ΜΑΝΟΛΗ Σ. ΚΑΤΣΟΠΡΙΝΑΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΠΛΗΘΟΣ ΚΥΚΛΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1988

ΜΑΝΟΛΗ Σ. ΚΑΤΣΟΠΡΙΝΑΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΠΛΗΘΟΣ ΚΥΚΛΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1988

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ:

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. Κ. ΠΗΧΩΡΙΔΗΣ

Στην Καίτη

στο Σταύρο

και

στο Γιώργη

Στο δάσκαλο

Τον εισηγητή της εργασίας αυτής, Στέλιο Πηχωρίδη, θέλω να ευχαριστήσω θερμά για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθειά του. Στάθηκε για μένα ο ακούραστος οδηγητής, που αφιέρωσε το χρόνο του, για να μου δώσει τις σωστές υποδείξεις και κατευθύνσεις και παρακολούθησε υπομονετικά τις περιπλανήσεις της σκέψης μου, πρόθυμος πάντοτε να διορθώνει, όταν χρειαζόταν, την πορεία της. Υπήρξε ο ηθικός συμπαραστάτης, που με ενθάρρυνε στις αντιξοότητες και με έμαθε να μην απογοητεύομαι από τις δυσκολίες. Κοπίασε για να μου δείξει πως να ξεχωρίζω και να διατυπώνω όσο μπορώ καλύτερα τα ουσιώδη από τα συμπεράσματά μου. Πάνω απ'όλα όμως θέλω να ευχαριστήσω το Στέλιο Πηχωρίδη γιατί στο πρόσωπό του γνώρισα ένα υπέροχο άνθρωπο.

Θέλω ακόμη να ευχαριστήσω και όλους εκείνους που με οποιοδήποτε τρόπο με βοήθησαν να φτάσω μέχρι την παρουσίαση της εργασίας αυτής.

Ιδιαίτερα, όσους διδάσκουν ή δίδαξαν στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, τόσο εκείνους, των οποίων μαθήματα ή σεμινάρια είχα την ευκαιρία να παρακολουθήσω κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, όσο και τους υπόλοιπους, που ήταν πάντα πρόθυμοι να συζητήσουν οποιοδήποτε πρόβλημα και να προσφέρουν τη βοήθειά τους.

Ξεχωριστά ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Β. Νεστορίδη και την καθηγήτρια κ. Σ. Παπαδοπούλου, που δέχτηκαν πρόθυμα ν'αποτελέσουν μαζί με τον Εισηγητή κ. Σ. Πηχωρίδη την τριμελή συμβουλευτική μου Επιτροπή. Οι συζητήσεις που είχα με τον Βασίλη Νεστορίδη, οι παρατηρήσεις και υποδείξεις του, όπως και οι παρατηρήσεις και υποδείξεις της Σουζάνας Παπαδοπούλου, με βοήθησαν πολύ στη τελική διαμόρφωση και διατύπωση του κειμένου που ακολουθεί, το οποίο, όλα τα μέλη της παραπάνω Επιτροπής, διάβασαν με ιδιαίτερη προσοχή και μου υπέδειξαν πως να διορθώσω τα λάθη και τις παραδρομές, που ανακάλυψαν. Στη Σουζάνα Παπαδοπούλου οφείλω εξ άλλου την "αφύπνιση" της παλιάς μου επιθυμίας να ασχοληθώ με τη Μαθηματική έρευνα.

Επίσης, ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω να εκφράσω στους καθηγητές J.-P. Kahane και κ. Σ. Νεγρεπόντη, που μπήκαν στον κόπο να έλθουν στην Κρήτη, για ν'αποτελέσουν μαζί με τους προαναφερθέντες την πενταμελή Επιτροπή κρίσης μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Εστω K η κλάση των τριγωνομετρικών δυναμοσειρών (σειρών Taylor)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} ,$$

που έχουν τα μερικά τους αθροίσματα πάνω σ'ένα <u>πεπερασμένο</u> πλήθος κύκλων του Μιγαδικού Επιπέδου, όταν το x ανήκει σ'ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E του [0,2π). Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της εργασίας είναι ο χαρακτηρισμός των σειρών της κλάσης K. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι κάθε σειρά της κλάσης K έχει (εκτός από τετριμμένες αλλαγές) μια αναπαράσταση της μορφής:

$$P(x) \sum_{n=0}^{\infty} e^{iknx} ,$$

όπου P(x) είναι ένα κατάλληλο τριγωνομετρικό πολυώνυμο και k ένας θετικός ακέραιος. Η απόδειξη είναι στοιχειώδης, αλλά κάπως εκτεταμένη. Οι παραπάνω σειρές σχετίζονται μ'ένα θεώρημα των Marcinkiewicz και Zygmund, που αναφέρεται στην κυκλική δομή του συνόλου των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων των σειρών Taylor που είναι (C,1) αθροίσιμες σ'ένα υποσύνολο E του [0,2π).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εστω

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} \quad , \ x \text{ στο } [0,2\pi), \tag{E.1}$$

μια τριγωνομετρική δυναμοσειρά (σειρά Taylor). Θα συμβολίζουμε με $s_n(x)$ τα μερικά αθροίσματα τής (E.1) και με $\sigma_n(x)$ τους (C,1) μέσους της, δηλαδή:

$$s_n(x) = \sum_{v=0}^{n} c_v e^{ivx}$$

και

$$\sigma_n(x) = ({}^1/_{n+1}) \sum_{v=0}^{n} s_v(x)$$

αντίστοιχα. Θα συμβολίζουμε ακόμη με $\Delta(z_o;r_1,r_2)$, όπου z_o είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$, τον δακτύλιο $\{z \in C: r_1 \leq |z-z_o| \leq r_2\}$. Ο κλειστός δίσκος $\Delta(z_o;0,r)$ και ο κύκλος $\Delta(z_o;r,r)$ θα συμβολίζονται απλά με $\overline{D}(z_o;r)$ και $C(z_o;r)$ αντίστοιχα, ενώ ο ανοικτός δίσκος με $D(z_o;r)$. Για κάθε x στο $[0,2\pi)$ θα συμβολίζουμε με $L(x)$ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης (συμπεριλαμβανομένου και του απείρου) της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της (E.1). Το $L(x)$ είναι ένα κλειστό σύνολο, που εκφυλίζεται σ'ένα σημείο, όταν η (E.1) συγκλίνει (ή αποκλίνει στο άπειρο). Εάν η (E.1) είναι (C,1) αθροίσιμη σ'ένα (πεπερασμένο) άθροισμα $\sigma(x)$, δηλαδή:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\sigma(x),$$

τότε γράφουμε:

$$m(x)=\liminf_{n\to\infty} r_n(x) \quad \text{και} \quad M(x)=\limsup_{n\to\infty} r_n(x),$$

όπου,

$$r_n(x)=|s_n(x)-\sigma(x)|.$$

Το μέτρο Lebesgue ενός συνόλου E θα συμβολίζουμε με $\mu(E)$ και την πληθικότητα του E με card(E) ή με #E. Τέλος, θα λέμε ότι ένα υποσύνολο L του Μιγαδικού Επιπέδου έχει "κυκλική δομή", εάν υπάρχει ένα σημείο z_0 (κέντρο του L), ώστε με κάθε σημείο z, που ανήκει στο L, ολόκληρος ο κύκλος $C(z_0;|z-z_0|)$ να ανήκει επίσης στο L, δηλαδή, το L είναι η ένωση ενός πεπερασμένου, αριθμήσιμου ή υπεραριθμήσιμου πλήθους κύκλων με κοινό κέντρο z_0 και ακτίνες μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

Ενα σημαντικό τώρα θεώρημα των Marcinkiewicz-Zygmund (βλέπε [2] και [4] V.II,p.178) λέει:

ΘΕΩΡΗΜΑ Α; Εάν για όλα τα x ένος υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$ η σειρά (E.1) είναι (C,1) αθροίσιμη σ'ένα (πεπερασμένο) άθροισμα $\sigma(x)$, τότε για σχεδόν όλα τα x του E το σύνολο $L(x)$ έχει κυκλική δομή με κέντρο το $\sigma(x)$ και οριακές ακτίνες $m(x)$ και $M(x)$.

Την απόδειξη του θεωρήματος αυτού μαζί με διάφορα σχόλια και παρατηρήσεις θα δούμε στο Κεφάλαιο 0 (βλέπε Θεώρημα 0.7). Εδώ μας ενδιαφέρει η επόμενη ερώτηση του A.Zygmund, που έχει άμεση σχέση με το παραπάνω αποτέλεσμα:

Εάν η (Ε.1) είναι όπως στο Θεώρημα Α και $\mu(E)>0$, είναι τότε η "γωνιακή κατανομή" των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας $\{s_n(x)\}$, περί το $\sigma(x)$, ομοιόμορφη;

Η διατύπωση της ερώτησης είναι ασαφής, ιδιαίτερα όταν το $\sigma(x)$ ανήκει στο $L(x)$, αλλά μέσα στις δυσκολίες του προβλήματος είναι και η ακριβής διατύπωσή του. Ενα πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή και, απ'όσα ο συγγραφέας γνωρίζει, το μοναδικό στη βιβλιογραφία, είναι ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του J.-P. Kahane (βλέπε [1]). Περιληπτικά μπορούμε να πούμε ότι ο Kahane, ακολουθώντας σε γενικές γραμμές την απόδειξη των Marcinkiewicz-Zygmund, αποδεικνύει ένα θεώρημα, που έχει ως πόρισμα το Θεώρημα Α και επιπλέον διευκρινίζει κατά κάποιο τρόπο την κατανομή της ακολουθίας $\{s_n(x)\}$ περί το $\sigma(x)$. Λεπτομέρειες για την εργασία αυτή θα δούμε στο Κεφάλαιο 0.

Στην αρχική τους εργασία οι Marcinkiewicz και Zygmund δίνουν πριν από το Θεώρημα Α μερικά παραδείγματα (στο [4] βλέπε V.II, σελ. 180), από τα οποία μπορεί κανείς να εικάσει το Θεώρημα αυτό. Από τα παραδείγματα αυτά διαπιστώνεται εύκολα ότι για σχεδόν όλα τα x στο $[0,2\pi)$, οι ακολουθίες $\{\arg[s_n(x)-\sigma(x)]\}$, που αντιστοιχούν σ'αυτά, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες (βλέπε παρακάτω Κεφάλαιο 0, παρατήρηση 4), πράγμα που οδηγεί φυσιολογικά στο προηγούμενο ερώτημα του A.Zygmund.

Εξετάζοντας όμως πιο προσεκτικά τα παραδείγματα αυτά, παρατηρούμε ότι τα περισσότερα οδηγούν σε σειρές της μορφής:

$$P(x)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{iknx}\ , \qquad \text{(E.2)}$$

όπου $P(x)$ είναι ένα κατάλληλο τριγωνομετρικό πολυώνυμο και k ένας θετικός ακέραιος. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο $L(x)$, εκτός από πεπερασμένο πλήθος x του $[0,2\pi)$, είναι ένωση ένος <u>πεπερασμένου πλήθους ομοκέντρων κύκλων</u>, (βλέπε Κεφάλαιο 3, Μέρος Α, πόρισμα 3.15). Ετσι τα ίδια παραδείγματα, που μπορεί να πει κανείς ότι οδήγησαν στο Θεώρημα Α και στην ερώτηση του Zygmund για τη "γωνιακή κατανομή", οδηγούν τώρα και στο ερώτημα:

<u>Εάν το σύνολο $L(x)$ της (Ε.1) είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ομοκέντρων κύκλων, τότε η σειρά θα είναι της μορφής (Ε.2);</u>

Η απάντηση είναι <u>όχι</u>. Για παράδειγμα, εάν προσθέσουμε τη σειρά Σe^{inx} με μια σειρά που συγκλίνει για κάθε x, τότε εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι η σειρά που προκύπτει δεν είναι πάντα της μορφής (Ε.2), ενώ, για κάθε $x\neq$ρητού πολ/σίου του π στο $[0,2\pi)$, το σύνολο $L(x)$ είναι ακριβώς ένας κύκλος.

Ομως, οι σειρές της μορφής (Ε.2) έχουν μια επιπλέον ιδιότητα: Οχι μόνο τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας $\{s_n(x)\}$ βρίσκονται πάνω σ'ένα πεπερασμένο σύνολο ομοκέντρων κύκλων, αλλά το ίδιο αληθεύει και για την ίδια την ακολουθία $\{s_n(x)\}$. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της εργασίας είναι ότι η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι <u>καταφατική</u>, εάν λάβουμε υπ'όψη αυτή την επιπλέον ιδιότητα. Συγκεκριμένα θ'αποδείξουμε ότι:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Β:</u> <u>Εάν για όλα τα x ένος υπεραριθμήσιμου υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$, τα μερικά αθροίσματα της δυναμοσειράς</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} \ , \ x \text{ στο } [0,2\pi), \qquad (E.3)$$

βρίσκονται πάνω σ'ένα πεπερασμένο πλήθος κύκλων του Μιγαδικού Επιπέδου, των οποίων τα κέντρα, οι ακτίνες και το πλήθος δεν θεωρούνται εκ των προτέρων ανεξάρτητα του x, τότε:

(i) Υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι ν, k, με $\nu<k$, και ένας πραγματικός αριθμός t, ώστε η σειρά (E.3) να έχει μια αναπαράσταση της μορφής:

$$P_0(x)+e^{i\nu x}P(x)\sum_{q=0}^{\infty} e^{iq(k-\nu)(x+t)}, \qquad (E.4)$$

όπου, $P_0(x)=c_0+c_1e^{ix}+\ldots+c_{\nu-1}e^{i(\nu-1)x}$,

και $P(x)=c_\nu+c_{\nu+1}e^{ix}+\ldots+c_{k-1}e^{i(k-\nu-1)x}$.

(ii) Υπάρχει ένας θετικός ακέραιος m, ώστε, αν εξαιρέσουμε από το $[0,2\pi)$ πεπερασμένο πλήθος x, τότε, για κάθε άλλο x του $[0,2\pi)$, τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (E.4), για κάθε $n\geq\nu$, να βρίσκονται πάνω σε m ακριβώς ομόκεντρους κύκλους.

Παρατηρούμε ότι η (C,1) αθροισιμότητα που απαιτείται για το Θεώρημα Α, δεν χρειάζεται εδώ, έπεται όμως εύκολα από το Θεώρημα Β. Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό στο Κεφάλαιο 4.

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση "E υπεραριθμήσιμο σύνολο" στο Θεώρημα Β δεν μπορεί να αντικατασταθεί με την ασθενέστερη υπόθεση "E απειροσύνολο". Αυτό προκύπτει από ένα αντιπαράδειγμα, που δίνεται στη Προσθήκη της σελίδας 83, όπου το απειροσύνολο E είναι αριθμήσιμο. Στο αντιπαράδειγμα αυτό το πλήθος των κύκλων μεταβάλλεται με το x του E και δεν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο A του E, ώστε, το πλήθος των κύκλων που αντιστοιχούν στα x του A να είναι φραγμένο. Αυτό δεν είναι συμπτωματικό, διότι, με την επί πλέον υπόθεση ότι το πλήθος των κύκλων μένει φραγμένο, το Θεώρημα B εξακολουθεί να ισχύει και όταν το E είναι απειροσύνολο αριθμήσιμο. Επίσης είναι εύκολο να δει κανείς ότι και με την προηγούμενη επί πλέον υπόθεση καμμιά πεπερασμένη πληθικότητα N του E δεν επαρκεί (βλέπε Προσθήκη σελ.83). Ετσι, η υπόθεση που κάναμε για την πληθικότητα του E δεν επιδέχεται βελτίωση, τουλάχιστον εφ'όσον δεν κάνει κανείς καμμιά άλλη υπόθεση. Οι παρατηρήσεις της σημείωσης αυτής οφείλονται στον κ. Β. Νεστορίδη, ο οποίος και τις έθεσε υπ'όψη μας.(*)

Από τα συμπεράσματα της εργασίας αυτής προκύπτουν τώρα άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα (βλέπε και Κεφάλαιο 4) και φυσικά παραμένει ανοικτό, στη γενική περίπτωση, το ερώτημα του Zygmund για τη "γωνιακή κατανομή" του συνόλου L(x).

Από εδώ και πέρα η εργασία αυτή αποτελείται από πέντε Κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 0 έχουμε συγκεντρώσει τα μέχρι σήμερα γνωστά σε μας αποτελέσματα για το θέμα που μας ενδιαφέρει.

Στο Κεφάλαιο 1 διατυπώνουμε τα κύρια συμπεράσματα της εργασίας αυτής και αποδεικνύουμε ένα λήμμα βασικό για την απόδειξη του Θεωρήματος B. Το λήμμα αυτό, στοιχειώδες στην απόδειξή του, δίνει αξιοσημείωτες σχέσεις μεταξύ κάποιων

(*) Ανάλογες παρατηρήσεις έγιναν και από τον J.-P.Kahane.

συντελεστών μιας δυναμοσειράς, με την προϋπόθεση ότι τέσσερα μερικά της αθροίσματα βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο για "πολλά" x του $[0,2\pi)$.

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζουμε την ειδική περίπτωση του ενός κύκλου, που είναι πιο απλή στη παρουσίασή της και ενδεικτική για την αντιμετώπιση της γενικής περίπτωσης.

Στο Κεφάλαιο 3 δίνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος Β στη γενική του περίπτωση και τέλος στο Κεφάλαιο 4 έχουμε διάφορες παρατηρήσεις και συμπληρώματα.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Β μπορεί επομένως να προχωρήσει κανείς απ'ευθείας στο σύντομο Κεφάλαιο 1 και αμέσως μετά στο Κεφάλαιο 3.

Επειδή κάθε Κεφάλαιο έχει τη δική του εισαγωγή, δεν θα επεκταθούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες εδώ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

ΓΝΩΣΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας αυτής έχει, όπως είδαμε, σχέση με το Θεώρημα Α της σελίδας 2 (Θεώρημα 0.7, παρακάτω). Ακόμη περισσότερο σχετίζεται με τα παραδείγματα, που οι Marcinkiewicz-Zygmund δίνουν στην αρχική τους εργασία, πριν από τη διατύπωση του θεωρήματος αυτού.

Εκτός από το θεώρημα αυτό και το πρόσφατο αποτέλεσμα του J.-P. Kahane, που έχουμε αναφέρει, δεν γνωρίζουμε να υπάρχουν στη βιβλιογραφία άλλα αποτελέσματα ή πληροφορίες για το θέμα αυτό. Τα γνωστά αυτά αποτελέσματα θεωρήσαμε σκόπιμο να συγκεντρώσουμε εδώ.

Ας δούμε κατ'αρχήν πώς οι Marcinkiewicz-Zygmund οδηγήθηκαν στο Θεώρημα Α, όπως φαίνεται από την αρχική τους εργασία (βλέπε [2]). Η εργασία αυτή χωρίζεται σε δυο μέρη. Το πρώτο απ'αυτά περιέχει θεωρήματα που αφορούν τη συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων των τριγωνομετρικών σειρών. Το δεύτερο είναι εκείνο, που αναφέρεται στο Θεώρημα Α. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι στην εργασία των Marcinkiewicz-Zygmund, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, το δεύτερο μέρος έρχεται σαν απάντηση ένος ερωτήματος, που προκύπτει από τα συμπεράσματα του πρώτου μέρους. Πιο συγκεκριμένα:

Στο πρώτο μέρος της εργασίας τους, οι Marcinkiewicz-

Zygmund αποδεικνύουν δύο θεωρήματα, που αναφέρονται σε (C,α) μέσους, $\alpha>-1$, και (C,α) αθροισιμότητα. Στην ειδική περίπτωση $\alpha=0$, οπότε οι $(C,0)$ μέσοι είναι ακριβώς τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς, τα θεωρήματα αυτά δίνουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

"Εάν

$$(1/2)a_0+\sum_{v=1}^{\infty}(a_v\cos vx+b_v\sin vx) \tag{0.1}$$

είναι μια τριγωνομετρική σειρά,

$$\sum_{v=1}^{\infty}(a_v\sin vx\mp b_v\cos vx) \tag{0.2}$$

η συζυγής της, και συμβολίσουμε με:

$$s^*(x)=\limsup s_n(x),\quad s_*(x)=\liminf s_n(x),$$

$$\tilde{s}^*(x)=\limsup \tilde{s}_n(x),\quad \tilde{s}_*(x)=\liminf \tilde{s}_n(x),$$

όπου, $n\to\infty$ και $s_n(x)$, $\tilde{s}_n(x)$ είναι τα μερικά αθροίσματα των (0.1) και (0.2) αντίστοιχα, τότε:

(i) Αν για κάθε x ενός συνόλου E οι (0.1) και (0.2) είναι $(C,1)$ αθροίσιμες στα $\sigma(x)$ και $\tilde{\sigma}(x)$ αντίστοιχα, και $s_*(x)>-\infty$ στο E, τότε, για σχεδόν όλα τα x του E οι συναρτήσεις s^*, s_*, $\tilde{s}^*$, $\tilde{s}_*$, είναι πεπερασμένες και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s^*(x)+s_*(x)=2\sigma(x),\quad \tilde{s}^*(x)+\tilde{s}_*(x)=2\tilde{\sigma}(x), \tag{0.3}$$

$$\omega(x)=s^*(x)-s_*(x)=\tilde{s}^*(x)-\tilde{s}_*(x). \tag{0.4}$$

(ii) Αν η συνθήκη για τη συνάρτηση s_* αντικατασταθεί με την $s_*(x)=-\infty$ στο E, τότε, για σχεδόν όλα τα x του E, θα έχουμε:

$$s^*(x)=\tilde{s}^*(x)=+\infty,\quad \tilde{s}_*(x)=-\infty". \tag{0.5}$$

Ας έρθουμε τώρα στο δεύτερο μέρος της εργασίας των Marcinkiewicz-Zygmund. Εδώ οι συγγραφείς παρατηρούν ότι χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε για τη σειρά (Ε.1) να υποθέσουμε ότι ο συντελεστής c_0 είναι πραγματικός αριθμός, οπότε, εάν για $n=1,2,3,\ldots$, θέσουμε $c_n=a_n-ib_n$, τότε, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (Ε.1) γράφονται με τη μορφή (0.1) και (0.2) αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η (Ε.1) είναι (C,1) αθροίσιμη, για κάθε x ενός συνόλου Ε, σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα σ(x). Τότε, από τα συμπεράσματα του πρώτου μέρους, έπεται ότι, για σχεδόν όλα τα x του Ε, τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της (Ε.1) ανήκουν στο τετράγωνο με κέντρο το σ(x) και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, μήκους ω(x) καθεμιά (όπου ω(x) δίνεται από την (0.4)). Επίσης, το τετράγωνο αυτό δεν μπορεί ν'αντικατασταθεί με ένα μικρότερο ορθογώνιο που έχει το ίδιο κέντρο και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες. Είναι όμως κάθε σημείο του παραπάνω τετραγώνου σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της σειράς (Ε.1); Στην ερώτηση αυτή οι Marcinkiewicz-Zygmund παρατηρούν ότι αυτό όχι μόνο μπορεί να μη συμβαίνει, αλλά, όπως δείχνουν και τα παρακάτω παραδείγματα, οδηγούμαστε στην εικασία ότι μάλλον για σχεδόν όλα τα x του Ε το σύνολο L(x) έχει κυκλική δομή.

Τα παραδείγματα τώρα των Marcinkiewicz-Zygmund είναι:

(1) Εστω

$$F(z)=1+z+z^2+\cdots,$$

τότε, οι (C,1) μέσοι της $F(e^{ix})$ συγκλίνουν, για κάθε x στο

$(0,2\pi)$, στο $\sigma(x)=(1-e^{ix})^{-1}$. Συνεπώς

$$s_n(x)-\sigma(x)=-(1-e^{ix})^{-1}e^{i(n+1)x}, \qquad (0.6)$$

οπότε, για κάθε x στο $(0,2\pi)$, όλα τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο $\sigma(x)$ και ακτίνα ίση με $|1-e^{ix}|^{-1}$. Εάν επιπλέον το x δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του π, τότε, το σύνολο $L(x)$ των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας $\{s_n(x)\}$, ταυτίζεται με τον κύκλο αυτό.

(2) Τα μερικά αθροίσματα της σειράς

$$aF(e^{ix})+bF(e^{2ix})=(a+b)+ae^{ix}+(a+b)e^{2ix}+\cdots,$$

βρίσκονται πάνω σε δυο ομόκεντρους κύκλους με κοινό κέντρο το (C,1) άθροισμά της

$$\sigma(x)=a(1-e^{ix})^{-1}+b(1-e^{2ix})^{-1}$$

και ακτίνες

$$|1-e^{ix}|^{-1}|a+b(1+e^{\pm ix})^{-1}|.$$

Οι δυο αυτοί κύκλοι είναι διαφορετικοί μόνο όταν $\overline{a}b$ δεν είναι πραγματικός αριθμός. Συνεπώς, εάν το x δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του π, το σύνολο $L(x)$ είναι ή ένας κύκλος ή η ένωση δυο ομόκεντρων κύκλων.

(3) Ομοια, για τη σειρά

$$aF(e^{ix})+bF(e^{2ix})+cF(e^{3ix}),$$

έχουμε ανάλογα αποτελέσματα και το σύνολο $L(x)$ είναι η ένωση έξι (διαφορετικών εν γένει) ομόκεντρων κύκλων.

(4) Για ένα κάπως διαφορετικό παράδειγμα θεωρούμε τη σειρά

$$F(e^{ix})+aF(e^{i(k+x)}),$$

όπου, $a\neq 0$ και k ένας πραγματικός αριθμός, που δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του π. Εάν τα x και k είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε, όπως είναι γνωστό, τα δεκαδικά μέρη των $(n+1)x/2\pi$ και $(n+1)k/2\pi$ μπορούν να πλησιάσουν, όσο θέλουμε, ένα δοσμένο αριθμό του $(0,1)$. Απ'αυτό έπεται εύκολα ότι, εκτός από ένα αριθμήσιμο πλήθος x, το σύνολο $L(x)$ είναι ένας γνήσιος δακτύλιος (δηλαδή, όχι ολόκληρος δίσκος ή μόνο ένας κύκλος).

(5) Τέλος, συνδυάζοντας το παράδειγμα (4) με τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να πάρουμε μια τριγωνομετρική δυναμοσειρά, τέτοια, ώστε για τα x ενός συνόλου με θετικό μέτρο, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της ν'αποτελείται από ένα πλήθος ομόκεντρων δακτυλίων.

Μετά από τα παραπάνω παραδείγματα οι Marcinkiewicz-Zygmund φτάνουν πια φυσιολογικά στο θεώρημα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το:

<u>0.7. ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> <u>Εάν για όλα τα x ενός υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$ η σειρά (Ε.1) είναι $(C,1)$ αθροίσιμη σ'ένα (πεπερασμένο) άθροισμα $\sigma(x)$, τότε, για σχεδόν όλα τα x του E, το σύνολο $L(x)$ έχει κυκλική δομή με κέντρο $\sigma(x)$ και οριακές ακτίνες $m(x)$ και $M(x)$.</u> (Για το συμβολισμό βλέπε σελίδα 2).

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα χρειαστούμε τα τρία λήμματα, που θ'αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο. Υπενθυμίζουμε μόνο τα παρακάτω:

(i) <u>Τα σύμβολα του Landau:</u> Εάν $f(x)$ και $g(x)$ είναι δυο συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του x_0, στην οποία είναι $g(x)\neq 0$ (το x_0 μπορεί να είναι και $\pm\infty$, και ακόμα μπορούν να δοθούν ανάλογοι ορισμοί για συναρτήσεις που ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $(x_0,x_0+\delta)$ ή $(x_0-\delta,x_0)$, $\delta>0$), τότε, οι συμβολισμοί:

$$f(x)=o(g(x)), \quad f(x)=O(g(x)), \quad x \to x_0,$$

σημαίνουν ότι, όταν το x τείνει στο x_0, τότε το πηλίκο $f(x)/g(x)$ τείνει στο 0 στην πρώτη περίπτωση και είναι φραγμένο στη δεύτερη. Ανάλογοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται και όταν το x τείνει στο x_0 δια μέσου μιας ακολουθίας διακεκριμένων τιμών του.

(ii) Αθροιση κατά μέρη (μετασχηματισμός του Abel): Το όνομα αυτό δίνουμε στον τύπο:

$$\sum_{v=0}^{n} \alpha_v \beta_v = \sum_{v=0}^{n-1} s_v(\Delta\beta_v) + s_n \beta_n$$

όπου, $s_v=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_v$ και $\Delta\beta_v=\beta_v-\beta_{v+1}$. Για το σύμβολο Δ έχουμε επίσης: $\Delta^2\beta_v=\Delta(\Delta\beta_v)=\beta_v-2\beta_{v+1}+\beta_{v+2}$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι ειδικά για το Κεφάλαιο αυτό όταν αναφερόμαστε στο $\overline{C}$, εννοούμε το επίπεδο C με την προσθήκη ενός κύκλου στο άπειρο (όπως στο [1]). Σ'αυτή την περίπτωση η σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{z_n\}$ στο $\overline{C}$, ισοδυναμεί με τη σύγκλιση της $\zeta_n=z_n/(1+|z_n|)$ στο C (είναι $z_n=\zeta_n/(1-|\zeta_n|)$ κ.λ.π.).

ΤΡΙΑ ΛΗΜΜΑΤΑ

Το βασικό λήμμα, για την απόδειξη των θεωρημάτων που μας ενδιαφέρουν, είναι το πρώτο (Λήμμα 0.8, παρακάτω). Το λήμμα αυτό είναι μια άμεση συνέπεια ενός σημαντικού θεωρήματος του Rogosinski. Δεν θ'αποδείξουμε εδώ το γενικό αυτό θεώρημα του Rogosinski (βλέπε [4] V.I. Κεφ.III, σελ. 112), αλλά θα προσαρμόσουμε την απόδειξή του στην ειδική περίπτωση του λήμματος. Παραθέτουμε επίσης και μια άλλη απόδειξη (βλέπε [1]) για το λήμμα αυτό.

0.8. ΛΗΜΜΑ: Εάν για κάποιο x του $[0,2\pi)$ η σειρά (Ε.1) είναι (C,1) αθροίσιμη σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$ και $\{\alpha_n\}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τέτοια, ώστε $\alpha_n=O(1/n)$, τότε:

$$s_n(x+\alpha_n)-\sigma(x)=[s_n(x)-\sigma(x)]\exp(in\alpha_n)+o(1),\ n\to\infty. \quad (0.9)$$

Απόδειξη

(I) Θέλουμε να δείξουμε ότι $R_n(x,\alpha_n)=o(1)$, $n\to\infty$, όπου

$$R_n(x,\alpha_n)=s_n(x+\alpha_n)-\sigma(x)-[s_n(x)-\sigma(x)]\exp(in\alpha_n).$$

Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x=0$ και $\sigma(0)=0$. Τότε:

$$R_n(0,\alpha_n)=s_n(\alpha_n)-s_n(0)\exp(in\alpha_n),$$

δηλαδή:

$$R_n(0,\alpha_n)=\sum_{k=0}^{n} c_k[\exp(ik\alpha_n)-\exp(in\alpha_n)]. \quad (0.10)$$

Αφού $\alpha_n=O(1/n)$, έπεται εύκολα από το θεώρημα μέσης τιμής ότι

$$\Delta\exp(ik\alpha_n)=O(1/n),$$

$$\Delta^2\exp(ik\alpha_n)=O(1/n^2),$$

ομοιόμορφα για $k<n$ (στα Δ μεταβάλλεται το k), άρα

$$n[\exp(i(n-1)\alpha_n)-\exp(in\alpha_n)]=O(1) \quad (0.11)$$

$$\text{και}\quad (k+1)\Delta^2\exp(ik\alpha_n)=O(1/n), \quad (0.12)$$

ομοιόμορφα για $k<n$. Τώρα από την (0.10) με άθροιση κατά μέρη δυο φορές έχουμε διαδοχικά:

$$R_n(0,\alpha_n)=\sum_{k=0}^{n-1} s_k(0)\Delta\exp(ik\alpha_n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\sigma_k(0)\Delta^2\exp(ik\alpha_n)+n\sigma_{n-1}(0)[\exp(i(n-1)\alpha_n)-\exp(in\alpha_n)].$$

Τότε, λόγω των (0.11) και (0.12), είναι:

$$|R_n(0,\alpha_n)|=O(1/n)\sum_{k=0}^{n-2}|\sigma_k(0)|+O(1)|\sigma_{n-1}(0)|.$$

Αλλά, $\sigma_n(0)=o(1)$, άρα και $(1/_{n-1})\sum_{k=0}^{n-2}|\sigma_k(0)|=o(1)$, συνεπώς

$$R_n(0,\alpha_n)=o(1),\ n\to\infty, \tag{0.13}$$

όπως θέλαμε.■

(II) Για μια άλλη απόδειξη της (0.13) (βλέπε [1]) παρατηρεί κάνεις ότι λόγω της (0.10) αρκεί ν'αποδειχθεί η:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\{1-\exp[in\alpha_n(1-k/n)]\}=o(1). \tag{0.14}$$

Αλλά, $\sigma_{n-1}(0)=o(1)$, ή, $(1/n)[s_o(0)+\cdots+s_{n-1}(0)]=o(1)$, δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-k/n)c_k=o(1),$$

οπότε, αν $\varphi(x)=\sup(1-x,0)$, έχουμε (αφού $\varphi(1)=0$):

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi(k/n)=s_n(0)\varphi(1)+o(1). \tag{0.15}$$

Η (0.15) ισχύει τότε ομοιόμορφα και για όλες τις συναρτήσεις φ στο $[0,+\infty)$, που είναι κυρτές, φραγμένες και τείνουν στο 0, όταν το x τείνει στο άπειρο (βλέπε [4] V.I. Κεφ.III, §4). Επειδή η συνάρτηση:

$$\Psi(x)=\begin{cases}1-\exp[in\alpha_n(1-x)], & 0\leq x\leq 1\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

είναι ένας γραμμικός συνδυασμός τέτοιων συναρτήσεων, έστω

$$\Psi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+i[\varphi_3(x)-\varphi_4(x)],$$

με $\sup\varphi_k(x)=O(1)$, $k=1,2,3,4$, αφού $n\alpha_n=O(1)$, έπεται ότι η (0.14) αληθεύει αν $\varphi_1(1)=\varphi_2(1)$ και $\varphi_3(1)=\varphi_4(1)$. Αυτό όμως ισχύει, εφόσον $\Psi(1)=0$, και έτσι το λήμμα αποδείκτηκε.■

Για το δεύτερο λήμμα υπενθυμίζουμε πρώτα ότι ένα σημείο x λέγεται <u>σημείο πυκνότητας</u> ενός μετρήσιμου συνόλου E, εάν

$$\lim(1/h)\mu[E\cap(x,x+h)]=\lim(1/h)\mu[E\cap(x-h,x)]=$$
$$=\lim(1/2h)\mu[E\cap(x-h,x+h)]=1,\ \text{όταν}\ h\to 0,\ h>0.$$

<u>0.16. ΛΗΜΜΑ: Εστω E ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi)$ με $\mu(E)>0$ και x ένα σημείο πυκνότητας του E. Τότε, για κάθε $\vartheta>0$ υπάρχει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\alpha_n\}$ και ένας φυσικός αριθμός n_o, ώστε η ακολουθία $\{n\alpha_n\}$ να τείνει στον ϑ και για κάθε $n\geq n_o$, $(x+\alpha_n)\in E$.</u>

<u>Απόδειξη</u>

Εάν θέσουμε $E(h)=E\cap(x,x+h)$, $h>0$, τότε, από τον ορισμό του σημείου πυκνότητας, έχουμε:

$$\mu[E(h)]=h+o(h).$$

Συνεπώς, για $\varepsilon={}^1/_k$, $k=1,2,3,\ldots$, έχουμε::

$$\mu[E((\vartheta+\varepsilon)/n)]=[(\vartheta+\varepsilon)/n]+o({}^1/_n),$$
$$\mu[E(\vartheta/n)]=(\vartheta/n)+o({}^1/_n),$$

οπότε,

$$\mu[E((\vartheta+\varepsilon)/n)]-\mu[E(\vartheta/n)]=(\varepsilon/n)+o({}^1/_n),$$

που σημαίνει ότι η μέση πυκνότητα του E στο διάστημα με άκρα $x+(\vartheta/n)$, $x+(\vartheta/n)+(1/kn)$, τείνει στο 1, όταν το n τείνει στο άπειρο, για κάθε $k=1,2,3,\cdots$. Ετσι, για κάθε k, υπάρχει n_k, ώστε για $n\geq n_k$ η παραπάνω μέση πυκνότητα να είναι μεγαλύτερη του ${}^1/_2$. Συνεπώς, για κάθε $k=1,2,3,\ldots$, υπάρχει μια ακολουθία $\{\beta_{k,n}\}$, ώστε για κάθε $n\geq n_k$ να είναι:

$$\vartheta/n\leq\beta_{k,n}\leq{}^1/_n(\vartheta+{}^1/_k)$$
$$\text{και}\quad (x+\beta_{k,n})\in E.$$

Για να ορίσουμε τώρα τη ζητούμενη ακολουθία $\{\alpha_n\}$ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(i) Αν υπάρχει φυσικός αριθμός q, ώστε για κάθε k να είναι $n_k \le n_q$, τότε ορίζουμε $\alpha_n = \beta_{n,n}$, οπότε $n_0 = n_q$, όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς.

(ii) Εάν δεν υπάρχει τέτοιος q, τότε υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία, $1<q(1)<q(2)<\cdots$, ώστε $n_1<n_{q(1)}<n_{q(2)}<\cdots$. Ορίζουμε τότε την $\{\alpha_n\}$ για $n<n_1$ αυθαίρετα και για $n \ge n_1$ ως εξής:

$$\text{Αν } n_{q(\nu)} \le n < n_{q(\nu+1)}, \text{ τότε, } \alpha_n = \beta_{q(\nu),n}.$$

Στην περίπτωση αυτή εύκολα πάλι βλέπει κανείς ότι $n_0 = n_1$. ∎

Το τρίτο και τελευταίο λήμμα είναι ένα άμεσο πόρισμα των δύο προηγουμένων λημμάτων. Θα χρειαστούμε όμως για τη διατύπωσή του μερικά ακόμη σύμβολα.

Εστω $\{B_m\}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbf{N}$, με $\sup B_m \to \infty$, και $\{b_m\}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών. Εστω G ένα υποσύνολο του $\overline{C}$, F ένα μετρήσιμο σύνολο και $d \ge 0$. Θα συμβολίζουμε:

$$N_x(G) = \{n:\ s_n(x) \in G\} \quad (s_n(x) \text{ της } (E.1)), \tag{0.17}$$

$$F(G,d,k) = \{x \in F:\ \text{για κάθε } m \ge k \ \operatorname{card}[B_m \cap N_x(G)] \le d b_m\}, \tag{0.18}$$

$$\text{και} \quad F(G,d) = \bigcup_{k=0}^{\infty} F(G,d,k). \tag{0.19}$$

Ετσι, $x \notin F(G,d)$ σημαίνει ότι υπάρχει μια ακολουθία m_ν, που τείνει στο άπειρο, ώστε $\operatorname{card}[B_{m_\nu} \cap N_x(G)] > d b_{m_\nu}$. Εχουμε τότε:

<u>0.20. ΛΗΜΜΑ: Εστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του $\overline{C}$, $d \ge 0$ και k ένας φυσικός αριθμός. Εάν η σειρά (E.1) είναι $(C,1)$ αθροίσιμη, σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$, για κάποιο σημείο πυκνότητας x του $F(G,d,k)$ και U είναι ένα ανοικτό σύνολο, ώστε το $\overline{U}$ (η κλειστότητα στο $\overline{C}$) με μια κατάλληλη στροφή</u>

περί το $\sigma(x)$ να συμπίπτει μ'ένα υποσύνολο του G, τότε το x ανήκει και στο F(U,d).

Απόδειξη

Εστω ϑ, $\vartheta>0$, η γωνία στροφής, που φέρνει το $\overline{U}$ μέσα στο G. Αφού το x είναι σημείο πυκνότητας του συνόλου F(G,d,k), έπεται ότι το σύνολο αυτό έχει μέτρο θετικό. Τότε, λόγω του λήμματος 0.16, θα υπάρχει μια ακολουθία $\{\alpha_n\}$, τέτοια, ώστε $n\alpha_n=\vartheta+o(1)$ και $(x+\alpha_n)\in F(G,d,k)$. Από το λήμμα 0.8 και τους ορισμούς, που δώσαμε πριν από το λήμμα που αποδεικνύουμε, μπορεί εύκολα τώρα ν'αποδειχθεί, ότι, εάν το x δεν ανήκει στο F(U,d), τότε δεν θ'ανήκει και στο F(G,d), που αντιφάσκει με το ότι $x\in F(G,d,k)$. ∎

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 0.7

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τρεις αποδείξεις του θεωρήματος 0.7 (Θεώρημα των Marcinkiewicz-Zygmund).

(1) Δίνεται ότι η σειρά (E.1) είναι (C,1) αθροίσιμη σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$, για κάθε x ενός υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$ και θέλουμε ν'αποδείξουμε ότι το σύνολο L(x) των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της, έχει σχεδόν παντού στο E κυκλική δομή με κέντρο το $\sigma(x)$. Δηλαδή, αρκεί ν'αποδείξουμε ότι το σύνολο:

F={x∈E: το L(x) δεν έχει κυκλική δομή με κέντρο το $\sigma(x)$}

έχει μέτρο μηδέν. Η απόδειξη θα γίνει με διαδοχικές αναγωγές του F σε αριθμήσιμες ενώσεις και τομές άλλων συνόλων, τα οποία, όπως θα δείξουμε, έχουν μέτρο μηδέν.

Γνωρίζουμε ότι, για όλα τα x του E, τα σύνολα $L(x)$ είναι <u>κλειστά</u>. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε x του F, θα υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος $D(\zeta+\sigma(x);\rho)$, με $\zeta=\alpha+\beta i$, α,β,ρ ρητοί αριθμοί και $|\zeta|\geq\rho>0$, ώστε:

$$L(x)\cap D(\zeta+\sigma(x);\rho)=\phi, \tag{0.21}$$

$$L(x)\cap\Delta^{o}(\sigma(x);|\zeta|-\rho,|\zeta|+\rho)\neq\phi. \tag{0.22}$$

Ορίζουμε για κάθε τριάδα ρητών αριθμών α,β,ρ, με

$$|\zeta|\geq\rho>0,\ \zeta=\alpha+\beta i, \tag{0.23}$$

το σύνολο:

$F(\alpha,\beta,\rho)=\{x\in F$: το $L(x)$ ικανοποιεί τις (0.21) και (0.22)$\}$.

Προφανώς, έχουμε τότε:

$$F=\bigcup_{\alpha,\beta,\rho}F(\alpha,\beta,\rho),$$

όπου τα α,β,ρ διατρέχουν όλους τους ρητούς, που ικανοποιούν την (0.23). Συνεπώς, αρκεί ν'αποδείξουμε ότι καθένα από τα σύνολα $F(\alpha,\beta,\rho)$ έχει μέτρο μηδέν.

Εστω $H=F(\alpha,\beta,\rho)$ κάποιο από τα παραπάνω σύνολα. Ορίζουμε τότε για κάθε $\nu=2,3,4,\ldots$, τα σύνολα:

$$H_{\nu,k}=\{x\in H:\ \text{για } n\geq k,\ s_n(x)\notin D(\zeta+\sigma(x);\rho(1-1/\nu))\},$$

οπότε,

$$H=\bigcap_{\nu=2}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}H_{\nu,k},$$

που σημαίνει ότι αρκεί ν'αποδείξουμε ότι καθένα από τα σύνολα $H_{\nu,k}$ έχει μέτρο μηδέν.

Επειδή οι συναρτήσεις $s_n(x)$ είναι συνεχείς και η $\sigma(x)$ μετρήσιμη (στο E, όπου ορίζεται), έπεται ότι καθένα από τα σύνολα $H_{\nu,k}$ είναι μετρήσιμο. Για ν'αποδείξουμε τώρα ότι έχουν μέτρο μηδέν, υποθέτουμε για κάποιο απ'αυτά το αντίθετο.

Εστω λοιπόν $H_{v,k}$, κάποιο απ'αυτά τα σύνολα με μέτρο θετικό, τότε έχουμε:

$$H_{v,k}=\{x\in H:\ \text{για } n\geq k,\ s_n(x)\notin D(\zeta+\sigma(x);\rho(1-1/v))\}=$$
$$=\{x\in H:\ \text{για κάθε } m\geq k,\ \operatorname{card}[\{m\}\cap N_x(D)]=0\}=$$
$$=H(D,0,k),$$

όπου, $D=D(\zeta+\sigma(x);\rho(1-1/v))$ και $N_x(D)$, $H(D,0,k)$ ορίζονται από τις (0.17) και (0.18) αντίστοιχα, με $G=D$ και $d=0$. Ομως, $\mu(H_{v,k})>0$, οπότε, όπως είναι γνωστό, σχεδόν όλα τα x του $H_{v,k}$ είναι σημεία πυκνότητάς του. Τότε, από το λήμμα 0.20 και την (0.22), είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι έχει οδηγηθεί σε άτοπο και έτσι η απόδειξη τελείωσε. ∎

<u>Παρατήρηση:</u> Η παραπάνω απόδειξη είναι ουσιαστικά αυτή που παραθέτει ο A. Zygmund στο [4], με τη διαφορά ότι εκεί η απόδειξη γίνεται για το σύνολο $L_1(x)$ αντί για το $L(x)$, όπου, $L_1(x)$ είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας $\{s_n(x)-\sigma(x)\}$, δηλαδή, η παράλληλη μεταφορά κατά $-\sigma(x)$ του $L(x)$. Οι υπόλοιπες διαφορές, μεταξύ των δυο αποδείξεων, είναι εκείνες που θεωρήθηκαν αναγκαίες, λόγω του τρόπου παρουσίασης του θέματος εδώ. Παρατηρούμε ακόμη ότι το τελευταίο μέρος της απόδειξης μπορεί να γίνει και χωρίς τα α,β,ρ να είναι ρητοί αριθμοί.

(2) Μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 0.7 θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, μαζί με τα αποτελέσματα του Kahane, που αφορούν το θέμα μας.

(3) Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος από τους Marcinkiewicz-Zygmund στην αρχική τους εργασία (στο σημείο

αυτό βλέπε και παρατήρηση 3 της τελευταίας παραγράφου του Κεφαλαίου αυτού) δεν διαφέρει από την πρώτη απόδειξη, που είδαμε προηγουμένως, μέχρι του σημείου που θέλουμε ν'αποδείξουμε ότι καθένα από τα σύνολα $F(\alpha,\beta,\rho)$ έχει μέτρο μηδέν (εκτός του ότι οι Marcinkiewicz–Zygmund δουλεύουν με το σύνολο $L_1(x)$, που είδαμε παραπάνω, αντί του $L(x)$). Στη συνέχεια, αποδεικνύουν με τη βοήθεια ενός λήμματος ότι $\mu(H)=0$, όπου H είναι ένα από τα παραπάνω σύνολα. Το λήμμα αυτό, που ουσιαστικά αποδείξαμε και εμείς στην απόδειξη (1), έχει ως εξής:

Εάν H είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi)$, με θετικό μέτρο, ώστε για κάθε x του H η σειρά (Ε.1) να είναι $(C,1)$ αθροίσιμη σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$ και το σύνολο $L_1(x)$ δεν περιέχει κανένα σημείο ενός σταθερού δίσκου $D(\zeta,\rho)$, με $|\zeta|\geq\rho$, τότε, για σχεδόν όλα τα x του H, το $L_1(x)$ δεν περιέχει κανένα σημείο του ανοικτού δακτυλίου $\Delta^{o}(0;|\zeta|-\rho,|\zeta|+\rho)$.

Η διαφορά μεταξύ των δυο αποδείξεων συνίσταται στο ότι εδώ γίνεται χρήση των θεωρημάτων Egoroff και Lusin, αντί του λήμματος 0.20 και των συνόλων $H_{v,k}$.

Κατ'αρχήν ορίζουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{\delta_n(x)\}$ με κοινό πεδίο ορισμού το H, ως εξής:

$$\delta_n(x)=\max(0,d_n(x)),$$

όπου,

$$d_n(x)=\rho-\inf_{v\geq n}|s_v(x)-\sigma(x)-\zeta|.$$

Προφανώς, οι συναρτήσεις αυτές είναι μετρήσιμες στο H και η ακολουθία τους φθίνει προς το μηδέν. Επίσης, για ένα σταθερό x του H και για $\nu \geq n$, $s_\nu(x)-\sigma(x) \notin D(\zeta;\rho-\delta_n(x))$. Από τα Θεωρήματα Egoroff και Lusin προκύπτει τότε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\mu(H)/2$, υπάρχει ένα υποσύνολο G του H, ώστε:

$\mu(H-G)<\varepsilon$,

$\delta_n(x)=o(1)$, ομοιόμορφα στο G για $n\to\infty$ και

η συνάρτηση $\sigma(x)$ να είναι συνεχής στο G.

Επειδή το ε είναι ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός μικρότερος του $\mu(H)/2$, αρκεί να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $x_o \varepsilon G$, σημείο πυκνότητας του G ($\mu(G)>0$), το σύνολο $L_1(x_o)$ δεν περιέχει σημεία του $\Delta^o(0;|\zeta|-\rho,|\zeta|+\rho)$.

Εστω ϑ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Αφού x_o είναι σημείο πυκνότητας του G, έπεται από το λήμμα 0.16 ότι υπάρχει ακολουθία $\{\alpha_n\}$, ώστε $n\alpha_n=\vartheta+o(1)$ και $(x_o+\alpha_n)\in G$. Τότε, από το λήμμα 0.8, έχουμε για $n\to\infty$:

$$[s_n(x_o+\alpha_n)-\sigma(x_o)]\exp(-in\alpha_n)=s_n(x_o)-\sigma(x_o)+o(1). \qquad (0.24)$$

Αλλά, αφού η $\sigma(x)$ είναι συνεχής στο G και $x_o\in G$, $(x_o+\alpha_n)\in G$, $\alpha_n=o(1)$, έπεται ότι για $n\to\infty$:

$$\sigma(x_o)-\sigma(x_o+\alpha_n)=o(1). \qquad (0.25)$$

Από τις (0.24) και (0.25) έχουμε για $n\to\infty$:

$$[s_n(x_o+\alpha_n)-\sigma(x_o+\alpha_n)]\exp(-in\alpha_n)=s_n(x_o)-\sigma(x_o)+o(1). \qquad (0.26)$$

Τώρα, αφού $(x_o+\alpha_n)\in G$, οι αριθμοί $s_n(x_o+\alpha_n)-\sigma(x_o+\alpha_n)$ θα βρίσκονται εκτός του ανοικτού δίσκου $D(\zeta;\rho-\delta_n)$, όπου,

$$\delta_n=\sup\delta_n(x),\ x\in G.$$

Συνεπώς, το αριστερό μέλος της (0.26) δεν ανήκει στον ανοικτό δίσκο $D(\zeta\exp(-in\alpha_n);\rho-\delta_n)$ και αφού $n\alpha_n=\vartheta+o(1)$, $\delta_n=o(1)$, το σύνολο $L_1(x_o)$ δεν έχει κοινά σημεία με τον ανοικτό δίσκο

$D(\zeta\exp(-i\vartheta);\rho)$. Ομως, ο αριθμός ϑ είναι αυθαίρετος, συνεπώς το $L_1(x_0)$ δεν περιέχει σημεία του $\Delta^o(0;|\zeta|-\rho,|\zeta|+\rho)$, όπως ακριβώς θέλαμε. ∎

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ J.-P. KAHANE

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τα αποτελέσματα της πρόσφατης εργασίας του Kahane (βλέπε [1]), στην οποία έχουμε αναφερθεί και άλλες φορές.

Θα αρχίσουμε με μερικούς ορισμούς.

(i) Εστω $\{B_m\}$ και $\{b_m\}$ δυο ακολουθίες, όπως εκείνες της σελίδας 16, δηλαδή, μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbf{N}$, με $\sup B_m \to \infty$, και $b_m>0$ (οι περιπτώσεις που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι $b_m=1$ και $b_m=\mathrm{card}(B_m)$). Εάν τώρα T είναι ένα υποσύνολο του $\mathbf{N}$, τότε ορίζουμε:

$$d(T)=\limsup_{m\to\infty}\frac{\#(B_m\cap T)}{b_m}.$$

Στην περίπτωση που είναι $b_m=\mathrm{card}(B_m)$, έχουμε, $0\le d(T)\le 1$ και $d(\mathbf{N})=1$. Εάν μάλιστα, $B_m=\{n\in\mathbf{N}:n\le m\}$, τότε,

$$d(T)=\limsup_{m\to\infty}\frac{\#\{n\le m:n\in T\}}{b_m},$$

δηλαδή, η πάνω πυκνότητα του T με τη συνηθισμένη έννοια. Εάν $B_m=\{n_m\}$, $\lim n_m=\infty$, και $b_m=1$, τότε,

$$d(T)=\begin{cases}1, & \text{όταν άπειρα } n_m \text{ ανήκουν στο } T \text{ και}\\ 0, & \text{όταν πεπερασμένο πλήθος } n_m \text{ ανήκουν στο } T.\end{cases}$$

Γενικά θα έχουμε βέβαια: $0\le d(T)\le\infty$.

(ii) Εστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, G ένα ανοικτό και K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\overline{C}$. Ορίζουμε τώρα:

$$d(\{z_n\},G)=d(T), \text{ όπου } T=\{n\in N: z_n\in G\} \text{ και}$$

$$d(\{z_n\},K)=\inf_{K\subset G} d(\{z_n\},G),$$

όπου το G διατρέχει όλα τ'ανοικτά που περιέχουν το K. Ετσι, το $d(\{z_n\},K)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα είδος πάνω φράγματος των $d(T)$, για όλα τα T, των οποίων τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας $\{z_n\}_{n\in T}$ ανήκουν στο K.

Για K, K_1, K_2, συμπαγή υποσύνολα του $\overline{C}$, είναι εύκολο να δει κανείς ότι, όταν $b_m=\text{card}(B_m)$, έχουμε:

$$0\le d(\{z_n\},K)\le d(\{z_n\},\overline{C})=1.$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε:

$$0\le d(\{z_n\},K)\le\infty,$$

$$d(\{z_n\},K_1)\le d(\{z_n\},K_2), \text{ εάν } K_1\subset K_2,$$

αφού κάθε ανοικτό G, που περιέχει το K_2, θα περιέχει και το K_1 και

$$d(\{z_n\},K_1\cup K_2)\le d(\{z_n\},K_1)+d(\{z_n\},K_2). \qquad (0.27)$$

Πραγματικά, αν G,H ανοικτά, τότε,

$$\{n: z_n\in G\cup H\}=\{n: z_n\in G\}\cup\{n: z_n\in H\},$$

συνεπώς,

$$B_m\cap\{n: z_n\in G\cup H\}=(B_m\cap\{n: z_n\in G\})\cup(B_m\cap\{n: z_n\in H\}),$$

οπότε,

$$\#(B_m\cap\{n: z_n\in G\cup H\})\le\#(B_m\cap\{n: z_n\in G\})+\#(B_m\cap\{n: z_n\in H\}),$$

άρα και

$$d(\{z_n\},G\cup H)\le d(\{z_n\},G)+d(\{z_n\},H).$$

Τότε,

$$d(\{z_n\},K_1)+d(\{z_n\},K_2)=\inf_{K_1\subset G} d(\{z_n\},G)+\inf_{K_2\subset H} d(\{z_n\},H)=$$

$$=\inf_{K_1\subset G,K_2\subset H}(d(\{z_n\},G)+d(\{z_n\},H))\geq \inf_{K_1\subset G,K_2\subset H} d(\{z_n\},G\cup H)\geq$$

$$\geq \inf_{K_1\cup K_2\subset V} d(\{z_n\},V)=d(\{z_n\},K_1\cup K_2).$$

Το κύριο αποτέλεσμα του Kahane είναι τώρα το θεώρημα:

0.28. ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν η σειρά (Ε.1) είναι (C,1) αθροίσιμη για κάθε x ενός υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$, σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$, τότε, για σχεδόν όλα τα x του E, έχουμε:

$$d(\{s_n(x)\},K_1)=d(\{s_n(x)\},K_2),$$

για όλα τα συμπαγή υποσύνολα K_1, K_2, του $\overline{C}$, που το ένα προκύπτει από το άλλο με στροφή περί το $\sigma(x)$.

Απόδειξη

Για ν'αποδειχθεί το θεώρημα αυτό στο [1], αποδεικνύονται πρώτα τα λήμματα που δείξαμε προηγουμένως, εκτός από το δεύτερο που θεωρείται γνωστό. Στη συνέχεια γίνεται η παρατήρηση ότι οι "ρητοί" δίσκοι και οι "ρητές" γωνίες αποτελούν μια αριθμήσιμη βάση από ανοικτά υποσύνολα του $\overline{C}$. Το θεώρημα αποδεικνύεται τότε με την εις άτοπο απαγωγή, ως εξής:

Εστω G ένα ανοικτό, που το σύνορό του αποτελείται από μέρη συνόρων ρητών δίσκων και ρητών γωνιών. Θέτουμε τότε:

$$M=M(E,\{B_m\},\{b_m\})=\bigcup_{G,d,k}[E(G,d,k)-\Pi(E(G,d,k))],$$

όπου το E() είναι όπως στην (0.18), το G διατρέχει τα ανοικτά της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω, το d τους μη αρνητικούς ρητούς αριθμούς, το k τους φυσικούς και $\Pi(X)$ παριστάνει το σύνολο των σημείων πυκνότητας του X. Με τις προϋποθέσεις αυτές, προφανώς, το M έχει μέτρο μηδέν (το E είναι μετρήσιμο από τον ορισμό του). Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για τα x του συνόλου E–M.

Εστω λοιπόν ότι για κάποιο x του E–M υπάρχουν δυο συμπαγή K_1, K_2, που το ένα να προκύπτει από το άλλο με στροφή περί το $\sigma(x)$ και τέτοια ώστε το θεώρημα να μην ισχύει. Εστω ότι είναι:

$$d(\{s_n(x)\},K_1)<d(\{s_n(x)\},K_2).$$

Τότε, θα υπάρχει ρητός d, ώστε να έχουμε:

$$d(\{s_n(x)\},K_1)<d<d(\{s_n(x)\},K_2),$$

δηλαδή,

$$\inf_{K_1 \subset G} d(\{s_n(x)\},G)<d<\inf_{K_2 \subset U} d(\{s_n(x)\},U),$$

όπου G, U ανοικτά υποσύνολα του $\overline{C}$.

Από τις ανισότητες αυτές, η πρώτη σημαίνει ότι για ένα τουλάχιστο ανοικτό G, με $K_1 \subset G$, θα ισχύει ότι:

$$d(\{s_n(x)\},G)<d,$$

ενώ η δεύτερη συνεπάγεται ότι για όλα τ'ανοικτά U, με $K_2 \subset U$, θα έχουμε:

$$d<d(\{s_n(x)\},U).$$

Ομως, είμαστε σε μετρικό χώρο (άρα normal), συνεπώς, η σχέση $K_1 \subset G$ συνεπάγεται ότι υπάρχει H ανοικτό, ώστε $K_1 \subset H \subset G$ και $\overline{H} \subset G$. Αφού τώρα το K_1 με μια κατάλληλη στροφή περί το $\sigma(x)$ συμπίπτει με το K_2, έπεται ότι με την ίδια στροφή το H θα ταυτιστεί μ'ένα ανοικτό U, ώστε $K_2 \subset U$. Αρα, έχουμε δυο ανοικτά G, U, με $K_1 \subset G$, $K_2 \subset U$, που ικανοποιούν όλες τις προϋποθέσεις του λήμματος 0.20 και επιπλέον

$$d(\{s_n(x)\},G)<d<d(\{s_n(x)\},U).$$

Οι ανισότητες αυτές, από τον ορισμό του συμβόλου d για ανοικτά σύνολα και την (0.17), παίρνουν τη μορφή:

$$d(N_x(G))<d<d(N_x(U)),$$

δηλαδή, για $m\longrightarrow\infty$,

$$\limsup\frac{\#(B_m\cap N_x(G))}{b_m}<d<\limsup\frac{\#(B_m\cap N_x(U))}{b_m}.$$

Από τις ανισότητες αυτές, η πρώτη σημαίνει ότι για κάθε $k\in N$ και για κάθε $m\geq k$, $\mathrm{card}[B_m\cap N_x(G)]\leq db_m$, ενώ η δεύτερη, ότι υπάρχει μια ακολουθία m_v, που τείνει στο άπειρο, ώστε να ισχύει $\mathrm{card}[B_{m_v}\cap N_x(U)]>db_{m_v}$. Τότε, από τις (0.18), (0.19) και τον τρόπο εκλογής του x, έχουμε ότι:

$$x\in E(G,d) \text{ και } x\notin E(U,d),$$

που αντιφάσκει με το συμπέρασμα του λήμματος 0.20 και έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.$_{■}$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν αμέσως δυο πορίσματα. Το πρώτο προκύπτει όταν $B_m=\{n_m\}$, με $\lim n_m=\infty$, και $b_m=1$, οπότε,

$$d(\{s_n(x)\},K)=\begin{cases}1, & \text{όταν η } \{s_{n_m}\} \text{ έχει οριακό σημείο στο K}\\ 0, & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

Το Θεώρημα 0.28 λέει τότε ότι για σχεδόν όλα τα x του E, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της υπακολουθίας $\{s_{n_m}(x)\}$ παραμένει αναλλοίωτο από το σύνολο των στροφών, που έχουν κέντρο το $\sigma(x)$. Δηλαδή, αποδείξαμε το επόμενο πόρισμα, το οποίο περιέχεται ουσιαστικά στο Θεώρημα 0.7, αφού, προφανώς, η ίδια απόδειξη που κάναμε για το θεώρημα αυτό και για την ακολουθία $\{s_n(x)\}$, μπορεί να γίνει και για οποιαδήποτε υπακολουθία της, $\{s_{n_m}(x)\}$, με $n_m\longrightarrow\infty$.

<u>0.29. ΠΟΡΙΣΜΑ: Εάν για όλα τα x ενός υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$ η σειρά (E.1) είναι (C,1) αθροίσιμη σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$, τότε, για κάθε ακολουθία $\{n_m\}$, με $\lim n_m=\infty$, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της $\{s_{n_m}(x)\}$ έχει, για σχεδόν όλα τα x του E, κυκλική δομή με κέντρο το $\sigma(x)$.</u>

Το δεύτερο πόρισμα, που προκύπτει από το Θεώρημα 0.28, μας διευκρινίζει κάπως τη "γωνιακή" κατανομή των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας $\{s_n(x)\}$, με τη βοήθεια βέβαια της ποσότητας d( ), που χρησιμοποιεί ο Kahane στην εργασία του.

Συγκεκριμένα, εάν $\Gamma_o=\Gamma(^1/_N,\varphi)$ είναι μια συμπαγής γωνία του $\overline{C}$, που ορίζεται από τις $z=0$ και $|\arg z-\varphi|\leq(^1/_N)\pi$, όπου N είναι ένας θετικός ακέραιος και φ ένας πραγματικός αριθμός, τότε, από την (0.27) έχουμε:

$$d(\{s_n(x)-\sigma(x)\},\Gamma_o\cup\Gamma_1\cup\ldots\cup\Gamma_{N-1})\leq$$

$$\leq d(\{s_n(x)-\sigma(x)\},\Gamma_o)+\cdots+d(\{s_n(x)-\sigma(x)\},\Gamma_{N-1}),$$

όπου, $\Gamma_k=\Gamma(^1/_N,\varphi+(2k\pi/N))$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Ομως, η ακολουθία $\{s_n(x)-\sigma(x)\}$ είναι (C,1) αθροίσιμη στο 0, για κάθε x του E, οπότε, από το Θεώρημα 0.28, έπεται ότι οι προσθετέοι του δευτέρου μέλους της παραπάνω ανισότητας είναι ίσοι, για σχεδόν όλα τα x του E. Είναι προφανές τώρα ότι έχουμε αποδείξει το:

<u>0.30. ΠΟΡΙΣΜΑ: Για κάθε Γ, που ορίζεται όπως το παραπάνω Γ_o, και για σχεδόν όλα τα x του E, έχουμε:</u>

$$d(\{s_n(x)-\sigma(x)\},\Gamma)\geq\frac{1}{N}\,d(\{s_n(x)\},\overline{C}).$$

<u>Σημείωση:</u> Στην εργασία του ο Kahane αναφέρει ακόμη περιληπτικά κάποιες παραλλαγές των ορισμών και του Θεωρήματος 0.28

που χρειάζονται αν θέλει κανείς ν'αποδείξει το:

<u>0.30. ΠΟΡΙΣΜΑ: Εστω Κ ένα συμπαγές υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$, που έχει κυκλική δομή με κέντρο το 0. Τότε, για σχεδόν όλα τα x του Κ και για κάθε συμπαγή γωνία $\Gamma=\Gamma(\alpha,\varphi)$, που ορίζεται από τις $z=0$ και $|\arg z-\varphi|\leq\alpha\pi$ ($0\leq\alpha\leq1$, $\varphi\in\mathbb{R}$), έχουμε:</u>

$$d(\{s_n(x)-\sigma(x)\},\Gamma\cap K)\geq\alpha d(\{s_n(x)-\sigma(x)\},K).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από τα παραδείγματα (2) και (3), της εισαγωγής του Κεφαλαίου αυτού, βλέπει κανείς ότι είναι δυνατόν το σύνολο $L(x)$ να μη συμπίπτει με το δακτύλιο $\Delta(\sigma(x);m(x),M(x))$ (για το συμβολισμό βλέπε σελ. 2). Φυσικά υπάρχουν τριγωνομετρικές δυναμοσειρές, των οποίων το σύνολο $L(x)$ είναι ένας (γνήσιος) δακτύλιος, όπως είναι η σειρά του παραδείγματος (4). Οι συντελεστές της σειράς αυτής είναι φραγμένοι, αλλά δεν τείνουν στο μηδέν. Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συντελεστές της (Ε.1) τείνουν στο μηδέν. Τότε, $s_n(x)-s_{n-1}(x)\to0$, συνεπώς, κάθε δακτύλιος $\Delta(\sigma(x);r_1,r_2)$, με $m(x)<r_1<r_2<M(x)$, θα περιέχει άπειρο πλήθος μερικών αθροισμάτων της (Ε.1), άρα και σημεία του συνόλου $L(x)$. Εχουμε λοιπόν:

<u>Εάν η σειρά (Ε.1) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 0.7 και οι συντελεστές της τείνουν στο μηδέν, τότε, για σχεδόν όλα τα x του Ε, έχουμε:</u>

$$L(x)=\Delta(\sigma(x);m(x),M(x)).$$

2. Εάν σχεδόν παντού στο Ε έχουμε $m(x)=0$, δηλαδή, για σχεδόν όλα τα x του Ε, υπάρχει μια υπακολουθία $\{n_k\}$ του $\mathbf{N}$

(που μπορεί να εξαρτάται από το x), ώστε, $s_n(x)-\sigma(x)=o(1)$, $n_k \to \infty$, και οι συντελεστές της (Ε.1) τείνουν στο μηδέν, τότε προφανώς έχουμε:

$$L(x)=\overline{D}(\sigma(x);M(x)),$$

σχεδόν παντού στο E. Παρατηρούμε ότι η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται, όταν το πραγματικό μέρος της (Ε.1) είναι μια σειρά Fourier-Lebesgue. Πραγματικά, αν έχουμε το τελευταίο, θα έχουμε, όπως είναι γνωστό (βλέπε [4] V.I. Κεφ.VII, σελ.267), και:

$$\int_0^{2\pi} |\sigma(x)-s_n(x)|^{\mu} dx=o(1), \text{ για κάθε } \mu,\ 0<\mu<1,$$

απ'όπου έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $\{n_k\}$ του **N** (και μάλιστα στην περίπτωση αυτή ανεξάρτητη του x), ώστε, σχεδόν παντού στο E να έχουμε $s_{n_k}(x)-\sigma(x)=o(1)$, $n_k \to \infty$, όπως θέλουμε.

Παράδειγμα: Ο A. Zygmund στο [4] (σελ.178, V.II) αναφέρει ένα θεώρημα του Menšov, που λέει:

"Εάν $\varphi(x)$ είναι μια συνάρτηση περιοδική, μετρήσιμη, μηαρνητική και όχι υποχρεωτικά πεπερασμένη σχεδόν παντού, τότε, υπάρχει μια S[f] (σειρά Fourier της f), ώστε, για σχεδόν όλα τα x να έχουμε:

$$s_*(x)=f(x)-\varphi(x) \text{ και } s^*(x)=f(x)+\varphi(x)\text{"}.$$

Τότε, για τη δυναμοσειρά $\Sigma c_n e^{inx}$, της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η παραπάνω S[f], το σύνολο L(x) είναι, για σχεδόν όλα τα x, ο κλειστός δίσκος με κέντρο $f(x)+i\tilde{f}(x)$ και ακτίνα $\varphi(x)$.

3. Εχουμε ήδη αναφέρει ότι στην αρχική τους εργασία (βλέπε [2]), οι Marcinkiewicz-Zygmund ασχολούνται γενικότερα

με (C,α) μέσους και (C,α) αθροισιμότητα, όπου $\alpha>-1$. Μάλιστα, στην τελευταία παράγραφό της εργασίας αυτής, εξετάζουν κατά πόσο τα αποτελέσματά τους για τις τριγωνομετρικές σειρές εξακολουθούν να ισχύουν και για σειρές Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n \zeta), \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lambda_n \to \infty,$$

ή, γενικότερα, για ολοκληρώματα Stieltjes του τύπου

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda\zeta) d\alpha(\lambda),$$

όπου, $\alpha(\lambda)$ είναι μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης σε κάθε πεπερασμένο διάστημα και $\zeta=u+iv$ μια μιγαδική μεταβλητή. Δεν θ'ασχοληθούμε εδώ με τις γενικεύσεις αυτές, αλλά θα πούμε λίγα λόγια για την περίπτωση των (C,α) μέσων.

Μια ακολουθία $\{s_n\}$, ή μια σειρά Σu_n με μερικά αθροίσματα $s_0, s_1, \ldots$, λέμε ότι είναι (C,α) αθροίσιμη σ'ένα άθροισμα σ, εάν οι (C,α) μέσοι της, $\sigma_n^{\alpha} = S_n^{\alpha}/A_n^{\alpha}$, τείνουν στο σ, όταν το n τείνει στο άπειρο, όπου, τα S_n^{α} και A_n^{α} ορίζονται από τις:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} x^n = (1-x)^{-\alpha-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha} x^n = (1-x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n .$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [4], V.I. Κεφ.III, σελίδα 76. Το θεώρημα που αποδεικνύουν οι Marcinkiewicz και Zygmund στη [2], ειδική περίπτωση του οποίου είναι και το δικό μας Θεώρημα 0.7, λέει:

Εάν, για $\alpha>-1$ και για κάθε x ενός υποσυνόλου E του

$[0,2\pi)$, η σειρά (Ε.1) είναι $(C,\alpha+1)$ αθροίσιμη σ'ένα πεπερασμένο άθροισμα $\sigma(x)$, τότε, για σχεδόν όλα τα x του E, το σύνολο $L^{\alpha}(x)$, των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας $\{\overset{\alpha}{\sigma}_n(x)\}$, έχει κυκλική δομή με κέντρο το $\sigma(x)$ και οριακές ακτίνες $m^{\alpha}(x)$ και $M^{\alpha}(x)$, όπου:

$$m^{\alpha}(x)=\liminf_{n\to\infty} r_n(x),\quad M^{\alpha}(x)=\limsup_{n\to\infty} r_n(x),$$

$$r_n(x)=|\overset{\alpha}{\sigma}_n(x)-\sigma(x)|.$$

Ιδιαίτερα, εάν $\alpha\geq 0$ και οι συντελεστές της (Ε.1) τείνουν στο μηδέν, τότε, για σχεδόν όλα τα x του E, έχουμε:

$$L^{\alpha}(x)=\Delta(\sigma(x);m^{\alpha}(x),M^{\alpha}(x)).$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, απαιτούνται:

(α) Αντί του τύπου (0.9) του Λήμματος 0.8, ο ανάλογος τύπος:

$$\overset{\alpha}{\sigma}_n(x+\alpha_n)-\sigma(x)=[\overset{\alpha}{\sigma}_n(x)-\sigma(x)]\exp(in\alpha_n)+o(1),\quad n\to\infty.$$

(β) $$\overset{\alpha}{\sigma}_n(x)-\overset{\alpha}{\sigma}_{n-1}(x)=o(1),$$

όταν το n τείνει στο άπειρο και οι συντελεστές της (Ε.1) τείνουν στο μηδέν.

Η απόδειξη των (α) και (β) παρουσιάζει κάποιες τεχνικές δυσκολίες. Ομως, στη συνέχεια, η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος γίνεται ακριβώς όπως η απόδειξη της ειδικής περίπτωσης του Θεωρήματος 0.7, που έχουμε δει.

4. Στην τελευταία αυτή παρατήρηση θα επανέλθουμε για λίγο στην ερώτηση του A. Zygmund για τη "γωνιακή κατανομή" του συνόλου $L(x)$ περί το $\sigma(x)$, που αναφέραμε στην Εισαγωγή της εργασίας αυτής (βλέπε σελ. 3). Για το θέμα αυτό, όπως έχουμε ξανατονίσει, δεν γνωρίζουμε να υπάρχουν άλλα αποτελέσματα, εκτός από τα προηγούμενα πορίσματα 0.30 και 0.30^{*} του Kahane.

Φυσικά, ένα πιο επιθυμητό αποτέλεσμα, τουλάχιστο όταν το $\sigma(x)$ δεν ανήκει στο $L(x)$, θα ήταν το:

Για σχεδόν όλα τα x του E η ακολουθία $\{\arg[s_n(x)-\sigma(x)]\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1,

που ισχύει για τα παραδείγματα (1) έως (5) της εισαγωγής του Κεφαλαίου αυτού, όπως θα δούμε παρακάτω. Ας εξηγήσουμε όμως με λίγα λόγια τι εννοούμε, όταν λέμε ότι μια ακολουθία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη mod.1 ή ισοκατανεμημένη.

Εστω $\{\alpha_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα συμβολίζουμε με $[\alpha_n]$ το ακέραιο μέρος του α_n και με (α_n) το δεκαδικό του μέρος, δηλαδή, $(\alpha_n)=\alpha_n-[\alpha_n]$. Θα λέμε τότε ότι η ακολουθία $\{\alpha_n\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1 ή ισοκατανεμημένη, εάν για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β, με $0\leq\alpha<\beta\leq1$, έχουμε:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\#\{n\leq N:(\alpha_n)\in[\alpha,\beta)\}}{N}=\mu([\alpha,\beta))=\beta-\alpha.$$

Αποδεικνύεται τότε (βλέπε [3], ή [4], V.I. Κεφ.IV, σελ.142), ότι ο προηγούμενος ορισμός είναι ισοδύναμος με το παρακάτω κριτήριο, που είναι γνωστό σαν "κριτήριο του Weyl".

Η ακολουθία $\{\alpha_n\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1, εάν και μόνο εάν, για κάθε μη-μηδενικό ακέραιο k, έχουμε:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2i\pi k\alpha_n)=0.$$

Για παράδειγμα, αφού, για κάθε ακέραιο $k\neq0$, έχουμε:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2i\pi knx)\right|=\frac{|\exp(2i\pi kNx)-1|}{N|\exp(2i\pi kx)-1|}\leq\frac{1}{N|\sin\pi kx|},$$

έπεται ότι η ακολουθία $\{nx\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1, για κάθε άρρητο πραγματικό αριθμό x. Ακόμη, μπορεί ν'αποδειχθεί (βλέπε [4], V.I. Κεφ.IV, σελ.142) ότι:

0.31. ΠΡΟΤΑΣΗ: Για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{n_k\}$ και για οποιαδήποτε ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_k\}$, η ακολουθία $\{n_k(x-a_k)\}$ είναι, για σχεδόν όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, ομοιόμορφα κατανεμημένη modulo 1.

Από την πρόταση αυτή έπεται αμέσως η ομοιόμορφη κατανομή modulo 1 των ακολουθιών $\{\arg[s_n(x)-\sigma(x)]\}$ των παραδειγμάτων (1) έως (5) της εισαγωγής του Κεφαλαίου αυτού. Παρακάτω θα δούμε ότι το ίδιο αληθεύει και για τις αντίστοιχες ακολουθίες των σειρών, που θα μας απασχολήσουν από εδώ και πέρα, δηλαδή, τις σειρές του Θεωρήματος Β (Θεώρημα 1.2, παρακάτω).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΡΙΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΑΥΤΗΣ ΚΑΙ ΕΝΑ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είδαμε στην Εισαγωγή της εργασίας αυτής ότι το κύριο αποτέλεσμα, που θα αποδείξουμε παρακάτω, είναι το Θεώρημα Β (βλέπε σελ.4). Οπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, το (ii) του θεωρήματος αυτού είναι ένα άμεσο πόρισμα του (i). Γι'αυτό, αναδιατυπώνουμε το θεώρημα Β μόνο με το συμπέρασμα (i).

Συγκεκριμένα, εάν

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \text{ στο } [0,2\pi), \tag{1.1}$$

είναι μια τριγωνομετρική δυναμοσειρά, τότε:

1.2. ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν για κάθε x ενός υπεραριθμήσιμου υποσυνόλου Ε του $[0,2\pi)$ υπάρχουν:

Ενας θετικός ακέραιος $M(x)$

και $M(x)$ το πλήθος κύκλοι,

που για κάθε x του Ε τους αριθμούμε κατά ένα αυθαίρετο τρόπο, έστω $\Gamma_1(x),\cdots,\Gamma_{M(x)}(x)$, ώστε, για κάθε $n=0,1,2,\cdots$, τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (1.1) να βρίσκονται στην ένωση $\Gamma_1(x)\cup\Gamma_2(x)\cup\cdots\cup\Gamma_{M(x)}(x)$, τότε:

Υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι ν, k, με $\nu<k$, και ένας πραγματικός αριθμός t, ώστε η σειρά (1.1) να έχει μια αναπαράσταση της μορφής:

$$P_o(x)+e^{i\nu x}P(x)\sum_{q=0}^{\infty} e^{iq(k-\nu)(x+t)}, \qquad (1.3)$$

όπου, $P_o(x)=c_o+c_1e^{ix}+\ldots+c_{\nu-1}e^{i(\nu-1)x}$,

και $P(x)=c_\nu+c_{\nu+1}e^{ix}+\ldots+c_{k-1}e^{i(k-\nu-1)x}$.

Το θεώρημα 1.2 ανάγεται εύκολα στη παρακάτω πρόταση 1.4, την οποία και θα αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 3. Η απόδειξή της είναι κάπως εκτεταμένη και λίγο περίπλοκη. Τα ουσιαστικά σημεία της περιέχονται σε δύο βασικά λήμματα, από τα οποία το πρώτο θα αποδείξουμε στο Κεφάλαιο αυτό και το δεύτερο στο Κεφάλαιο 3. Μετά από τις αποδείξεις των δύο αυτών λημμάτων, τα υπόλοιπα σημεία της απόδειξης παρουσιάζουν μερικές ακόμη δυσκολίες, που είναι κυρίως συνδυαστικής φύσης.

1.4. ΠΡΟΤΑΣΗ: Εάν υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι m και n_o και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E_o του $[0,2\pi)$, ώστε, για κάθε x του E_o να υπάρχουν m κύκλοι, τους οποίους αριθμούμε κατά ένα αυθαίρετο τρόπο, $C_1(x),\cdots,C_m(x)$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $n\geq n_o$ τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (1.1) βρίσκονται στην ένωση των παραπάνω κύκλων.

(ii) Για κάθε x στο E_o και για κάθε j στο $\{1,2,\cdots,m\}$ το $\{n:s_n(x)\in C_j(x)\}$ είναι απειροσύνολο.

(iii) Για κάθε x στο E_o και για κάθε j στο $\{1,2,\cdots,m\}$ υπάρχει $N=N(x,j)<n_o$, ώστε, $s_N(x)\in C_j(x)$.

Τότε, υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι ν, k, με ν<k, και ένας πραγματικός αριθμός t, ώστε η σειρά (1.1) να έχει μια αναπαράσταση της μορφής (1.3).

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 1.2 ΣΤΗ ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4

Θέλουμε να δείξουμε ότι οι υποθέσεις της πρότασης 1.4 προκύπτουν από εκείνες του Θεωρήματος 1.2. Πραγματικά, έστω ένα σταθερό x του E, για το οποίο θεωρούμε το σύνολο:

$$A(x)=\{j\in\{1,2,\ldots,M(x)\}:\mathrm{card}\{n:s_n(x)\in\Gamma_j(x)\}=\infty\}.$$

Εάν $m(x)=\mathrm{card}A(x)$, τότε, προφανώς $m(x)\geq 1$, και το $A(x)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$A(x)=\{i_1,i_2,\ldots,i_{m(x)}\}$$

Για $j=1,2,\ldots,m(x)$, θέτουμε:

$$C_j(x)=\Gamma_{i(j)}(x),\ \text{όπου } i(j)=i_j.$$

Εύκολα διαπιστώνει κάνεις ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι, από τους οποίους έστω $k(x)$ ο μικρότερος, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

α) Για κάθε $n\geq k(x)$, $s_n(x)\in C_1(x)\cup\cdots\cup C_{m(x)}(x)$.

β) Για κάθε $j=1,2,\ldots,m(x)$, $\mathrm{card}\{n:s_n(x)\in C_j(x)\}=\infty$.

γ) Για κάθε $j=1,2,\ldots,m(x)$, υπάρχει $N=N(x,j)<k(x)$, ώστε $s_N(x)\in C_j(x)$.

Εάν τώρα σε κάθε x του E αντιστοιχίσουμε το παραπάνω ζεύγος $(m(x),k(x))$ θετικών ακεραίων, τότε, επειδή το E είναι υπεραριθμήσιμο και το σύνολο των ζεύγων $(m(x),k(x))$ αριθμήσιμο, έπεται ότι υπάρχει υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E_o του E, ώστε το ζεύγος $(m(x),k(x))$ να είναι σταθερό όταν $x\in E_o$. Δηλαδή, υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι m και n_o, ώστε, για κάθε x του E_o, $m(x)=m$ και $k(x)=n_o$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι τα m, n_o, E_o και οι κύκλοι $C_1(x),\ldots,C_m(x)$, ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης 1.4, όπως θέλαμε να αποδείξουμε.■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Είναι χρήσιμο για τα επόμενα να κάνουμε εδώ μια παρατήρηση για τα μερικά αθροίσματα της σειράς (1.1). Είναι προφανές ότι, εάν $n<m$ και $s_n(x)=s_m(x)$, τότε, είτε οι συντελεστές c_{n+1}, $c_{n+2}, \ldots, c_m$, είναι όλοι μηδέν, είτε το x ανήκει σ'ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $[0,2\pi)$. Ομως εδώ θα έχουμε πάντοτε υπεραριθμήσιμα σύνολα, συνεπώς μπορούμε να υποθέτουμε στα επόμενα (εξαιρώντας αριθμήσιμο πλήθος x, αν χρειάζεται) ότι από τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις μόνο η πρώτη εμφανίζεται. Δηλαδή, για δοσμένη σειρά $\Sigma c_n e^{inx}$ θα θεωρούμε υπεραριθμήσιμα σύνολα, ώστε, εάν $n<m$, τότε, για κάθε x ένος τέτοιου συνόλου, να είναι:

$$s_n(x)=s_m(x) \text{ εάν και μόνο εάν } c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_m=0.$$

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ

Στη παράγραφο αυτή θα δούμε το πρώτο βασικό για την απόδειξη της πρότασης 1.4 λήμμα, το οποίο θα διατυπώσουμε όμως ανεξάρτητα από τις υποθέσεις της πρότασης αυτής.

Εστω A ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi)$ και n,m, $n<m$, δύο θετικοί ακέραιοι, ώστε, για τη σειρά (1.1) να έχουμε:

(i) Οι συντελεστές c_n, c_m να είναι διάφοροι του μηδενός.

(ii) Για κάθε x του A να υπάρχει ένας κύκλος (ή μια ευθεία, όταν το κέντρο είναι στο άπειρο) $C(z(x);r(x))$, που να διέρχεται από τα $s_n(x)$, $s_m(x)$, $s_{N(x)}(x)$, $s_{M(x)}(x)$, για κάποια $N(x), M(x)$, όπου $N(x)<n$ και $M(x)>m$.

(iii) $s_m(x) \neq s_{M(x)}(x)$, για κάθε x του A.

Από τις (i),(iii) και την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου έπεται ότι τα τέσσερα μερικά αθροίσματα της (ii) είναι ανά δύο διαφορετικά για κάθε x του A.

1.5. ΛΗΜΜΑ: Με τις παραπάνω προϋποθέσεις έχουμε:

(α) Εάν $c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_{n+q}=0$, $c_{n+q+1} \neq 0$ (για $q=0$ εννοούμε ότι $c_{n+1} \neq 0$), τότε $c_{m+1}=c_{m+2}=\cdots=c_{m+q}=0$, $c_{m+q+1} \neq 0$.

(β) Υπάρχουν δύο φυσικοί N,M, με $0 \leq N<n$, $M>m+q$, και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο B του A, ώστε τα μερικά αθροίσματα $s_N(x)$, $s_n(x)$, $s_m(x)$, $s_M(x)$, της (1.1), να βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο (ή μια ευθεία), για κάθε x του B και επιπλέον οι συντελεστές τής (1.1) ικανοποιούν για κάθε $s=1,2,\ldots,p$, όπου $p=\min(n-N,\ m-n-q,\ M-m-q)$ τις σχέσεις:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \bar{c}_{n-j} c_{n+q+s-j} = \sum_{j=0}^{s-1} \bar{c}_{m-j} c_{m+q+s-j} \qquad (1.6)$$

Απόδειξη

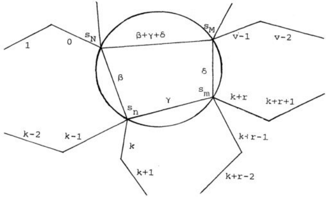
Για κάθε x του A θεωρούμε τους n κύκλους (ή ευθείες) C_j, $j=0,1,\ldots,n-1$, που διέρχονται από τα $s_n(x)$, $s_m(x)$ και $s_j(x)$. Από την (ii) έπεται τότε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $M(x)>m$, ώστε για ένα τουλάχιστο j, $j=0,1,\ldots,n-1$, $s_{M(x)}(x) \in C_j$. Εστω

$$A_j=\{x \in A : \text{υπάρχει } M=M(x),\ M>m, \text{ ώστε } s_M(x) \in C_j\}$$

Αφού το A είναι υπεραριθμήσιμο και $A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} = A$, έπεται ότι το ίδιο θ'αληθεύει και για κάποιο από τα A_j, δηλαδή, υπάρχει $N<n$, ανεξάρτητος του x, ώστε το A_N να είναι υπεραριθμήσιμο. Προφανώς μπορούμε να πάρουμε τον N έτσι που ο συντελεστής c_{N+1} να είναι διάφορος του μηδενός. Τώρα για τα σύνολα:

$$B_i = \{x \in A_N : s_i(x) \in C_N \ \text{και} \ c_i \neq 0\},$$

όπου $i>m$, έχουμε $\bigcup_{i>m} B_i = A_N$, οπότε, όπως πιο πάνω, έπεται ότι υπάρχει $M>m$, ανεξάρτητος του x, ώστε το B_M να είναι υπεραριθμήσιμο. Θα συμβολίζουμε τὸ B_M παρακάτω με B. Ετσι, έχουμε τέσσερα διαφορετικά μερικά αθροίσματα της (Ε.1), τα $s_N(x)$, $s_n(x)$, $s_m(x)$, $s_M(x)$, που βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο (ή μια ευθεία), για κάθε x του B (βλέπε Σχήμα 1). Τότε γνω-



Σχήμα 1

ρίζουμε ότι για κάθε x του B ο διπλός λόγος

$$\frac{s_N(x)-s_n(x)}{s_m(x)-s_n(x)} \Big| \frac{s_N(x)-s_M(x)}{s_m(x)-s_M(x)}$$

θα είναι ένας πραγματικός αριθμός. Δηλαδή, για όλα τα x του B έχουμε:

$$\beta\bar{\gamma}\delta(\bar{\beta}+\bar{\gamma}+\bar{\delta})=\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}(\beta+\gamma+\delta), \tag{1.7}$$

όπου, $\beta=s_n(x)-s_N(x)$, $\gamma=s_m(x)-s_n(x)$ και $\delta=s_M(x)-s_m(x)$.

Θέτουμε τώρα: $k=n-N$, $r=m-n$, $u=M-m$, $v=k+r+u$ και

$$c_{N+1}=\alpha_0\ ,\ c_{N+2}=\alpha_1\ ,\ldots,\ c_n=\alpha_{k-1}\ ,$$

$$c_{n+1}=\alpha_k\ ,\ c_{n+2}=\alpha_{k+1}\ ,\ldots,c_m=\alpha_{k+r-1},$$

$$c_{m+1}=\alpha_{k+r},\ c_{m+2}=\alpha_{k+r+1},\ldots,c_M=\alpha_{v-1},$$

(στο Σχήμα 1 γράφουμε μόνο τους δείκτες j αντί για τους όρους $\alpha_j e^{i(k+j+1)x}$). Τότε, για κάθε x του B, η (1.7) σημαίνει ότι η παράσταση

$$(\alpha_0 e^{i(N+1)x}+\alpha_1 e^{i(N+2)x}+\ldots+\alpha_{k-1}e^{i(N+k)x})(\bar{\alpha}_k e^{-i(N+k+1)x}+$$
$$+\bar{\alpha}_{k+1}e^{-i(N+k+2)x}+\ldots+\bar{\alpha}_{k+r-1}e^{-i(N+k+r)x})(\alpha_{k+r}e^{i(N+k+r+1)x}+$$
$$+\alpha_{k+r+1}e^{i(N+k+r+2)x}+\ldots+\alpha_{v-1}e^{i(N+v)x})(\bar{\alpha}_0 e^{-i(N+1)x}+$$
$$+\bar{\alpha}_1 e^{-i(N+2)x}+\ldots+\bar{\alpha}_{v-1}e^{-i(N+v)x})$$

ισούται με τη συζυγή της.

Απ'αυτό εύκολα προκύπτει ότι:

$$(\alpha_0+\alpha_1 e^{ix}+\ldots+\alpha_{k-1}e^{i(k-1)x})(\bar{\alpha}_{k+r-1}+\bar{\alpha}_{k+r-2}e^{ix}+\ldots+$$
$$+\bar{\alpha}_k e^{i(r-1)x})(\alpha_{k+r}+\alpha_{k+r+1}e^{ix}+\ldots+\alpha_{v-1}e^{i(u-1)x})(\bar{\alpha}_{v-1}+$$
$$+\bar{\alpha}_{v-2}e^{ix}+\ldots+\bar{\alpha}_0 e^{i(v-1)x})=$$
$$=(\bar{\alpha}_{k-1}+\bar{\alpha}_{k-2}e^{ix}+\ldots+\bar{\alpha}_0 e^{i(k-1)x})(\alpha_k+\alpha_{k+1}e^{ix}+\ldots+$$
$$\alpha_{k+r-1}e^{i(r-1)x})(\bar{\alpha}_{v-1}+\bar{\alpha}_{v-2}e^{ix}+\ldots+\bar{\alpha}_{k+r}e^{i(u-1)x})(\alpha_0+$$
$$+\alpha_1 e^{ix}+\ldots+\alpha_{v-1}e^{i(v-1)x}),$$

για όλα τα x του B. Τότε, προφανώς η προηγούμενη ισότητα αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Εάν τώρα θέσουμε $e^{ix}=z$ τότε, η ισότητα που προκύπτει θ'αληθεύει όχι μόνο για τα παραπάνω z, αλλά, όπως είναι φανερό και πάλι, για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z. Εάν ακόμη είναι $c_{n+j}=0$, $j=1,2,\ldots,q$, $c_{n+q+1}\neq 0$, ή, με το νέο συμβολισμό, $\alpha_k=\alpha_{k+1}=\cdots=\alpha_{k+q-1}=0$, $\alpha_{k+q}\neq 0$, τότε, για κάθε μιγαδικό αριθμό z, έχουμε:

$$(\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{k-1}z^{k-1})(\bar{\alpha}_{k+r-1}+\bar{\alpha}_{k+r-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_{k+q}z^{r-q-1})(\alpha_{k+r}+$$
$$+\alpha_{k+r}+\alpha_{k+r+1}z+\cdots+\alpha_{k+r+q-1}z^{q-1}+\alpha_{k+r+q}z^q+\cdots+\alpha_{v-1}z^{u-1})(\bar{\alpha}_{v-1}+$$
$$+\bar{\alpha}_{v-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_0 z^{v-1})=$$
$$(\bar{\alpha}_{k-1}+\bar{\alpha}_{k-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_0 z^{k-1})(\alpha_{k+q}+\alpha_{k+q+1}z+\cdots+\alpha_{k+r-1}z^{r-1})(\bar{\alpha}_{v-1}+$$
$$+\bar{\alpha}_{v-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_{k+r}z^{u-1})(\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{v-1}z^{v-1})z^q. \qquad (1.8)$$

Το δεύτερο μέλος της (1.8) είναι ένα πολυώνυμο με ελαχιστοβάθμιο όρο τον $\bar{\alpha}_{k-1}\alpha_{k+q}\bar{\alpha}_{v-1}\alpha_0 z^q$, που ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός και επειδή $\alpha_0\alpha_{k+r-1}\alpha_{v-1}\neq 0$, η (1.8) δίδει $\alpha_{k+r}=c_{m+1}=0$. Ομοια έχουμε:

$$\alpha_{k+r+1}=c_{m+2}=0,\ldots,\alpha_{k+r+q-1}=c_{m+q}=0,$$

καθώς και

$$\alpha_0\bar{\alpha}_{k+r-1}\alpha_{k+r+q}\bar{\alpha}_{v-1}=\bar{\alpha}_{k-1}\alpha_{k+q}\bar{\alpha}_{v-1}\alpha_0.$$

Αφού $\alpha_0\alpha_{v-1}\neq 0$, από τη τελευταία ισότητα έπεται ότι:

$$\bar{\alpha}_{k+r-1}\alpha_{k+r+q}=\bar{\alpha}_{k-1}\alpha_{k+q} \quad ή \quad \bar{c}_n c_{n+q+1}=\bar{c}_m c_{m+q+1},$$

που δίδει ότι $c_{m+q+1}\neq 0$ και έτσι το (α) του λήμματος αποδείχτηκε.

Για να δείξουμε και το υπόλοιπο του (β), θέτουμε στην (1.8) $\alpha_{k+r}=\alpha_{k+r+1}=\cdots=\alpha_{k+r+q-1}=0$, και αν $p=\min(k,r-q,u-q)$, τότε η (1.8) γίνεται:

$$(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)(P_3+Q_3)(P_4+Q_4)=$$
$$=(\overset{*}{P}_2+\overset{*}{Q}_2)(\overset{*}{P}_3+\overset{*}{Q}_3)(P_4+\overset{*}{Q}_4)(P_1+\overset{*}{Q}_1), \tag{1.9}$$

όπου,

$$P_1=P_1(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{p-1}z^{p-1}$$

$$Q_1=Q_1(z)=\alpha_p z^p+\alpha_{p+1}z^{p+1}+\cdots+\alpha_{k-1}z^{k-1}$$

$$P_2=P_2(z)=\bar{\alpha}_{k+r-1}+\bar{\alpha}_{k+r-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_{k+r-p}z^{p-1}$$

$$Q_2=Q_2(z)=\bar{\alpha}_{k+r-p-1}z^p+\bar{\alpha}_{k+r-p-2}z^{p+1}+\cdots+\bar{\alpha}_{k+q}z^{r-q-1}$$

$$P_3=P_3(z)=\alpha_{k+r+q}+\alpha_{k+r+q+1}z+\cdots+\alpha_{k+r+q+p-1}z^{p-1}$$

$$Q_3=Q_3(z)=\alpha_{k+r+q+p}z^p+\alpha_{k+r+q+p+1}z^{p+1}+\cdots+\alpha_{v-1}z^{u-q-1}$$

$$P_4=P_4(z)=\bar{\alpha}_{v-1}+\bar{\alpha}_{v-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_{v-p}z^{p-1}$$

$$Q_4=Q_4(z)=\bar{\alpha}_{v-p-1}z^p+\cdots+\bar{\alpha}_0 z^{v-1}$$

$$\overset{*}{P}_2=\overset{*}{P}_2(z)=\bar{\alpha}_{k-1}+\bar{\alpha}_{k-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_{k-p}z^{p-1}$$

$$\overset{*}{Q}_2=\overset{*}{Q}_2(z)=\bar{\alpha}_{k-p-1}z^p+\cdots+\bar{\alpha}_0 z^{k-1}$$

$$\overset{*}{P}_3=\overset{*}{P}_3(z)=\alpha_{k+q}+\alpha_{k+q+1}z+\cdots+\alpha_{k+q+p-1}z^{p-1}$$

$$\overset{*}{Q}_3=\overset{*}{Q}_3(z)=\alpha_{k+q+p}z^p+\alpha_{k+q+p+1}z^{p+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}z^{r-q-1}$$

$$\overset{*}{Q}_4=\overset{*}{Q}_4(z)=\bar{\alpha}_{v-p-1}z^p+\bar{\alpha}_{v-p-2}z^{p+1}+\cdots+\bar{\alpha}_{k+r+q}z^{u-q-1}$$

$$\overset{*}{Q}_1=\overset{*}{Q}_1(z)=\alpha_p z^p+\alpha_{p+1}z^{p+1}+\cdots+\alpha_{v-1}z^{v-1}.$$

Προφανώς, (i) αν $p=k$, τότε, $Q_1=\overset{*}{Q}_2=0$,

(ii) αν $p=r-q$, τότε, $Q_2=\overset{*}{Q}_3=0$ και

(iii) αν $p=u-q$, τότε, $Q_3=\overset{*}{Q}_4=0$.

Από την (1.9) έχουμε τώρα:

$$P_1P_2P_3P_4+P_1P_2P_3Q_4+P_1P_2Q_3(P_4+Q_4)+P_1Q_2(P_3+Q_3)(P_4+Q_4)+$$
$$+Q_1(P_2+Q_2)(P_3+Q_3)(P_4+Q_4)=$$
$$=P_1P_4\overset{*}{P}_2\overset{*}{P}_3+P_1P_4\overset{*}{P}_2\overset{*}{Q}_3+P_1P_4\overset{*}{Q}_2(\overset{*}{P}_3+\overset{*}{Q}_3)+P_1\overset{*}{Q}_4(\overset{*}{P}_2+\overset{*}{Q}_2)(\overset{*}{P}_3+\overset{*}{Q}_3)+$$
$$\overset{*}{Q}_1(\overset{*}{P}_2+\overset{*}{Q}_2)(\overset{*}{P}_3+\overset{*}{Q}_3)(P_4+\overset{*}{Q}_4),$$

όπου όλοι οι προσθετέοι, εκτός του πρώτου κάθε μέλους, περιέχουν όρους βαθμού ίσου ή μεγαλύτερου του p. Επειδή η παραπάνω ισότητα αληθεύει για κάθε μιγαδικό αριθμό, έπεται ότι οι συντελεστές των όρων βαθμού μικρότερου του p του πολυωνύμου

$$P_1(z)P_4(z)[\overset{*}{P}_2(z)\overset{*}{P}_3(z)-P_2(z)P_3(z)], \tag{1.10}$$

είναι μηδέν. Εχουμε όμως:

$$\overset{*}{P}_2(z)\overset{*}{P}_3(z)=$$

$$(\bar{\alpha}_{k-1}+\bar{\alpha}_{k-2}z+\cdots+\bar{\alpha}_{k-p}z^{p-1})(\alpha_{k+q}+\cdots+\alpha_{k+q+p-1}z^{p-1})=$$
$$=\overset{*}{\beta}_0+\overset{*}{\beta}_1z+\cdots+\overset{*}{\beta}_{p-1}z^{p-1}+\overset{*}{\beta}_pz^p+\cdots+\overset{*}{\beta}_{2p-2}z^{2p-2},$$

όπου,

$$\overset{*}{\beta}_{s-1}=\sum_{j=1}^{s}\bar{\alpha}_{k-j}\alpha_{k+q-j+s}\ , \quad s=1,2,\ldots,p. \tag{1.11}$$

Ομοια, οι αντίστοιχοι συντελεστές β_{s-1} του $P_2(z)P_3(z)$ είναι:

$$\beta_{s-1}=\sum_{j=1}^{s}\bar{\alpha}_{k+r-j}\alpha_{k+r+q-j+s}\ , \quad s=1,2,\ldots,p. \tag{1.12}$$

Ετσι, το πολυώνυμο (1.10) ισούται με:

$$(\alpha_0+\cdots+\alpha_{p-1}z^{p-1})(\bar{\alpha}_{v-1}+\cdots+\bar{\alpha}_{v-p}z^{p-1})[(\overset{*}{\beta}_0-\beta_0)+(\overset{*}{\beta}_1-$$
$$-\beta_1)z+\cdots+(\overset{*}{\beta}_{p-1}-\beta_{p-1})z^{p-1}+\cdots+(\overset{*}{\beta}_{2p-2}-\beta_{2p-2})z^{2p-2}]. \tag{1.13}$$

Αφού $\alpha_0\alpha_{v-1}\neq 0$ και $\alpha_0\bar{\alpha}_{v-1}(\overset{*}{\beta}_0-\beta_0)=0$, έπεται ότι $\overset{*}{\beta}_0=\beta_0$. Αντικαθιστώντας στην (1.13) και διαιρώντας δια z προκύπτει όπως πιο πάνω ότι $\beta_1=\overset{*}{\beta}_1$. Συνεχίζοντας όμοια παίρνουμε $\overset{*}{\beta}_2=\beta_2$, $\overset{*}{\beta}_3=\beta_3,\ldots,\overset{*}{\beta}_{p-1}=\beta_{p-1}$, δηλαδή:

$$\overset{*}{\beta}_{s-1}=\beta_{s-1}\ , \quad s=1,2,\ldots,p,$$

που, με τον παλιό συμβολισμό, είναι οι σχέσεις (1.6) και έτσι η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε. ∎

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Προφανώς, εάν υποθέταμε τα N(x), M(x), του (ii) της παραγράφου αυτής, ανεξάρτητα του x, τότε, η ίδια περίπου απόδειξη, μας δίνει το λήμμα 1.5 με το σύνολο A <u>αριθμήσιμο</u> ή ακόμη και <u>πεπερασμένο</u>, αρκεί card(A)=κατάλληλα μεγάλη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε την πρόταση 1.4 στην περίπτωση m=1, δηλαδή το Θεώρημα 1.2 στην ειδική περίπτωση που τα μερικά αθροίσματα τής σειράς (1.1) βρίσκονται πάνω σ'ένα μόνο κύκλο. Η απόδειξη της ειδικής αυτής περίπτωσης δεν χρειάζεται βέβαια μετά την απόδειξη του γενικού θεωρήματος. Επειδή όμως η απόδειξη της γενικής περίπτωσης, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι εκτεταμένη και κάπως περίπλοκη, ενώ για την ειδική αυτή περίπτωση είναι σύντομη και απλή, θεωρούμε σκόπιμο να δοθεί η απόδειξη της τελευταίας και εδώ. Επίσης, θα μας δοθεί η ευκαιρία να εφαρμόσουμε το βασικό λήμμα 1.5 στην απλή αυτή περίπτωση. Ετσι θα γίνει, κατά κάποιο τρόπο, πιο καθαρός ο ρόλος του και για τη γενική περίπτωση.

Δίνουμε τώρα τον παρακάτω ορισμό:

<u>2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Δύο μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ και $s_{n+q}(x)$ της (1.1) θα λέγονται <u>διαδοχικά</u>, εάν

$c_{n+1}=\cdots=c_{n+q-1}=0$ και $c_{n+q}\neq 0$

(για q=1, εννοούμε ότι $c_{n+1}\neq 0$).

Είναι φανερό ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση (m=1) θα εφαρμόζουμε παρακάτω το λήμμα 1.5 για τέσσερα <u>διαδοχικά</u> μερικά αθροίσματα της (1.1) κάθε φορά. Τότε απ'όσα είδαμε στο Κεφάλαιο 1 (βλέπε υπογραμμισμένο μέρος της παρατήρησης της σελίδας 38 και τη σημείωση της σελίδας 44), προκύπτει εύκολα ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε το σύνολο E_0 της πρότασης 1.4 <u>αριθμήσιμο</u>. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τώρα το κύριο αποτέλεσμα αυτού του Κεφαλαίου.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ</u>

<u>2.2. ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: <u>Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος p (το p αυτό είναι το n_0 της πρότασης 1.4), ώστε για $n \geq p$ τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (1.1) να βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο $C(\tau(x);r(x))$, για κάθε x ένος αριθμήσιμου υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$. Τότε, υπάρχουν, ένας θετικός ακέραιος k, ένας πραγματικός αριθμός t και δύο μιγαδικοί αριθμοί a,b, όπου $\bar{a}b$ πραγματικός, ώστε η (1.1) να έχει μια αναπαράσταση της μορφής:</u>

$$P_0(x)+e^{i(p+1)x}(a+be^{ik(x+t)})\sum_{n=0}^{\infty} e^{2ikn(x+t)}, \qquad (2.3)$$

<u>όπου</u>, $P_0(x)=c_0+c_1e^{ix}+\cdots+c_pe^{ipx}$.

<u>Αντίστροφα, κάθε σειρά της μορφής (2.3) έχει τα μερικά της αθροίσματα $s_n(x)$ για $n \geq p$ και για κάθε, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, x του $[0,2\pi)$ σ'ένα ακριβώς κύκλο αν και μόνο αν $\bar{a}b$ είναι πραγματικός αριθμός.</u>

<u>Απόδειξη</u>

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_{p+1}\neq 0$, $c_{p+2}=\cdots=c_{p+k}=0$ και $c_{p+k+1}\neq 0$ (αν k=1, εννοούμε $c_{p+2}\neq 0$). Αν $c_{p+k+2}=\cdots=c_{p+k+s}=0$,

$c_{p+k+s+1} \neq 0$, τότε το λήμμα 1.5 δίνει s=k και

$$\bar{c}_{p+1} c_{p+k+1} = \bar{c}_{p+k+1} c_{p+2k+1}. \qquad (2.4)$$

Συνεπώς, $c_{p+2k+1} \neq 0$. Ομοια συμπεραίνουμε ότι οι μόνοι μη-δενικοί συντελεστές της (1.1), με δείκτες μεγαλύτερους του p, είναι εκείνοι που έχουν δείκτες τους p+1+jk, j=0,1,2,3,.... Για ευκολία θέτουμε

$$a_j = c_{p+1+jk}\ , \quad j=0,1,2,\ldots .$$

Με το νέο συμβολισμό η (2.4) γίνεται:

$$\bar{a}_0 a_1 = \bar{a}_1 a_2 \qquad (2.5)$$

και γενικά έχουμε (από το λήμμα 1.5):

$$\bar{a}_j a_{j+1} = \bar{a}_{j+1} a_{j+2}\ , \quad j=0,1,2,\ldots . \qquad (2.6)$$

Για κάθε j, η (2.6) δίνει $|a_j| = |a_{j+2}|$ και αν $a_2 = a_0 \omega$, τότε, $|\omega|=1$. Αφού $a_0 \neq 0$, οι σχέσεις (2.6) για j=0,1 δίνουν $a_3 = a_1 \omega$ και επαγωγικά:

$$a_{2j} = a_0 \omega^j,\ a_{2j+1} = a_1 \omega^j, \quad j=0,1,2,\ldots . \qquad (2.7)$$

Τότε η (1.1) παίρνει τη μορφή:

$$c_0 + c_1 e^{ix} + \cdots + c_p e^{ipx} + e^{i(p+1)x}(a_0 + a_1 e^{ikx} + a_0 \omega e^{2ikx} + a_1 \omega e^{3ikx} +$$

$$+ a_0 \omega^2 e^{4ikx} + a_1 \omega^2 e^{5ikx} + \ldots) =$$

$$= P_0(x) + e^{i(p+1)x}(a_0 + a_1 e^{ikx}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{2ikn(x+t)}, \qquad (2.8)$$

όπου t είναι ένας πραγματικός αριθμός, ώστε $e^{2ikt} = \omega$. Αν θέσουμε $a = a_0$, $b = a_1 e^{-ikt}$, τότε η (2.8) μας δίνει την (2.3). Τέλος, λόγω των (2.5) και $a_2 = a_0 e^{2ikt}$, έχουμε:

$\bar{a}b = \bar{a}_0 a_1 e^{-ikt} = \bar{a}_1 a_0 e^{2ikt} e^{-ikt} = a\bar{b}$, δηλαδή, $\bar{a}b$ πραγματικός.

Αντίστροφα, είναι προφανές ότι αρκεί να θεωρήσουμε μια σειρά της μορφής:

$$(a+be^{ikx})\sum_{n=0}^{\infty} e^{2iknx}.$$

Για τη σειρά αυτή έχουμε:

$$s_{2n}(x)=(a+be^{ikx})/(1-e^{2ikx})-[(b+ae^{ikx})/(1-e^{2ikx})]e^{ik(2n+1)x},$$

$$s_{2n+1}(x)=[(a+be^{ikx})/(1-e^{2ikx})](1-e^{ik(2n+2)x}),$$

για κάθε, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, x του $[0,2\pi)$. Ετσι, για καθένα απ'αυτά τα x, τα $s_{2n}(x)$ βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο με κέντρο $\tau(x)=(a+be^{ikx})/(1-e^{2ikx})$ και ακτίνα $r_1(x)=|(b+ae^{ikx})/(1-e^{2ikx})|$, ενώ τα $s_{2n+1}(x)$ βρίσκονται πάνω σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $r_2(x)=|(a+be^{ikx})/(1-e^{2ikx})|$. Οι δύο αυτοί κύκλοι συμπίπτουν αν και μόνο αν ο $\bar{a}b$ είναι πραγματικός αριθμός, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, και έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.∎

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

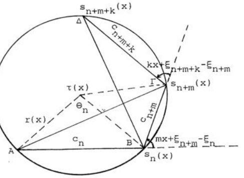
1. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 μπορεί να γίνει και χωρίς το λήμμα 1.5 αλλά με επανειλημμένη εφαρμογή της επόμενης παρατήρησης:

Εάν $n>p$ $c_n\neq 0$, $c_{n+m}\neq 0$, $c_{n+m+k}\neq 0$, οι υπόλοιποι μεταξύ c_n και c_{n+m+k} συντελεστές της σειράς (1.1) είναι μηδέν και $c_v=|c_v|\exp(i\xi_v)$, τότε θα έχουμε $m=k$, $|c_n|=|c_{n+m+k}|$, και $\xi_{n+m+k}-\xi_{n+m}=\xi_{n+m}-\xi_n \pmod{2\pi}$.

Η απόδειξη της παρατήρησης αυτής έχει συνοπτικά ως εξής (για το συμβολισμό βλέπε Σχήμα 2):

Από το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ προκύπτει εύκολα ότι για κάθε x του Ε ισχύουν οι τύποι:

$$|c_n| = 2r(x)\sin\theta_n,$$
$$|c_{n+m}| = 2r(x)\sin(mx+\xi_{n+m}-\xi_n-\theta_n),$$
$$|c_{n+m+k}| = 2r(x)\sin[(k-m)x+\xi_{n+m+k}-2\xi_{n+m}+\xi_n+\theta_n].$$



Σχήμα 2

Από τους παραπάνω τύπους, με απαλοιφή των $r(x)$ και $\theta_n=\theta_n(x)$, έπεται ότι:

$$|c_{n+m+k}|\sin(mx+\xi_{n+m}-\xi_n) = |c_n|\sin(kx+\xi_{n+m+k}-\xi_{n+m})+$$
$$+|c_{n+m}|\sin[(k-m)x+\xi_{n+m+k}-2\xi_{n+m}+\xi_n],$$

για κάθε x του E. Από την τελευταία τώρα ισότητα και επειδή το σύνολο E είναι αριθμήσιμο, προκύπτει εύκολα η παραπάνω παρατήρηση. ∎

2. Θα κλείσουμε το Κεφάλαιο αυτό μ'ένα ακόμη θεώρημα, που αφορά την περίπτωση ενός μόνο κύκλου.

2.9. ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος p, ώστε για κάθε x ενός υπεραριθμήσιμου υποσυνόλου E του $[0,2\pi)$, άπειρα μερικά αθροίσματα της (1.1) να βρίσκονται πάνω στον κύκλο (ή την ευθεία) $C(\tau(x);r(x))$, που ορίζουν τα διαδοχικά μερικά της αθροίσματα $s_p(x)$, $s_{p+1}(x)$, $s_{p+k+1}(x)$, τότε, για κάθε $n\geq p$ και κάθε x του E, $s_n(x)\in C(\tau(x);r(x))$ και η σειρά (1.1) έχει μια αναπαράσταση της μορφής (2.3).

Απόδειξη

Εστω $s_{p+k+q+1}(x)$ το διαδοχικό του $s_{p+k+1}(x)$ μερικό άθροισμα της (1.1). Αφού υπάρχουν άπειρα μερικά αθροίσματα της (1.1) πάνω στον $C(\tau(x);r(x))$, θα υπάρχει $\nu>p+k+1$, ώστε $s_\nu(x)\in C(\tau(x);r(x))$, οπότε για το τετράπλευρο (T) με κορυφές $s_p(x)$, $s_{p+1}(x)$, $s_{p+k+1}(x)$ και $s_{p+k+q+1}(x)$, εφαρμόζεται το λήμμα 1.5. Προκύπτει τότε ότι $q=k$, δηλαδή $c_{p+k+q+1}=c_{p+2k+1}$,

και $\bar{c}_{p+1}c_{p+k+1}=\bar{c}_{p+k+1}c_{p+2k+1}$.

Είναι εύκολο τώρα να διαπιστώσει κανείς ότι η προηγούμενη ισότητα ισοδυναμεί με το ότι το τετράπλευρο (T) είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο, για κάθε x του E (προφανώς, αν για κάποιο x ο κύκλος C εκφυλιστεί σε ευθεία, τότε το προηγούμενο τραπέζιο εκφυλίζεται σ'ένα ευθύγραμμο τμήμα). Συνεπώς, για κάθε x του E, $s_{p+2k+1}(x)\in C(\tau(x);r(x))$.

Ομοια προκύπτει ότι το διαδοχικό του $s_{p+2k+1}(x)$ μερικό άθροισμα της (1.1), είναι το $s_{p+3k+1}(x)$ και βρίσκεται κι'αυτό πάνω στον $C(\tau(x);r(x))$, για κάθε x του E. Συνεχίζοντας μ' αυτό τον τρόπο (ή επαγωγικά) έχουμε ότι $s_n(x)\in C(\tau(x);r(x))$, για κάθε $n\geq p$ και κάθε x στο E. Η απόδειξη ολοκληρώνεται τότε από το θεώρημα 2.2. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Η ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα αποδείξουμε το γενικό Θεώρημα Β της Εισαγωγής της εργασίας αυτής, εκτός από ένα ισχυρισμό, για την απόδειξη του οποίου θα αφιερώσουμε το δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Β, θα δείξουμε πρώτα το Θεώρημα 1.2, αποδεικνύοντας (βλ. Κεφάλαιο 1) την πρόταση 1.4 (πρόταση 3.2 παρακάτω), εκτός από τον ισχυρισμό, που αναφέραμε παραπάνω. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το συμπέρασμα (ii) του Θεωρήματος Β, το οποίο προκύπτει εύκολα από το συμπέρασμα της πρότασης 3.2.

Την απόδειξη της πρότασης αυτής χωρίζουμε σε τρία βήματα. Πριν πούμε λίγα λόγια για καθένα από τα βήματα αυτά υπενθυμίζουμε τη πρόταση.

Εάν

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}\ , \quad x \text{ στο } [0,2\pi), \tag{3.1}$$

είναι μια τριγωνομετρική δυναμοσειρά, τότε έχουμε:

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ: Εάν υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι m και n_o και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E_o του $[0,2\pi)$, ώστε, για κάθε x του E_o να υπάρχουν m κύκλοι, τους οποίους αριθμούμε κατά ένα αυθαίρετο τρόπο, $C_1(x),\cdots,C_m(x)$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $n\geq n_0$ τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (3.1) βρίσκονται στην ένωση των παραπάνω κύκλων.

(ii) Για κάθε x στο E_0 και για κάθε j στο $\{1,2,\cdots,m\}$ το $\{n:s_n(x)\in C_j(x)\}$ είναι απειροσύνολο.

(iii) Για κάθε x στο E_0 και για κάθε j στο $\{1,2,\cdots,m\}$ υπάρχει $N=N(x,j)<n_0$, ώστε, $s_N(x)\in C_j(x)$.

Τότε, υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι v, k, με v<k, και ένας πραγματικός αριθμός t, ώστε η σειρά (3.1) να έχει μια αναπαράσταση της μορφής:

$$P_0(x)+e^{ivx}P(x)\sum_{q=0}^{\infty}e^{iq(k-v)(x+t)}, \tag{3.3}$$

όπου, $P_0(x)=c_0+c_1e^{ix}+\ldots+c_{v-1}e^{i(v-1)x}$,

και $P(x)=c_v+c_{v+1}e^{ix}+\ldots+c_{k-1}e^{i(k-v-1)x}$.

Στο βήμα 1 της απόδειξης θα διατυπώσουμε τον ισχυρισμό, που όπως είπαμε θα δείξουμε στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου. Στο βήμα 2 θα δούμε μια περίπτωση, κατά την οποία ένα τρίγωνο, με κορυφές τρία διαδοχικά μερικά αθροίσματα της (3.1), προκύπτει από ένα άλλο τρίγωνο, με κορυφές πάλι τρία διαδοχικά μερικά αθροίσματα της (3.1), με στροφή περί το κέντρο τ(x) κάποιου κύκλου γνωστού από το βήμα 1 (για τον ορισμό των διαδοχικών μερικών αθροισμάτων, βλέπε Εισαγωγή Κεφαλαίου 2). Στο βήμα 3 θα αποδείξουμε ότι η σειρά (3.1) έχει, κάτω από τις προϋποθέσεις της πρότασης 3.2, μια αναπαράσταση της μορφής (3.3).

ΜΕΡΟΣ Α

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 3.2

Βήμα 1: Ο επόμενος ισχυρισμός είναι ένα ουσιαστικό μέρος της απόδειξης και όπως είπαμε θ'αποδειχθεί στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου. Προς το παρόν ας δεχτούμε ότι με τις προϋποθέσεις της πρότασης 3.2 αληθεύει ο

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

Υπάρχουν 2m+1 θετικοί ακέραιοι $v,k_1,k_2,\ldots,k_{2m}$, με $n_0 \le v < k_1 < k_2 < \cdots < k_{2m}$, και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E_1 του E_0, ώστε:

(i) $c_q \neq 0$, $q=v,k_1,\ldots,k_{2m}$.

(ii) Για κάθε x του E_1, τα μερικά αθροίσματα της (3.1) με δείκτες τους $v,k_1,\ldots,k_{2m}$ να βρίσκονται πάνω σ'ένα από τους m κύκλους $C_j(x)$ της πρότασης. Θα συμβολίζουμε αυτό το κύκλο με $C(\tau(x);r(x))$.

(iii) Υπάρχουν 2m πραγματικοί αριθμοί t_n, n=1,2,...,2m, ώστε για κάθε x του E_1 να έχουμε:

$$s_{q-j}(x)-\tau(x)=(s_{v-j}(x)-\tau(x))\omega_n, \tag{3.4}$$

όπου, $q=k_n$, n=1,2,...2m, j=0,1, και

$$\omega_n=\exp[i(q-v)(x+t_n)]. \tag{3.5}$$

Βήμα 2: Παρατηρούμε κατ'αρχήν ότι οι προϋποθέσεις της πρότασης 3.2 μας επιτρέπουν να εφαρμόζουμε το βασικό λήμμα 1.5, αρκεί το n, που εμφανίζεται στο λήμμα αυτό, να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το n_0 της πρότασης αυτής. Θα αποδείξουμε τώρα την εξής

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εστω r,p,s θετικοί ακέραιοι, $r\geq n_0$, και u ένας πραγματικός αριθμός. Εάν για κάθε x του E_1

(a) $s_r(x)$, $s_{r+p}(x)$ βρίσκονται πάνω σ'ένα από τους m κύκλους της πρότασης 3.2, έστω τον $C^*(x)$, και ο κύκλος αυτός $C^*(x)$ είναι ομόκεντρος του κύκλου $C(\tau(x);r(x))$, που ορίστηκε στον προηγούμενο ισχυρισμό,

(b) $s_{r+p-j}(x)-\tau(x)=(s_{r-j}(x)-\tau(x))e^{ip(x+u)}$, $\qquad j=0,1$,

(c) $c_r c_{r+p}\neq 0$,

(d) $c_{r+1}=c_{r+2}=\cdots=c_{r+s-1}=0$, $c_{r+s}\neq 0$,

τότε, για κάθε x του E_1 έχουμε:

(e) $s_{r+p+s}(x)-\tau(x)=(s_{r+s}(x)-\tau(x))e^{ip(x+u)}$ και

(f) $c_{r+p+1}=c_{r+p+2}=\cdots=c_{r+p+s-1}=0$, $c_{r+p+s}\neq 0$.

Απόδειξη

Οπως παρατηρήσαμε παραπάνω και λόγω των (a),(c) μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 1.5 (στο κύκλο $C^*(x)$ και για τους δείκτες $r,r+p$), οπότε άμεσα έχουμε το (f) και τη σχέση:

$$\bar{c}_r c_{r+s}=\bar{c}_{r+p}c_{r+p+s}. \tag{3.6}$$

Από τις δυο ισότητες ($j=0,1$) της (b) έχουμε με αφαίρεση κατά μέλη:

$$c_{r+p}e^{i(r+p)x}=c_r e^{irx}e^{ip(x+u)}, \text{ ή}$$

$$c_{r+p}=c_r e^{ipu}. \tag{3.7}$$

Οι (3.6), (3.7) και (c) δίνουν:

$$c_{r+p+s}=c_{r+s}e^{ipu}. \tag{3.8}$$

Τώρα, η (e) είναι άμεση συνέπεια των (b), (3.7) και (3.8).∎

<u>Βήμα 3:</u> Εδώ θα δείξουμε ότι η σειρά (3.1) έχει μια αναπαράσταση της μορφής (3.3).

<u>Απόδειξη</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$c_{n+k-v}=c_n e^{i(k-v)t},\ n=v,v+1,v+2,\dots, \tag{3.9}$$

με $k=k_1$, $t=t_1$ (όπου k_1, t_1, είναι όπως στο βήμα 1).

Πραγματικά, εάν ισχύει η (3.9), τότε,

$$c_{n+2(k-v)}=c_n\omega^2,\dots,c_{n+q(k-v)}=c_n\omega^q,\dots, \tag{3.10}$$

όπου:

$$\omega=e^{i(k-v)t} \quad \text{και} \quad n=v,v+1,\dots,k-1.$$

Τότε, η σειρά (3.1) γίνεται:

$$c_0+c_1e^{ix}+\dots+c_{v-1}e^{i(v-1)x}+c_ve^{ivx}+\dots+c_{k-1}e^{i(k-1)x}+$$
$$+c_v\omega e^{ikx}+\dots+c_{k-1}\omega e^{i(2k-v-1)x}+$$
$$+c_v\omega^2e^{i(2k-v)x}+\dots=$$

$$=P_0(x)+e^{ivx}P(x)\sum_{q=0}^{\infty}(\omega e^{i(k-v)x})^q,$$

που είναι η (3.3).

Για ν'αποδείξουμε τώρα την (3.9), υπενθυμίζουμε πρώτα ότι $k=k_1>v$. Εάν

$$c_{v+1}=c_{v+2}=\dots=c_{v+s-1}=0,\ c_{v+s}\neq0,$$

τότε, από το βήμα 1, έπεται ότι οι υποθέσεις του βήματος 2 ικανοποιούνται με $r=v$, $p=q-v$ και $u=t_n$, όπου $q=k_n$, $n=1,2,\dots,2m$. Συνεπώς, για κάθε x στο E_1 έχουμε:

$$c_{q+1}=c_{q+2}=\dots=c_{q+s-1}=0,\ c_{q+s}\neq0, \text{ και}$$

$$s_{q+s}(x)-\tau(x)=(s_{v+s}(x)-\tau(x))\exp[i(q-v)(x+t_n)], \tag{3.11}$$

$$q=k_n,\ n=1,2,\dots,2m.$$

Προφανώς, από τις (3.4), (3.5) και (3.11) έπεται ότι:

$$s_{q+j}(x)-\tau(x)=(s_{v+j}(x)-\tau(x))\omega_n, \qquad (3.12)$$

$$q=k_n,\ n=1,2,\ldots,2m \text{ και } j=-1,0,1,\ldots,s.$$

Από τις σχέσεις (3.11) έπεται ότι τα μερικά αθροίσματα $s_{q+s}(x)$, όπου $q=v,k_1,\ldots,k_{2m}$, βρίσκονται για κάθε x του E_1 πάνω σ'ένα κύκλο με κέντρο το $\tau(x)$. Ο κύκλος αυτός θα είναι υποχρεωτικά ένας από τους m κύκλους της πρότασης 3.2, διότι τα παραπάνω 2m+1 μερικά αθροίσματα είναι ανά δύο διαφορετικά (αφού $c_{q+s}\neq 0$, $q=v,k_1,\ldots,k_{2m}$) και το πλήθος τους είναι 2m+1, ενώ οι κύκλοι είναι μόνο m, άρα τουλάχιστο τρία απ'αυτά βρίσκονται πάνω σ'ένα απ'αυτούς τους m κύκλους. Τότε όμως, οι υποθέσεις του βήματος 2 ικανοποιούνται και πάλι με r=v+s, p=q-v και $u=t_n$, όπου $q=k_n$, $n=1,2,\ldots,2m$. Συνεπώς, εάν

$$c_{v+s+1}=c_{v+s+2}=\cdots=c_{v+s+t-1}=0,\ c_{v+s+t}\neq 0,$$

τότε,

$$c_{q+s+1}=c_{q+s+2}=\cdots=c_{q+s+t-1}=0,\ c_{q+s+t}\neq 0,$$

$$q=k_n,\ n=1,2,\ldots,2m,$$

και για κάθε x του E_1 θα έχουμε:

$$s_{q+j}(x)-\tau(x)=(s_{v+j}(x)-\tau(x))\omega_n, \qquad (3.13)$$

$$q=k_n,\ n=1,2,\ldots,2m \text{ και } j=-1,0,1,\ldots,s+t.$$

Ετσι, για κάθε x του E_1, τα μερικά αθροίσματα $s_{q+s+t}(x)$, με $q=v,k_1,\ldots,k_{2m}$, βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο με κέντρο το $\tau(x)$, ο οποίος, όπως παραπάνω, είναι ένας από τους m κύκλους της πρότασης 3.2. Συνεχίζοντας μ'αυτό τον τρόπο βλέπουμε ότι οι σχέσεις (3.13) αληθεύουν για κάθε ακέραιο j μεγαλύτερο ή ίσο με τον -1.

Θεωρούμε τώρα τις (3.13) με $q=k_1=k$ και $t_1=t$ (οπότε

$\omega_1=\exp[i(k-v)(x+t)]$), και αφαιρούμε τις αντίστοιχες ισότητες για $j=n-v-1$ κάι $j=n-v$. Προκύπτει τότε:

$$c_{n+k-v}e^{i(n+k-v)x}=c_n e^{inx}e^{i(k-v)(x+t)},$$

που μετά τις απλοποιήσεις είναι η ζητούμενη ισότητα (3.9).∎

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του ισχυρισμού, ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος Β.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ (ii) ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Β

Δείξαμε παραπάνω ότι η σειρά (3.1) έχει μια αναπαράσταση της μορφής (3.3). Από τη μορφή αυτή είναι εύκολο τώρα να αποδείξουμε το (ii) του γενικού θεωρήματος Β (βλέπε Εισαγωγή της εργασίας αυτής).

Προφανώς, μπορούμε, αντί για σειρές της μορφής (3.3), να θεωρήσουμε σειρές της απλούστερης μορφής:

$$P(x)\sum_{n=0}^{\infty} e^{iknx}, \qquad (3.14)$$

όπου,

$$P(x)=a_0+a_1e^{ix}+\cdots+a_{k-1}e^{i(k-1)x},$$

για κάποιο θετικό ακέραιο k.

Εχουμε τότε το ακόλουθο πόρισμα:

<u>3.15. ΠΟΡΙΣΜΑ: Εστω (Σ) μια σειρά της μορφής (3.14). Αν από το $[0,2\pi)$ εξαιρέσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος x, τότε, για κάθε άλλο x του $[0,2\pi)$, τα μερικά αθροίσματα της (Σ) βρίσκονται πάνω σε ακριβώς m ομόκεντρους κύκλους (m ανεξάρτητο του x).</u>

Απόδειξη

Εάν θέσουμε:

$$
\begin{aligned}
&P_1(x)=P(x),\\
&P_2(x)=a_{k-1}+a_0e^{ix}+a_1e^{2ix}+\dots+a_{k-2}e^{i(k-1)x},\\
&P_3(x)=a_{k-2}+a_{k-1}e^{ix}+a_0e^{2ix}+\dots+a_{k-3}e^{i(k-1)x},\\
&\vdots\\
&P_k(x)=a_1\ +\ a_2e^{ix}\ +\ a_3e^{2ix}+\dots+a_0e^{i(k-1)x},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

τα μερικά αθροίσματα της (3.14), για $n=0,1,2,\dots,$ και x στο

$$T=[0,2\pi)-\{0,\ 2\pi/k,\dots,2(k-1)\pi/k\},$$

δίδονται από τους τύπους:

$$
\begin{aligned}
&s_{kn+k-1}(x)=\frac{P_1(x)}{1-e^{ikx}}-\frac{P_1(x)}{1-e^{ikx}}e^{i(kn+k)x},\\
&s_{kn+k-2}(x)=\frac{P_1(x)}{1-e^{ikx}}-\frac{P_2(x)}{1-e^{ikx}}e^{i(kn+k-1)x},\\
&s_{kn+k-3}(x)=\frac{P_1(x)}{1-e^{ikx}}-\frac{P_3(x)}{1-e^{ikx}}e^{i(kn+k-2)x},\\
&\vdots\\
&s_{kn}(x)\quad=\frac{P_1(x)}{1-e^{ikx}}-\frac{P_k(x)}{1-e^{ikx}}e^{i(kn+1)x}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Από τους τύπους (3.17) έπεται τώρα άμεσα ότι τα μερικά αθροίσματα της (3.14) βρίσκονται, για κάθε x του T, πάνω σ'ένα πεπερασμένο πλήθος ομόκεντρων κύκλων, με κοινό κέντρο το μιγαδικό αριθμό:

$$\tau(x)=\frac{P_1(x)}{1-e^{ikx}} \tag{3.18}$$

και ακτίνες:

$$r_j(x)=\left|\frac{P_j(x)}{1-e^{ikx}}\right|, \quad j=1,2,\ldots,k. \tag{3.19}$$

Απομένει ν'αποδείξουμε ότι, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος x του $[0,2\pi)$, το πλήθος των παραπάνω κύκλων είναι σταθερό.

Εστω $i\neq j$, όπου i, j στοιχεία του $\{1,2,\ldots,k\}$. Από την (3.19) έχουμε:

$$r_i(x)=r_j(x)$$

εάν και μόνο εάν

$$P_i(x)\bar{P}_i(x)-P_j(x)\bar{P}_j(x)=0. \tag{3.20}$$

Ομως, το αριστερό μέλος της (3.20) είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο και επομένως η εξίσωση (3.20) ή θα έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων στο $[0,2\pi)$, ή θ'αληθεύει για κάθε x. Αν τώρα η σχέση ισοδυναμίας, στο $\{1,2,\ldots,k\}$, που ορίζεται από την:

"$r_i(x)=r_j(x)$ για όλα τα x του T",

καθορίζει m κλάσεις και $r_{(1)}(x)$, $r_{(2)}(x)$, ..., $r_{(m)}(x)$, είναι m αντιπρόσωποι των κλάσεων αυτών αντίστοιχα, τότε, για όλα τα x του T, εκτός από το πεπερασμένο πλήθος λύσεων των εξισώσεων:

$$r_{(p)}(x)=r_{(q)}(x),\ p\neq q,\ p,q \text{ στο } \{1,2,\ldots,m\},$$

θα έχουμε ακριβώς m κύκλους και η απόδειξη του πορίσματος, άρα και του γενικού θεωρήματος B, τελείωσε. ∎

ΜΕΡΟΣ Β

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ

Εδώ θ'αποδείξουμε τον ισχυρισμό του βήματος 1 του πρώτου μέρους του Κεφαλαίου αυτού, συμπληρώνοντας έτσι την απόδειξη του Θεωρήματος Β. Υπενθυμίζουμε ότι με τις προϋποθέσεις της πρότασης 3.2 (τις οποίες επαναλαμβάνουμε και παρακάτω στη διατύπωση του ισχυρισμού) μπορούμε να εφαρμόζουμε το λήμμα 1.5, αρκεί ο δείκτης n, που εμφανίζεται στο λήμμα αυτό, να είναι ίσος ή μεγαλύτερος του n_o της πρότασης αυτής. Επίσης, επειδή το E_o, της παραπάνω πρότασης, είναι υπεραριθμήσιμο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε x του E_o τα μερικά αθροίσματα της σειράς (3.1) είναι "ουσιαστικά" διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί, δηλαδή:

$$s_n(x)=s_{n+k}(x) \text{ αν και μόνο αν } c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_{n+k}=0$$

(βλέπε Κεφάλαιο 1, παρατήρηση). Από αυτό προφανώς έπεται και ότι οι κύκλοι $C_j(x)$, $j=1,2,\ldots,m$, της πρότασης 3.2 έχουν θετικές ακτίνες.

Τονίζουμε ότι οι παραπάνω κύκλοι δεν υποτίθενται εκ των προτέρων ομόκεντροι, αποδεικνύεται όμως ότι είναι, αλλά η απόδειξη, που δώσαμε στο πρώτο μέρος, απαιτεί τον ισχυρισμό που θ'αποδείξουμε εδώ, τον οποίο και υπενθυμίζουμε:

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι m και n_o και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E_o του $[0,2\pi)$, ώστε, για κάθε x του E_o να υπάρχουν m κύκλοι, τους οποίους αριθμούμε κατά ένα αυθαίρετο τρόπο, $C_1(x),\cdots,C_m(x)$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(a) Για κάθε $n\geq n_o$ τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (1.1) βρίσκονται στην ένωση των παραπάνω κύκλων.

(b) Για κάθε x στο E_o και για κάθε j στο $\{1,2,\cdots,m\}$ το σύνολο $\{n:s_n(x)\in C_j(x)\}$ είναι απειροσύνολο.

(c) Για κάθε x στο E_o και για κάθε j στο $\{1,2,\cdots,m\}$ υπάρχει $N=N(x,j)<n_o$, ώστε, $s_N(x)\in C_j(x)$.

Τότε, υπάρχουν $2m+1$ θετικοί ακέραιοι $v,k_1,k_2,\ldots,k_{2m}$, με $n_o\leq v<k_1<k_2<\cdots<k_{2m}$, και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο E_1 του E_o, ώστε:

(i) $c_q\neq 0$, $q=v,k_1,\ldots,k_{2m}$.

(ii) Για κάθε x του E_1, τα μερικά αθροίσματα της (3.1) με δείκτες τους $v,k_1,\ldots,k_{2m}$ να βρίσκονται πάνω σ'ένα από τους m κύκλους $C_j(x)$, $j=1,2,\ldots,2m$. Θα συμβολίζουμε αυτό τον κύκλο με $C(\tau(x);r(x))$.

(iii) Υπάρχουν $2m$ πραγματικοί αριθμοί t_p, $p=1,2,\ldots,2m$, ώστε για κάθε x του E_1 να έχουμε:

$$s_{q-j}(x)-\tau(x)=(s_{v-j}(x)-\tau(x))\omega_p, \tag{3.21}$$

όπου, $q=k_p$, $p=1,2,\ldots 2m$, $j=0,1$, και

$$\omega_p=\exp[i(q-v)(x+t_p)]. \tag{3.22}$$

Πριν αρχίσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο συντελεστής της σειράς (3.1) με δείκτη n_o είναι διάφορος του μηδενός.

Γενικά, η ύπαρξη μηδενικών συντελεστών στην (3.1) μας δημιουργεί κάποιες τεχνικές δυσκολίες, που για να τις αποφύγουμε θα εργαζόμαστε με μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ με $c_n \neq 0$. Ετσι, έστω n_1 ο μικρότερος ακέραιος, που είναι μεγαλύτερος του n_o, ώστε ο συντελεστής με δείκτη n_1 να είναι διάφορος του μηδενός, n_2 ο μικρότερος ακέραιος, που είναι μεγαλύτερος του n_1, ώστε ο συντελεστής με δείκτη n_2 να είναι διάφορος του μηδενός, και ούτω καθ'εξής.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ F

Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση της απόδειξης του παραπάνω ισχυρισμού, θα ορίσουμε παρακάτω μια συνάρτηση F, με τη βοήθεια της οποίας θα αποδείξουμε το εξής:

Με τις υποθέσεις του ισχυρισμού υπάρχουν μεταξύ των δεικτών $n_o, n_1, n_2, \ldots$, που ορίσαμε παραπάνω, $4(2m+1)$ δείκτες, $n_{v(o)} < n_{v(1)} < \cdots < n_{v(4(2m+1)-1)}$, και ένας ακέραιος αριθμός $s \geq 2$, ώστε, για όλα τα x ενός υπεράριθμου υποσυνόλου του E_o και όλα τα i του $\{0,1,\ldots,4(2m+1)-1\}$, τα μερικά αθροίσματα της σειράς (3.1) με δείκτες τους $n_{v(i)+j}$, να βρίσκονται, για καθένα σταθερό j του $\{0,1,\ldots,s\}$, πάνω σ'ένα από τους κύκλους $C_1(x),\ldots,C_m(x)$ και οι δύο κύκλοι που αντιστοιχούν στα $j=0$ και $j=s$ συμπίπτουν.

Απόδειξη

Εισάγουμε κατ'αρχήν τη συνάρτηση F, που ορίζεται για κάθε x του E_a, ως εξής:

$$F(x)=(t_o, t_1, \ldots, t_N),$$

όπου, t_j, $j=0,1,\ldots,N$, είναι ο μικρότερος ακέραιος του συνόλου $\{1,2,\ldots,m\}$, ώστε για το συγκεκριμένο x το μερικό άθροισμα με δείκτη n_j να βρίσκεται πάνω στον κύκλο με δείκτη t_j, και $N=4(2m+1)^2m^{2m+1}$. Ο λόγος για τον οποίο η τιμή του N είναι $4(2m+1)^2m^{2m+1}$ θα γίνει φανερός στη συνέχεια.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση F παίρνει το πολύ m^{N+1} τιμές και επειδή το E_o είναι υπεραριθμήσιμο, έπεται ότι υπάρχει ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολό του, το οποίο, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θα συμβολίζουμε πάλι με E_o, ώστε:

Για όλα τα x του E_o, η F έχει μια <u>σταθερή τιμή</u>, ας πούμε την:

$$F(x)=(V_o,V_1,\ldots,V_{p-1}),$$

όπου,

$$V_q=(t_{q(2m+1)},t_{q(2m+1)+1},\ldots,t_{q(2m+1)+2m}),$$

$$q=0,1,\ldots,p-1 \quad \text{και} \quad p=4(2m+1)m^{2m+1}.$$

<u>Σημείωση:</u> Δεν θα κάνουμε διάκριση εδώ μεταξύ της αρχικής F, που είναι μια συνάρτηση από το E_o στο T^N, $T=\{1,2,\ldots,m\}$, και της παραπάνω F από το E_o στο $(T^{2m+1})^p$, αφού τα σύνολα T^N και $(T^{2m+1})^p$ είναι ισόμορφα ($N=(2m+1)p$).

Παρατηρούμε τώρα ότι το σύνολο των δυνατών V_q είναι ανεξάρτητο του q και έχει m^{2m+1} στοιχεία. Συνεπώς, τουλάχιστο $p/m^{2m+1}=4(2m+1)$ από τα V_q ταυτίζονται. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχουν $q_o,q_1,\ldots,q_{4(2m+1)-1}$, στο $\{0,1,\ldots,p-1\}$, με $q_o<q_1<\cdots<q_{4(2m+1)-1}$, ώστε:

$$V_k=(\tau_o,\tau_1,\ldots,\tau_{2m}),$$

όπου, $k=q_o,q_1,\ldots,q_{4(2m+1)-1}$, και

$$\tau_j = t_{r+j},\ j=0,1,\ldots,2m,\ r=q_o(2m+1)=\text{σταθερό}. \qquad (3.23)$$

Τώρα, αφού το τ_j παίρνει m τιμές, τις $1,2,\ldots,m$, και το j 2m+1 τιμές, τις $0,1,\ldots,2m$, έπεται ότι υπάρχουν δείκτες b,d στο $\{0,1,\ldots,2m\}$, με $s=d-b\geq 2$, ώστε:

$$\tau_b=\tau_d \qquad (2.23)$$

Ας δούμε, με λίγα λόγια, τι σημαίνουν τα παραπάνω για τα μερικά αθροίσματα της σειράς (3.1). Εάν γράψουμε:

$$q_i(2m+1)+b=v(i),\ i=0,1,\ldots,4(2m+1)-1,$$

τότε, τα μερικά αθροίσματα της (3.1) με δείκτες n_k, $v(i)\leq k\leq v(i)+s$ (όπου, τα b και s είναι αυτά που ορίστηκαν παραπάνω), ακολουθούν μια διαδοχή κύκλων, που είναι ανεξάρτητη του i. Πιο συγκεκριμένα, λόγω και των (3.23) και (3.24), για όλα τα x του E_δ και όλα τα i του $\{0,1,\ldots,4(2m+1)-1\}$, τα μερικά αθροίσματα της σειράς (3.1) με δείκτες τους $n_{v(i)+j}$, βρίσκονται, για καθένα σταθερό j του $\{0,1,\ldots,s\}$, πάνω στον κύκλο με δείκτη $t_{v(o)+j}$, από τους κύκλους $C_1(x),\ldots,C_m(x)$, και οι δύο κύκλοι που αντιστοιχούν στα j=0 και j=s συμπίπτουν, όπως θέλαμε (βλέπε και Κεφάλαιο 4 για τη γεωμετρική ερμηνεία της όλης απόδειξης του ισχυρισμού).∎

Για να ολοκληρώσουμε τώρα την απόδειξη του ισχυρισμού, αρκεί να διαλέξουμε 2m+1 ακέραιους, μεταξύ των 4(2m+1) δεικτών $n_{v(i)+1}$, $i=0,1,\ldots 4(2m+1)-1$, που θα τους ονομάσουμε $v,k_1,k_2,\ldots,k_{2m}$, ώστε να ισχύει η (iii) του ισχυρισμού μας. Θα δούμε τότε ότι τα (i) και (ii) του ισχυρισμού θ'αληθεύουν αυτόματα από τον τρόπο εκλογής των $v,k_1,\ldots,k_{2m}$. Ουσιαστικό βήμα για την παραπάνω εκλογή αποτελεί το δεύτερο βασικό μας λήμμα, που αναφέραμε στην σελίδα 36.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΒΑΣΙΚΟ ΛΗΜΜΑ

Με τις προϋποθέσεις του ισχυρισμού μας θα δείξουμε ότι:

3.25. ΛΗΜΜΑ: Εστω ότι έχουμε ένα ακέραιο αριθμό $s \geq 2$ και δείκτες $r_o < r_1 < \cdots < r_{s+1}$, $p_o < p_1 < \cdots < p_{s+1}$, με $n_o \leq r_s \leq p_o$, ώστε για τη σειρά (3.1) να ισχύουν τα παρακάτω:

(i) οι συντελεστές με δείκτες r_j και p_j, $j=0,1,\ldots,s+1$, είναι διάφοροι του μηδενός,

(ii) οι συντελεστές με δείκτες r_j+1, $r_j+2,\ldots,r_j+t_j$ και p_j+1, $p_j+2,\ldots,p_j+f_j$, όπου $t_j=r_{j+1}-r_j-1$, και $f_j=p_{j+1}-p_j-1$, $j=0,1,\ldots,s$, είναι μηδέν,

(iii) τα μερικά αθροίσματα με δείκτες r_j και p_j, βρίσκονται πάνω σ'ένα από τους m κύκλους, $C_1(x),\cdots,C_m(x)$, για καθένα $j=0,1,\ldots,s$, και για κάθε x του E_o,

(iv) τα μερικά αθροίσματα με δείκτες τους r_o, r_s, p_o, p_s, βρίσκονται, για κάθε x του E_o, πάνω στον ίδιο κύκλο, του οποίου το κέντρο θα συμβολίζουμε με $\tau(x)$,

τότε:

(v) $t_j=f_j$, $j=0,1,\ldots,s$,

(vi) η απόλυτη τιμή του λόγου $c_{p_o}/c_{r_o}=\omega$, ισούται με 1, όταν $t_o \neq t_2$, και μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 1 και Ω, όταν $t_o=t_2$, όπου:

$$\Omega=\left|\frac{c_{r_1}\, c_{r_3}}{c_{r_o}\, c_{r_2}}\right|^{1/2}, \tag{3.26}$$

(vii) αν $|\omega|=1$ και ϑ, $u=u(x)$, δύο πραγματικοί αριθμοί, ώστε:

$$\omega=\exp[i(p_o-r_o)\vartheta] \quad \text{και}$$

$$s_{p_o}(x)-\tau(x)=(s_{r_o}(x)-\tau(x))e^{iu},$$

τότε, είτε

$$u=(p_o-r_o)(x+\vartheta)(\mathrm{mod}2\pi), \quad \text{ή}$$

$$u=\{(p_o-r_o)(x+\vartheta)-2\mathrm{Arg}[(s_{r_o}(x)-\tau(x))\overline{(s_{r_s}(x)-s_{r_o}(x))}]\}(\mathrm{mod}2\pi).$$

Απόδειξη

Για να έχουμε απλούστερο συμβολισμό θέτουμε:

$$c_{r_j}=a_j, \qquad c_{p_j}=b_j, \qquad j=0,1,\ldots,s+1,$$

$$a=a(x)=s_{r_s}(x)-s_{r_o}(x), \qquad b=b(x)=s_{p_s}(x)-s_{p_o}(x),$$

$$A=A(x)=s_{r_o}(x)-\tau(x), \qquad B=B(x)=s_{p_o}(x)-\tau(x),$$

$$h=h(x)=(p_o-r_o)(x+\vartheta) \quad \text{και}$$

$$d=d(x)=\mathrm{Arg}[(s_{r_o}(x)-\tau(x))\overline{(s_{r_s}(x)-s_{r_o}(x))}]=\mathrm{Arg}(A\bar{a})$$

Από τις (i), (ii), (iii) και το λήμμα 1.5 έχουμε αμέσως το (v), καθώς και τις ισότητες:

$$\bar{b}_j b_{j+1}=\bar{a}_j a_{j+1}, \quad j=0,1,\ldots,s. \tag{3.27}$$

Από την (vi), με το νέο συμβολισμό έχουμε $b_o=a_o\omega$, οπότε, από την (3.27) με $j=0$, έπεται ότι $b_1=a_1/\bar{\omega}$. Αντικαθιστώντας το b_1 στην (3.27) με $j=1$, έχουμε $b_2=a_2\omega$. Συνεχίζοντας μ'αυτό το τρόπο καταλήγουμε στις:

$$b_{2j}=a_{2j}\omega, \quad b_{2i+1}=a_{2i+1}/\bar{\omega}, \quad \max(2j,2i+1)\leq s+1. \tag{3.28}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: "$t_o \neq t_2$". Εστω $t_o<t_2$ (στην αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια). Από τις σχέσεις (1.6) του λήμματος 1.5 (με $n=r_1$, $m=p_1$) έχουμε:

$$\bar{c}_{r_0}\cdot c_{r_2}+\underbrace{\bar{0}0+\cdot\cdot\cdot+\bar{0}0}_{t_o\ \text{όροι}}+\bar{c}_{r_1}\cdot 0=\bar{c}_{p_0}\cdot c_{p_2}+\underbrace{\bar{0}0+\cdot\cdot\cdot+\bar{0}0}_{t_o\ \text{όροι}}+\bar{c}_{p_1}\cdot 0,$$

ή, με το νέο συμβολισμό,

$$\bar{a}_0 a_2=\bar{b}_0 b_2,$$

η οποία, λόγω των (3.28), ισοδυναμεί με την:

$$\bar{a}_0 a_2=\bar{a}_0 a_2 \omega\bar{\omega},$$

δηλαδή, $|\omega|=1$, αφού από (i) $a_0 a_2 \neq 0$.

<u>Περίπτωση 2:</u> "$t_o=t_2$". Εφαρμόζοντας και πάλι τις σχέσεις (1.6) του λήμματος 1.5 καταλήγουμε, όπως πιο πάνω, στην:

$$\bar{a}_0 a_2+\bar{a}_1 a_3=\bar{b}_0 b_2+\bar{b}_1 b_3.$$

Η ισότητα αυτή, λόγω και των (3.28), δίνει την:

$$\bar{a}_0 a_2+\bar{a}_1 a_3=\bar{a}_0 a_2 |\omega|^2+\frac{\bar{a}_1 a_3}{|\omega|^2},$$

που ισοδυναμεί με την:

$$(1-|\omega|^2)(\bar{a}_0 a_2 - \frac{\bar{a}_1 a_3}{|\omega|^2})=0, \tag{3.29}$$

από την οποία ολοκληρώνεται άμεσα η απόδειξη του (vi) του λήμματος.

Για ν'αποδείξουμε τώρα την (vii) του λήμματος, παρατηρούμε ότι εάν $|\omega|=1$, δηλαδή $\omega\bar{\omega}=1$, τότε, οι σχέσεις (3.28) γίνονται:

$$b_j=a_j\omega, \quad ή, \quad c_{p_j}=c_{r_j}\omega, \qquad j=0,1,\ldots,s+1. \tag{3.30}$$

Οι (i), (ii), (v), (3.30) και $\omega=\exp[i(p_o-r_o)\vartheta]$ δίνουν:

$$b=ae^{ih} \tag{3.31}$$

Εξ άλλου από την (iv) έχουμε $|A+a|=|B+b|$, $|A|=|B|$, και από την (3.31), $|a|=|b|$, από τις οποίες έπεται:

$$\mathrm{Re}(A\bar{a})=\mathrm{Re}(B\bar{b}),$$

ή, λόγω και της (3.31):

$$\mathrm{Re}(e^{id})=\mathrm{Re}(e^{i[d+(u-h)]}).$$

Από την ισότητα αυτή έχουμε εύκολα ότι:

$$u=h(\mathrm{mod}2\pi) \quad \text{ή} \quad u=(h-2d)(\mathrm{mod}2\pi),$$

που είναι οι ζητούμενες σχέσεις του (vii) και έτσι η απόδειξη του λήμματος τέλειωσε.∎

Η ΕΚΛΟΓΗ ΤΩΝ $v, k_1, \ldots, k_{2m}$

Εστω

$$I=\{0,1,2,\ldots,4(2m+1)-1\},$$

$$H=\{0,1,2,\ldots,s\}.$$

Είδαμε ότι εάν $j\in H$, τότε, για κάθε x του E_0 και για κάθε i του I τα μερικά αθροίσματα της (3.1), με δείκτες $n_{v(i)+j}$, βρίσκονται πάνω σ'ένα από τους m κύκλους και οι δύο κύκλοι, που αντιστοιχούν στα $j=0$ και $j=s$, συμπίπτουν. Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων θα συμβολίζουμε με $\tau(x)$. Επίσης ξέρουμε ότι οι συντελεστές της (3.1) με τους παραπάνω δείκτες είναι διάφοροι του μηδενός. Ετσι, έχουμε όλες τις προϋποθέσεις, για να εφαρμόσουμε το λήμμα 3.25, το οποίο μας δίνει μια διαμέριση του I σε δύο υποσύνολά του, I_1, I_2, που ορίζονται ως εξής: Εάν θέσουμε $c_{r_o(i)}=c_{r_o(o)}\omega_1$, όπου

$$r_j(i)=n_{v(i)+j}, \quad i\in I, \quad j\in H, \tag{3.32}$$

τότε:

$$I_1=\{i\in I:\ |\omega_i|=1\} \quad \text{και} \quad I_2=I-I_1.$$

Εξ άλλου, από την (vi) του λήμματος 3.25, έχουμε:

$$I_2\subset\{i\in I:\ |\omega_i|=\Omega\}, \text{ όπου}$$

$$\Omega = \left| \frac{c_{r_1(o)}\, c_{r_3(o)}}{c_{r_o(o)}\, c_{r_2(o)}} \right|^{1/2}.$$

Ενα απ'αυτά τα δύο σύνολα θα έχει πληθικότητα τουλάχιστο 2(2m+1), αφού card(I)=4(2m+1). Εστω ότι τα πρώτα 2(2m+1) στοιχεία αυτού του συνόλου είναι τα:

$$i_o < i_1 < \cdots < i_{2(2m+1)-1}$$

και ας συμβολίσουμε με J το σύνολό τους, δηλαδή:

$$J = \{i_o,\ i_1, \ldots, i_{2(2m+1)-1}\}.$$

Είναι τώρα τετριμμένο, εάν το J είναι υποσύνολο του I_1, και πολύ εύκολο, εάν το J είναι υποσύνολο του I_2, να δει κανείς ότι (βλέπε 3.32), εάν

$$\Omega_j = \frac{c_{r_o(i_j)}}{c_{r_o(i_o)}}, \quad j=0,1,\ldots,2(2m+1)-1, \tag{3.33}$$

τότε,

$$|\Omega_j| = 1, \quad j=0,1,\ldots,2(2m+1)-1. \tag{3.34}$$

Από την (3.34) έπεται:

(α) Υπάρχουν 2(2m+1) πραγματικοί αριθμοί ϑ_j, ώστε:

$$\Omega_j = \exp[i(r_o(i_j) - r_o(i_o))\vartheta_j],\ j=0,1, \quad ,2(2m+1)-1, \tag{3.35}$$

και

(β) εάν γράψουμε

$$s_{r_o(i_j)}(x) - \tau(x) = (s_{r_o(i_o)}(x) - \tau(x))e^{iu(j,x)}, \tag{3.36}$$

όπου,

$u(j,x)$ πραγματικοί αριθμοί και $j=0,1,\ldots,2(2m+1)-1$,

τότε, για x σταθερό στο E_o, η (vii) του λήμματος 3.25 δίνει ότι το σύνολο J διαμερίζεται σε δύο υποσύνολά του, $J_1(x)$, $J_2(x)$, όπου:

$$J_1(x) = \{i_j \varepsilon J:\ u(j,x) = [r_o(i_j) - r_o(i_o)](x + \vartheta_j)\},$$

$$J_2(x)=J-J_1(x).$$

Προφανώς, ένα τουλάχιστο απ'αυτά τα δύο σύνολα, $J_1(x)$, $J_2(x)$, έχει πληθικότητα τουλάχιστον 2m+1. Εστω $a_0<a_1<\cdots<a_{2m}$ τα πρώτα 2m+1 στοιχεία αυτού του συνόλου (τα οποία βέβαια εξαρτώνται από το x) και

$$k_p(x)=n_{\nu(a_p)+1}, \quad p=0,1,\ldots,2m.$$

Επειδή το πλήθος των δυνατών (2m+1)-αδων $(k_0(x),\ldots,k_{2m}(x))$ είναι <u>πεπερασμένο</u> και το E_0 υπεραριθμήσιμο, έπεται ότι θα υπάρχουν 2m+1 θετικοί ακέραιοι $k_0<k_1<\cdots<k_{2m}$ και ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο A του E_0, ώστε, για κάθε x του A, να έχουμε:

$$k_0(x)=k_0,\ k_1(x)=k_1,\ldots,k_{2m}(x)=k_{2m}.$$

Επειδή, για καθένα x του A, τα k_p ανήκουν, για όλα τα $p=0,1,\ldots,2m$, είτε μόνο στο $J_1(x)$, είτε μόνο στο $J_2(x)$, και το A είναι υπεραριθμήσιμο, έπεται ότι ένα τουλάχιστον από τα σύνολα:

$$A_1=\{x\in A: k_p\in J_1(x),\ p=0,1,\ldots,2m\},$$

$$A_2=A-A_1=\{x\in A: k_p\in J_2(x),\ p=0,1,\ldots,2m\},$$

είναι υπεραριθμήσιμο. Ονομάζουμε το σύνολο αυτό E_1 και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1:</u> Εστω ότι $E_1=A_1$, δηλαδή, για κάθε x του E_1 και για κάθε p του $\{0,1,\ldots,2m\}$, τα k_p ανήκουν στο $J_1(x)$.

Παρατηρούμε ότι, για όλα τα x του E_0, άρα και του A, ο δείκτης i_0 ανήκει στο $J_1(x)$ (βλέπε 3.36 και τον ορισμό του $J_1(x)$). Ετσι, στη περίπτωση αυτή, που $k_0\in J_1(x)$, έπεται εύκολα από τα παραπάνω ότι $s_{k_0-1}(x)=s_{r_0(i_0)}(x)$.

Από τον ορισμό τώρα του $J_1(x)$, και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των (3.33) έως (3.36) και την προηγούμενη παρατήρηση, έχουμε:

$$s_{k_p-1}(x)-\tau(x)=(s_{k_o-1}(x)-\tau(x))e^{iu(p,x)}, \qquad (3.37)$$

όπου,

$u(p,x)=(k_p-k_o)(x+\xi_p)$, και ξ_p ο πραγματικός αριθμός που ορίζεται ως εξής:

"Για κάθε p ο ορισμός του k_p συνεπάγεται την ύπαρξη ενός δείκτη j, $j=j(p)$, με την ιδιότητα $a_p=i_j$. Τότε, $\xi_p=\vartheta_j$, όπου ο ϑ_j ορίζεται από την (3.35)".

Από τον ορισμό του ξ_p και την (3.30) έπεται ότι:

$$c_{k_p}=c_{k_o}\exp[i(k_p-k_o)\xi_p], \quad p=1,2,\ldots,2m. \qquad (3.38)$$

Από τις (3.37) και (3.38) έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} s_{k_p}(x)-\tau(x)&=s_{k_p-1}(x)-\tau(x)+c_{k_p}\exp(ik_px)=\\ &=(s_{k_o-1}(x)-\tau(x))\exp[i(k_p-k_o)(x+\xi_p)]+\\ &\quad+c_{k_o}\exp[i(k_p-k_o)\xi_p]\exp(ik_px)=\\ &=(s_{k_o}(x)-\tau(x))\exp[i(k_p-k_o)(x+\xi_p)]. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή με την (3.37) δίνουν ότι για κάθε x του E_1, θα έχουμε:

$$s_{q-j}(x)-\tau(x)=(s_{v-j}(x)-\tau(x))\omega_p, \qquad (3.39)$$

όπου,

$$\omega_p=\exp[i(q-v)(x+t_p)], \qquad (3.40)$$

$$q=k_p,\quad v=k_o,\quad t_p=\vartheta_p \quad p=1,2,\ldots,2m \quad \text{και} \quad j=0,1,$$

δηλαδή τις ζητούμενες (3.21), (3.22), του (iii) του ισχυρισμού μας.

<u>Περίπτωση 2:</u> Εστω ότι $E_1=A_2$, δηλαδή, για κάθε x του E_1 και για κάθε p του $\{0,1,\ldots,2m\}$, τα k_p ανήκουν στο $J_2(x)$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε, όπως παραπάνω:

$$s_{k_p-1}(x)-\tau(x)=(s_{r_o(i_o)}(x)-\tau(x))e^{iy(p,x)}, \qquad (3.41)$$

όπου,

$y(p,x)=[k_p-r_o(i_o)-1](\chi+\xi_p)-2d, \quad p=1,2,\ldots,2m$, ξ_p όπως προηγουμένως και d ένας πραγματικός αριθμός ανεξάρτητος του p (βλέπε (vii), λήμμα 3.25).

Από τις σχέσεις (3.41) έπεται ότι:

$$(s_{k_p-1}(x)-\tau(x))/(s_{k_o-1}(x)-\tau(x))=\exp[i(y(p,x)-y(0,x)],$$

δηλαδή, για κάθε $p=1,2,\ldots,2m$, έχουμε:

$$s_{k_p-1}(x)-\tau(x)=(s_{k_o-1}(x)-\tau(x))e^{iu(p,x)}, \qquad (3.37^*)$$

όπου τώρα με $u(p,x)$ συμβολίζουμε τον αριθμό:

$$u(p,x)=y(p,x)-y(0,x)=(k_p-k_o)x+k_p\xi_p-k_o\xi_o-[r_o(i_o)+1](\xi_p-\xi_o),$$

ή, $\qquad u(p,x)=(k_p-k_o)(x+\zeta_p), \qquad p=1,2,\ldots,2m,$ και

$$\zeta_p=[k_p\xi_p-k_o\xi_o-(r_o(i_o)+1)(\xi_p-\xi_o)]/(k_p-k_o).$$

Επίσης, από τις (3.30), (3.33), (3.34) και (3.35) έπεται ότι

$$c_{k_p}=c_{r_o(i_o)+1}\exp[i(k_p-r_o(i_o))\xi_p], \quad p=1,2,\ldots,2m,$$

η οποία δίνει:

$$c_{k_p}/c_{k_o}=\exp\{i[k_p\xi_p-k_o\xi_o-(r_o(i_o)+1)(\xi_p-\xi_o)]\}=\exp[i(k_p-k_o)\zeta_p],$$

που μαζί με την (3.37*), ξαναδίνουν τις (3.37), (3.38), με ζ_p στη θέση του ξ_p. Τότε, η απόδειξη των (3.21) και (3.22) του ισχυρισμού μας ολοκληρώνεται όπως στην περίπτωση 1.

Επειδή, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, οι (i) και (ii) του ισχυρισμού ισχύουν αυτόματα από την εκλογή των v, $k_1,\ldots,k_{2m}$, η απόδειξη του ισχυρισμού μας τέλειωσε.∎

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πρώτη παράγραφος του Κεφαλαίου αυτού είναι αφιερωμένη στη γεωμετρική ερμηνεία της απόδειξης του ισχυρισμού του προηγουμένου Κεφαλαίου και σε διάφορες άλλες παρατηρήσεις και σχόλια για την απόδειξη του Θεωρήματος Β.

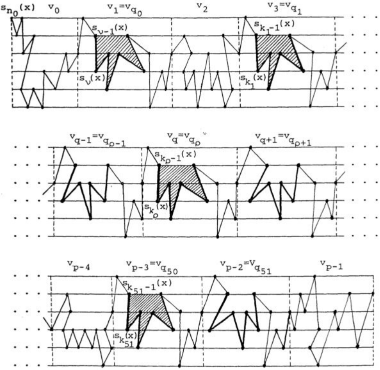
Στη δεύτερη παράγραφο θα πούμε λίγα λόγια για τη μορφή των ολομόρφων συναρτήσεων, που έχουν σχέση με τις δυναμοσειρές, τις οποίες εξετάζουμε εδώ.

Στην τρίτη παράγραφο θα επανέλθουμε για λίγο στην ερώτηση του A. Zygmund για τη "γωνιακή κατανομή" του συνόλου $L(x)$ (βλέπε σελίδα 3) και στην τελευταία παράγραφο θ'αναφερθούμε στο ενδιαφέρον πρόβλημα της σχέσης μεταξύ του πολυώνυμου $P(x)$ και του πλήθους των κύκλων του Θεωρήματος Β.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3 ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(1) Θ'αρχίσουμε από τη γεωμετρική ερμηνεία της απόδειξης του ισχυρισμού του προηγούμενου Κεφαλαίου. Μετά απ'αυτό, εάν θέλει κανείς, είναι πολύ εύκολο να δει και ολόκληρη την απόδειξη της πρότασης 3.2 γεωμετρικά. Δεν περιορίζει τη γενικότητα,εάν πάρουμε ένα συγκεκριμένο πλήθος κύκλων, οπότε απλοποιείται και η όλη παρουσίαση του θέματος. Ας υποθέσουμε

λοιπόν ότι έχουμε m=6 κύκλους, που στο Σχήμα 3 αντιπροσωπεύονται από τις 6 οριζόντιες ευθείες.



Σχήμα 3

Η βασική ιδέα της απόδειξης του ισχυρισμού μας είναι η αναζήτηση και εύρεση ενός υπεραριθμήσιμου υποσυνόλου E_o του

Ε, ώστε η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της σειράς μας, τα οποία έχουν δείκτες n_0, n_1, $n_2, \dots$, (βλέπε σελ.62), ν'ακολουθεί για όλα τα x του E_0 την ίδια διαδοχή κύκλων και να περιέχει "κατάλληλο πλήθος βρόχων". Οταν λέμε εδώ "βρόχος" εννοούμε ένα συνεκτικό κομμάτι αυτής της πολυγωνικής γραμμής, με άκρα δύο κορυφές της, που να βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο (στο Σχήμα 3, πάνω στην ίδια ευθεία). Η συγκεκριμένη διαδοχή κύκλων, που αναφέρουμε παραπάνω, αντιστοιχεί στη σταθερή τιμή (βλέπε σελ.63)

$$(V_0, V_1, \dots, V_{p-1}),$$

της συνάρτησης F στο E_0 (εδώ $p=4\cdot 13\cdot 6^{13}=679.156.088.832$).

Στο Σχήμα 3, τα V_k, $k=q_0, q_1, \dots, q_{4(2m+1)-1}$, της απόδειξης του ισχυρισμού, είναι τα v_1, $v_3, \dots, v_{p-2}$, αντίστοιχα και μέσα σ'αυτά διακρίνονται με περισσότερο τονισμένες πλευρές οι $4(2m+1)=52$ "βρόχοι" (βλέπε (3.23) και (3.24)).

Στη συνέχεια της απόδειξης διαλέγουμε πρώτα $2(2m+1)=26$ "βρόχους", που οι αντίστοιχες πλευρές τους έχουν το ίδιο μήκος, όπως αποδεικνύεται, και τελικά, περιορίζοντας το E_0 στο E_1, διαλέγουμε $2m+1=13$ "βρόχους", που ο ένας να προκύπτει από τον άλλο με στροφή περί το $\tau(x)$. Στο Σχήμα 3 αυτοί είναι τα γραμμοσκιασμένα μέρη του. Οι αριθμοί τώρα $v, k_1, k_2, \dots, k_{2m}$ της απόδειξης είναι οι δείκτες των μερικών αθροισμάτων που αντιστοιχούν στα πέρατα των πρώτων πλευρών των 13 παραπάνω "βρόχων" (βλέπε Σχήμα 3). Φυσικά, θα μπορούσαμε να διαλέξουμε τους δείκτες οποιωνδήποτε άλλων αντίστοιχων κορυφών αυτών των "βρόχων", και μ'αυτούς να ολοκληρώσουμε την απόδειξη.

(2) Μια παρατήρηση, που μπορούμε να κάνουμε τώρα μετά την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία, είναι ότι θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε λίγο την απόδειξη της πρότασης 3.2, εάν χρησιμοποιούσαμε γεωμετρικά επιχειρήματα. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε ν'αποφύγουμε τον περιορισμό του E_0 στο E_1 (βλέπε σελ.70) κ.λ.π.

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι, λόγω του Θεωρήματος Α των Marcinkiewicz-Zygmund (βλέπε και Θεώρημα 0.7), θα μπορούσαμε να υποθέσουμε στο Θεώρημα 1.2 (και στη πρόταση 1.4) ότι οι κύκλοι είναι ομόκεντροι. Η υπόθεση αυτή θ'απλοποιούσε προφανώς αρκετά την απόδειξη, αλλά θα εξασθενούσε το θεώρημά μας, αφού, όπως έχουμε δει, αυτό είναι συμπέρασμα του.

(3) Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Β που αποδείξαμε είναι ότι, εκτός από πεπερασμένο πλήθος x, για κάθε άλλο x του $[0,2\pi)$, η δυναμοσειρά μας είναι $(C,1)$ αθροίσιμη. Πραγματικά, από το Πόρισμα 3.15 και ιδιαίτερα από τους τύπους (3.17), βλέπει κανείς αμέσως ότι η σειρά (3.14) είναι $(C,1)$ αθροίσιμη στο $\tau(x)$, όπου $\tau(x)$ δίνεται από την (3.18) και είναι το κοινό κέντρο των κύκλων του θεωρήματος.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ ΠΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ

Εάν η σειρά (1.1) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2, τότε θα έχει μια αναπαράσταση της μορφής (1.3), συνεπώς, για $|z|<1$, η συνάρτηση

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

που αντιστοιχεί στη σειρά αυτή, είναι μια ρητή συνάρτηση ειδικής μορφής. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$F(z)=\frac{Q(z)}{1-(\zeta z)^{k-v}},$$

όπου, $Q(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του k και $\zeta=e^{it}$. Αρα, η (1.1) γράφεται και με τη μορφή:

$$Q(e^{ix}) \sum_{q=0}^{\infty} e^{iq(k-v)(x+t)}.$$

Αντίστροφα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$F(z)=P(z) \sum_{q=0}^{\infty} z^{qk},$$

όπου, το $P(z)$ είναι ένα πολυώνυμο όχι υποχρεωτικά βαθμού μικρότερου του k, μπορεί να πάρει, για $z=e^{ix}$, τη μορφή (1.3).

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να παρατηρήσουμε ότι οι παραπάνω σειρές (για $z=e^{ix}$) είναι, όπως είδαμε στο (3) της προηγούμενης παραγράφου, (C,1) αθροίσιμες στο $\tau(x)$, όπου τώρα $\tau(x)=F(e^{ix})$, για τα x βέβαια του $[0,2\pi)$, στα οποία η $F(e^{ix})$ ορίζεται.

Από τα παραδείγματα (4) και (5) της εισαγωγής του Κεφαλαίου 0, βλέπουμε ότι υπάρχουν ρητές συναρτήσεις, που τα μερικά τους αθροίσματα δεν βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένο πλήθος κύκλων. Ετσι, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εξετάσει κανείς τη γενική περίπτωση μιας ρητής συνάρτησης. Δεν θα επεκταθούμε όμως εμείς εδώ πάνω στο πρόβλημα αυτό.

ΓΩΝΙΑΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ
L(x) ΜΕΡΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ TAYLOR

Αρχικά θα εξετάσουμε (με την έννοια της παρατήρησης 4 της τελευταίας παραγράφου του Κεφαλαίου 0) τη γωνιακή κατανομή του συνόλου L(x) των τριγωνομετρικών δυναμοσειρών του Θεωρήματος 1.2. Προφανώς, δεν περιορίζει τη γενικότητα, αν εξετάσουμε μόνο σειρές της μορφής (3.14). Τότε, από τους τύπους (3.17) και (3.18), έχουμε:

$$\{\arg[s_n(x)-\tau(x)]\}=\{(n+1)x\}.$$

Ομως, από το Κεφάλαιο 0 ξέρουμε ότι για σχεδόν όλα τα x η ακολουθία {nx} είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Συνεπώς, για τις παραπάνω σειρές έχουμε την ομοιόμορφη γωνιακή κατανομή του συνόλου L(x), περί το $\tau(x)$, σχεδόν παντού στο $[0,2\pi)$.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι το άθροισμα δύο ή περισσότερων σειρών της μορφής (1.3) είναι είτε σειρά της ίδιας μορφής, ή, όπως εκείνες των παραδειγμάτων (4) και (5) της εισαγωγής του Κεφαλαίου 0. Συνεπώς, έχουμε και πάλι ομοιόμορφη κατανομή mod.1, σχεδόν παντού στο $[0,2\pi)$.

Τέλος, η κλάση των προηγούμενων δυναμοσειρών, που το σύνολό τους L(x) έχει σχεδόν παντού ομοιόμορφη κατανομή περί το (C,1) άθροισμά τους, μπορεί να διευρυνθεί λίγο ακόμα. Πραγματικά, είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι σειρές, που προκύπτουν με πρόσθεση ενός μέλους της παραπάνω κλάσης με μια συγκλίνουσα σειρά Taylor, εξακολουθούν να έχουν την παραπάνω ιδιότητα.

Είναι φανερό ότι η ομοιόμορφη κατανομή της ακολουθίας

$$\{\arg[s_n(x)-\tau(x)]\},$$

σχεδόν παντού στο $[0,2\pi)$ (το σχεδόν παντού εδώ σημαίνει "εκτός από αριθμήσιμο πλήθος x"), ισοδυναμεί με το εξής:

Εάν δοθεί μια γωνία με κορυφή το $\tau(x)$ και άνοιγμα α, όπου, $0<\alpha<2\pi$, τότε, το πλήθος $\varphi(N,x,\alpha)$ των μερικών αθροισμάτων $s_n(x)$, με $n\leq N$, που βρίσκονται μέσα σ'αυτή τη γωνία, ικανοποιεί για σχεδόν όλα τα x την:

$$\frac{\varphi(N,x,\alpha)}{N}=\frac{\alpha}{2\pi}+o(1),\text{ όταν } N\to\infty.$$

ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

Στην τελευταία αυτή παράγραφο θα πούμε λίγα λόγια για το πλήθος των κύκλων του Θεωρήματος Β. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε μια σειρά της απλής μορφής (3.14), τότε, η ερώτηση είναι η εξής:

Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές του πολυώνυμου $P(x)$, ώστε η σειρά (3.14) να έχει τα μερικά της αθροίσματα πάνω σε $1,2,\ldots,k$, κύκλους αντίστοιχα;

Από τις (3.19) βλέπουμε ότι η προηγούμενη ερώτηση ισοδυναμεί με το πρόβλημα της εύρεσης των συνθηκών, ώστε να ισχύουν κάποιες ισότητες της μορφής

$$|P_i(x)|=|P_j(x)|,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\ldots,k,$$

για κάθε x του $[0,2\pi)$, όπου, τα πολυώνυμα $P_j(x)$ δίνονται από τις (3.16).

Δεν θα εξετάσουμε εδώ τη γενική περίπτωση, αλλά θα δώσουμε, χωρίς αποδείξεις, μερικά επί μέρους συμπεράσματα προς αυτή την κατεύθυνση.

(1) Εστω ότι οι συντελεστές του $P(x)=P_1(x)$ είναι διάφοροι του μηδενός και για κάποιο j του $\{1,2,\ldots,k\}$ έχουμε για κάθε x του $[0,2\pi)$ ότι:

$$|P_j(x)|=|P_{j+1}(x)|=|P_{j+2}(x)|,$$

όπου,

εάν $j=k-1$, τότε, το $P_{j+2}(x)$ είναι το $P_1(x)$ και

εάν $j=k$, τότε, το $P_{j+1}(x)$ είναι το $P_1(x)$ και

το $P_{j+2}(x)$ είναι το $P_2(x)$.

Τότε, όλοι οι κύκλοι συμπίπτουν σ'ένα κύκλο.

Στην περίπτωση που δεν είναι όλοι οι συντελεστές του $P_1(x)$ διάφοροι του μηδενός, έχουμε ένα ανάλογο με το παραπάνω αποτέλεσμα. Η διατύπωσή του, που είναι λίγο περίπλοκη, μπορεί να βρεθεί με οδηγό το (1) και το Θεώρημα 2.9, που πορίσματά του είναι τ'αποτελέσματα αυτά.

(2) Από το Θεώρημα 2.2 γνωρίζουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες, για να έχουμε ένα μόνο κύκλο. Θα δούμε τώρα το αντίστοιχο θεώρημα, για να έχουμε ακριβώς δύο κύκλους.

"Εάν η σειρά (1.1) έχει (με το συνηθισμένο συμβολισμό) μια από τις επόμενες μορφές:

(α) $(a+be^{ik(x+t)})\sum_{n=0}^{\infty} e^{in(k+m)(x+t)}$,

(β) $(a+be^{ik(x+t)}+ce^{i(k+m)(x+t)})\sum_{n=0}^{\infty} e^{in(k+m+q)(x+t)}$,

(γ) $(a+be^{ik(x+t)}+ce^{2ik(x+t)}+$

$+de^{ik(m+2)(x+t)})\sum_{n=0}^{\infty} e^{2ikn(m+1)(x+t)}$, (δ) $\left(a+be^{ik(x+t)}+ce^{ik(m+1)(x+t)}+de^{ik(m+2)(x+t)}+\right.$

$$\left.+fe^{2ik(m+1)(x+t)}\right)\sum_{n=0}^{\infty} e^{ikn(3m+2)(x+t)},$$

τότε, τα μερικά αθροίσματα της (1.1) βρίσκονται πάνω σε δύο ακριβώς κύκλους, εάν και μόνο εάν:

* $m\neq k$, ή, ο αριθμός $\bar{a}b$ δεν είναι πραγματικός, στην περίπτωση (α).
* ($q=m$ και $\bar{a}c=b\bar{c}$), ή, ($q=k$ και $\bar{a}c=a\bar{b}$), εάν $k\neq m$,
  ($q=k$ και $\bar{a}b=\bar{b}c\neq\bar{c}a$ ή $\bar{b}c=\bar{c}a\neq\bar{a}b$ ή $\bar{a}c=a\bar{b}\neq b\bar{c}$), ή,
  ($q\neq 0$, $q\neq k$ και $\bar{a}b=\bar{b}c$), εάν $k=m$, ή,
  ($q=0$ και $(a+c)\bar{b}$ όχι πραγματικός) στην περίπτωση (β),
* ($\bar{a}b=\bar{b}c$ και $\bar{b}d=b\bar{d}$), εάν $m>1$, και
  ($\bar{a}b=\bar{b}c\neq\bar{c}d$ και $\bar{b}d=b\bar{d}$), εάν $m=1$, στην περίπτωση (γ),
* ($b=a\bar{\omega}^2$, $c=a\omega$, $d=a\bar{\omega}$, $f=a\omega^2$, όπου ω ρίζα της εξίσωσης
  $$\omega^4+\bar{\omega}=2\omega\bar{\omega}^2,\ \omega\neq 0,1),$$ εάν $m=1$, και
  ($b=a\omega^3/2$, $c=a\omega$, $d=a\omega^4/4$, $f=a\omega^2$, όπου ω ρίζα της εξίσωσης $\omega^8=16$), εάν $m>1$, στην περίπτωση (δ).

Αντίστροφα, εάν τα μερικά αθροίσματα της (1.1) βρίσκονται πάνω σε δύο ακριβώς κύκλους, τότε, η (1.1) θα έχει τη μορφή $P(x)+e^{i\nu x}Q(x)$, όπου $P(x)$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\nu-1$ και $Q(x)$ μια από τις παραπάνω μορφές".

Θα τελειώσουμε με δύο παρατηρήσεις που έχουν σχέση με το πλήθος των κύκλων του Θεωρήματος Β.

Η πρώτη είναι ότι το πλήθος αυτό έχει σχέση με την κατανομή των μηδενικών όρων (αν υπάρχουν) του πολυώνυμου $P(x)$. Συγκεκριμένα, εάν μεταξύ δύο διαδοχικών μη-μηδενικών όρων του P(x) έχουμε κ μηδενικούς όρους και μεταξύ δύο άλλων διαδοχικών μη-μηδενικών όρων του P(x) έχουμε λ (κ≠λ) μηδενικούς όρους, τότε, το πλήθος των κύκλων δεν μπορεί να είναι μικρότερο του 2. Αυτό προκύπτει αμέσως από το (α) του λήμματος 1.5. Ετσι, η κατανομή των μηδενικών όρων (αν υπάρχουν) του πολυώνυμου P(x) μας δίνει ένα κάτω φράγμα για το παραπάνω πλήθος.

Η δεύτερη παρατήρηση έχει έμμεση σχέση με το προηγούμενο θέμα μας. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο P(x), που καθορίζει και το πλήθος των κύκλων, "περιέχει" τον πρώτο "βρόχο" (βλ. (1) της πρώτης παραγράφου του Κεφαλαίου αυτού), ο οποίος, στρεφόμενος περί το τ(x), συμπίπτει με κάποιο επόμενο "βρόχο". Εάν ο δεύτερος αυτός "βρόχος" δεν είναι ο αμέσως επόμενος του πρώτου, τότε, οι ενδιάμεσοί τους "βρόχοι" "βρίσκονται και αυτοί μέσα" στο $P_1(x)$. Από το λήμμα 3.25 προκύπτει τότε ότι καθένας απ'αυτούς συνδέεται με τον πρώτο με τη βοήθεια του Ω της (3.26). Η παρατήρηση τώρα είναι ότι, εάν μετά την (3.29) του λήμματος 3.25, συνεχίσουμε να εφαρμόζουμε τις σχέσεις (1.6) του λήμματος 1.5, τότε, προκύπτουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα ότι:

$$|a_j|=|a_{j+4}|, \quad |b_j|=|b_{j+4}|, \quad j=0,1,\ldots,s \quad \text{και}$$

$$|a_1|/|a_2|=|a_3|/|a_0|, \text{ ή, } |a_1|/|a_0|=|a_3|/|a_2|$$

(ο συμβολισμός είναι εκείνος του λήμματος 3.25). Οι προηγούμενες σχέσεις προφανώς βοηθούν στη μελέτη του πολυώνυμου P(x), συνεπώς και στο πρόβλημα του πλήθους των κύκλων, πάνω στους οποίους βρίσκονται τα μερικά αθροίσματα της σειράς που μας ενδιαφέρει.

ΠΡΟΣΘΗΚΗ

Στην σελίδα 5 αναφερθήκαμε σ'ένα αντιπαράδειγμα, που δείχνει ότι η υπόθεση "Ε υπεραριθμήσιμο σύνολο" στο θεώρημα Β δεν μπορεί να αντικατασταθεί με την ασθενέστερη υπόθεση "Ε απειροσύνολο", χωρίς να προστεθεί καμμιά άλλη υπόθεση. Το αντιπαράδειγμα αυτό είναι το εξής:

Εστω $t\in(0,2\pi)$ και Ε το αριθμήσιμο απειροσύνολο:

$$E=\{x_k=2\pi/2^k:k=0,1,2,...\}.$$

Θεωρούμε την δυναμοσειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[i(2^n x+nt)]. \tag{1}$$

Η (1) δεν είναι της μορφής (Ε.4), του θεωρήματος Β, διότι, οι συντελεστές της δεν εμφανίζονται με περιοδικότητα. Ομως, τα μερικά της αθροίσματα,

$$s_n(x)= \sum_{1\leq 2^\nu\leq n} \exp[i(2^\nu x+\nu t)], \tag{2}$$

για καθένα $x=x_k$, $x_k\in E$, και για όλα τα $n\geq 2^k$, βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο, αφού για $\nu\geq k$ έχουμε $\exp(i2^\nu x_k)=1$. Επειδή τα υπόλοιπα μερικά της αθροίσματα $s_n(x_k)$, $n=0,1,...,2^k-1$, είναι πεπερασμένου πλήθους, έπεται ότι όλα τα μερικά αθροίσματα της (1) βρίσκονται πάνω σ'ένα πεπερασμένο πλήθος κύκλων, για κάθε x του αριθμήσιμου συνόλου Ε.

Για την δυναμοσειρά (1) συμβολίζουμε με $m(x_k)$ το ελάχιστο πλήθος κύκλων, που η ένωσή τους περιέχει όλα τα μερικά αθροίσματα $s_n(x_k)$, $x_k\in E$, $n=0,1,2,\cdots$. Αν δεν ισχύει

$$\lim m(x_k)=\infty, \text{ όταν } k\to\infty,$$

τότε υπάρχει υπακολουθία $m(x_{k_\nu})$ φραγμένη, με πάνω φράγμα έστω $m<\infty$. Ετσι, για κάθε x στο αριθμήσιμο απειροσύνολο

$$E_0=\{x_{k_\nu}:\nu=0,1,2,...\}\subset E,$$

τα μερικά αθροίσματα της (1) θα βρίσκονται στην ένωση πεπερασμένου πλήθους κύκλων, όχι περισσοτέρων του m. Τότε όμως αποδεικνύεται (δεν θα κάνουμε εδώ την απόδειξη, που έχει αρκετές τεχνικές δυσκολίες) ότι η σειρά (1) θα ήταν της μορφής (Ε.4), που όπως είδαμε δεν αληθεύει. Συνεπώς

$$\lim m(x_k)=\infty, \text{ όταν } k\to\infty.$$

Μια παρατήρηση που μπορεί να κάνει κανείς είναι ότι η σειρά (1) δεν είναι (C,1) αθροίσιμη ούτε για τα x του E, γεγονός που ίσως θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν μειονέκτημα για το παραπάνω αντιπαράδειγμα.

Το επόμενο αντιπαράδειγμα δείχνει ότι στη Πρόταση 3.2 δεν επαρκεί οποιαδήποτε πεπερασμένη πληθικότητα για το σύνολο E_0, χωρίς να προστεθεί βέβαια καμμιά άλλη υπόθεση.

Εστω N οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος και $t\in(0,2\pi)$, με $t\neq$ρητό πολλαπλάσιο του π.

Θεωρούμε το σύνολο:

$$E_0=\{x=2\lambda\pi/N:\ \lambda=0,1,...,N-1\},$$

και την δυναμοσειρά:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}(e^{ikt}-e^{i(k-1)t})e^{ikNx}. \qquad (3)$$

Για κάθε x του E_0 τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$ της (3) παίρνουν μόνο τις τιμές e^{ikt}, $k=0,1,2,...$, άρα βρίσκονται όλα πάνω σ'ένα κύκλο, ενώ είναι εύκολο να δει κανείς ότι η (3) δεν έχει αναπαράσταση της μορφής (Ε.4) του Θεωρήματος Β.

ABSTRACT

Let K be the class of trigonometric series of power type, i.e. Taylor series

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx},$$

whose partial sums for all x in E, where E is a nondenumerable subset of $[0,2\pi)$, lie on a finite number of circles (a priori depending on x) in the complex plane. The main result of this paper is that for every member of the class K, there exist a complex number ω, $|\omega|=1$, and two positive integers v, k, v<k, such that for the coefficients c_n we have:

$c_{p+q(k-v)}=c_p\omega^q$, $p=v,v+1,\ldots,k-1$, $q=1,2,3,\cdots$.

Thus, every member of the class K has (with minor modifications) a representation of the form:

$$P(x) \sum_{n=0}^{\infty} e^{imnx},$$

where P(x) is a suitable trigonometric polynomial and m a positive integer. The proof is elementary but rather long. This result is closely related to a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund on the circular structure of the set of limit points of the sequence of partial sums of (C,1) summable Taylor series.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] J.-P. Kahane:
Sur la structure circulaire des ensembles de points limites des sommes partielles d'une serie de Taylor. Acta Sci. Math. (Szeged) 45 (1983), no.1-4, pp.247-251.

[2] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund:
On the behavior of Trigonometric Series and Power Series. T.A.M.S. 50 (1941), pp.407-453.

[3] H. Weyl:
Über ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1914), 234-244.

[4] A. Zygmund:
Trigonometric Series, 2nd ed., reprinted, Volumes I,II. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.