-x) \qquad (x \in (-1,1)),$$

και θέτουμε $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n) := (h(x_1), \dots, h(x_n))$, όπου

$$\text{(6.2.18)} \qquad h(x) := \tfrac{1}{2}\log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1-x) \qquad (x \in (-1,1)).$$

Τότε,

$$\nabla F(\vec{x}) = \frac{1}{n}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = \frac{\vec{t}}{n}, \tag{6.2.19}$$

και

$$H_F(\vec{x}) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} (1-x_1^2)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (1-x_n^2)^{-1}\end{pmatrix}, \tag{6.2.20}$$

επομένως,

$$\operatorname{tr}(D_{\vec{x}}) = \frac{1}{\|\vec{t}\|}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2} - \frac{1}{\|\vec{t}\|^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{1-x_i^2} = \frac{1}{\|\vec{t}\|^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{\|\vec{t}\|^2 - t_i^2}{1-x_i^2}. \tag{6.2.21}$$

Ειδικότερα, για $\vec{x} \in (-\gamma, \gamma)^n$,

$$\operatorname{tr}(D_{\vec{x}}) \le \frac{1}{1-\gamma^2}\frac{1}{\|\vec{t}\|^3}\sum_{i=1}^{n}\left(\|\vec{t}\|^2 - t_i^2\right) = \frac{n-1}{1-\gamma^2}\|\vec{t}\|^{-1}, \tag{6.2.22}$$

και αφού $\|\vec{t}\|^2 \ge 2nF(\vec{x}) = 2n\beta$, από την (3.3.26), χρησιμοποιώντας την (6.2.13) βλέπουμε ότι

$$\kappa(\vec{x}) \le (1-\gamma^2)^{-(n-1)}(2n\beta)^{-(n-1)/2},$$

για $\vec{x} \in F^{-1}(\beta)$.

Μπορούμε μάλιστα να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή της $\kappa(\vec{x})$. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $H_F(\vec{x})$ είναι αντιστρέψιμος. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $D_{\vec{x}}$ είναι το

$$p_{D_{\vec{x}}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - D_{\vec{x}}). \tag{6.2.23}$$

Από την (6.2.14), αν αντικαταστήσουμε την πρώτη γραμμή αυτής της ορίζουσας με $\sum_{i=1}^{n} \partial_i F(\vec{x})\, R_i$, όπου R_i είναι η i-οστή γραμμή της ορίζουσας, τότε παίρνουμε

$$p_{D_{\vec{x}}}(\lambda) = \frac{\lambda}{\partial_1 F(\vec{x})}\det(A), \tag{6.2.24}$$

όπου ο πίνακας A έχει τις ίδιες γραμμές με τον $\lambda I_n - D_{\vec{x}}$ εκτός από την πρώτη που στον A είναι $(\nabla F(\vec{x}))^*$. Παρατηρούμε τώρα ότι αφού το 0 είναι ιδιοτιμή του ανάστροφου του $D_{\vec{x}}$, θα είναι και ιδιοτιμή του ίδιου του $D_{\vec{x}}$. Επιπλέον, αν $\vec{v}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 για τον $D_{\vec{x}}$, τότε πρέπει να ισχύει $H_F(\vec{x})\,\vec{v} = c\,\nabla F(\vec{x})$, αφού τα πολλαπλάσια του $\nabla F(\vec{x})$ είναι οι μόνες λύσεις της εξίσωσης

$$\left(\|\nabla F(\vec{x})\|^2 I_n - (\nabla F(\vec{x}))(\nabla F(\vec{x}))^*\right)\vec{v} = \vec{0}. \tag{6.2.25}$$

Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}(\vec{x})$ με $c = 1$, και αντικαθιστούμε την πρώτη στήλη του A με $\sum_{j=1}^{n} v_j(\vec{x})\, C_j$, όπου C_j είναι η j-οστή στήλη της ορίζουσας και

$$\vec{v}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} v_j(\vec{x})\vec{e}_j,$$

δηλαδή $v_1(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x})$ είναι οι συντεταγμένες του $\vec{v}(\vec{x})$ ως προς τη συνήθη βάση. Παίρνουμε έτσι το διάνυσμα $((\vec{v}(\vec{x}))^* \nabla F(\vec{x}), \lambda v_2(\vec{x}), \ldots, \lambda v_n(\vec{x}))^*$ στην πρώτη στήλη, και έπεται ότι

$$p_{D_{\vec{x}}}(\lambda) = \frac{\lambda}{\partial_1 F(\vec{x})\, v_1(\vec{x})} \begin{vmatrix} (\vec{v}(\vec{x}))^* \nabla F(\vec{x}) & \partial_2 F(\vec{x}) & \ldots & \partial_2 F(\vec{x}) \\ \lambda v_2(\vec{x}) & & & \\ \vdots & & A' & \\ \lambda v_n(\vec{x}) & & & \end{vmatrix}, \tag{6.2.26}$$

όπου ο $A' = A'(\lambda)$ είναι ένας $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας, που προκύπτει από τον $\lambda I_n - D_{\vec{x}}$ αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του. Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη βλέπουμε ότι

$$p_{D_{\vec{x}}}(\lambda) = \lambda \, \frac{(\vec{v}(\vec{x}))^* \nabla F(\vec{x})}{\partial_1 F(\vec{x})\, v_1(\vec{x})} \det(A') + \text{όροι τάξης } \lambda^2 \text{ και πάνω.} \tag{6.2.27}$$

Αφού ο $A' = A'(\lambda)$ προκύπτει από τον $\lambda I_n - D_{\vec{x}}$ με διαγραφή της πρώτης γραμμής και της πρώτης στήλης του, μπορούμε να γράψουμε τον $A'(\lambda)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} A'(\lambda) = \lambda I_{n-1} - \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|^3} \big(& \|\nabla F(\vec{x})\|^2 I_{n-1} \\ & - (\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n))(\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n))^* \big) H_{F_{x_1}}(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

όπου, για σταθερό x_1, $F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n)$ είναι η συνάρτηση των $n-1$ που προκύπτουν από το x αν κρατήσουμε την πρώτη συντεταγμένη του σταθερή, οπότε

$$\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = (\partial_2 F(\vec{x}), \ldots, \partial_n F(\vec{x})), \tag{6.2.28}$$

και

$$H_{F_{x_1}}(x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \partial_{22} F(\vec{x}) & \ldots & \partial_{2n}(F(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n2} F(\vec{x}) & \ldots & \partial_{nn}(F(\vec{x}) \end{pmatrix}. \tag{6.2.29}$$

Τότε,

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{(\vec{v}(\vec{x}))^* \nabla F(\vec{x})}{\partial_1 F(\vec{x})\, v_1(\vec{x})} \det(A'(0)), \tag{6.2.30}$$

και

$$\begin{aligned} \det(A'(0)) = & \frac{1}{\|\nabla F(\vec{x})\|^{3(n-1)}} \\ & \times \det\Big(\big(\|\nabla F(\vec{x})\|^2 I_{n-1} - (\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n))(\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n))^* \big) \Big) \\ & \times \det\big(H_{F_{x_1}}(x_2, \ldots, x_n) \big). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα της μεσαίας γραμμής στην παραπάνω σχέση. Είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω p_{n-1}, του πίνακα

$$(\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n))(\nabla F_{x_1}(x_2, \ldots, x_n))^*, \tag{6.2.31}$$

υπολογισμένο στο $\lambda = \|\nabla F(\vec{x})\|^2$. Όμως,

$$p_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda - \|\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)\|^2). \tag{6.2.32}$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής: Κάθε ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$(\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n))(\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n))^*$$

πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)$. Από την άλλη πλευρά, το $\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)$ είναι ιδιοδιάνυσμα αυτού του πίνακα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\|\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)\|^2$, και επιπλέον, αυτός ο πίνακας είναι συμμετρικός, συνεπώς διαγωνοποιείται. Άρα, όλα τα ιδιοδιανύσματα του

$$(\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n))(\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n))^*$$

(με την εξαίρεση του $\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)$) ανήκουν στον ορθογώνιο υπόχωρο του $\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)$, και αντιστοιχούν αναγκαστικά στην ιδιοτιμή 0, γιατί

$$(\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n))(\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n))^* \, \vec{y} = 0 \tag{6.2.33}$$

για κάθε $\vec{y} \perp \nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\det(A'(0)) &= \|\nabla F(\vec{x})\|^{-3(n-1)} \, \|\nabla F(\vec{x})\|^{2(n-2)} \\
&\quad \times (\|\nabla F(\vec{x})\|^2 - \|\nabla F_{x_1}(x_2, \dots, x_n)\|^2) \det\left(H_{F_{x_1}}(x_2, \dots, x_n)\right) \\
&= \|\nabla F(\vec{x})\|^{-(n+1)} \, (\partial_1 F(\vec{x}))^2 \det\left(H_{F_{x_1}}(x_2, \dots, x_n)\right).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\kappa(\vec{x}) = (\vec{v}(\vec{x}))^* \nabla F(\vec{x}) \, \frac{\partial_1 F(\vec{x})}{v_1(\vec{x})} \, \|\nabla F(\vec{x})\|^{-(n+1)} \det\left(H_{F_{x_1}}(x_2, \dots, x_n)\right). \tag{6.2.34}$$

Τέλος, αφού υποθέσαμε ότι ο $H_F(\vec{x})$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε

$$\vec{v} = (H_F(\vec{x}))^{-1} \nabla F(\vec{x}), \tag{6.2.35}$$

άρα

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{(\nabla F(\vec{x}))^* (H_F(\vec{x}))^{-1} \nabla F(\vec{x})}{\|\nabla F(\vec{x})\|^{n+1}} \, \frac{\partial_1 F(\vec{x})}{v_1(\vec{x})} \det\left(H_{F_{x_1}}(x_2, \dots, x_n)\right). \tag{6.2.36}$$

Παρατηρήστε ότι υποθέσαμε σιωπηρά ότι $v_1(\vec{x}) \, \partial_1 F(\vec{x}) \neq 0$ στο προηγούμενο επιχείρημα. Αυτό μπορεί να γίνει χωρίς περιορισμό της γενικότητας αν ο $H_F(\vec{x})$ είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος για τον εξής λόγο: Αφού ο $H_F(\vec{x})$ έχει υποτεθεί αντιστρέψιμος και $\nabla F(\vec{x}) \neq 0$, έχουμε

$$(\vec{v}(\vec{x}))^* \nabla F(\vec{x}) = (\nabla F(\vec{x}))^* (H_F(\vec{x}))^{-1} \nabla F(\vec{x}) \neq 0. \tag{6.2.37}$$

Άρα το $v_i(\vec{x}) \, \partial_i F(\vec{x})$ *θα είναι* $\neq 0$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$, και τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη στο παραπάνω επιχείρημα με την i-οστή γραμμή και την i-οστή στήλη, χωρίς καμία αλλαγή.

Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση που ο $H_F(\vec{x})$ είναι διαγώνιος, δηλαδή, $H_F(\vec{x}) = \mathrm{diag}\big(\partial_{11}F(\vec{x})\ldots,\partial_{nn}F_(\vec{x})\big)$. Τότε, η σχέση (6.2.36) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{\det\left(H_F(\vec{x})\right)}{\|\nabla F(\vec{x})\|^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\partial_i F(\vec{x}))^2}{\partial_{ii}F(\vec{x})}. \tag{6.2.38}$$

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που ο $H_F(\vec{x})$ δεν υποτίθεται ορισμένος ή διαγώνιος. Τέλος, όταν ο $H_F(\vec{x})$ είναι μη αντιστρέψιμος, τότε πρέπει εύκολα να ελέγχεται ότι $\kappa(\vec{x}) = 0$.

Για παράδειγμα, η καμπυλότητα της επιφάνειας $F^{-1}(\beta)$ σε ένα από τα σημεία της $\vec{x}$ (όπου η F ορίζεται όπως στην (6.2.16)), δίνεται από την

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{1}{\|\,\vec{t}\,\|^{n+1}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i^2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2(1-x_i^2). \tag{6.2.39}$$

Συγκρίνοντας αυτήν την ισότητα με την ανισότητα

$$\kappa(\vec{x}) \geq \frac{1}{(1-\gamma^2)^{n-1}\|\vec{t}\|^{n-1}} \tag{6.2.40}$$

στην οποία μας οδήγησε η ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου $\det(W_{\vec{x}}) \leq ((n-1)^{-1}\mathrm{tr}(W_{\vec{x}}))^{n-1}$, βλέπουμε ότι δεν κερδίζουμε κάτι από τον ακριβή υπολογισμό της καμπυλότητας, αφού το $\gamma \in (0,1)$ – άρα και τα x_i – έχουν υποτεθεί αρκετά μικρά.

Κεφάλαιο 7

0/1–πολύτοπα με πολλές έδρες

7.1 Απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.1.2.

Θεώρημα 1.1.2. *Υπάρχουν θετικές σταθερές a και b με την εξής ιδιότητα: για αρκετά μεγάλα n, και για όλα τα N που ικανοποιούν την $n^a \leq N \leq \exp(bn)$, ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}\left[f_{n-1}(K_N)\right] \geq \left(\frac{\log N}{a\log n}\right)^{n/2}. \tag{7.1.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο και θέτουμε $b = c(\gamma)/2$, όπου $c(\gamma) > 0$ είναι η σταθερά στο Θεώρημα 6.1.1.

Για δοθέν N που ικανοποιεί την $n^8 \leq N \leq \exp\big(bn\big)$, θέτουμε $\alpha = \log N/n$ και θεωρούμε την σταθερά $\gamma \in (0,1)$ του Ορισμού 4.2.2. Από το Λήμμα 5.1.7 υπάρχει $\delta \leq 6/n$ τέτοιο ώστε το K_N να ικανοποιεί την

$$|\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C \cap K_N| \leq \tfrac{1}{2}|\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C| \tag{7.1.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 10^{-2}$. Από το Θεώρημα 4.2.3, υπάρχει $\varepsilon \leq 3\log n/n$ ώστε το K_N να ικανοποιεί την

$$K_N \supset F^{\alpha-2\varepsilon} \cap \gamma C \tag{7.1.3}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2^{-n+1}$.

Έστω $\mathcal{E}$ το ενδεχόμενο να ικανοποιεί το K_N τις (7.1.2) και (7.1.3). Τότε, $\mathrm{Prob}(\mathcal{E}) \geq 1 - 10^{-2} - 2^{-n+1}$,

Εφαρμόζουμε τώρα την Πρόταση 6.1.10 με $\beta = \alpha - 2\varepsilon$ και $\varepsilon = 2\varepsilon + \delta$: Αν A είναι μια έδρα του K_N και H_A είναι ο αντίστοιχος ημίχωρος (που έχει εσωτερικό ξένο προς το K_N), τότε

$$|\partial(F^{\alpha+\delta}) \cap \gamma C \cap H_A| \leq \big(2(2\varepsilon+\delta)n\big)^{(n-1)/2}|S^{n-1}|. \tag{7.1.4}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} f_{n-1}(K_N)\,\big(2(2\varepsilon+\delta)n\big)^{(n-1)/2}\,|S^{n-1}| &\geq \sum_A |\partial(F^{\alpha+\delta})\cap\gamma C\cap H_A| \\ &\geq \big|\big(\partial(F^{\alpha+\delta})\cap\gamma C\big)\setminus K_N\big| \\ &\geq \tfrac{1}{2}|\partial(F^{\alpha+\delta})\cap\gamma C| \end{aligned}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.1.1 με $\beta=\alpha+\delta$ παίρνουμε

(7.1.5) $$f_{n-1}(K_N)\,\big(2(2\varepsilon+\delta)n\big)^{(n-1)/2} \geq \big(c(\gamma)\sqrt{\alpha n}\big)^{n-1}.$$

Αφού $\alpha n=\log N$ και $(2\varepsilon+\delta)n\leq 12\log n$, συμπεραίνουμε ότι

(7.1.6) $$f_{n-1}(K_N)\geq\left(\frac{c_1(\gamma)\log N}{\log n}\right)^{n/2}$$

στο $\mathcal{E}$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Άμεση συνέπεια είναι η ύπαρξη 0/1 πολυτόπων με «πολλές έδρες».

Θεώρημα 1.1.1. *Υπάρχει σταθερά $c>0$ με την ιδιότητα*

(7.1.7) $$g(n)\geq\left(\frac{cn}{\log n}\right)^{n/2}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.1.2 με $N\geq\exp\big(c_1 n\big)$ όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Υπάρχει λοιπόν N με την ιδιότητα

(7.1.9) $$\mathbb{E}\left[f_{n-1}(K_N)\right]\geq\left(\frac{\log N}{a\log n}\right)^{n/2}\geq\left(\frac{c_2 n}{\log n}\right)^{n/2}.$$

Συνεπώς, υπάρχει ένα 0/1 πολύτοπο P στον $\mathbb{R}^n$ με

(7.1.10) $$f_{n-1}(P)\geq\left(\frac{c_2 n}{\log n}\right)^{n/2},$$

κι αυτό δίνει το κάτω φράγμα μας για την $g(n)$. □

Μέρος II

Το πρόβλημα του Sylvester στο επίπεδο

Κεφάλαιο 8

Το γενικό πρόβλημα του Sylvester στο επίπεδο

8.1 Το πρόβλημα

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$. Σταθεροποιούμε $n \geq d+1$ και θεωρούμε n ανεξάρτητα τυχαία σημεία $y_1, \ldots, y_n$, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$C := C(K,n) = \frac{|\mathrm{conv}\{y_1, \ldots, y_n\}|}{|K|} \tag{8.1.1}$$

όπου $|\cdot|$ είναι ο όγκος στον $\mathbb{R}^d$. Με άλλα λόγια, C είναι ο κανονικοποιημένος όγκος του τυχαίου πολυτόπου $\mathrm{conv}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Παρατηρήστε ότι η κατανομή της C είναι αναλλοίωτη ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς του «περιβάλλοντος σώματος» K. Μπορούμε λοιπόν στη συνέχεια να υποθέτουμε ότι $|K| = 1$.

Το πρόβλημα του Sylvester διατυπώνεται ως εξής: δοθέντων των d και $n \geq d+1$, να βρεθούν τα κυρτά σώματα K στον $\mathbb{R}^d$ (ακριβέστερα, οι αφφινικές κλάσεις κυρτών σωμάτων) για τα οποία μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται η μέση τιμή $\mathbb{E}\,[C(K,n)]$. Γενικότερα, για κάθε γνησίως αύξουσα, συνεχή συνάρτηση $H : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ να βρεθούν τα κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$ για τα οποία μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται η μέση τιμή

$$\mathbb{E}\,\big[H\big(C(K,n)\big)\big] := \int_K \cdots \int_K H\big(|\mathrm{conv}\{y_1, \ldots, y_n\}|\big)\, dy_n \cdots dy_1. \tag{8.1.2}$$

Απλά επιχειρήματα συμπάγειας δείχνουν ότι υπάρχουν κυρτά σώματα στα οποία πιάνονται οι ακραίες τιμές της $\mathbb{E}\,\big[H\big(C(K,n)\big)\big]$.

Το πρόβλημα του ελαχίστου για την $\mathbb{E}\,[C(K,n)^p]$, $p \geq 1$ λύθηκε από τον Groemer στις εργασίες [19], [20]: για κάθε $d \geq 2$ και κάθε $n \geq d+1$,

$$\mathbb{E}\,[C(K,n)^p] \geq \mathbb{E}\,\big[C(B_2^d,n)^p\big] \tag{8.1.3}$$

όπου B_2^d η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές. Η απόδειξη χρησιμοποιεί τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner, μέθοδο που είχε χρησιμοποιήσει ο Blaschke [5], [6] για το κλασικό πρόβλημα του Sylvester (περίπτωση $d = 2$, $n = 3$, $p = 1$). Στην [18], με μια προσεκτική χρήση αυτής της μεθόδου, αποδεικνύεται τελικά ότι αν $S(K)$ είναι η συμμετρικοποίηση κατά Steiner του K ως προς τυχούσα διεύθυνση, τότε

$$\mathbb{E}\left[H\big(C(K,n)\big)\right] \geq \mathbb{E}\left[H\big(C(S(K),n)\big)\right] \tag{8.1.4}$$

για κάθε γνησίως αύξουσα, συνεχή συνάρτηση $H : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ με $H(0) = 0$. Έπεται ότι το ελάχιστο της $\mathbb{E}\left[H\big(C(K,n)\big)\right]$ πιάνεται στα ελλειψοειδή και μάλιστα με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές. Για περαιτέρω επεκτάσεις αυτού του αποτελέσματος, με αντικατάσταση του όγκου από τυχόν quermassintegral του τυχαίου πολυτόπου $\mathrm{conv}\{y_1,\ldots,y_n\}$, παραπέμπουμε στην [21].

Το πρόβλημα του μεγίστου είναι τελείως ανοικτό, εκτός από την περίπτωση του επιπέδου ($d = 2$). Ο Blaschke, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό "Schüttelung" έδειξε ότι $\mathbb{E}\left[C(K,3)\right] \leq \mathbb{E}\left[C(T,3)\right]$ όπου T τρίγωνο, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο. Πολύ αργότερα, οι Δάλλα και Larman [9] έδειξαν ότι αν $d = 2$, τότε

$$\mathbb{E}\left[C(K,n)\right] \leq \mathbb{E}\left[C(T,n)\right] \tag{8.1.5}$$

για κάθε $n \geq 3$, με γνήσια ανισότητα αν το K είναι πολύγωνο με περισσότερες από τρεις κορυφές. Η πλήρης απάντηση στην περίπτωση του επιπέδου δόθηκε στην [16], όπου αποδεικνύεται ότι αν K είναι ένα κυρτό χωρίο στο επίπεδο και το K δεν είναι τρίγωνο, τότε

$$\mathbb{E}\left[C(K,n)\right] < \mathbb{E}\left[C(T,n)\right] \tag{8.1.6}$$

για κάθε $n \geq 3$. Με άλλα λόγια, η μοναδική αφφινική κλάση που μεγιστοποιεί την ποσότητα $\mathbb{E}\left[C(K,n)\right]$ είναι η κλάση των τριγώνων.

Στην §9.1 δείχνουμε ότι το αποτέλεσμα του Blaschke για το αρχικό πρόβλημα του Sylvester στο επίπεδο ($d = 2$ και $n = 3$) επεκτείνεται στην περίπτωση τυχούσας συνεχούς και αύξουσας συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω $H : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0) = 0$. Αν K είναι ένα κυρτό χωρίο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, τότε*

$$\mathbb{E}\left[H\big(C(K,3)\big)\right] \leq \mathbb{E}\left[H\big(C(\Delta,3)\big)\right] \tag{8.1.7}$$

όπου Δ είναι ένα τρίγωνο, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο.

Μελετάμε επίσης την «συμμετρική περίπτωση» του προβλήματος του Sylvester στο επίπεδο. Θεωρούμε ένα συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων κυρτό χωρίο K στον $\mathbb{R}^2$, σταθεροποιούμε $n \geq 3$ και επιλέγουμε n τυχαία σημεία $y_1,\ldots,y_n$, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K. Όπως πριν, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $C := C(K,n)$, αλλά και την τυχαία μεταβλητή

$$T := T(K,n) = \frac{|\mathrm{conv}\{\pm y_1,\ldots,\pm y_n\}|}{|K|}. \tag{8.1.8}$$

Το πρόβλημα είναι τώρα το εξής: για κάθε γνησίως αύξουσα, συνεχή συνάρτηση $H : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $H(0) = 0$, να βρεθούν οι αφφινικές κλάσεις συμμετρικών κυρτών χωρίων για τις οποίες μεγιστοποιείται η μέση τιμή $\mathbb{E}\,\big[H\big(T(K,n)\big)\big]$ ή, αντίστοιχα, η μέση τιμή $\mathbb{E}\,\big[H\big(C(K,n)\big)\big]$. Ο «προφανής υποψήφιος» σε αυτή την περίπτωση είναι η κλάση των παραλληλογράμμων. Το γεγονός ότι τα παραλληλόγραμμα είναι λύσεις του προβλήματος για κάθε $n \geq 2$ αποδείχθηκε από τον Meckes [27], με την πρόσθετη όμως υπόθεση ότι η H είναι κυρτή. Η μοναδικότητα δεν έχει αποδειχθεί ούτε σε αυτήν την περίπτωση. Μια πολύ ειδική περίπτωση ($n = 2$ και $H(t) = t$ ή $H(t) = t^2$) αντιμετωπίζεται πλήρως στην εργασία [4].

Στην §9.2 αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 8.1.2. *Έστω $H : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0) = 0$. Αν K είναι ένα κυρτό χωρίο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, τότε*

$$\mathbb{E}\,\big[H\big(T(K,2)\big)\big] \leq \mathbb{E}\,\big[H\big(T(P,2)\big)\big] \tag{8.1.9}$$

όπου P είναι ένα παραλληλόγραμμο, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι παραλληλόγραμμο.

Κεφάλαιο 9

Η περίπτωση των τριών σημείων

Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου είναι τα εξής.

(i) Έστω $H : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0) = 0$. Αν K είναι ένα κυρτό χωρίο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, τότε

$$\mathbb{E}\,\left[H\big(C(K,3)\big)\right] \leq \mathbb{E}\,\left[H\big(C(\Delta,3)\big)\right]$$

όπου Δ είναι ένα τρίγωνο, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο.

(ii) Έστω $H : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0) = 0$. Αν K είναι ένα κυρτό χωρίο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, τότε

$$\mathbb{E}\,\left[H\big(T(K,2)\big)\right] \leq \mathbb{E}\,\left[H\big(T(P,2)\big)\right]$$

όπου P είναι ένα παραλληλόγραμμο, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι παραλληλόγραμμο.

Για την απόδειξη των δύο Θεωρημάτων δείχνουμε τις εξής ανισότητες σχετικά με την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $C(K,3)$ και $T(K,2)$:

(i) Αν K_1 είναι ο μετασχηματισμός Schüttelung του K, τότε

$$A_K(\alpha) := \mathrm{Prob}\{C(K,3) \leq \alpha\} \geq \mathrm{Prob}\{C(K_1,3) \leq \alpha\} = A_{K_1}(\alpha)$$

για κάθε $\alpha > 0$.

(ii) Αν το K έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και K_2 είναι ο «συμμετρικός» μετασχηματισμός Schüttelung του K, τότε

$$B_K(\alpha) := \mathrm{Prob}\{T(K,2) \leq \alpha\} \geq \mathrm{Prob}\{T(K_2,2) \leq \alpha\} = B_{K_2}(\alpha)$$

για κάθε $\alpha > 0$.

9.1 Κατανομή του εμβαδού ενός τυχαίου τριγώνου

Έστω K ένα κυρτό χωρίο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με εμβαδόν $|K| = 1$, και έστω ℓ τυχούσα ευθεία του επιπέδου. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ell = \{y = (x,s) \in \mathbb{R}^2 : s = 0\}$. Μπορούμε να γράψουμε το K στη μορφή

$$K = \{y = (x,s) : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq t \leq g(x)\}, \tag{9.1.1}$$

όπου $a < b$, η f είναι κυρτή, η g είναι κοίλη, και $f \leq g$ στο $[a,b]$.

Έστω $H : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ μια γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0) = 0$. Γράφουμε

$$\mathbb{E}\ \big[H\big(C(K,3)\big)\big] = \int_a^b \int_a^b \int_a^b M_{K,H}(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \tag{9.1.2}$$

όπου
(9.1.3)

$$M_{K,H}(x_1,x_2,x_3) = \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \int_{f(x_2)}^{g(x_2)} \int_{f(x_3)}^{g(x_3)} H\big(|\mathrm{conv}\{(x_i,s_i) : i \leq 3\}|\big)\ ds_3ds_2ds_1.$$

Σταθεροποιούμε $x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} X &= (x_1,x_2,x_3),\\ Q = Q(X) &= \prod_{i=1}^{3}[f(x_i),g(x_i)],\\ U = U(X) &= (x_3-x_2,x_1-x_3,x_2-x_1). \end{aligned}$$

Για κάθε $S = (s_1,s_2,s_3) \in Q$ έχουμε

$$|\mathrm{conv}\{(x_1,s_1),(x_2,s_2),(x_3,s_3)\}| = \frac{|\det(X,S,E)|}{2} = \frac{|\langle S,U\rangle|}{2} \tag{9.1.4}$$

όπου $E = (1,1,1)$, συνεπώς,

$$M_{K,H}(X) = \int_Q H\left(\frac{|\langle S,U\rangle|}{2}\right) dS \tag{9.1.5}$$

Ο μετασχηματισμός Schüttelung (ως προς την ℓ) απεικονίζει το K στο χωρίο

$$K_1 = \{y = (x,s) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq t \leq g(x) - f(x)\}. \tag{9.1.6}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το K_1 είναι κυρτό και έχει εμβαδόν $|K_1| = |K| = 1$. Δοθέντων των $x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$ όπως παραπάνω, θέτουμε

$$Q_1 = Q_1(X) = \prod_{i=1}^{3}[0,g(x_i)-f(x_i)].$$

Πρόταση 9.1.1. *Έστω $x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η*

$$|Q \cap \{S : |\langle S,U\rangle| \leq \alpha\}| \geq |Q_1 \cap \{S : |\langle S,U\rangle| \leq \alpha\}|. \tag{9.1.7}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το συμμετρικό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{3}[-c_i, c_i]$, όπου $c_i = \big(g(x_i) - f(x_i)\big)/2$. Αν θέσουμε

$$G = (g(x_1), g(x_2), g(x_3)) \;\; \text{και} \;\; F = (f(x_1), f(x_2), f(x_3)),$$

τότε

$$Q = \mathcal{C} + W \;\; \text{και} \;\; Q_1 = \mathcal{C} + W_1 \tag{9.1.8}$$

όπου

$$W = \frac{G+F}{2} \;\; \text{και} \;\; W_1 = \frac{G-F}{2}. \tag{9.1.9}$$

Έστω $\alpha > 0$. Αφού το εμβαδόν είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, η (9.1.7) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$|\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W, U\rangle| \leq \alpha\}| \geq |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W_1, U\rangle| \leq \alpha\}|. \tag{9.1.10}$$

Λήμμα 9.1.2. *Η συνάρτηση $L_\alpha : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται από την*

$$L_\alpha(\rho) = |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \rho| \leq \alpha\}| \tag{9.1.11}$$

είναι άρτια και φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Απόδειξη του Λήμματος. Αφού το $\mathcal{C}$ είναι συμμετρικό, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle - \rho| \leq \alpha\} = -\left(\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \rho| \leq \alpha\}\right). \tag{9.1.12}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η L_α είναι άρτια. Επίσης, αν $\lambda \in (0,1)$ και $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{supp}(L_\alpha)$, τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2| \leq \alpha\} \supseteq \lambda\big(\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \rho_1| \leq \alpha\}\big) \\ + (1-\lambda)\big(\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \rho_2| \leq \alpha\}\big).\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski (βλέπε [32]), η $\sqrt[3]{L_\alpha}$ είναι κοίλη στο φορέα της. Αφού είναι και άρτια, έπεται το ζητούμενο. □

Παρατηρήστε ότι η (9.1.10) ισχυρίζεται ότι $L_\alpha(\langle W, U\rangle) \geq L_\alpha(\langle W_1, U\rangle)$. Λόγω του Λήμματος, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$|\langle G+F, U\rangle| = 2|\langle W, U\rangle| \leq 2|\langle W_1, U\rangle| = |\langle G-F, U\rangle|. \tag{9.1.13}$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$\langle G, U\rangle\langle F, U\rangle \leq 0. \tag{9.1.14}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το ότι η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη, βλέπουμε αμέσως ότι οι $\langle G, U\rangle$ και $\langle F, U\rangle$ έχουν αντίθετα πρόσημα. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης 9.1.1. □

Θεώρημα 9.1.3. *Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η*

$$A_K(\alpha) = \mathrm{Prob}\big(C(K,3) \leq \alpha\big) \geq \mathrm{Prob}\big(C(K_1,3) \leq \alpha\big) = A_{K_1}(\alpha). \tag{9.1.15}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, από την (9.1.4),

(9.1.16)
$$\mathrm{Prob}\big(C(K,3)\leq\alpha\big)=\int_a^b\int_a^b\int_a^b|Q(X)\cap\{S:|\langle S,U(X)\rangle|\leq 2\alpha\}|dx_3dx_2dx_1.$$

Το Θεώρημα είναι λοιπόν άμεση συνέπεια της Πρότασης 9.1.1. □

Θεώρημα 9.1.4. *Έστω $H:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ μια γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0)=0$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\left[H\big(C(K,3)\big)\right]\leq\mathbb{E}\left[H\big(C(K_1,3)\big)\right]. \tag{9.1.17}$$

Απόδειξη. Αφού η H είναι γνησίως αύξουσα, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}\left[H\big(C(K,3)\big)\right]=\int_0^\infty\mathrm{Prob}\big(C(K,3)\geq H^{-1}(t)\big)dt. \tag{9.1.18}$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.1.3. □

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.1 αρκεί να ελέγξουμε ότι αν το K δεν είναι τρίγωνο τότε δεν μπορεί να μεγιστοποιεί την $\mathbb{E}\left[H\big(C(\cdot,3)\big)\right]$. Αυτός ο ισχυρισμός είναι συνέπεια της επόμενης Πρότασης.

Πρόταση 9.1.5. *Έστω K ένα κυρτό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$. Αν το K δεν είναι τρίγωνο, τότε μπορούμε να βρούμε ευθεία ℓ που ικανοποιεί την*

$$\mathbb{E}\left[H\big(C(K,3)\big)\right]<\mathbb{E}\left[H\big(C(K_1,3)\big)\right] \tag{9.1.19}$$

για κάθε γνησίως αύξουσα συνεχή συνάρτηση $H:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ με $H(0)=0$, όπου K_1 είναι ο μετασχηματισμός Schüttelung του K ως προς την ℓ.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το K έχει περισσότερα από τρία ακραία σημεία. Τότε, υπάρχει κυρτό τετράπλευρο $z_1z_2z_3z_4$ που όλες οι κορυφές του είναι ακραία σημεία του K. Επιλέγουμε σαν ℓ μια ευθεία που είναι κάθετη στη διαγώνιο z_1z_3.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ℓ είναι ο x-άξονας και να γράψουμε το K στη μορφή (9.1.1). Από την επιλογή της ℓ, αν $(x_*,0)$ είναι η προβολή των z_1 και z_3 στην ℓ έχουμε $a<x_*<b$.

Λήμμα 9.1.6. *Έστω $a<x_1<x_2=x_*<x_3<b$. Τότε, υπάρχει $\alpha(X)>0$ με την ιδιότητα*

$$|Q(X)\cap\{S:|\langle S,U(X)\rangle|\leq\alpha\}|>|Q_1(X)\cap\{S:|\langle S,U(X)\rangle|\leq\alpha\}| \tag{9.1.20}$$

για κάθε $0<\alpha<\alpha(X)$.

Απόδειξη του Λήμματος. Θα δείξουμε ότι

$$|\mathcal{C}\cap\{S:|\langle S,U\rangle+\langle W,U\rangle|\leq\alpha\}|>|\mathcal{C}\cap\{S:|\langle S,U\rangle+\langle W_1,U\rangle|\leq\alpha\}| \tag{9.1.21}$$

αν ο $\alpha>0$ είναι αρκετά μικρός. Θεωρούμε την συνάρτηση $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$m(t)=|\mathcal{C}\cap(U^\perp+tU/u)|, \tag{9.1.22}$$

όπου u είναι το μήκος του U. Αν θέσουμε $\rho = |\langle W, U\rangle|$ και $\rho_1 = |\langle W_1, U\rangle|$ τότε $\rho \leq \rho_1$ από την (9.1.13). Επιπλέον, οι υποθέσεις μας εξασφαλίζουν ότι η ανισότητα είναι γνήσια: χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα z_1 και z_3 είναι ακραία σημεία του K, βλέπουμε ότι $\langle G, U\rangle < 0$ και $\langle F, U\rangle > 0$, άρα η ανισότητα στην (9.1.14) είναι γνήσια.

Παρατηρήστε επίσης ότι τα $\pm W_1$ είναι κορυφές του $\mathcal{C}$. Αυτό έχει σαν συνέπεια το ότι η m είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\rho_1/u] \cap \mathrm{supp}(m)$, σταθερή στο $[-\rho_1/u, \rho_1/u]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_1/u, +\infty) \cap \mathrm{supp}(m)$. Τώρα, λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W_1, U\rangle| \leq \alpha\}| = \int_{(-\alpha-\rho_1)/u}^{(\alpha-\rho_1)/u} m(t)dt \tag{9.1.23}$$

και

$$\begin{aligned} |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W, U\rangle| \leq \alpha\}| &= \int_{(-\alpha-\rho)/u}^{(\alpha-\rho)/u} m(t)dt \\ &= \int_{(-\alpha-\rho_1)/u}^{(\alpha-\rho_1)/u} m(t + (\rho_1 - \rho)/u)dt. \end{aligned}$$

Αφού $m(t+(\rho_1-\rho)/u) < m(t)$ στο $[(-\alpha-\rho_1)/u, -\rho_1/u]$, παίρνουμε το ζητούμενο για κάθε $\alpha < \alpha(X) := \rho_1$. □

9.2 Κατανομή του εμβαδού ενός τυχαίου παραλληλογράμμου

Εξετάζουμε τώρα το αντίστοιχο πρόβλημα στην συμμετρική περίπτωση. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ με $|K| = 1$. Αν $\ell = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 : s = 0\}$, μπορούμε να γράφουμε

$$K = \{y = (x, s) : -b \leq x \leq b,\ f(x) \leq s \leq g(x)\}, \tag{9.2.1}$$

όπου $b > 0$, η f είναι κυρτή, η g είναι κοίλη, $f \leq g$ και $f(-x) = -g(x)$ για κάθε $x \in [-b, b]$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\left[H\big(T(K, 2)\big)\right] = 4\int_0^b \int_0^b N_{K,H}(x_1, x_2)dx_2dx_1 \tag{9.2.2}$$

όπου

$$N_{K,H}(x_1, x_2) = \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \int_{f(x_2)}^{g(x_2)} H\big(|\mathrm{conv}\{\pm(x_1, s_1), \pm(x_2, s_2)\}|\big)\, ds_2 ds_1. \tag{9.2.3}$$

Σταθεροποιούμε $x_1, x_2 \in [0, b]$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2), \\ Q = Q(X) &= \prod_{i=1}^{2} [f(x_i), g(x_i)], \\ U = U(X) &= (-x_2, x_1). \end{aligned}$$

Για κάθε $S = (s_1, s_2) \in Q$ έχουμε

$$|\mathrm{conv}\{\pm(x_1, s_1), \pm(x_2, s_2)\}| = 2|\langle S, U\rangle|, \tag{9.2.4}$$

συνεπώς,

$$N_{K,H}(X) = \int_Q H\big(2|\langle S, U\rangle|\big)dU. \tag{9.2.5}$$

Ο «συμμετρικός» μετασχηματισμός Schüttelung (ως προς την ℓ) απεικονίζει το K στο χωρίο

$$K_2 = \{y = (x, s) : -b \leq x \leq b,\ f_2(x) \leq s \leq g_2(x)\}, \tag{9.2.6}$$

όπου

$$g_2(x) = f(0) + g(x) - f(x) \text{ στο } [0, b] \text{ και } g_2(x) = g(0) \text{ στο } [-b, 0], \tag{9.2.7}$$

ενώ

$$f_2(x) = f(0) \text{ στο } [0, b] \text{ και } f_2(x) = f(x) - g(x) - f(0) \text{ στο } [-b, 0]. \tag{9.2.8}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το K_2 είναι κυρτό, συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων, με εμβαδόν $|K_2| = |K| = 1$. Δοθέντων των $x_1, x_2 \in [0, b]$ όπως παραπάνω, θέτουμε

$$Q_2 = Q_2(X) = \prod_{i=1}^{2}[f(0), f(0) + g(x_i) - f(x_i)].$$

Πρόταση 9.2.1. *Έστω $x_1, x_2 \in [0, b]$. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η*

$$|Q \cap \{S : |\langle S, U\rangle| \leq \alpha\}| \geq |Q_2 \cap \{S : |\langle S, U\rangle| \leq \alpha\}|. \tag{9.2.9}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $c_i = \big(g(x_i) - f(x_i)\big)/2$ και θεωρούμε το συμμετρικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{2}[-c_i, c_i]$. Αν θέσουμε

$$E = (1, 1),\ \ G = (g(x_1), g(x_2)) \text{ και } F = (f(x_1), f(x_2)),$$

έχουμε

$$Q = \mathcal{C} + W \text{ και } Q_2 = \mathcal{C} + W_2 \tag{9.2.10}$$

όπου

$$W = \frac{G + F}{2} \text{ και } W_2 = \frac{G - F + 2f(0)E}{2}. \tag{9.2.11}$$

Έστω $\alpha > 0$. Τότε, η (9.2.9) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$|\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W, U\rangle| \leq \alpha\}| \geq |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W_2, U\rangle| \leq \alpha\}|. \tag{9.2.12}$$

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 9.1.1, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $D_\alpha : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που ορίζεται από την

$$D_\alpha(\rho) = |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \rho| \leq \alpha\}| \tag{9.2.13}$$

είναι άρτια και φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ (η απόδειξη είναι εντελώς όμοια με αυτήν του Λήμματος 9.1.2). Παρατηρήστε ότι η (9.2.12) ισχυρίζεται ότι $D_\alpha(\langle W,U\rangle) \geq D_\alpha(\langle W_2,U\rangle)$. Επομένως, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$|\langle G+F,U\rangle| = 2|\langle W,U\rangle| \leq 2|\langle W_2,U\rangle| = |\langle G-F+2f(0)E,U\rangle|. \tag{9.2.14}$$

Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$h(G,X)h(F,X) \leq 0, \tag{9.2.15}$$

όπου

$$h(G,X) = \langle G,U\rangle - g(0)\langle E,U\rangle = g(x_2)x_1 + g(0)(x_2-x_1) - g(x_1)x_2 \tag{9.2.16}$$

(όμοια για την $h(F,X)$). Όμως, χρησιμοποιώντας το ότι η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη, βλέπουμε αμέσως ότι οι $h(G,X)$ και $h(F,X)$ έχουν αντίθετα πρόσημα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης. □

Όπως στην §9.1, μπορούμε να συγκρίνουμε τις συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $T(K,2)$ και $T(K_2,2)$.

Θεώρημα 9.2.2. *Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει η*

$$\mathrm{Prob}\big(T(K,2) \leq \alpha\big) \geq \mathrm{Prob}\big(T(K_2,2) \leq \alpha\big). \tag{9.2.17}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $\mathbb{E}\,[H(T(\cdot,2))]$ αυξάνει αν εφαρμόσουμε τον «συμμετρικό» μετασχηματισμό Schüttelung.

Θεώρημα 9.2.3. *Έστω $H:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ μια γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $H(0)=0$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\,\big[H\big(T(K,2)\big)\big] \leq \mathbb{E}\,\big[H\big(T(K_2,2)\big)\big]. \tag{9.2.18}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2 αρκεί να ελέγξουμε ότι αν το K δεν είναι παραλληλόγραμμο τότε δεν μπορεί να μεγιστοποιεί την $\mathbb{E}\,\big[H\big(T(\cdot,2)\big)\big]$. Αυτό είναι συνέπεια της επόμενης Πρότασης

Πρόταση 9.2.4. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$. Αν το K δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε μπορούμε να βρούμε ευθεία ℓ που ικανοποιεί την*

$$\mathbb{E}\,\big[H\big(T(K,2)\big)\big] < \mathbb{E}\,\big[H\big(T(K_2,2)\big)\big] \tag{9.2.19}$$

για κάθε γνησίως αύξουσα, συνεχή συνάρτηση $H:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ με $H(0)=0$, όπου K_2 είναι ο «συμμετρικός» μετασχηματισμός Schüttelung του K ως προς την ℓ.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το K έχει περισσότερα από τέσσερα ακραία σημεία. Τότε, υπάρχει ένα κυρτό εξάγωνο $z_1z_2z_3z_4z_5z_6$ που όλες οι κορυφές του είναι ακραία σημεία του K. Επιλέγουμε σαν ℓ την ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην διαγώνιο z_1z_3 αυτού του εξαγώνου.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ℓ είναι ο x-άξονας και να γράψουμε το K στη μορφή (9.2.1). Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η προβολή $(x_*,0)$ των z_1 και z_3 στην ℓ ικανοποιεί την $0<x_*<b$.

Λήμμα 9.2.5. *Έστω $0 < x_1 = x_* < x_2 < b$. Τότε, υπάρχει $\alpha(X) > 0$ τέτοιος ώστε*

$$|Q(X) \cap \{S : |\langle S, U(X)\rangle| \leq \alpha\}| > |Q_2(X) \cap \{S : |\langle S, U(X)\rangle| \leq \alpha\}| \tag{9.2.20}$$

για κάθε $0 < \alpha < \alpha(X)$.

Απόδειξη του Λήμματος. Θα δείξουμε ότι

$$|\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W, U\rangle| \leq \alpha\}| > |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W_2, U\rangle| \leq \alpha\}| \tag{9.2.21}$$

αν ο $\alpha > 0$ είναι αρκετά μικρός. Θεωρούμε την συνάρτηση $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$m(t) = |\mathcal{C} \cap (U^{\perp} + tU/u)|, \tag{9.2.22}$$

όπου u είναι το μήκος του U. Αν θέσουμε $\rho = |\langle W, U\rangle|$ και $\rho_2 = |\langle W_1, U\rangle|$ τότε $\rho \leq \rho_2$ από την (9.2.14). Επιπλέον, από τις υποθέσεις μας έπεται ότι η ανισότητα είναι γνήσια: χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα z_1 και z_3 είναι ακραία σημεία του K, βλέπουμε ότι $h(G, X) < 0$ και $h(F, X) > 0$, άρα η ανισότητα στην (9.2.15) είναι γνήσια.

Παρατηρήστε επίσης ότι τα $\pm W_2$ είναι κορυφές του $\mathcal{C}$. Αυτό έχει σαν συνέπεια το ότι η m είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\rho_2/u] \cap \mathrm{supp}(m)$, σταθερή στο $[-\rho_2/u, \rho_2/u]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_2/u, +\infty) \cap \mathrm{supp}(m)$. Τώρα, λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W_2, U\rangle| \leq \alpha\}| = \int_{(-\alpha-\rho_2)/u}^{(\alpha-\rho_2)/u} m(t)dt \tag{9.2.23}$$

και

$$\begin{aligned} |\mathcal{C} \cap \{S : |\langle S, U\rangle + \langle W, U\rangle| \leq \alpha\}| &= \int_{(-\alpha-\rho)/u}^{(\alpha-\rho)/u} m(t)dt \\ &= \int_{(-\alpha-\rho_2)/u}^{(\alpha-\rho_2)/u} m(t + (\rho_2 - \rho)/u)dt. \end{aligned}$$

Αφού $m(t+(\rho_2-\rho)/u) < m(t)$ στο $[(-\alpha-\rho_2)/u, -\rho_2/u]$, παίρνουμε το ζητούμενο για κάθε $0 < \alpha < \alpha(X) := \rho_2$. □

Βιβλιογραφία

[1] R. R. Bahadur and R. Ranga Rao, On deviations of the sample mean, *Ann. Math. Statist.* **31** (1960), 1015–1027.

[2] I. Bárány and Z. Füredi, Computing the volume is difficult, *Discrete Comput. Geom.* **2** (1987), 319–326.

[3] I. Bárány and A. Pór, On $0-1$ polytopes with many facets, *Adv. Math.* **161** (2001), 209–228.

[4] T. Bisztriczky and K. Böröczky Jr., About the centroid body and the ellipsoid of inertia, *Mathematika* **48** (2001), no. 1-2, 1–13 (2003).

[5] W. Blaschke, Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, *Ber. Verh. sachs. Acad. Wiss., Math. Phys. Kl.* **69** (1917), 436–453.

[6] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Springer, Berlin (1923).

[7] C. Buchta, J. Müller and R. F. Tichy, Stochastical approximation of convex bodies, *Math. Ann.* **271** (1985), 225–235.

[8] S. Campi, A. Colesanti and P. Gronchi, A note on Sylvester's problem for random polytopes in a convex body, *Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste* **31** (1999), 79–94.

[9] L. Dalla and D.G. Larman, Volumes of a random polytope in a convex set, *Applied geometry and discrete mathematics. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.* **4** (Amer. Math. Soc.) (1991), 175–180.

[10] M. E. Dyer, Z. Füredi and C. McDiarmid, Volumes spanned by random points in the hypercube, *Random Structures Algorithms* **3** (1992), 91–106.

[11] W. Feller, *An Introduction to Probability and its Applications* Vol. I, 3rd ed., Wiley, New York, 1968.

[12] W. Feller, *An Introduction to Probability and its Applications* Vol. II, 2nd ed., Wiley, New York, 1971.

[13] K. Fukuda, Frequently Asked Questions in Polyhedral Computation (`http://www.ifor.math.ethz.ch/staff/fukuda/polyfaq/polyfaq.html`).

[14] T. Fleiner, V. Kaibel and G. Rote, Upper bounds on the maximal number of faces of 0/1 polytopes, *European J. Combin.* **21** (2000), 121–130.

[15] D. Gatzouras and A. Giannopoulos, A large deviations approach to the geometry of random polytopes, *Mathematika* (to appear).

[16] A. Giannopoulos, On the mean value of the area of a random polygon in a plane convex body, *Mathematika* **39** (1992), 279–290.

[17] A. Giannopoulos, On some vector balancing problems, *Studia Math.* **122** (1997), 225–234.

[18] A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, Volume radius of a random polytope in a convex body, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **134** (2003), 13–21.

[19] H. Groemer, On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set, *Pacific J. Math.* **45** (1973), 525–533.

[20] H. Groemer, On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set, *Arch. Math.* **25** (1974), 86–90.

[21] M. Hartzoulaki and G. Paouris, On the mean value of the quermassintegrals of a random polytope in a convex body, *Arch. Math.* **80** (2003), no. 4, 430–438.

[22] K. Ito and H. P. McKean, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag, 1965.

[23] B. Klartag and R. Vershynin, Small ball probability and Dvoretzky theorem, *Israel J. Math.* (to appear).

[24] U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert, A. Sarangarajan and G. M. Ziegler, Extremal properties of 0/1 polytopes, *Discrete Comput. Geom.* **17** (1997), 439–448.

[25] S. Kwapien and W. A. Woyczynski, *Random Series and Stochastic Integrals. Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston (1992).

[26] A. E. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson and N. Tomczak–Jaegermann, Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes, *Adv. Math.* **195** (2005), 491–523.

[27] M. W. Meckes, On symmetric versions of Sylvester's problem, *Monatsh. Math.* **145** (2005), 307–319.

[28] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite-Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986).

[29] S. J. Montgomery-Smith, The distribution of Rademacher Sums, *Proc. Amer. Math. Soc.* **109** (1990), 517–522.

[30] R. Schneider, Random approximation of convex sets, Proceedings of the 4th international conference on stereology and stochastic geometry, Bern 1987, *J. Microscopy* **151** (1988), 211–227.

[31] R. Schneider, Discrete aspects of stochastic geometry. In "Handbook of Discrete and Computational Geometry" (J.E. Goodman, J. O'Rourke, eds.), 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2004, pp. 255–278.

[32] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[33] Z. Sidák, On multivariate normal probabilities of rectangles: their dependence on correlation, *Ann. Math. Statist.* **39** (1968), 1425–1434.

[34] S. J. Szarek and E. Werner, A nonsymmetric correlation inequality for Gaussian measure, *J. Multivariate Anal.* **68** (1999), no. 2, 193–211.

[35] J. A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1979.

[36] G. M. Ziegler, Lectures on 0/1 polytopes, in "Polytopes—Combinatorics and Computation" (G. Kalai and G. M. Ziegler, Eds.), pp. 1–44, DMV Seminars, Birkhäuser, Basel, 2000.