

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΛΕΝΗ ΤΖΑΝΑΚΗ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ
ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΣΜΗΝΩΝ ΚΑΙ
ΠΑΡΑΤΑΓΜΑΤΩΝ ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2007

Η διδακτορική αυτή διατριβή παρουσιάστηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης στις 6 Μαρτίου 2007. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Χ.Α. Αθανασιάδης.

Την επταμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Χ. Αθανασιάδης (Πανεπιστήμιο Αθηνών), Κ. Αθανασόπουλος (Πανεπιστήμιο Κρήτης), Ι. Αντωνιάδης (Πανεπιστήμιο Κρήτης), Ε. Κεχαγιάς (Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων) , Μ. Μαλιάκας (Πανεπιστήμιο Αθηνών), Θ. Μπόλης (Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων) και Π. Πάμφιλος (Πανεπιστήμιο Κρήτης).

Περιεχόμενα

0	Πρόλογος	7
1	Ομάδες ανακλάσεων και συνδυαστική	13
1.1	Γενικά στοιχεία πάνω στις ομάδες ανακλάσεων	13
1.1.1	Ομάδες ανακλάσεων και συστήματα ριζών	13
1.1.2	Θετικά και απλά συστήματα ριζών	15
1.1.3	Συστήματα ριζών κλασσικών ομάδων	16
1.1.4	Γραφήματα Coxeter	17
1.1.5	Αναλλοίωτες ομάδων Coxeter	19
1.1.6	Κρυσταλλογραφικές ομάδες	20
1.1.7	Αφινικές ομάδες	21
1.2	Παρατάγματα υπερεπιπέδων και ομάδες Coxeter	23
1.2.1	Παρατάγματα υπερεπιπέδων	23
1.2.2	Καταλάνεια παρατάγματα υπερεπιπέδων	24
1.2.3	Μία εκλέπτυνση του αριθμού Catalan	26
1.3	Το σύμπλεγμα σημνών $\Delta(\Phi)$	28
1.3.1	Μονοπλεκτικά συμπλέγματα	29
1.3.2	Πολύτοπα και μονοπλεκτικά ριπίδια	30
1.3.3	Ορισμός του $\Delta(\Phi)$	31
1.3.4	Το $\Delta(\Phi)$ και πολυγωνικές υποδιαιρέσεις	34
1.4	Μή διασταρούμενες διαμερίσεις	37
1.4.1	Ο σύνδεσμος $NC(n)$	37
1.4.2	Γενικός ορισμός του συνδέσμου $NC(W)$	40
1.4.3	m -Επιτρεπτές μή διασταρούμενες διαμερίσεις	43
2	Συμπλέγματα σημνών και πολυγωνικές υποδιαιρέσεις	47
2.1	Εισαγωγή και αποτελέσματα	47
2.2	Προκαταρκτικά	49
2.3	Απαριθμητικά αποτελέσματα	51
2.4	Αποφλοιωσιμότητα	54

2.5	Ο γενικός ορισμός του $\Delta^m(\Phi)$	58
3	Θετικά κελιά και παρατάγματα υπερεπιπέδων	65
3.1	Εισαγωγή και αποτελέσματα	65
3.2	Προκαταρκτικά	70
3.3	Αλυσίδες ιδεωδών, περιοχές και θαλαμίσκοι	74
3.4	Πλέγμα συρριζών και αφφινική ομάδα	82
3.5	Οι αριθμοί τάξεως	87
3.6	Η ισότητα $F = H$	93
3.7	Οι κλασικές περιπτώσεις	95
3.8	Παρατηρήσεις	97
4	Πλευρές συμπλεγμάτων σμηνών	101
4.1	Εισαγωγή	101
4.2	Προκαταρκτικά	103
4.3	Απόδειξη του κριτηρίου πλευρών	107
4.4	EL-Επιγραφή και φθίνουσες αλυσίδες του $NC_m(\gamma)$	110
4.5	Απόδειξη της ισότητας $F = M$	115

Κεφάλαιο 0

Πρόλογος

Οι ομάδες ανακλάσεων εμφανίζονται σε πολλές περιοχές των μαθηματικών. Συμβαίνει συχνά πολλές από τις ιδιότητες τους να μπορούν να προσεγγιστούν με διάφορους τρόπους, χρησιμοποιώντας αλγεβρικές, γεωμετρικές ή συνδυαστικές τεχνικές. Η αλληλεπίδραση αυτή εμπλουτίζει την θεωρία των ομάδων ανακλάσεων δίνοντάς τους συναρπαστικές πτυχές. Κλασικά συγγράμματα πάνω σε ομάδες ανακλάσεων είναι αυτά των Bourbaki [22] και Humphreys [43]. Πιο πρόσφατο σύγγραμμα είναι αυτό των Björner και Brenti [20] το οποίο προσεγγίζει τις ομάδες ανακλάσεων από συνδυαστική σκοπιά.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη τριών κλάσεων συνδυαστικών αντικειμένων τα οποία ορίζονται για κάθε πεπερασμένη πραγματική ομάδα ανακλάσεων. Όπως προκύπτει στην πορεία, τα αντικείμενα αυτά συσχετίζονται με απρόσμενες απαριθμητικές σχέσεις, οι οποίες σε ορισμένες περιπτώσεις παραμένουν ανεξήγητες. Σημείο εκκίνησης για την παραπάνω συσχέτιση είναι το γεγονός ότι και οι τρεις αυτές κλάσεις απαριθμούνται από την ίδια ποσότητα, την οποία θα ορίσουμε αμέσως παρακάτω. Θεωρούμε ένα ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W . Ο γενικευμένος αριθμός Catalan ορίζεται ως

$$N^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh + 1}{e_i + 1},$$

όπου e_1, \dots, e_n είναι οι εκθέτες, h ο αριθμός Coxeter και m ένας μή αρνητικός ακέραιος. Όταν $\Phi = A_{n-1}$ και $m = 1$ τότε το $N^{(m)}(\Phi) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ είναι γνωστό ως ο κλασικός n -οστός αριθμός Catalan. Όπως συμβαίνει και με τους κλασικούς έτσι και οι γενικευμένοι αριθμοί Catalan έχουν πλήθος συνδυαστικών ερμηνειών και πρόσφατα προέκυψαν σε πολλές διαφορετικές περιοχές, όπως σε παρατάγματα υπερεπιπέδων, άλγεβρες σιγμών και δομές Garside ομάδων braid. Κατά τη μελέτη των παραπάνω αντικειμένων προκύπτει επίσης ο γενικευμένος θετικός αριθμός

Catalan ο οποίος ορίζεται ως

$$N_+^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh - 1}{e_i + 1}$$

και είναι ίσος με τον $(n-1)$ -οστό κλασικό αριθμό Catalan $\frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$ όταν $m = 1$ και $\Phi = A_{n-1}$.

Πρίν δόσουμε την περίληψη της διατριβής θα περιγράψουμε συνοπτικά τις κλάσεις των τριών συνδυαστικών αντικειμένων που μελετάμε. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ένα ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W και έναν μή αρνητικό ακέραιο m . Συνήθως η εξέλιξη της μελέτης αυτών των αντικειμένων έχει ως εξής. Αρχικά είναι γνωστή η περίπτωση όπου $\Phi = A_{n-1}$ (δηλαδή όταν η W είναι η συμμετρική ομάδα S_n) και $m = 1$. Στην συνέχεια ορίζεται η γενίκευση για κάθε ομάδα ανακλάσεων W και $m = 1$, η οποία εν γένει είναι μή τετριμμένη. Η περαιτέρω γενίκευση για $\Phi = A_{n-1}$ ή B_n και $m \geq 1$ είναι συνήθως προβλέψιμη από τις αντίστοιχες περιπτώσεις για $m = 1$, σε αντίθεση με την περίπτωση $W = D_n$. Τέλος, ο ορισμός για κάθε W και $m \geq 1$ απαιτεί και πάλι περισσότερη διαίσθηση.

Καταλάνεια παρατάγματα υπερεπιπέδων. Το m -οστό Καταλάνειο παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^m(\Phi)$ μελετήθηκε από τους Αθανασιάδη [2, 3, 5, 6], Postnikov [55], Postnikov και Stanley [57], Stanley [69] και Yoshinaga [75]. Το $\mathcal{A}^m(\Phi)$ αποτελείται από το σύνολο των υπερεπιπέδων του \mathbb{R}^n που περιγράφονται από τις εξισώσεις $(\alpha, x) = k$, όπου $\alpha \in \Phi$, $0 \leq k \leq m$ και (x, y) είναι το εσωτερικό γινόμενο των $x, y \in \mathbb{R}^n$. Οι κυρίαρχες περιοχές του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ είναι αυτές που ικανοποιούν την ανισότητα $(\alpha, x) > 0$ για κάθε $\alpha \in \Phi^+$. Όταν το σύστημα ριζών Φ είναι χρυσταλλογραφικό τότε το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών είναι ίσο με $N^{(m)}(\Phi)$ ενώ το πλήθος αυτών που είναι φραγμένες είναι ίσο με $N_+^{(m)}(\Phi)$. Οι περιοχές αυτές είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με κάποιες αλυσίδες ιδεωδών της μερικής διάταξης του Φ^+ καθώς επίσης και με τις τροχιές δράσης της W στο πηλίκο $L(\Phi^\vee)/(mh+1)L(\Phi^\vee)$ (βλ. Παράγραφο 1.1.6 για τον ορισμό του $L(\Phi^\vee)$). Η αντιστοιχία αυτή διατηρεί κάποιες φυσικές στατιστικές πάνω στα σύνολα αυτά οι οποίες εκλεπτύνουν τον αριθμό $N^{(m)}(\Phi)$. Οι αριθμοί που προκύπτουν από αυτήν την εκλεπτύση ονομάζονται αριθμοί Narayana και συμβολίζονται με $\text{Nar}_k(\Phi, m)$.

Στην περίπτωση όπου $m = 1$ οι κυρίαρχες περιοχές του $\mathcal{A}^1(\Phi)$ είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με αντιαλυσίδες της μερικής διάταξης του Φ^+ . Το πλήθος των αντιαλυσίδων αυτών επιδέχεται και άλλες συνδυαστικές ερμηνείες, όπως φαίνεται στα άρθρα του Shi [62, 63] για αφφινικές ομάδες και παρατάγματα υπερεπιπέδων καθώς επίσης και στο άρθρο των Cellini και Papi [28] για υποάλγεβρες Borel των απλών αλγεβρών Lie.

Συμπλέγματα σημών. Το σύμπλεγμα σημών $\Delta(\Phi)$ εισήχθη από του-

ς Fomin και Zelevinsky στα πλαίσια της μελέτης τους πάνω σε άλγεβρες σημηών και Y -συστήματα [40, 38]. Το $\Delta(\Phi)$ είναι αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διαστάσεως $n-1$ και ομοιομορφικό με την $(n-1)$ -διάστατη σφαίρα. Όταν το Φ είναι χρυσταλλογραφικό, το $\Delta(\Phi)$ είναι ισόμορφο με το συνοριακό σύμπλεγμα ενός n -διάστατου πολυτόπου το οποίο ονομάζεται W -πολύτοπο μεταθέσεων. Το m -οστό γενικευμένο σύμπλεγμα σημηών $\Delta^m(\Phi)$ εισήχθη από τους Fomin και Reading αμέσως μετά από τη μελέτη κάποιων ειδικών περιπτώσεων στην παρούσα διατριβή. Παρόλο που το σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ δεν διατηρεί τις παραπάνω γεωμετρικές ιδιότητες του $\Delta(\Phi)$, έχει πολλές άλλες οι οποίες καθιστούν ενδιαφέρουσα την περαιτέρω μελέτη του. Το $\Delta^m(\Phi)$ έχει ένα φυσικό υποσύμπλεγμα το οποίο συμβολίζεται με $\Delta_+^m(\Phi)$ και ονομάζεται θετικό γενικευμένο σύμπλεγμα σημηών.

Το σύνολο των εδρών του $\Delta^m(\Phi)$ απαριθμείται από τον αριθμό Catalan. Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος των εδρών του $\Delta^m(\Phi)$ καθώς και αυτών του $\Delta_+^m(\Phi)$ είναι ίσο με $N^{(m)}(\Phi)$ και $N_+^{(m)}(\Phi)$ αντίστοιχα. Επίσης, η k -οστή συντεταγμένη του h -διανύσματος του $\Delta^m(\Phi)$ συμπίπτει με τον αριθμό Narayana $Nar_{n-k}(\Phi, m)$ όταν $m = 1$ και για τις κλασικές ομάδες όταν $m \geq 1$.

Μή διασταυρούμενες διαμερίσεις. Ο σύνδεσμος των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων $NC(n)$ εισήχθη από τον Kreweras [47] και είναι ένα κλασικό αντικείμενο στη συνδυαστική με πολλές συναρπαστικές ιδιότητες. Αποτελείται από το σύνολο των διαμερίσεων π του συνόλου $\{1, \dots, n\}$ τέτοιες ώστε αν $a < b < c < d$ και τα a, c ανήκουν σε ένα μέρος B της π ενώ τα b, d σε ένα μέρος B' της π τότε $B = B'$. Πρόσφατα, οι Brady και Watt [26] και Bessis [14], χρησιμοποιώντας δομές Garside σε ομάδες braid, γενίκευσαν τον ορισμό του Kreweras εισάγοντας τη μερική διάταξη $NC(W)$ των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων για κάθε ομάδα ανακλάσεων W . Αποδεικνύεται ότι το $NC(W)$ είναι αυτοδυνικός, διαβαθμισμένος σύνδεσμος και ότι το $NC(A_{n-1})$ είναι ισόμορφο με το $NC(n)$. Αργότερα, ο Armstrong στη διδακτορική του διατριβή [1] επέκτεινε τον ορισμό $NC(W)$ με την εισαγωγή της έννοιας των m -επιτρεπτών μη διασταυρούμενων διαμερίσεων $NC_m(W)$ με τρόπο ώστε $NC_1(W) = NC(W)$. Η μερική διάταξη $NC_m(W)$ είναι ημισύνδεσμος με ελάχιστο στοιχείο και έχει πληθάρημο $N^{(m)}(\Phi)$. Επίσης, το πλήθος στοιχείων του $NC_m(W)$ τάξεως k συμπίπτει με την συντεταγμένη h_k του h -διανύσματος (h_0, h_1, \dots, h_n) του $\Delta^m(\Phi)$.

Η δομή της διατριβής έχει ως εξής. Στο πρώτο κεφάλαιο επαναλαμβάνουμε συνοπτικά ορισμούς και βασικές ιδιότητες των πραγματικών ομάδων ανακλάσεων, για διευκόλυνση του αναγνώστη. Στη συνέχεια ορίζουμε αναλυτικά τα τρία βασικά συνδυαστικά αντικείμενα μας, δηλαδή τα Καταλάνεια παρατάγματα υπερεπιπέδων, το σύμπλεγμα σημηών και την μερική διάταξη των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων και αναφέρουμε κάποια από τα ήδη γνωστά αποτελέσματα τα οποία συντέλεσαν

στην εξέλιξη της διατριβής. Τα επόμενα κεφάλαια περιέχουν νέα αποτελέσματα τα οποία έχουν ήδη δημοσιευθεί είτε έχουν υποβληθεί προς δημοσίευση.

Το δεύτερο κεφάλαιο αντιστοιχεί στο άρθρο [73]. Θεωρούμε σύστημα ριζών Φ που αντιστοιχεί στις ομάδες A_{n-1} ή B_n . Ορίζουμε ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ με χρήση πολυγωνικών υποδιαρέσεων για κάθε τέτοια ομάδα και φυσικό αριθμό m . Για $m = 1$, το $\Delta^m(\Phi)$ είναι ισόμορφο με το σύμπλεγμα σημνών $\Delta(\Phi)$. Απαριθμούμε τις πλευρές του $\Delta^m(\Phi)$ και δείχνουμε ότι οι συντεταγμένες του h -διανύσματος του $\Delta^m(\Phi)$ συμπίπτουν με τους γενικευμένους αριθμούς Narayana. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι για κάθε $m \geq 1$ το σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ είναι αποφλοιώσιμο και επομένως Cohen-Macaulay. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου δίνουμε το γενικό ορισμό του $\Delta^m(\Phi)$ για κάθε ομάδα ανακλάσεων, όπως δόθηκε από τους Fomin και Reading. Παρόλο που ο ορισμός αυτός δεν είναι μέρος των αποτελεσμάτων του [73], η αναφορά του στο τέλος του κεφαλαίου αυτού συμφωνεί με την χρονική σειρά της εξέλιξης του αντικειμένου.

Το τρίτο κεφάλαιο αντιστοιχεί στο άρθρο [12], το οποίο έχει γραφεί σε συνεργασία με το Χρήστο Αθανασιάδη. Έστω Φ ένα ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα Weyl W και πλέγμα συρριζών $L(\Phi^\vee)$. Θεωρούμε ένα μή αρνητικό ακέραιο m και το αντίστοιχο Καταλάνειο παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^m(\Phi)$. Είναι γνωστό ότι το πλήθος $N_+^{(m)}(\Phi)$ των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ είναι ίσο με το πλήθος των εδρών του θετικού συμπλέγματος σημνών $\Delta_+^m(\Phi)$. Ορίζουμε μία στατιστική στο σύνολο των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και εικάζουμε ότι η αντίστοιχη εκλέπτυνση του αριθμού $N_+^{(m)}(\Phi)$ συμπίπτει με το h -διάνυσμα του $\Delta_+^m(\Phi)$. Υπολογίζουμε τις εκλεπτύνσεις αυτές για τα κλασικά συστήματα ριζών και για όλα τα συστήματα ριζών όταν $m = 1$ και επαληθεύουμε την παραπάνω εικασία για αυτές τις περιπτώσεις. Δίνουμε κάποιες συνδυαστικές ερμηνείες για αυτούς τους αριθμούς χρησιμοποιώντας αλυσίδες ιδεωδών του Φ , τροχιές δράσης της W στο πηλίκο $L(\Phi^\vee)/(mh-1)L(\Phi^\vee)$ και σημεία του πλέγματος συρριζών μέσα σε κάποιο μονόπλοκο, κατ' αναλογία με τις αντίστοιχες εκλεπτύνσεις του αριθμού $N^{(m)}(\Phi)$ για τις κυρίαρχες περιοχές του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ [6]. Επίσης, αποδεικνύουμε μία εικασία του Chapoton [29, Εικασία 6.1] η οποία συσχετίζει μία εκλέπτυνση των πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ με μία στατιστική πάνω σε περιοχές του παρατάγματος $\mathcal{A}^m(\Phi)$. Τέλος, στην ειδική περίπτωση $m = 1$ δίνουμε μία δυϊκή ερμηνεία των παραπάνω αριθμών χρησιμοποιώντας φίλτρα της μερικής διάταξης των ριζών του Φ .

Το τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο αντιστοιχεί στο άρθρο [74]. Έστω ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών Φ με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W και m ένας μή αρνητικός ακέραιος. Θεωρούμε το γενικευμένο σύμπλεγμα σημνών $\Delta^m(\Phi)$ και το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των m -επιτρεπτών μή διασταυρούμενων δι-

αμερίσεων $NC_m(W)$. Δίνουμε ένα νέο χαρακτηρισμό των πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ χρησιμοποιώντας μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του $NC_m(W)$, γενικεύοντας αντίστοιχο χαρακτηρισμό των Brady και Watt [27] για την περίπτωση $m = 1$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, αποδεικνύουμε μία εικασία των Chapoton και Armstrong, η οποία συσχετίζει μία εκλέπτυνση των πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ με τη συνάρτηση Möbius του $NC_m(W)$.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Χρήστο Αθανασιάδη για την ανεκτίμητη καθοδήγηση και άπειρη υπομονή του σε όλα τα στάδια της συνεργασίας μας καθώς και στην διόρθωση του τελικού κειμένου της διατριβής. Παρόλο που στο ξεκίνημα της διατριβής δεν είχα καμία εξοικείωση με ομάδες ανακλάσεων και συνδυαστική, θεωρώ μεγάλη τύχη που τελικά είχα την ευκαιρία να εντυφλήσω σε αυτόν τον συναρπαστικό κλάδο των μαθηματικών.

Ο ορισμός του $\Delta^m(\Phi)$ με χρήση πολυγωνικών υποδιαρέσεων στο Κεφάλαιο 2 δόθηκε από τον Victor Reiner στην περίπτωση όπου $\Phi = A_{n-1}$ και τον Χρήστο Αθανασιάδη όταν $\Phi = B_n$. Ευχαριστώ και τους δύο που μου υπέδειξαν την μελέτη των συμπλεγμάτων $\Delta^m(\Phi)$ και την ενδεχόμενη συσχέτισή τους με τους γενικευμένους αριθμούς Narayana. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Sergey Fomin για τις υποδείξεις και την ενθάρυνση του, τον Drew Armstrong που διέθεσε το περιεχόμενο της διατριβής του σε πολύ αρχικό στάδιο, καθώς επίσης και τον Victor Reiner για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1. Ιδιαίτερος ευχαριστώ τον Πάρη Πάμφιλο για την βοήθεια του με το πρόγραμμα σχεδίασης EucliDraw με το οποίο έγιναν τα περισσότερα από τα σχήματα. Κατά την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής (Ιούνιος 2003-Νοέμβριος 2006) ήμουν υπότροφος του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών.

Κεφάλαιο 1

Ομάδες ανακλάσεων και συνδυαστικά αντικείμενα σχετικά με αυτές.

1.1 Γενικά στοιχεία πάνω στις ομάδες ανακλάσεων

1.1.1 Ομάδες ανακλάσεων και συστήματα ριζών

Ανάκλαση σε έναν ευκλείδειο χώρο \mathbb{V} είναι μία γραμμική απεικόνιση η οποία στέλνει ένα διάνυσμα $\alpha \in \mathbb{V}$ στο αντίθετό του και αφήνει σταθερό κάθε σημείο του υπερεπιπέδου H_α , όπου H_α είναι το υπερεπίπεδο ορθογώνιο στο α . Συμβολίζουμε μία τέτοια ανάκλαση με r_α και έχουμε τον τύπο

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{V}$ και (\cdot, \cdot) είναι το εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{V} . Κάθε ανάκλαση είναι ορθογώνια απεικόνιση, δηλαδή γραμμική απεικόνιση που διατηρεί το μήκος. Ονομάζουμε πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων κάθε πεπερασμένη υποομάδα της ομάδας των ορθογωνίων απεικονίσεων $O(\mathbb{V})$ του χώρου \mathbb{V} η οποία παράγεται από κάποιο σύνολο ανακλάσεων. Εν γένει, συμβολίζουμε τις ομάδες ανακλάσεων με W .

Στην παρούσα διατριβή θα περιοριστούμε σε πεπερασμένες ομάδες ανακλάσεων του πραγματικού ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n . Αυτές οι ομάδες μελετήθηκαν και ταξινομήθηκαν αρχικά από τον Coxeter [33] στην προσπάθειά του να μελετήσει τις ομάδες συμμετρικών κανονικών πολυτόπων. Μια ομάδα ανακλάσεων λέγεται *ανάγωγη* αν δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί ως ευθύ γινόμενο περισσότερων τέτοιων ομάδων. Οι πεπερασμένες (πραγματικές) ανάγωγες ομάδες ανακλάσεων είναι οι εξής: $A_n, B_n = C_n, D_n$ (κλασικές), $I_2(m)$ (διεδρικές), E_6, E_7, E_8, F_4 και H_3, H_4 .

Ο υποδείκτης κάθε κεφαλαίου γράμματος συμβολίζει την διάσταση του χώρου στον οποίο δρα η ομάδα.

Έστω μία πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων W στον \mathbb{R}^n . Υπάρχει ένας διαφορετικός τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια τέτοια ομάδα μέσω της έννοιας του συστήματος ριζών. Η γενική ιδέα είναι να αντικαταστήσουμε κάθε επίπεδο ανάκλασης H της ομάδας W με ένα ζεύγος αντιθέτων διανυσμάτων καθέτων στο H . Αξιωματικά, ορίζουμε ένα σύστημα ριζών Φ ως ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του \mathbb{R}^n με τις εξής ιδιότητες:

- (i) $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ για κάθε $\alpha \in \Phi$,
- (ii) $r_\alpha \Phi = \Phi$ για κάθε $\alpha \in \Phi$.

Ορίζουμε την ομάδα W που αντιστοιχεί στο σύστημα ριζών Φ ως την ομάδα ανακλάσεων με γεννήτορες r_α όπου $\alpha \in \Phi$. Όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, σε κάθε πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάποιο σύστημα ριζών αλλά και αντιστρόφως, κάθε σύστημα ριζών παράγει κάποια πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων. Για να το δείξουμε χρειαζόμαστε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1. [43, Πρόταση 1.2] Έστω $t \in O(\mathbb{R}^n)$ και $\alpha \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε $tr_\alpha t^{-1} = r_{t\alpha}$. Ειδικότερα, αν $w \in W$ τότε $r_{w\alpha} \in W$ αν και μόνον αν $r_\alpha \in W$.

Καταρχήν, σε κάθε πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων W μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα σύστημα ριζών Φ ως εξής. Κάθε ανάκλαση $r_\alpha \in W$ ορίζει ένα υπερεπίπεδο ανάκλασης H_α και μία ευθεία L_α κάθετη σε αυτό. Από την Πρόταση 1.1 συμπεραίνουμε ότι η W μεταθέτει το σύνολο των L_α όπου r_α ανάκλαση της W , με τρόπο ώστε $w(L_\alpha) = L_{w\alpha}$. Μόνο οι ευθείες L_α καθορίζονται από την W , αλλά όχι και τα διανύσματα α . Έτσι, αν επιλέξουμε τα ζεύγη των μοναδιαίων αντιθέτων διανυσμάτων που βρίσκονται πάνω σε αυτές τις ευθείες τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες (i) και (ii). Σημειώνουμε ότι η επιλογή των παραπάνω διανυσμάτων δεν είναι μοναδική και επίσης δεν είναι απαραίτητο αυτά να είναι μοναδιαία.

Έστω τώρα ένα σύστημα ριζών Φ και $W = \langle r_\alpha : \alpha \in \Phi \rangle$. Θα δείξουμε ότι η W είναι μια πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων. Πράγματι, έστω $\Phi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ και ας συμβολίσουμε με $Perm(\Phi)$ την ομάδα μεταθέσεων των στοιχείων του Φ . Τότε, λόγω της ιδιότητας (ii) των συστημάτων ριζών, η απεικόνιση

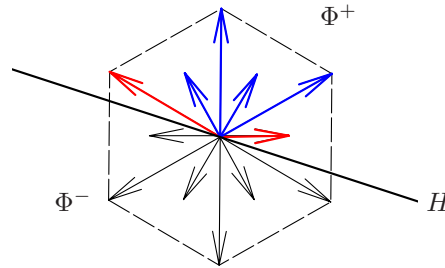
$$\phi : W \rightarrow Perm(\Phi)$$

$$w \mapsto (w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_N)),$$

είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός ομάδων και μάλιστα μονομορφισμός διότι ο πυρήνας είναι τετριμμένος. Επομένως, η W είναι πεπερασμένη.

1.1.2 Θετικά και απλά συστήματα ριζών

Θεωρούμε ένα σύστημα ριζών Φ και ένα υπερεπίπεδο H με $H \cap \Phi = \{0\}$. Το H χωρίζει το Φ σε δύο ξένα σύνολα Φ^+ και Φ^- και αφού για κάθε ρίζα $\alpha \in \Phi$ ισχύει $-\alpha \in \Phi$, έχουμε $\Phi^+ = -\Phi^-$. Ορίζουμε τα Φ^+ και Φ^- ως το θετικό και αρνητικό αντίστοιχα σύστημα του Φ . Επίσης, ονομάζουμε ένα υποσύνολο Π του Φ απλό σύστημα αν: (i) το Π είναι βάση του διανυσματικού χώρου που παράγουν τα στοιχεία του Φ πάνω στο \mathbb{R} και (ii) κάθε $\alpha \in \Phi$ είναι γραμμικός συνδυασμός με ομόσημους συντελεστές στοιχείων του Π . Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν το Π είναι απλό σύστημα κάποιου συστήματος ριζών Φ τότε υπάρχει μοναδικό θετικό σύστημα Φ^+ για το Φ με $\Pi \subseteq \Phi^+$. Αντίστροφα, κάθε θετικό σύστημα Φ^+ περιέχει μοναδικό απλό σύστημα Π . Στην πραγματικότητα, ένα απλό σύστημα Π ορίζει μοναδικά την ομάδα W . Στο επόμενο θεώρημα βλέπουμε πώς μία ομάδα ανακλάσεων μπορεί να καθοριστεί από ανακλάσεις r_α όπου $\alpha \in \Pi$.



Σχήμα 1.1: Ένα σύστημα ριζών που αντιστοιχεί στην ομάδα ανακλάσεων του κανονικού εξαγώνου. Το υπερεπίπεδο H διαχωρίζει το σύστημα ριζών στο Φ^+ και Φ^- και οι απλές ρίζες είναι αυτές με κόκκινο χρώμα.

Θεώρημα 1.1. [43, Θεώρημα 1.9] Έστω Π το απλό σύστημα ριζών που αντιστοιχεί στο Φ . Τότε η αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W έχει γεννήτορες το σύνολο $S := \{r_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ και παριστάται από τις σχέσεις

$$(r_\alpha r_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = \mathbf{1},$$

όπου $\alpha, \beta \in \Pi$ και $m(\alpha, \beta)$ είναι η τάξη του $r_\alpha r_\beta$ στην W . \square

Κάθε ομάδα που αναπαριστάται όπως παραπάνω ονομάζεται ομάδα Coxeter και το ζεύγος (W, S) ονομάζεται σύστημα Coxeter. Αν και οι ομάδες Coxeter προέκυψαν από την ταξινόμηση των πεπερασμένων ομάδων ανακλάσεων σε ευκλείδιο χώρο, ο ορισμός τους είναι πολύ πιο γενικός. Μπορεί να είναι άπειρες και να αναπαριστώνται γεωμετρικά σαν ομάδες ανακλάσεων μή Ευκλειδίων χώρων.

Έστω ένα σύστημα ριζών Φ με σύνολο απλών ριζών $\Pi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Για κάθε $J \subseteq [n]$ συμβολίζουμε με W_J την υποομάδα του W που παράγεται από τις ανακλάσεις r_{σ_i} , $i \in J$. Εύκολα φαίνεται ότι $W_\emptyset = \{1\}$ και $W_{[n]} = W$. Οι ομάδες που παίρνουμε με τον παραπάνω τρόπο ονομάζονται *παραβολικές υποομάδες* της W . Έστω $\Pi_J := \{\sigma_i \in \Pi : i \in J\}$ και Φ_J η τομή της γραμμικής θήκης των διανυσμάτων του Π_J με το Φ . Αποδεικνύεται ότι το Φ_J είναι σύστημα ριζών με απλό σύστημα Π_J και αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W_J (βλ. [43, Παράγραφος 1.10]).

1.1.3 Σύστημα ριζών κλασσικών ομάδων

Είναι προφανές ότι σε κάθε ομάδα ανακλάσεων W αντιστοιχούν περισσότερα από ένα συστήματα ριζών. Σε αυτήν την παράγραφο αναφέρουμε κάποια συστήματα ριζών τα οποία αντιστοιχούν στις κλασσικές ομάδες και τα οποία χρησιμοποιούνται συχνότερα. Συμβολίζουμε με $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ την συνήθη ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n .

• $A_n (n \geq 1)$: Το σύστημα ριζών αυτής της ομάδας αποτελείται από τα $n(n+1)$ διανύσματα

$$\epsilon_i - \epsilon_j, \quad 1 \leq i \neq j \leq n+1$$

και οι απλές ρίζες είναι οι

$$\sigma_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \sigma_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \sigma_n = \epsilon_n - \epsilon_{n+1}.$$

Η ανάκλαση που αντιστοιχεί στο σ_i δρα στον \mathbb{R}^{n+1} αντιμεταθέτοντας τις συντεταγμένες i και $i+1$. Επομένως η ομάδα ανακλάσεων A_n είναι ισόμορφη με την ομάδα μεταθέσεων \mathcal{S}_{n+1} και συνεπώς έχει $(n+1)!$ στοιχεία.

• $B_n (n \geq 2)$: Το σύστημα ριζών αυτής της ομάδας αποτελείται από τα $2n^2$ διανύσματα

$$\pm \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{και} \quad \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \quad (i < j)$$

και οι απλές ρίζες είναι οι

$$\sigma_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \sigma_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \sigma_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \sigma_n = \epsilon_n.$$

Η ομάδα B_n έχει $2^n n!$ στοιχεία.

• $C_n (n \geq 2)$: Το σύστημα ριζών της C_n είναι δυϊκό με αυτό της B_n και οι ομάδες ανακλάσεων B_n και C_n ταυτίζονται. Ένας από τους λόγους που, ορισμένες φορές, μελετάμε αυτά τα δύο συστήματα χωριστά είναι ότι το πρώτο αντιστοιχεί στην ομάδα συμμετριών του n -διάστατου κύβου ενώ το δεύτερο σε αυτήν n -διάστατου σταυρωτού πολυτόπου. Το σύστημα ριζών της ομάδας C_n αποτελείται από τα $2n^2$ διανύσματα

$$\pm 2\epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{και} \quad \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \quad (i < j)$$

και οι απλές ρίζες Π είναι οι

$$\sigma_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \sigma_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \sigma_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \sigma_n = 2\epsilon_n.$$

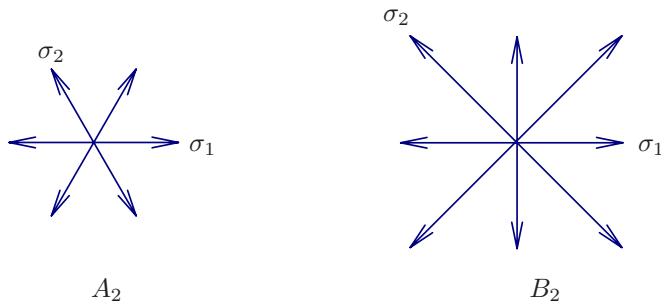
• $D_n (n \geq 4)$: Το σύστημα ριζών της D_n αποτελείται από τα $2n(n-1)$ διανύσματα

$$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

και οι απλές ρίζες είναι οι

$$\sigma_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \sigma_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \sigma_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \sigma_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n.$$

Η ομάδα ανακλάσεων D_n έχει $2^{n-1}n!$ στοιχεία.



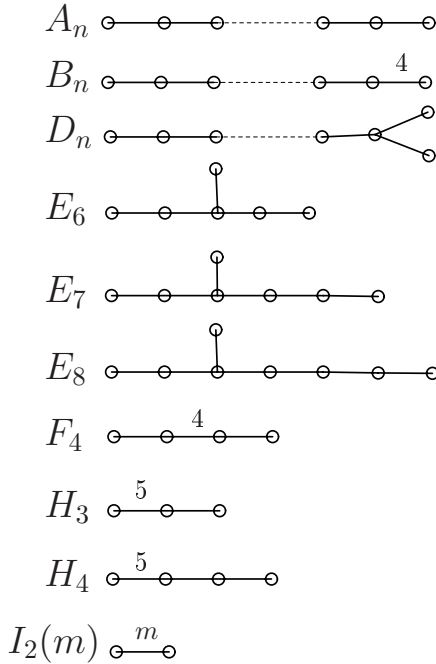
Σχήμα 1.2: Τα συστήματα ριζών των ομάδων A_2 και B_2 . Το πρώτο αντιστοιχεί στην ομάδα ανακλάσεων του ισοπλευρού τριγώνου και το δεύτερο σε αυτήν του τετραγώνου.

1.1.4 Γραφήματα Coxeter

Το Θεώρημα 1.1 μας δίνει έναν εύκολο τρόπο να αναπαραστήσουμε μία ομάδα Coxeter κατασκευάζοντας ένα γράφημα που αντιστοιχεί σε αυτήν ως εξής: ταυτίζουμε τις κορυφές του γραφήματος με τις απλές ρίζες στο Π και συνδέουμε κάθε ζεύγος $\alpha \neq \beta \in \Pi$ με μία ακμή, την οποία επιγράφουμε με $m(\alpha, \beta)$, αν $m(\alpha, \beta) \geq 3$. Αν $m(\alpha, \beta) = 2$ τότε οι κορυφές $\alpha \neq \beta$ δεν συνδέονται με ακμή και υπενθυμίζουμε ότι $m(\alpha, \alpha) = 1$. Λέμε ότι ένα σύστημα Coxeter είναι ανάγωγο αν το αντίστοιχο γράφημα Coxeter είναι συνεκτικό. Παρατηρήστε ότι αν $m(\alpha, \beta) = 2$ τότε $r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha$ ή ισοδύναμα $\alpha \perp \beta$.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι πεπερασμένες ομάδες Coxeter ταυτίζονται με τις πεπερασμένες ομάδες ανακλάσεων. Επομένως, όλες οι ανάγωγες πεπερασμένες ομάδες Coxeter χωρίζονται στις κατηγορίες A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$), $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$ και $I_2(m)$ ($m \geq 2$). Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [43].

Θεώρημα 1.2. Κάθε πεπερασμένη ομάδα Coxeter είναι ισόμορφη με μία πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων. Όλες οι ανάγωγες πεπερασμένες ομάδες Coxeter είναι αυτές των οποίων τα γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Γραφήματα Coxeter των ανάγωγων ομάδων ανακλάσεων. Θεωρούμε ότι οι ακμές χωρίς σημείωση επιγράφονται με 3.

Στην συνέχεια θέλουμε να δούμε πώς οι ομάδες ανακλάσεων δρουν στον πραγματικό χώρο \mathbb{R}^n . Πιο συγκεκριμένα, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν κάθε ανάγωγη ομάδα ανακλάσεων είναι ομάδα συμμετριών κάποιου κυρτού πολύτοπου, δηλαδή κυρτής θήκης πεπερασμένου το πλήθος σημείων. Προφανώς, αν ένα τέτοιο πολύτοπο υπάρχει θα πρέπει να έχει κάποιου είδους συμμετρία. Αυτό δίνει το κίνητρο για τον ακόλουθο ορισμό. *Κανονικό πολύτοπο* ονομάζεται κάθε κυρτό πολύτοπο του οποίου η ομάδα συμμετριών (δηλαδή η ομάδα ισομετριών του χώρου που αφήνουν το πολύτοπο αναλλοίωτο) δρά μεταβατικά στις μεγιστικές αλυσίδες της μορφής: κορυφή \subseteq ακμή \subseteq 2-διάστατη πλευρά $\subseteq \dots \subseteq$ έδρα. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η ομάδα συμμετριών ενός κανονικού πολύτοπου είναι πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντοτε. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 προκύπτει ότι μία πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων είναι ομάδα συμμετριών ενός κανονικού πολύτοπου αν και μόνον αν το

αντίστοιχο γράφημα Coxeter δεν έχει διακλαδώσεις. Επομένως, οι ομάδες A_n, B_n (και C_n), F_4, H_3, H_4 και $I_2(m)$ είναι ομάδες συμμετριών κανονικών πολυτόπων. Πιό συγκεκριμένα, οι ομάδες A_n, B_n και C_n είναι οι ομάδες συμμετριών του κανονικού μονοπλόκου, του κύβου και του σταυρωτού πολύτοπου αντίστοιχα διαστάσεως n . Η ομάδα H_3 είναι ομάδα συμμετριών του κανονικού δωδεκαέδρου. Η ομάδα F_4 είναι η ομάδα συμμετριών ενός τετραδιάστατου πολυτόπου που ονομάζεται 24-cell, το οποίο έχει 24 κορυφές και 24 οκταεδρικές έδρες. Τέλος, υπάρχουν δύο πολύτοπα των οποίων η ομάδα συμμετριών είναι η H_4 . Το ένα από αυτά έχει 600 κορυφές και 120 δωδεκαεδρικές έδρες ενώ το άλλο έχει 120 κορυφές και 600 τετραεδρικές έδρες. Τέλος, η $I_2(m)$ είναι η ομάδα συμμετριών ενός κανονικού m -γώνου. Όπως βλέπουμε από την παραπάνω ανάλυση, τα μόνα κανονικά πολύτοπα διαστάσεως μεγαλύτερης του 4 είναι τα μονόπλοκα, τα σταυρωτά πολύτοπα και οι κύβοι.

1.1.5 Αναλλοίωτες ομάδων Coxeter

Έστω ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W και S το σύνολο των ανακλάσεων ως προς τις απλές ρίζες του Φ . Κάθε γινόμενο όλων των ανακλάσεων του S ονομάζεται στοιχείο Coxeter της W . Τα στοιχεία Coxeter δεν είναι μοναδικά διότι η ομάδα W δεν είναι εν γένει αντιμεταθετική, παρόλα αυτά έχουν πολλές κοινές ιδιότητες. Καταρχήν οποιαδήποτε δύο είναι συζυγή [43, Πρόταση 3.16] και επομένως έχουν την ίδια τάξη h , την οποία ονομάζουμε αριθμό Coxeter. Αν το γ είναι στοιχείο Coxeter της W , υπάρχει ένας δυδιάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^n ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος από την δράση του γ . Πιό συγκεκριμένα, η δράση του γ στον υπόχωρο αυτό είναι στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{h}$. Επομένως, η ρίζα ζ της μονάδος τάξεως h είναι ιδιοτιμή του γ αφού είναι ιδιοτιμή της στροφής κατά $\frac{2\pi}{h}$. Επιπλέον, όλες οι ιδιοτιμές του γ είναι δυνάμεις του ζ . Αυτές οι δυνάμεις ονομάζονται εκθέτες της W και συμβολίζονται με e_1, \dots, e_n . Λόγω συζυγίας των στοιχείων Coxeter, οι αριθμοί Coxeter και οι εκθέτες είναι ανεξάρτητοι της επιλογής του γ . Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε ορισμένα στοιχεία για τις ομάδες Coxeter τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα.

Πρόταση 1.2.

(i) [43, Πρόταση 3.18] Ισχύει ότι $h = \frac{2N}{n}$, όπου N είναι το πλήθος των θετικών ριζών, h ο αριθμός Coxeter και n η τάξη της W .

(ii) [43, Θεώρημα 3.19] $|W| = \prod_{i=1}^n (e_i + 1)$. □

ομάδα	$ W $	N	h	εκθέτες
$A_n, n \geq 1$	$(n+1)!$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$n+1$	$1, 2, \dots, n$
$B_n, n \geq 2$	$2^n n!$	n^2	$2n$	$1, 3, \dots, 2n-1$
$D_n, n \geq 4$	$2^{n-1} n!$	$n^2 - n$	$2(n-1)$	$1, 3, \dots, 2n-3, n-1$
E_6	$2^7 3^4 5$	36	12	$1, 4, 5, 7, 8, 11$
E_7	$2^{10} 3^4 5 7$	63	18	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$
E_8	$2^{14} 3^5 5^2 7$	120	30	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$
F_4	1152	24	12	$1, 5, 7, 11$
H_3	120	15	10	$1, 5, 9$
H_4	14400	60	30	$1, 11, 19, 29$
$I_2(m), m \geq 3$	$2m$	m	m	$1, m-1$

Πίνακας 1.1: Βασικές αναλλοίωτες των ομάδων Coxeter

1.1.6 Κρυσταλλογραφικές ομάδες

Μία ομάδα ανακλάσεων στον \mathbb{R}^n λέγεται *κρυσταλλογραφική* αν αφήνει αναλλοίωτο κάποιο πλέγμα \mathbb{L} του \mathbb{R}^n , δηλαδή αν $w\mathbb{L} = \mathbb{L}$ για κάθε $w \in W$. Αποδεικνύεται ότι αν η W είναι κρυσταλλογραφική τότε κάθε επιγραφή $m(\alpha, \beta)$ του διάγραμματος Coxeter πρέπει να είναι ίση με 2, 3, 4 ή 6 [43, Πρόταση 2.8]. Συνεπώς, οι ομάδες H_3 και H_4 καθώς και όλες οι διεδρικές εκτός από αυτές τάξεως 2, 4, 6, 8 και 12 δεν είναι κρυσταλλογραφικές. Στο Σχήμα 1.5 φαίνεται η κατάταξη των αναγώγων ομάδων ανακλάσεων σε κρυσταλλογραφικές και ομάδες συμμετριών κανονικών πολυτόπων.

Υπάρχει ένας διαφορετικός τρόπος να ορίσουμε μία κρυσταλλογραφική ομάδα μέσω του συστήματος ριζών της. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι ένα σύστημα ριζών είναι κρυσταλλογραφικό αν

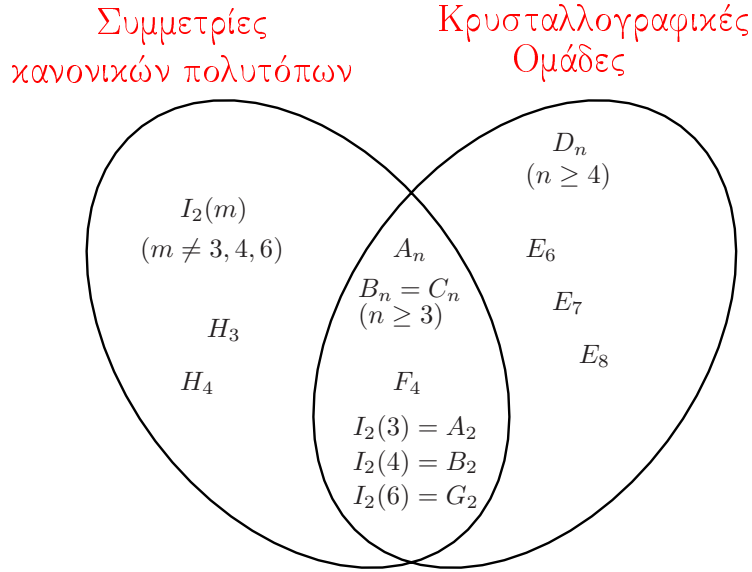
$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Phi.$$

Μία ομάδα ανακλάσεων που ορίζεται από το κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ ονομάζεται ομάδα *Weyl*. Αποδεικνύεται ότι οι κρυσταλλογραφικές ομάδες και οι ομάδες Weyl ταυτίζονται.

Παρακάτω παραθέτουμε κάποια από τα πλέγματα τα οποία παραμένουν σταθερά κάτω από την δράση μίας κρυσταλλογραφικής ομάδας W .

- Το πλέγμα ριζών $L(\Phi)$: αποτελείται από όλους τους ακέραιους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του Φ .

- Το πλέγμα συρριζών $L(\Phi^\vee)$: Για κάθε ρίζα $\alpha \in \Phi$ ορίζουμε την αντίστοιχη συρρίζα ως $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$ και συμβολίζουμε με Φ^\vee το σύνολο όλων των συρριζών. Το Φ^\vee είναι επίσης κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων ισόμορφη με αυτήν του Φ . Το πλέγμα συρριζών αποτελείται από όλους τους ακέραιους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του Φ^\vee .



Σχήμα 1.4: Οι πεπερασμένες ανάγωγες ομάδες Coxeter

- Το πλέγμα βαρών:

$$\hat{L}(\Phi^\vee) := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \text{ για κάθε } \alpha \in \Phi\}.$$

- Το πλέγμα συμβαρών:

$$\hat{L}(\Phi) := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z} \text{ για κάθε } \alpha \in \Phi\}.$$

Ισχύει ότι $L(\Phi) \subseteq \hat{L}(\Phi)$ και $L(\Phi^\vee) \subseteq \hat{L}(\Phi^\vee)$.

1.1.7 Αφφινικές ομάδες

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε κάποιες ομάδες Coxeter που ονομάζονται αφφινικές ομάδες ανακλάσεων και οι οποίες, όπως θα δούμε, σχετίζονται με τις κρυσταλλογραφικές. Πιο συγκεκριμμένα, μία αφφινική ανάκλαση στον \mathbb{R}^n είναι μία ανάκλαση ως προς ένα υπερεπίπεδο του \mathbb{R}^n το οποίο δεν διέρχεται απαραίτητως από την αρχή των αξόνων. Ορίζουμε την αφφινική ομάδα $Aff(\mathbb{R}^n)$ ως το ημιευθύ γινόμενο της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(\mathbb{R}^n)$ και της ομάδας των απεικονίσεων μεταφοράς κατά στοιχείο του \mathbb{R}^n . Αν η W είναι κρυσταλλογραφική ομάδα τάξεως n , για κάθε ρίζα $\alpha \in \Phi$ και $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το υπερεπίπεδο

$$H_{\alpha,k} := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda, \alpha) = k\}.$$

Παρατηρήστε ότι $H_{\alpha,k} = H_{-\alpha,-k}$ και επίσης ότι το $H_{\alpha,k}$ είναι μεταφορά κατά $\frac{k}{2}\alpha^\vee$ του υπερεπιπέδου $H_{\alpha,0}$. Ορίζουμε την ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $H_{\alpha,k}$ ως εξής:

$$r_{\alpha,k}(\lambda) := \lambda - ((\lambda, \alpha) - k)\alpha^\vee. \quad (1.1)$$

Πράγματι, η απεικόνιση $r_{\alpha,k}$ διατηρεί σταθερό το $H_{\alpha,k}$ και στέλνει το $\mathbf{0}$ στο $k\alpha^\vee$. Αν συμβολίσουμε με \mathcal{H} το σύνολο των υπερεπιπέδων $H_{\alpha,k}$ με $\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}$ θα δούμε ότι τα στοιχεία του \mathcal{H} μετατίθενται κάτω από την δράση της W καθώς και ορισμένων απεικονίσεων μεταφοράς της $Aff(\mathbb{R}^n)$. Αυτό φαίνεται από την παρακάτω πρόταση

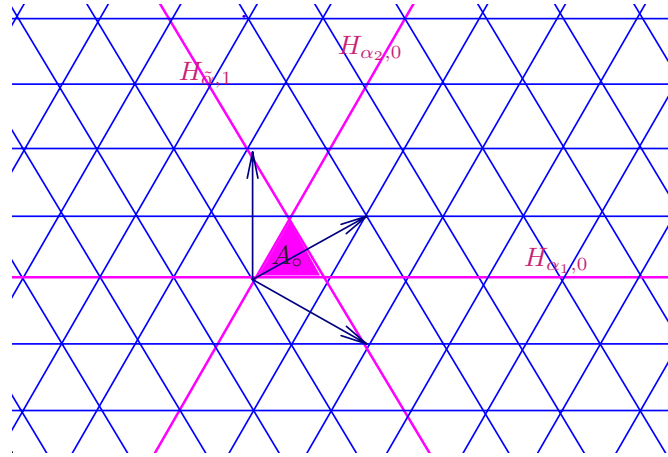
Πρόταση 1.3. [43, Πρόταση 4.1]

(i) Αν $w \in W$ τότε $wH_{\alpha,k} = H_{w\alpha,k}$ και $wr_{\alpha,k}w^{-1} = r_{w\alpha,k}$.

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}^n$ με $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $\alpha \in \Phi$. Τότε $t(\lambda)H_{\alpha,k} = H_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}$ και $t(\lambda)r_{\alpha,k}t(-\lambda) = r_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}$.

Ορίζουμε την αφηνική ομάδα $Weyl$ W_α ως την υποομάδα της $Aff(\mathbb{R}^n)$ που παράγεται από τις ανακλάσεις $r_{\alpha,k}$, όπου $\alpha \in \Phi$ και $k \in \mathbb{Z}$. Αποδεικνύεται ότι η ομάδα W_α είναι το ημιευθύ γινόμενο της W με την ομάδα μεταφορών που αντιστοιχεί στο πλέγμα $L(\Phi^\vee)$.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με ορισμένα γενικά στοιχεία για το πώς η ομάδα W_α δρα στο σύνολο υπερεπιπέδων \mathcal{H} . Θεωρούμε το σύνολο \mathcal{A} των συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Κάθε τέτοια συνιστώσα ονομάζεται *θαλαμίσκος*.



Σχήμα 1.5: Το σύνολο των υπερεπιπέδων \mathcal{H} και ο θεμελιώδης θαλαμίσκος για $\Phi = A_2$

Στην περίπτωση όπου το χρυσταλλογραφικό σύστημα Φ είναι ανάγωγο ξεχωρίζουμε το θαλαμίσκο

$$A_0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid 0 < (\lambda, \alpha) < 1 \text{ για κάθε } \alpha \in \Phi^+\},$$

τον οποίο ονομάζουμε *θεμελιώδη*. Αφού το Φ είναι ανάγωγο και χρυσταλλογραφικό, υπάρχει μοναδική ρίζα $\tilde{\alpha}$ που ονομάζεται *μεγιστική*, με την ιδιότητα ότι για κάθε $\alpha \in \Phi^+$ η διαφορά $\tilde{\alpha} - \alpha$ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός απλών ριζών. Αποδεικνύεται ότι

$$A_0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid 0 < (\lambda, \alpha) \text{ για κάθε } \alpha \in \Pi, (\lambda, \tilde{\alpha}) < 1\}.$$

Αφού τα στοιχεία του Π είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, συμπεραίνουμε ότι το A_0 είναι μονόπλοκο διαστάσεως n . Ονομάζουμε *τείχος* ενός θαλαμίσκου A κάθε υπερεπίπεδο που υποστηρίζει τον A . Τα τείχη του A_0 είναι τα υπερεπίπεδα $H_{\alpha,0}$ με $\alpha \in \Pi$ και το υπερεπίπεδο $H_{\tilde{\alpha},1}$. Συμβολίζουμε με S_α το σύνολο των ανακλάσεων ως προς αυτά τα υπερεπίπεδα, δηλαδή $S_\alpha = \{r_{\alpha,0} : \alpha \in \Pi\} \cup \{r_{\tilde{\alpha},1}\}$.

Πρόταση 1.4. [43, Πρόταση 4.3] *Η ομάδα W_α μεταθέτει σύνολο \mathcal{A} των θαλαμίσκων μεταβατικά και παράγεται από τις ανακλάσεις στο S_α . \square*

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι κάθε θαλαμίσκος μπορεί να γραφεί ως wA_0 για κάποιο $w \in W_\alpha$. Επομένως, τείχος του wA_0 είναι κάθε υπερεπίπεδο wH όπου το H είναι τείχος του A_0 .

Στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου παραθέτουμε ορισμένα στοιχεία για παρατάγματα υπερεπιπέδων, συμπλέγματα σιγμών και μη διασταυρούμενες διαμερίσεις μίας ομάδας Coxeter.

1.2 Παρατάγματα υπερεπιπέδων συσχετιζόμενα με ομάδες Coxeter

1.2.1 Παρατάγματα υπερεπιπέδων

Ένα παράταγμα υπερεπιπέδων \mathcal{A} στον \mathbb{R}^n είναι ένα σύνολο αφφινικών υπερεπιπέδων του \mathbb{R}^n . Η *διάσταση* του \mathcal{A} είναι η διάσταση του χώρου \mathbb{R}^n και η *τάξη* $rk(\mathcal{A})$ είναι η διάσταση του χώρου που παράγεται από τα διανύσματα ορθόθετα στα υπερεπίπεδα του \mathcal{A} . Λέμε ότι το \mathcal{A} είναι *ουσιώδες* αν $rk(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A})$. Μία *περιοχή* του \mathcal{A} είναι μια συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος X των υπερεπιπέδων

$$X = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Μια περιοχή λέγεται *φραγμένη* αν είναι φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Το παράταγμα υπερεπιπέδων \mathcal{A} λέγεται *κεντρικό* αν $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$.

Το *μερικώς διατεταγμένο σύνολο τομών* του \mathcal{A} είναι το σύνολο $L_{\mathcal{A}} = \{\cap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$, διατεταγμένο αντιστρόφως ως προς τον εγκλεισμό. Το $L_{\mathcal{A}}$ έχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο το $\hat{0} = \mathbb{R}^n$. Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του \mathcal{A} ορίζεται ως

$$\chi(\mathcal{A}, q) = \sum_{x \in L_{\mathcal{A}}} \mu(x) q^{\dim(x)},$$

όπου μ είναι η συνάρτηση Möbius του $L_{\mathcal{A}}$, με

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = \hat{0} \\ -\sum_{y < x} \mu(y), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μας δίνει πολύ χρήσιμες πληροφορίες για ένα πεπερασμένο παράταγμα υπερεπιπέδων \mathcal{A} , όπως φαίνεται και στο παρακάτω θεώρημα του Zaslavsky.

Θεώρημα 1.3. [76] *Το πλήθος των περιοχών στις οποίες τα υπερεπίπεδα του \mathcal{A} διαχωρίζουν τον χώρο \mathbb{R}^n είναι ίσο με $(-1)^n \chi(\mathcal{A}, -1)$. Αν το \mathcal{A} είναι ουσιώδες τότε το πλήθος των φραγμένων περιοχών είναι ίσο με $(-1)^n \chi(\mathcal{A}, 1)$. \square*

1.2.2 Καταλάνεια παρατάγματα υπερεπιπέδων

Σε αυτήν την διατριβή θα ασχοληθούμε με παρατάγματα υπερεπιπέδων που σχετίζονται με συστήματα ριζών. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα πεπερασμένο κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W . Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m ορίζουμε το m -οστό *Καταλάνειο παράταγμα υπερεπιπέδων* $\mathcal{A}^m(\Phi)$ ως το σύνολο των υπερεπιπέδων $H_{\alpha, k}$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$(\alpha, x) = k,$$

για $\alpha \in \Phi$ και $k = 0, \dots, m$. Στην περίπτωση $m = 0$ το $\mathcal{A}^0(\Phi)$ ονομάζεται *παράταγμα Coxeter* και συμβολίζεται με \mathcal{A}_{Φ} , ενώ στην περίπτωση $m = 1$ το $\mathcal{A}^1(\Phi)$ ονομάζεται *παράταγμα Catalan* του Φ .

Η ομάδα W δρα στο Φ . Επίσης, δρα απλά μεταβατικά στο σύνολο των περιοχών του \mathcal{A}_{Φ} , οι οποίες ονομάζονται *δώματα*. Ονομάζουμε *θεμελιώδες δώμα* του \mathcal{A}_{Φ} την περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες $(\sigma_i, x) > 0$ για $1 \leq i \leq n$, όπου σ_i είναι οι απλές ρίζες του Φ . Ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n ονομάζεται *κυρίαρχο* αν περιέχεται στο θεμελιώδες δώμα του \mathcal{A}_{Φ} . Τέλος, συμβολίζουμε με $\tilde{\mathcal{A}}_{\Phi}$ το *Coxeter αφινικό παράταγμα υπερεπιπέδων*, το οποίο αποτελείται από τα υπερεπίπεδα $H_{\alpha, k}$ με $\alpha \in \Phi$ και $k \in \mathbb{Z}$ και με W_{α} την *αφινική ομάδα Weyl* με γεννήτορες τις ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα του $\tilde{\mathcal{A}}_{\Phi}$.

Στην περίπτωση όπου το σύστημα ριζών Φ είναι ανάγωγο και κρυσταλλογραφικό, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του m -οστού Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^m(\Phi)$ έχει υπολογιστεί από τον Αθανασιάδη.

Θεώρημα 1.4. [5, Θεώρημα 1.2] *Γιά κάθε ανάγωγο και κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών και ακέραιο m έχουμε*

$$\chi(\mathcal{A}^m(\Phi), q) = \prod_{i=1}^n (q - mh - e_i),$$

όπου n είναι η τάξη και e_1, \dots, e_n οι εκθέτες του Φ . □

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 1.3 και 1.4, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $|W| = \prod_{i=1}^n (e_i + 1)$ και ότι οι περιοχές του \mathcal{A}_Φ είναι ισοπληθείς με τα στοιχεία της W συμπεραίνουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 1.1. [5, Πόρισμα 1.3]

(i) *Το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών του m -οστού Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων είναι ίσο με*

$$N^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh + 1}{e_i + 1}. \quad (1.2)$$

(ii) *Το πλήθος των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών του m -οστού Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων είναι ίσο με*

$$N_+^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh - 1}{e_i + 1}. \quad (1.3)$$

□

Στήν περίπτωση $m = 1$ το μέρος (i) του παραπάνω θεωρήματος ισοδυναμεί με τα αποτελέσματα του Shi [63], ο οποίος απαρίθμησε τις αντιαλυσίδες του μερικώς διατεταγμένου συνόλου των ριζών Φ^+ και έδειξε ότι αυτές είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις κυρίαρχες περιοχές του $\mathcal{A}^1(\Phi)$. Επίσης, από το Θεώρημα 7.4.2 στο [41] είναι γνωστό ότι το γινόμενο (1.2) απαριθμεί το πλήθος των τροχιών της δράσης της W στο $L(\Phi^\vee)/(mh+1)L(\Phi^\vee)$, όπου $L(\Phi^\vee)$ είναι το πλέγμα συρριζών. Το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών στην περίπτωση $m = 1$ και $\Phi = A_{n-1}$ είναι ίσο με τον γνωστό αριθμό Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, ενώ το πλήθος αυτών που είναι φραγμένες είναι ίσο με τον αριθμό Catalan C_{n-1} . Ο αριθμός Catalan συναντάται πολύ συχνά και απαριθμεί δεκάδες συνδυαστικών αντικειμένων (βλ. [71, Άσκηση 6.19]). Ο αριθμός $N^{(m)}(\Phi)$ ονομάζεται *γενικευμένος αριθμός Catalan* ως προς το ζεύγος (Φ, m) . Επίσης ο αριθμός $N_+^{(m)}(\Phi)$ ονομάζεται *γενικευμένος θετικός αριθμός Catalan*. Στην περίπτωση $m = 1$ γράφουμε $N(\Phi)$ και $N_+(\Phi)$ αντί για $N^{(1)}(\Phi)$ και $N_+^{(1)}(\Phi)$ αντίστοιχα.

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός του m -οστού Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων καθώς και ο αριθμός $N^{(m)}(\Phi)$ έχουν νόημα και στην περίπτωση όπου το Φ δεν είναι κρυσταλλογραφικό. Τότε όμως, για παράδειγμα στις διεδρικές ομάδες $I_2(5)$, $I_2(7)$ και $I_2(8)$, ο αριθμός $N^{(m)}(\Phi)$ δεν απαριθμεί πάντοτε το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών του αντιστοίχου παρατάγματος υπερεπιπέδων (βλ. [32]).

1.2.3 Μία εκλέπτυνση του αριθμού Catalan

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε μία εκλέπτυνση του αριθμού Catalan που ορίστηκε και μελετήθηκε από τον Αθανασιάδη [6]. Αυτή η εκλέπτυνση απαριθμεί κυρίαρχες περιοχές του m -οστού Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων σύμφωνα με μία στατιστική η οποία σχετίζεται με τείχη τους της μορφής $H_{\alpha,m}$. Πριν μπούμε σε λεπτομέρειες παραθέτουμε ορισμένα εισαγωγικά γενικά στοιχεία.

Έστω ένα κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ τάξεως n με θετικό σύστημα Φ^+ και αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W . Όπως αναφέραμε παραπάνω, η ομάδα W δρα στο πλέγμα συρριζών $L(\Phi^\vee)$ καθώς και στην διόγκωση αυτού $(mh+1)L(\Phi^\vee)$ και επομένως στο ηλίκο τους

$$T^m = L(\Phi^\vee)/(mh+1)L(\Phi^\vee).$$

Αν $y \in T^m$ συμβολίζουμε με W_y τον σταθεροποιητή του y ως προς την δράση της W στο T^m . Το σύνολο W_y είναι υποομάδα της W η οποία παράγεται από ανακλάσεις. Το ελάχιστο πλήθος των ανακλάσεων που είναι απαραίτητες για να παράγουν την W_y ονομάζεται *τάξη* του y και συμβολίζεται με $rk(y)$. Μπορούμε να γράψουμε $rk(y)$ και στην περίπτωση όπου το y είναι μία τροχιά δράσης της W στο T^m , διότι στοιχεία της ίδιας τροχιάς έχουν συζυγείς σταθεροποιητές.

Θεωρούμε τη μερική διάταξη στο Φ^+ με $\alpha \leq \beta$ αν η διαφορά $\beta - \alpha$ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός θετικών ριζών. Η διάταξη αυτή είναι γνωστή ως *μερική διάταξη ριζών* του Φ^+ . Κάθε υποσύνολο του Φ^+ αποτελούμενο από ανά δύο μη συγκρίσιμα στοιχεία ονομάζεται *αντιαλυσίδα*. Επίσης, ονομάζουμε *φίλτρο* του Φ^+ ένα υποσύνολο $\mathcal{I} \subseteq \Phi^+$ τέτοιο ώστε αν $\alpha \in \mathcal{I}$ και $\alpha \leq \beta$ στο Φ^+ τότε $\beta \in \mathcal{I}$. Μία φθίνουσα αλυσίδα $\mathcal{I} : \Phi^+ = \mathcal{I}_0 \supseteq \mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{I}_m$ φίλτρων του Φ^+ ονομάζεται *γεωμετρική αλυσίδα φίλτρων μήκους m* αν ισχύει

$$(\mathcal{I}_i + \mathcal{I}_j) \cap \Phi^+ \subseteq \mathcal{I}_{i+j} \quad (1.4)$$

για κάθε i, j όπου $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_m$ για κάθε $i \geq m$ και

$$(\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_j) \cap \Phi^+ \subseteq \mathcal{J}_{i+j} \quad (1.5)$$

για κάθε $i, j \geq 1$ με $i + j \leq m$, όπου $\mathcal{J}_i = \Phi^+ \setminus \mathcal{I}_i$ για $0 \leq i \leq m$.

Μία ρίζα $\alpha \in \Phi^+$ ονομάζεται *μη αναλύσιμη* τάξεως m ως προς την αλυσίδα \mathcal{I} αν $\alpha \in \mathcal{I}_m$ και επιπλέον δεν μπορούμε να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta \in \mathcal{I}_i$, $\gamma \in \mathcal{I}_j$,

όπου $i, j \geq 0$ και $i + j = m$. Ονομάζουμε *τείχος* μίας περιοχής R του Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων κάθε υπερεπίπεδο που υποστηρίζει την R . Λέμε ότι ένα υπερεπίπεδο $H_{\alpha, m}$ διαχωρίζει μια περιοχή R από το βασικό θαλαμίσκο A_0 αν ισχύει ότι $(\alpha, x) > m$ για κάθε $x \in R$.

Θεώρημα 1.5. [5, Θεώρημα 1.2] Έστω Φ ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα Weyl W , m θετικός ακέραιος και $O^m(\Phi)$ το σύνολο των τροχιών δράσης της W στο T^m . Τα ακόλουθα είναι ίσα για κάθε ακέραιο $0 \leq k \leq n$:

(i) το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών R του παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^m(\Phi)$ οι οποίες έχουν k τείχη της μορφής $H_{\alpha, m}$ που διαχωρίζουν την R από το θεμελιώδη θαλαμίσκο A_0 ,

(ii) το πλήθος των τροχιών $y \in O^m(\Phi)$ με $rk(y) = k$ και

(iii) το πλήθος των γεωμετρικών αλυσίδων φίλτρων του Φ^+ μήκους m οι οποίες έχουν k μη αναλύσιμες ρίζες τάξεως m .

Ειδικότερα, το συνολικό πλήθος των γεωμετρικών αλυσίδων φίλτρων του Φ^+ μήκους m είναι ίσο με

$$\prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh + 1}{e_i + 1}.$$

□

Στην περίπτωση όπου το Φ είναι κλασικό σύστημα ριζών οι παραπάνω αριθμοί υπολογίζονται αναλυτικά, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 1.6. [6, Παράγραφος 5] Το πλήθος των τροχιών $y \in O^m(\Phi)$ με $rk(y) = n - k$ ($0 \leq k \leq n$) είναι ίσο με:

$$\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \binom{m(n+1)}{k} \quad \text{αν } \Phi = A_n,$$

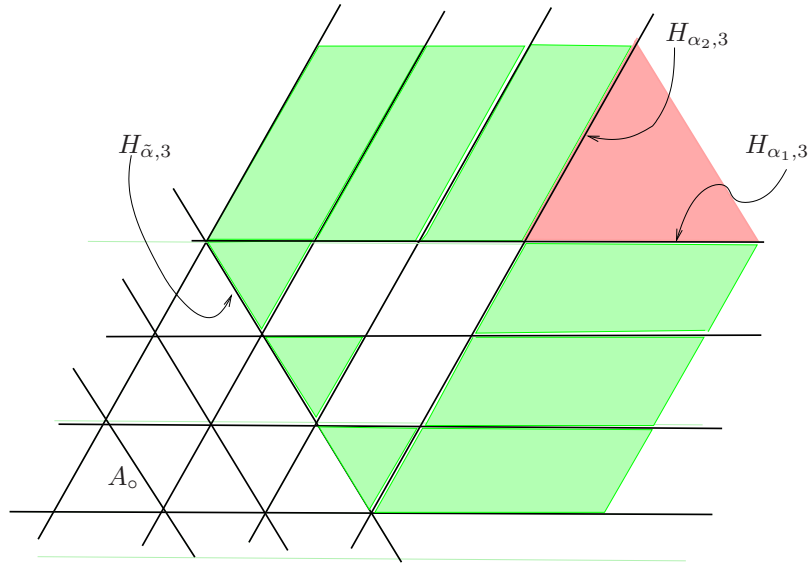
$$\binom{n}{k} \binom{mn}{k} \quad \text{αν } \Phi = B_n \text{ ή } C_n,$$

$$\binom{n}{k} \binom{mn-m}{k} + \binom{n-2}{k-2} \binom{mn-m+1}{k} \quad \text{αν } \Phi = D_n.$$

□

Στην περίπτωση $\Phi = A_n$ και $m = 1$ ο αριθμός του παραπάνω θεωρήματος είναι $\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \binom{n+1}{k}$ και είναι γνωστός ως αριθμός Narayana [53]. Ονομάζουμε, λοιπόν, το πλήθος των στοιχείων που απαριθμούνται στο Θεώρημα 1.5 γενικευμένο αριθμό Narayana τάξεως $n - k$ και γράφουμε $\text{Nar}_{n-k}(\Phi, m)$.

Παράδειγμα 1.1. Στο Σχήμα 1.6 βλέπουμε τις κυρίαρχες περιοχές του Καταλανείου παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^3(A_2)$. Από το Θεώρημα 1.6, για $k = 0, 1, 2$ παίρνουμε τους αριθμούς 1, 9, 12. Με βάση το Θεώρημα 1.5 και ελέγχοντας και το σχήμα, βλέπουμε ότι υπάρχει 1 περιοχή (κόκκινο) με δύο τειχη της μορφής $H_{\alpha,3}$ τα οποία την διαχωρίζουν από το A_0 , 9 περιοχές (πράσινο) με ένα τειχος της μορφής $H_{\alpha,3}$ το οποίο τις διαχωρίζει από το A_0 και τέλος 12 περιοχές (άσπρο) με κανένα τέτοιο τείχος.



Σχήμα 1.6: Οι κυρίαρχες περιοχές του καταλανείου παρατάγματος για $m = 3$ και $\Phi = A_2$.

Τους γενικευμένους αριθμούς Narayana θα τους συναντήσουμε και παρακάτω και όπως θα δούμε, επιδέχονται ενδιαφέρουσες ερμηνείες και απαριθμούν και άλλα συνδυαστικά αντικείμενα. Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με μία εικασία του Αθανασιάδη για τους αριθμούς Narayana, της οποίας η σημασία θα φανεί στην επόμενη παράγραφο και θα απαντηθεί εν μέρει στο Κεφάλαιο 2.

Εικασία 1.1. Υπάρχει ένα Cohen-Macaulay μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διαστάσεως n του οποίου το h -διάγραμμα (h_0, h_1, \dots, h_n) ικανοποιεί την σχέση $h_i = \text{Nar}_{n-i}(\Phi, m)$. \square

1.3 Το σύμπλεγμα σμηνών $\Delta(\Phi)$

Με τη μελέτη της απόλυτης θετικότητας των ομάδων Lie, οι Fomin και Zelevinsky εισήγαγαν την έννοια της άλγεβρας σμηνών [38]. Μία άλγεβρα σμηνών τάξεως n είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος εφοδιασμένος με μία οικογένεια γεννητόρων

οι οποίοι ονομάζονται *μεταβλητές σμηνών*. Μία άλγεβρα σμηνών είναι πεπερασμένου τύπου αν έχει πεπερασμένου πλήθους μεταβλητές σμηνών. Το σύνολο των μεταβλητών σμηνών είναι ένωση μίας συγκεκριμένης οικογένειας συνόλων τα οποία έχουν πληθάρημο n και ονομάζονται *σμήνη*. Οι άλγεβρες σμηνών προήλθαν από την προσπάθεια περιγραφής, με καθαρά αλγεβρικό και συνδυαστικό τρόπο, της δομής των δυϊκών κανονικών βάσεων δακτυλίων συντεταγμένων κάποιων αλγεβρικών πολλαπλοτήτων που σχετίζονται με ημιαπλές ομάδες. Ένα από τα βασικά αποτελέσματα στην θεωρία σμηνών είναι ότι οι πεπερασμένου τύπου άλγεβρες σμηνών είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα πεπερασμένα συστήματα ριζών [39].

Για να κατανοήσει κανείς μία άλγεβρα σμηνών πεπερασμένου τύπου, χρειάζεται να μελετήσει την συνδυαστική της δομή, η οποία αποτυπώνεται στο *σύμπλεγμα σμηνών*. Πιό συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ τάξεως n με θετικό σύστημα Φ^+ , σύνολο απλών ριζών Π και αντίστοιχη ομάδα Weyl W . Αποδεικνύεται ότι οι γεννήτορες της αντίστοιχης Φ -άλγεβρας σμηνών είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με το σύνολο των *σχεδόν θετικών ριζών* $\Phi_{\geq -1} := \Phi^+ \cup (-\Pi)$. Επίσης, οι σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων καθορίζονται από ένα αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διαστάσεως $n - 1$, το σύμπλεγμα σμηνών $\Delta(\Phi)$, του οποίου οι έδρες αντιστοιχούν στα σμήνη της αντίστοιχης άλγεβρας. Το σύμπλεγμα $\Delta(\Phi)$ εξαρτάται από την αντίστοιχη άλγεβρα σμηνών αλλά, όπως έδειξαν οι Fomin και Zelevinsky, μπορεί επίσης να περιγραφεί συνδυαστικά χωρίς αναφορά στην αντίστοιχη άλγεβρα σμηνών. Πιό συγκεκριμένα υπάρχει μία συμμετρική διμελής σχέση στο σύνολο $\Phi_{\geq -1}$ η οποία ονομάζεται *συμβατότητα* και η οποία καθορίζει πότε δύο σχεδόν θετικές ρίζες βρίσκονται στο ίδιο σμήνος. Με τη μελέτη του συμπλέγματος σμηνών ανακαλύφθηκαν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, γενικεύσεις και συσχετισμοί με άλλα συνδυαστικά αντικείμενα, όπως το Καταλάνειο παρατάγμα υπερεπιπέδων και το σύνδεσμο των μή διασταρούμενων διαμερίσεων $NC(W)$, στον οποίο θα αναφερθούμε αναλυτικά παρακάτω. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό του $\Delta(\Phi)$ χρειάζεται να ανακαλέσουμε ορισμένα γενικά στοιχεία πάνω σε μονοπλεκτικά συμπλέγματα και πολύτοπα.

1.3.1 Μονοπλεκτικά συμπλέγματα

Έστω E ένα πεπερασμένο σύνολο. Ένα *αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα* πάνω στο σύνολο E είναι μία συλλογή Δ υποσυνόλων του E με την ιδιότητα ότι αν $F \subseteq F' \in \Delta$ τότε και $F \in \Delta$. Το σύνολο $V = \{v \in E : \{v\} \in \Delta\}$ είναι το *σύνολο κορυφών* του Δ . Κάθε στοιχείο F του Δ ονομάζεται *πλευρά*. Η *διάσταση* της πλευράς F είναι $|F| - 1$, όπου $|F|$ είναι ο πληθάρημος του F . Οι *έδρες* του Δ είναι οι πλευρές οι οποίες δεν περιέχονται γνήσια σε καμία άλλη πλευρά του Δ . Το Δ ονομάζεται *αγνό σύμπλεγμα* διαστάσεως d αν όλες οι έδρες του έχουν

διάσταση d . Ορίζουμε το επαγόμενο υποσύμπλεγμα του Δ με σύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ ως το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα του οποίου οι πλευρές είναι οι πλευρές του Δ οι οποίες περιέχονται στο V' . Η μονοπλεκτική σύνδεση δύο αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων Δ και Δ' πάνω στα (ξένα μεταξύ τους) σύνολα E και E' αντιστοίχως, συμβολίζεται με $\Delta * \Delta'$ και είναι το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα πάνω στο σύνολο $E \cup E'$ με πλευρές $F \cup F'$, όπου F και F' είναι πλευρές του Δ και Δ' αντιστοίχως. Η διάσταση του $\Delta * \Delta'$ είναι ίση με το άθροισμα των διαστάσεων των Δ και Δ' μειωμένο κατά ένα.

Ονομάζουμε k -μονόπλοκο στον \mathbb{R}^n το κυρτό περίβλημα $k + 1$ αφφινικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του \mathbb{R}^n . Ένα σύνολο μονοπλόκων Δ λέγεται γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα εάν (i) κάθε πλευρά μονοπλόκου του Δ ανήκει επίσης στο Δ και (ii) αν $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ τότε το $\sigma_1 \cap \sigma_2$ είναι είτε κενό είτε κοινή πλευρά των σ_1, σ_2 . Τα μονόπλοκα του Δ λέγονται πλευρές του Δ . Η διάσταση του Δ ορίζεται ως $\dim(\Delta) = \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$. Κάθε γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ με σύνολο κορυφών V ορίζει ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ' με σύνολο κορυφών V ως εξής: για $F \subseteq \Delta$ έχουμε ότι $F \in \Delta'$ αν και μόνον αν το F είναι σύνολο κορυφών κάποιας πλευράς του Δ . Το Δ λέγεται γεωμετρική υλοποίηση του Δ' . Αντιστρόφως, έχει αποδειχθεί ότι κάθε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διαστάσεως $d = \dim(\Delta)$ έχει γεωμετρική υλοποίηση και μάλιστα στον \mathbb{R}^{2d+1} . Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε τοπολογικές ιδιότητες ενός αφηρημένου μονοπλεκτικού συμπλέγματος θα εννοούμε αυτές της γεωμετρικής υλοποίησής του.

1.3.2 Πολύτοπα και μονοπλεκτικά ριπίδια

Πολύτοπο στον \mathbb{R}^n ονομάζουμε την κυρτή θήκη $P = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i : \lambda_i \geq 0 \text{ και } \sum \lambda_i = 1\}$ πεπερασμένου πλήθους σημείων $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$. Η διάσταση του P είναι η διάσταση της αφφινικής θήκης $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum \lambda_i = 1\}$ του $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Οι πλευρές του πολύτοπου είναι οι τομές του με υπερεπιπέδα H τέτοιο ώστε το πολύτοπο να περιέχεται σε έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους που ορίζει το H . Μία πλευρά του P λέγεται γνήσια αν αυτή περιέχεται γνήσιως στο P . Ο σύνδεσμος πλευρών $L(P)$ του P είναι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των πλευρών του P με τη μερική διάταξη του εγκλεισμού. Επίσης, το συνοριακό σύμπλεγμα $C(\partial P)$ ενός πολύτοπου είναι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των γνήσιων πλευρών με τη διάταξη του εγκλεισμού. Προφανώς $C(\partial P) = L(P) \setminus P$. Δύο πολύτοπα είναι συνδυαστικώς ισοδύναμα αν έχουν ισόμορφα συνοριακά συμπλέγματα. Ένα πολύτοπο διαστάσεως d ονομάζεται μονοπλεκτικό αν κάθε πλευρά του είναι μονόπλοκο δηλαδή, ισοδύναμα, κάθε έδρα έχει τον ελάχιστο αριθμό d κορυφών. Επίσης, ένα πολύτοπο διαστάσεως d ονομάζεται

απλό αν κάθε κορυφή του περιέχεται στο ελάχιστο πλήθος d εδρών.

Ονομάζουμε *κώνο* ένα μη κενό σύνολο διανυσμάτων $C \subseteq \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε το C περιέχει κάθε γραμμικό συνδυασμό με μη αρνητικούς συντελεστές στοιχείων του. Ειδικότερα, κάθε κώνος περιέχει το $\mathbf{0}$. Για τυχόν υποσύνολο $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την *κωνική θήκη* $\text{cone}(Y)$ του Y ως την τομή όλων των κώνων που περιέχουν το Y . Ο κώνος ονομάζεται *μονοπλεκτικός* αν είναι κωνική θήκη κάποιου συνόλου γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων. Ονομάζουμε *ριπίδιο* στον \mathbb{R}^n μία οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$$

μη κενών κώνων με τις ακόλουθες ιδιότητες:

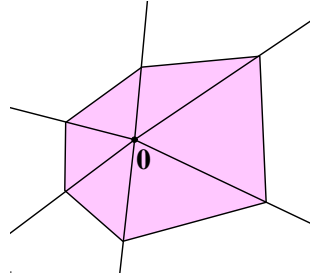
- (i) Κάθε μη κενή πλευρά ενός κώνου στο \mathcal{F} είναι επίσης κώνος στο \mathcal{F} .
- (ii) Η τομή κάθε δύο κώνων στο \mathcal{F} είναι πλευρά και των δύο.

Το ριπίδιο \mathcal{F} ονομάζεται *πλήρες* αν $\cup \mathcal{F} := C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_N = \mathbb{R}^n$ και *μονοπλεκτικό* αν όλοι οι κώνοι του είναι μονοπλεκτικοί.

Ο λόγος για τον οποίο μελετάμε τα ριπίδια είναι ότι συνδέονται πολύ φυσικά με τα πολύτοπα. Έστω P ένα πολύτοπο στον \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε το $\mathbf{0}$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του P . Ορίζουμε το *ριπίδιο πλευρών* του P ως το σύνολο των κώνων οι οποίοι παράγονται από τις κωνικές θήκες των γνησίων πλευρών του P , δηλαδή

$$\mathcal{F}(P) := \{\text{cone}(F) : F \in L(P) \setminus P\}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι αν το πολύτοπο P στον \mathbb{R}^n έχει διάσταση n τότε το αντίστοιχο ριπίδιο πλευρών είναι πλήρες. Επίσης, αν το P είναι μονοπλεκτικό τότε και το ριπίδιο $\mathcal{F}(P)$ είναι μονοπλεκτικό. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν πλήρη ριπίδια \mathcal{F} τα οποία δεν είναι της μορφής $\mathcal{F}(P)$ για κανένα πολύτοπο P . Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 7 του [77].



Σχήμα 1.7: Ένα πολύτοπο στον \mathbb{R}^2 και το αντίστοιχο ριπίδιο πλευρών

1.3.3 Ορισμός του $\Delta(\Phi)$

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του $\Delta(\Phi)$ βασιζόμενοι στο [40, Κεφάλαιο 3]. Θεωρούμε λοιπόν σύστημα ριζών Φ με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων

W . Αν το Φ δεν είναι κρυσταλλογραφικό τότε δεν υπάρχει η αντίστοιχη άλγεβρα σημηών, παρόλα αυτά ο ορισμός του $\Delta(\Phi)$ επεκτείνεται και σε αυτήν την περίπτωση. Αποδεικνύεται ότι επιλογή διαφορετικού συστήματος ριζών της W δίνει ισόμορφο σύμπλεγμα. Επομένως ορισμένες φορές, αν δεν μας ενδιαφέρει η συγκεκριμένη επιλογή του Φ , γράφουμε $\Delta(W)$.

Καταρχήν, θα ορίσουμε το $\Delta(\Phi)$ στην περίπτωση όπου το Φ είναι ανάγωγο διαστάσεως n . Θεωρούμε το σύνολο Φ^+ και Π των θετικών και απλών ριζών αντίστοιχα και διαμερίζουμε το Π σε δύο σύνολα $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$, έτσι ώστε οι ρίζες σε καθένα από αυτά να είναι ανά δύο κάθετες. Είναι φανερό ότι υπάρχει μία τέτοια διαμέριση αν παρατηρήσουμε ότι οι κορυφές όλων των διαγραμμάτων Coxeter του Σχήματος 1.1.4 μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα τέτοια ώστε οι κορυφές σε κάθε ένα από αυτά να μην συνδέονται με κάποια ακμή. Έστω

$$\gamma = \prod_{\alpha \in \Pi_+} r_\alpha \prod_{\alpha \in \Pi_-} r_\alpha$$

το διμερές στοιχείο Coxeter σε σχέση με τη διαμέριση Π_+ , Π_- , όπου r_α είναι η ανάκλαση που αντιστοιχεί στη ρίζα α . Θεωρούμε το σύνολο $\Phi_{\geq -1} = \Phi^+ \cup (-\Pi)$ των σχεδόν θετικών ριζών και ορίζουμε την απεικόνιση $\mathcal{R} : \Phi_{\geq -1} \rightarrow \Phi_{\geq -1}$ με

$$\mathcal{R}(\alpha) = \begin{cases} \gamma^{-1}(\alpha) & \text{αν } \alpha \notin \Pi_+ \cup (-\Pi_-) \\ -\alpha & \text{αν } \alpha \in \Pi_+ \cup (-\Pi_-). \end{cases} \quad (1.6)$$

Το παρακάτω θεώρημα προκύπτει από το [40, Παράγραφος 3.1].

Θεώρημα 1.7. Υπάρχει μία μοναδική συμμετρική διμερής σχέση στο $\Phi_{\geq -1}$ η οποία ονομάζεται συμβατότητα και η οποία ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- (i) τα α και β είναι συμβατά αν και μόνον αν τα $\mathcal{R}(\alpha)$ και $\mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατά,
- (ii) μία αρνητική απλή ρίζα $-\alpha$ είναι συμβατή με μία θετική ρίζα β αν και μόνο αν το ανάπτυγμα της β σε άθροισμα απλών ριζών δεν συμπεριλαμβάνει την α .

Αν το σύστημα ριζών Φ δεν είναι ανάγωγο τότε θεωρούμε τις ανάγωγες συνιστώσες του, έστω Φ_1, \dots, Φ_ℓ . Θέτουμε $\Phi_{\geq -1} = \bigcup_{i=1}^\ell (\Phi_i)_{\geq -1}$ και ορίζουμε δύο ρίζες στο $\Phi_{\geq -1}$ να είναι συμβατές αν είτε ανήκουν σε διαφορετική συνιστώσα είτε ανήκουν στην ίδια συνιστώσα και είναι συμβατές μέσα σε αυτήν.

Ορισμός 1.1. [40, Κεφάλαιο 1] Το σύμπλεγμα σημηών $\Delta(\Phi)$ είναι το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με σύνολο κορυφών το σύνολο $\Phi_{\geq -1}$ και πλευρές τα υποσύνολα του $\Phi_{\geq -1}$ αποτελούμενα από ρίζες ανά δύο συμβατές.

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση όπου το Φ δεν είναι ανάγωγο και έχει ανάγωγες συνιστώσες Φ_1, \dots, Φ_ℓ , το $\Delta(\Phi)$ είναι η μονοπλεκτική σύνδεση

$\Delta(\Phi_1) * \dots * \Delta(\Phi_\ell)$. Όπως θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα, το $\Delta(\Phi)$ έχει ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ιδιότητες. Βασικές ιδιότητες του $\Delta(\Phi)$ φαίνονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.8. [40, Θεώρημα 1.8, 1.10]

- (i) Το σύμπλεγμα $\Delta(\Phi)$ είναι αγνό διαστάσεως $n - 1$. Ισοδύναμα όλα τα σμήνη έχουν n στοιχεία.
- (ii) Κάθε σμήνος αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.
- (iii) Οι μονοπλεκτικοί κώνοι οι οποίοι παράγονται από τα σμήνη αποτελούν ένα πλήρες μονοπλεκτικό ριπίδιο. \square

Ονομάζουμε θετικό σύμπλεγμα σμηνών και συμβολίζουμε με $\Delta_+(\Phi)$ το επαγόμενο υποσύμπλεγμα του $\Delta(\Phi)$ πάνω στο σύνολο των θετικών ριζών Φ^+ . Το $\Delta_+(\Phi)$ έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες και γενικεύσεις, κάποιες από τις οποίες μελετάμε σε επόμενα κεφάλαια. Το παρακάτω θεώρημα είναι συνδυασμός αποτελεσμάτων από τα [40, 31] και [27].

Θεώρημα 1.9. Έστω ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W .

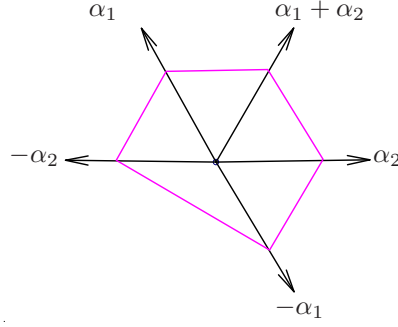
- (i) Το σύμπλεγμα σμηνών $\Delta(\Phi)$ και το θετικό του μέρος $\Delta_+(\Phi)$ είναι ισόμορφα με σφαίρα και μπάλα, αντίστοιχα, διαστάσεως $n - 1$.
- (ii) Όταν το Φ είναι κρυσταλλογραφικό, το μονοπλεκτικό ριπίδιο που σχηματίζεται από τα σμήνη του $\Delta(\Phi)$ είναι το ριπίδιο πλευρών ενός $(n - 1)$ -διάστατου πολυτόπου $P(\Phi)$ το οποίο ονομάζεται W -πολύτοπο προσεταιρισμού. \square

Στο άρθρο [31] αποδεικνύεται το δεύτερο μέρος του παραπάνω θεωρήματος και κατασκευάζεται η γεωμετρική υλοποίηση του $\Delta(\Phi)$ για όλες τις κρυσταλλογραφικές περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, οι κατασκευές αυτές δεν γενικεύονται όταν το Φ δεν είναι κρυσταλλογραφικό και το πρόβλημα αυτό παραμένει ακόμα ανοικτό.

Παράδειγμα 1.2. Θεωρούμε το σύστημα ριζών A_2 με $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ και $\Pi_+ = \{\alpha_1\}$ και $\Pi_- = \{\alpha_2\}$. Τα σμήνη στην περίπτωση αυτή αποτελούνται από τα σύνολα $\{-\alpha_1, \alpha_2\}$, $\{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$, $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1\}$, $\{\alpha_1, -\alpha_2\}$, $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$. Στο Σχήμα 1.8 φαίνεται το αντίστοιχο σύμπλεγμα σμηνών και το A_2 -πολύτοπο προσεταιρισμού.

Το παρακάτω θεώρημα αποδεικνύεται κατά περίπτωση από τους Fomin και Zelevinsky.

Θεώρημα 1.10. [40, Θεώρημα 1.9, Πρόταση 3.9] Για κάθε ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξεως n έχουμε ότι



Σχήμα 1.8: Το A_2 -πολύτοπο προσεταιρισμού και το αντίστοιχο ριπίδιο πλευρών που σχηματίζεται από τα σμήνη του $\Delta(A_2)$

(i) το πλήθος των εδρών του συμπλέγματος $\Delta(\Phi)$ είναι ίσο με

$$N(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + h + 1}{e_i + 1},$$

(ii) το πλήθος των εδρών του συμπλέγματος $\Delta_+(\Phi)$ είναι ίσο με

$$N_+(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + h - 1}{e_i + 1},$$

όπου e_i είναι οι εκθέτες και h ο αριθμός Coxeter του Φ . □

Οι αριθμοί του παραπάνω θεωρήματος είναι οι αριθμοί Catalan (Πόρισμα 1.1) για $m = 1$. Το παραπάνω θεώρημα είναι σημείο εκκίνησης για την παραπέρα συσχέτιση του $\Delta(\Phi)$ με άλλα συνδυαστικά αντικείμενα που απαριθμούνται από τον αριθμό Catalan.

1.3.4 Το $\Delta(\Phi)$ και πολυγωνικές υποδιαιρέσεις

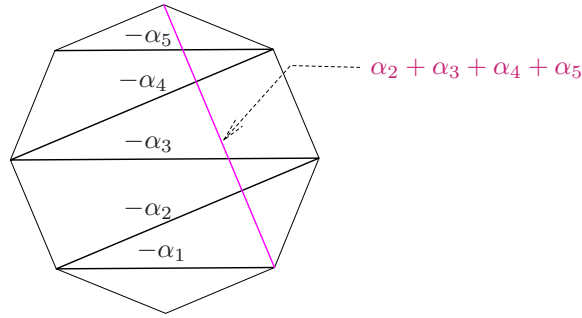
Όταν το Φ είναι σύστημα ριζών κάποιας κλασικής ομάδας ανακλάσεων μπορούμε να περιγράψουμε το $\Delta(\Phi)$ με χρήση πολυγωνικών υποδιαιρέσεων. Η περιγραφή αυτή παρουσιάζεται αναλυτικά στο [40, Κεφάλαιο 3.5]. Εδώ θα αναφέρουμε τις περιπτώσεις όπου $\Phi = A_n$ και B_n , τις οποίες θα γενικεύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο της διατριβής.

• $\Delta(A_n)$: Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι απλές ρίζες του A_n με την σειρά με την οποία αυτές εμφανίζονται στο διάγραμμα Coxeter . Τότε οι θετικές ρίζες του A_n είναι της μορφής

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j \quad \text{με} \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Θεωρούμε ένα κανονικό πολύγωνο P με $n + 3$ κορυφές και ταυτίζουμε τις διαγωνίους του με το σύνολο $\Phi_{\geq -1}$ των σχεδών θετικών ριζών ως εξής. Ταυτίζουμε

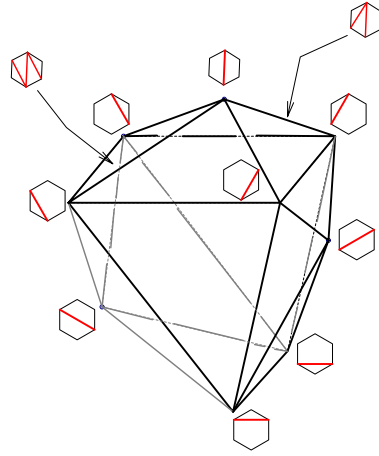
τις αρνητικές απλές ρίζες του A_n με διαδοχικές διαγωνίους του οι οποίες σχηματίζουν μια οδοντωτή τροχιά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.9. Στη συνέχεια, αντιστοιχούμε σε κάθε ρίζα α_{ij} του A_n την μοναδική διαγώνιο η οποία τέμνει τις $-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_j$ και μόνον αυτές. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλα τα στοιχεία του $\Phi_{\geq -1}$. Αποδεικνύεται ότι, κάτω από την παραπάνω ταύτιση ριζών και διαγωνίων, δύο ρίζες του συμπλέγματος σμηνών $\Delta(A_n)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν οι αντίστοιχες διαγώνιοι δεν τέμνονται στο εσωτερικό του P [40, Πρόταση 3.14]. Επομένως, οι πλευρές του $\Delta(A_n)$ αντιστοιχούν στις υποδιαίρεσεις του P από ανά δύο μη τεμνόμενες διαγωνίους και οι έδρες αντιστοιχούν στις τριγωνοποιήσεις του P .



Σχήμα 1.9: Οι αρνητικές ρίζες του συμπλέγματος $\Delta(A_5)$

Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta(A_n)$ που περιγράψαμε παραπάνω, με κορυφές τις διαγωνίους ενός $(n+3)$ -γώνου και πλευρές τα σύνολα μη τεμνόμενων διαγωνίων του P , μελετήθηκε αρχικά από τους Milnor, Haiman και Lee [48]. Οι δύο τελευταίοι ανεξαρτήτως απέδειξαν ότι το παραπάνω σύμπλεγμα είναι ισόμορφο με το συνοριακό σύμπλεγμα ενός $(n-1)$ -διάστατου πολύτου $P(A_n)$, γνωστού ως πολύτοπο προσεταιρισμού ή πολύτοπο του Stasheff. Η δεύτερη ονομασία οφείλεται στον Stasheff ο οποίος εισήγαγε ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα ισόμορφο με το $\Delta(A_n)$ ως βασικό εργαλείο για την μελέτη των homotopy associative H-spaces [72]. Πιό πρόσφατες γεωμετρικές υλοποιήσεις του $P(A_n)$ υπάρχουν στα άρθρα [49, 56]. Επίσης, το πολύτοπο $P(A_n)$ συναντάται στο [18] στο πλαίσιο της θεωρίας των ινωδών πολύτόπων [17].

Το πλήθος των $(k-1)$ -διάστατων πλευρών του $P(A_n)$ είναι ίσο με $\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \binom{n+k+2}{k}$. Στο Σχήμα 1.10 φαίνεται πώς το σύμπλεγμα των υποδιαίρεσεων ενός κανονικού εξαγώνου μπορεί να υλοποιηθεί ως το συνοριακό σύμπλεγμα του 3-διάστατου πολύτου $P(A_3)$. Οι κορυφές του $P(A_3)$ αντιστοιχούν σε υποδιαίρεσεις του κανονικού εξαγώνου από μία διαγώνιο και οι πλευρές διαστάσεως $k-1$ αντιστοιχούν σε υποδιαίρεσεις από k διαγωνίους.



Σχήμα 1.10: Το 3-διάστατο πολύτοπο προσεταιρισμού

• $\Delta(B_n)$: Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι απλές ρίζες του B_n με την σειρά με την οποία αυτές εμφανίζονται στο διάγραμμα Coxeter. Κάθε θετική ρίζα του B_n ανήκει σε μία από τις παρακάτω κατηγορίες:

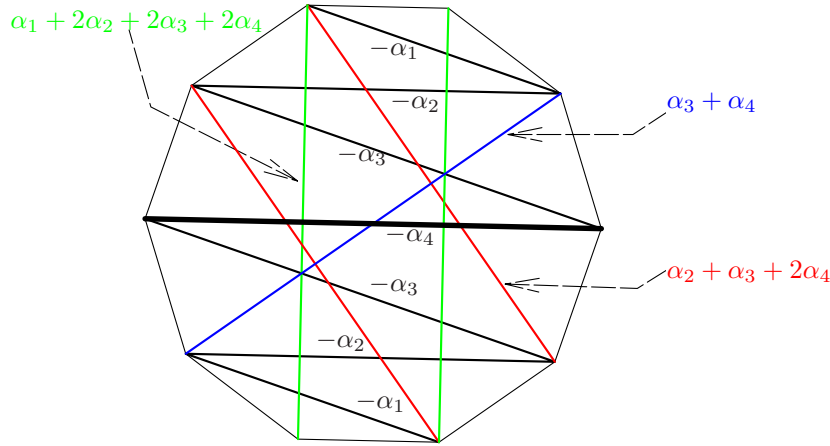
- (i) $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n$ με $1 \leq i \leq n$,
- (ii) $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$ με $1 \leq i \leq j < n$,
- (iii) $\alpha_i + \dots + \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_n)$ με $1 \leq i \leq j < n$.

Θεωρούμε ένα κανονικό πολύγωνο P με $2n + 2$ κορυφές και ονομάζουμε B -διαγώνιο κάθε διάμετρο ή κάθε ζεύγος διαγωνίων συμμετρικών ως προς το κέντρο του P . Όπως και στην περίπτωση A_n , ταυτίζουμε τις αρνητικές απλές ρίζες του B_n με διαδοχικές B -διαγωνίους όπως στο Σχήμα 1.11. Στην συνέχεια, αντιστοιχούμε τις υπόλοιπες B -διαγωνίους με θετικές ρίζες του B_n ως εξής:

(α) Αν μία B -διαγώνιος δ είναι διάμετρος (διαφορετική από την $-\alpha_n$) τότε τέμνει τις αρνητικές ρίζες $-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_n$ για κάποιο $1 \leq i \leq n$. Ταυτίζουμε την δ με την ρίζα $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n$ και με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλες τις ρίζες τύπου (i).

(β) Αν το ζεύγος $\{\delta, \delta'\}$ είναι μία B -διαγώνιος τότε διαλέγουμε ένα από τα δύο συμμετρικά της μέρη, έστω το δ . Αν το δ τέμνει τις αρνητικές ρίζες $-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_j$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) τότε αντιστοιχούμε στο $\{\delta, \delta'\}$ την ρίζα $d_i \alpha_i + \dots + d_j \alpha_j$, όπου d_i είναι το πλήθος των σημείων τομής του δ με το $-\alpha_i$. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι $d_n = 2$. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλες τις ρίζες τύπου (ii) και (iii).

Με την παραπάνω ταύτιση παίρνουμε όλα τα στοιχεία του $\Phi_{\geq -1}$. Αποδεικνύεται ότι δύο ρίζες του συμπλέγματος σημηνών $\Delta(B_n)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν οι αντίστοιχες B -διαγωνίους δεν τέμνονται στο εσωτερικό του P [40, Πρόταση 3.15].



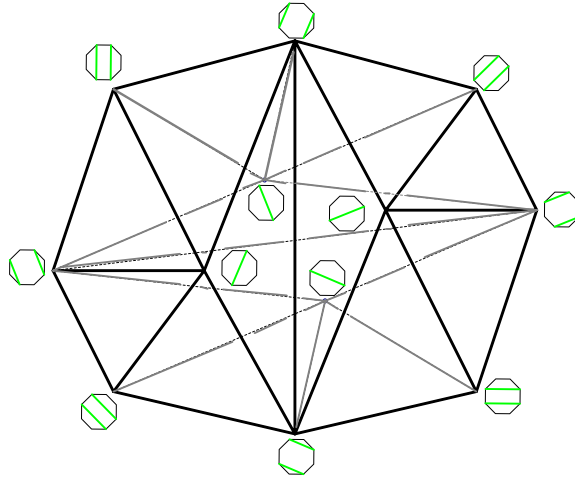
Σχήμα 1.11: Η αναπαράσταση του $\Delta(B_4)$ με πολυγωνικές υποδιαίρεσεις

Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με κορυφές τις B -διαγωνίους και πλευρές τα σύνολα αποτελούμενα από ανα δύο μή τεμνόμενες B -διαγωνίους ενός κανονικού $(2n+2)$ -γώνου μελετήθηκε από την Simion [65]. Αυτή απέδειξε ότι αυτό το σύμπλεγμα μπορεί να υλοποιηθεί ως το συνοριακό σύμπλεγμα ενός n -διάστατου πολυτόπου $P(B_n)$ το οποίο ονόμασε B_n -πολύτοπο προσεταιρισμού. Το πλήθος των $(k-1)$ -διάστατων πλευρών του $P(B_n)$ είναι ίσο με $\binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$. Όπως αποδεικνύεται στο άρθρο [34], το B_n -πολύτοπο προσεταιρισμού είναι ισόμορφο με ένα πολύτοπο το οποίο είχε μελετηθεί ανεξαρτήτως νωρίτερα και είναι γνωστό ως κυκλόεδρο ή αλλιώς πολύτοπο *Bott-Taubes* [23]. Στο Σχήμα 1.12 βλέπουμε το 3-διάστατο κυκλόεδρο και την σχέση του με B -υποδιαίρεσεις του κανονικού οκταγώνου.

1.4 Μή διασταρούμενες διαμερίσεις

1.4.1 Ο σύνδεσμος $NC(n)$

Το 1972 ο Kreweras [47] εισήγαγε και μελέτησε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των μή διασταρούμενων διαμερίσεων $NC(n)$. Πιο συγκεκριμένα, τα στοιχεία του $NC(n)$ είναι διαμερίσεις π του $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ τέτοιες ώστε αν $1 \leq a < b < c < d \leq n$ και τα a, c ανήκουν σε ένα μέρος B της π ενώ τα b, d ανήκουν σε ένα μέρος B' της π , τότε $B = B'$. Το πλήθος των στοιχείων του $NC(n)$ είναι ίσο με τον αριθμό Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ και το πλήθος των στοιχείων τάξεως k είναι ίσο με τον αριθμό Narayana $Nar_n(k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$. Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $NC(n)$ έχει μελετηθεί εκτενώς και εμφανίζεται φυσιολογικά σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών όπως τη συνδυαστική, διακριτή γεωμετρί-



Σχήμα 1.12: Το 3-διάστατο κυκλόεδρο $P(B_3)$.

α, θεωρία αναπαραστάσεων, θεωρία ομάδων, θεωρία πιθανοτήτων, συνδυαστική τοπολογία και μαθηματική βιολογία. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο άρθρο επισκόπησης [64] καθώς και στο [51].

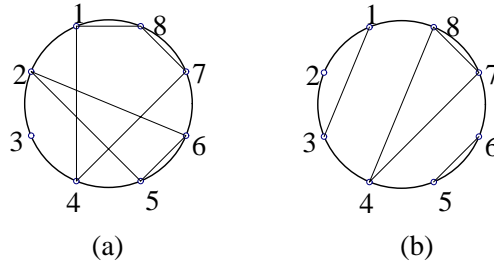
Πριν περάσουμε σε γενικότερους ορισμούς θα μείνουμε λίγο στο $\text{NC}(n)$. Ονομάζουμε *διαμέριση* του συνόλου $[n]$ τη συλλογή μη κενών συνόλων B_1, B_2, \dots, B_k , τα οποία λέμε *μέρη*, με την ιδιότητα ότι είναι ανά δύο ξένα και η ένωση τους είναι το σύνολο $[n]$. Θεωρούμε το σύνολο Π_n των διαμερίσεων του $[n]$ με τη μερική διάταξη του της εκλέπτυνσης του εγκλεισμού. Δηλαδή, αν π και π' είναι δύο διαμερίσεις του $[n]$ τότε $\pi \leq \pi'$ αν και μόνον αν για κάθε μέρος B του π υπάρχει μέρος B' του π' με $B \subseteq B'$. Κάθε διαμέριση $\pi \in \Pi_n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στο επίπεδο διατάσσοντας τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$ σε ένα κύκλο με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού και σχηματίζοντας την κυρτή θήκη των στοιχείων που ανήκουν στο ίδιο μέρος της π . Το σύνολο $\text{NC}(n)$ είναι το υποσύνολο των διαμερίσεων του Π_n των οποίων οι κυρτές θήκες που σχηματίζονται με αυτόν τον τρόπο δεν τέμνονται. Στο Σχήμα 1.13 (a) βλέπουμε τη διαμέριση $\{\{3\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 4, 7, 8\}\}$ του $[8]$ και στο (b) την $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 7, 8\}, \{5, 6\}\}$ η οποία είναι μή διασταυρούμενη. Στο Σχήμα 1.14 βλέπουμε τον σύνδεσμο των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων $\text{NC}(4)$.

Έστω (P, \leq) ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Αν $x, y \in P$ λέμε ότι το y καλύπτει το x αν $x < y$ και $x < z \leq y$ ισχύει μόνον όταν $z = y$. Ονομάζουμε *αλυσίδα* κάθε υποσύνολο C του P του οποίου τα στοιχεία είναι ανά δύο συγκρίσιμα. Το μήκος μίας αλυσίδας ορίζεται ως $|C| - 1$. Αν όλες οι μεγιστικές αλυσίδες του P έχουν το ίδιο μήκος n τότε λέμε ότι το P είναι *διαβαθμισμένο*

τάξεως $n - 1$. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση τάξεως $rk : P \mapsto \{0, 1, \dots, n\}$ με την ιδιότητα ότι $rk(x) = 0$ αν το x είναι ελαχιστικό στοιχείο του P και $rk(y) = rk(x) + 1$ αν το y καλύπτει το x . Το P ονομάζεται *σύνδεσμος* αν κάθε δύο στοιχεία του έχουν ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα. Δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα P και Q είναι *ισόμορφα* αν υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία $\phi : P \rightarrow Q$ η οποία διατηρεί την διάταξη και της οποίας η αντίστροφη απεικόνιση επίσης διατηρεί την διάταξη, δηλαδή

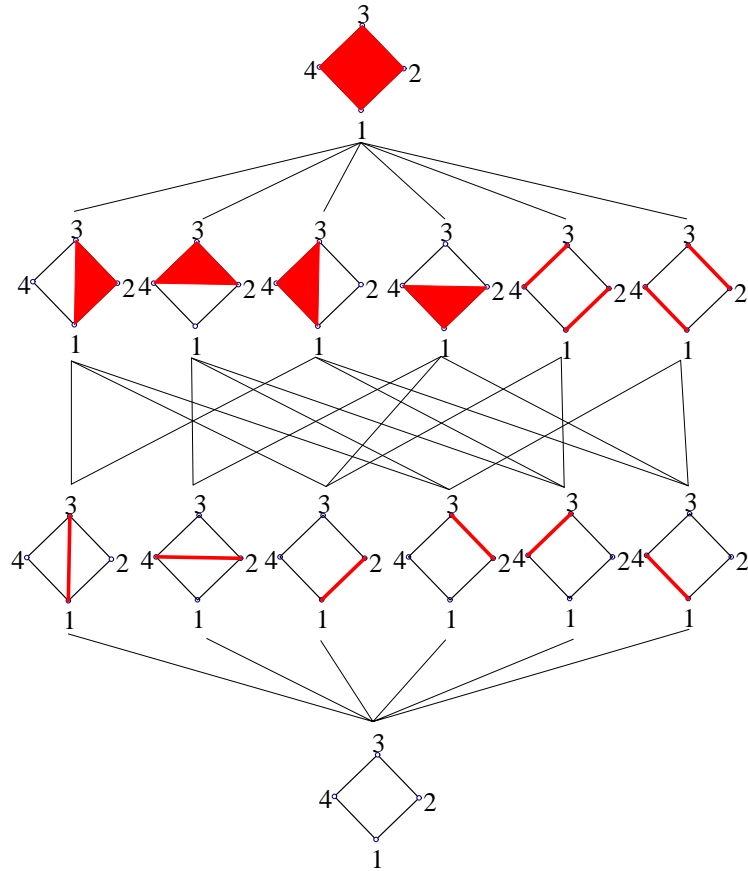
$$x \preceq y \text{ στο } P \Leftrightarrow \phi(x) \preceq \phi(y) \text{ στο } Q.$$

Η *δυϊκή μερική διάταξη* P^* του P είναι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P^*, \preceq) με $x \preceq y$ αν και μόνον αν $y \succeq x$ στο P . Αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των P και P^* τότε το P λέγεται *αυτοδυϊκό*. Αποδεικνύεται ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $NC(n)$ είναι διαβαθμισμένος και αυτοδυϊκός σύνδεσμος.



Σχήμα 1.13: Δύο διαμερίσεις του $[8]$ σε κυκλική αναπαράσταση.

Παρατηρώντας ότι ο πληθώραριθμός και οι αριθμοί τάξεως του $NC(n)$ είναι ο αριθμός Catalan C_n και οι αριθμοί Narayana $Nar_n(k)$ αντίστοιχα και γνωρίζοντας τη γενίκευση των παραπάνω αριθμών για κάθε ομάδα ανακλάσεων W , είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν υπάρχει γενίκευση του συνδέσμου των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων για κάθε ομάδα ανακλάσεων W . Η γενίκευση αυτή του $NC(n)$ για κάθε ομάδα ανακλάσεων δόθηκε ανεξάρτητα και σχεδόν παράλληλα από τους Bessis [14] και Brady, Watt [24, 26]. Αυτοί αντικατέστησαν τη συνηθισμένη θεώρηση ενός συστήματος Coxeter (W, S) όπου S είναι το σύνολο των απλών ανακλάσεων, με το (W, T) όπου T είναι το σύνολο όλων των ανακλάσεων της W . Το σύνολο T είναι ένα μεγαλύτερο σύνολο γεννητόρων και δίνει στην W μία νέα δομή από την οποία απορρέουν νέα ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Για $W = B_n$ και D_n δόθηκαν συνδυαστικές περιγραφές του $NC(W)$ από τον Reiner [60] και τους Αθανασιάδη και Reiner [11] αντίστοιχα.

Σχήμα 1.14: Ο σύνδεσμος $NC(4)$

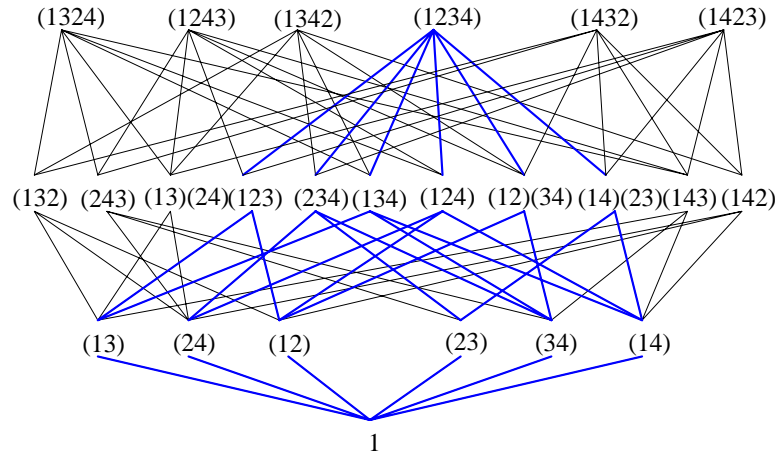
1.4.2 Γενικός ορισμός του συνδέσμου $NC(W)$

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την γενίκευση του $NC(n)$ για κάθε ομάδα ανακλάσεων W όπως δόθηκε από τους Bessis [14] και Brady και Watt [26].

Έστω W μία πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων με σύνολο ανακλάσεων T . Ορίζουμε το απόλυτο μήκος $l_T(w)$ ενός $w \in W$ ως τον μικρότερο αριθμό k τέτοιον ώστε το w να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο k ανακλάσεων του T . Αν $w = t_1 \cdots t_k$ όπου $t_i \in T$, $1 \leq i \leq k$ και $k = l_T(w)$ τότε η παραγοντοποίηση $t_1 \cdots t_k$ του w ονομάζεται ελαχιστική. Θεωρούμε την μερική διάταξη \preceq στην W ως εξής:

$$u \preceq v \text{ αν και μόνον αν } l_T(u) + l_T(u^{-1}v) = l_T(v), \quad (1.7)$$

ή ισοδύναμα αν υπάρχει μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του u η οποία είναι ένα πρόθεμα μίας ελαχιστικής παραγοντοποίησης του v . Με αυτήν τη διάταξη η ομάδα W γίνεται ένα διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, με ελάχιστο στοιχείο το ταυτοτικό στοιχείο $\mathbf{1}$ της ομάδας W και με τάξη $rk(w) = l_T(w)$. Τα



Σχήμα 1.15: Το πλέγμα $NC(A_3)$ ως διάστημα του $Abs(A_3)$

μεγιστικά στοιχεία της παραπάνω διάταξης έχουν τάξη n και συμπεριλαμβάνουν όλα τα στοιχεία Coxeter της W . Παρατηρήστε ότι αν τα $u, v \in W$ είναι συζυγή τότε $l_T(u) = l_T(v)$. Πράγματι, αν $u = t_1 \cdots t_k$ με $t_i \in T$ είναι μία ελαχιστική παραγοντοποίηση και $v = wuw^{-1}$ τότε $wt_iw^{-1} \in T$ για κάθε i και κατά συνέπεια $v = (wt_1w^{-1})(wt_2w^{-1}) \cdots (wt_kw^{-1})$ είναι και αυτή ελαχιστική παραγοντοποίηση. Σαν αποτέλεσμα έχουμε ότι $u \preceq v$ αν και μόνον αν $wuw^{-1} \preceq wvw^{-1}$. Επομένως, αν θεωρήσουμε $u \in W$ και δράσουμε στην W με uWu^{-1} τότε η μερική διάταξη που περιγράψαμε παραπάνω παραμένει αναλλοίωτη. Η μερική διάταξη των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων $NC(W)$ ορίζεται ως το διάστημα $[\hat{0}, \gamma]$ όπου το γ είναι οποιοδήποτε στοιχείο Coxeter της W . Επειδή όλα τα στοιχεία Coxeter είναι συζυγή, ο ισομορφικός τύπος του $[\hat{0}, \gamma]$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του γ . Βασικό και μή τετριμμένο αποτέλεσμα είναι ότι η μερική διάταξη $NC(W)$ αποτελεί σύνδεσμο.

Ορισμένες φορές είναι απαραίτητο να φαίνεται η επιλογή του στοιχείου Coxeter οπότε γράφουμε $NC_W(\gamma)$ ενώ όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης απλοποιούμε γράφοντας μόνο $NC(W)$. Στο Σχήμα 1.15 βλέπουμε τα στοιχεία της ομάδας A_3 (ή αλλιώς της \mathcal{S}_3) με την μερική διάταξη \preceq . Ένα στοιχείο Coxeter είναι η κυκλική μετάθεση (1234) και το διάστημα $[1, (1234)]$ είναι ισόμορφο με τον σύνδεσμο των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων $NC(4)$, όπως άλλωστε μπορεί κανείς να διαπιστώσει συγκρίνοντας με το Σχήμα 1.14.

Συνοψίζουμε τις βασικές ιδιότητες του $NC(W)$ στο παρακάτω θεώρημα.

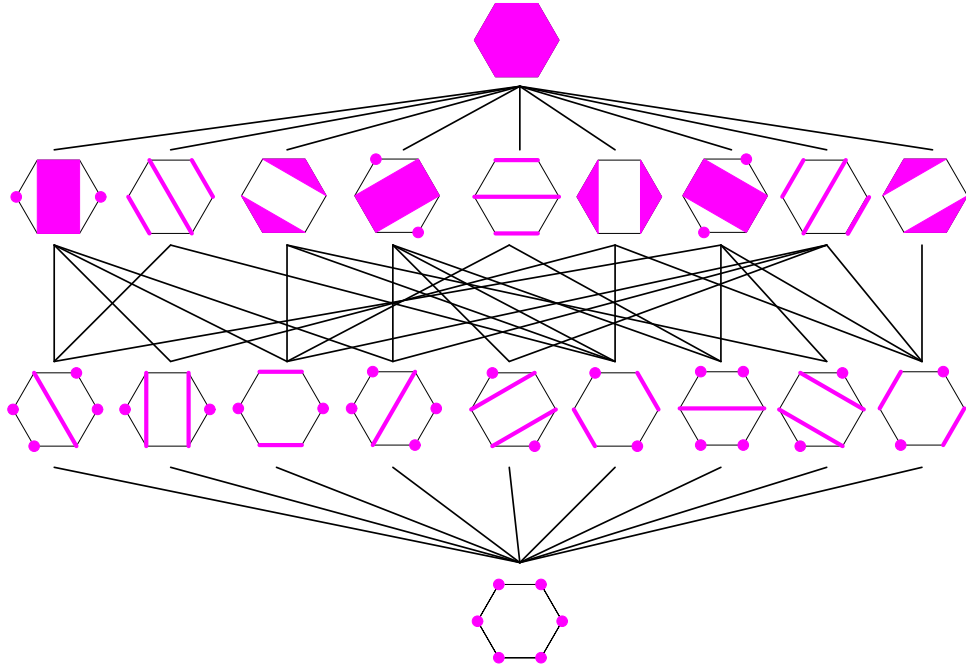
Θεώρημα 1.11. *Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $NC(W)$ είναι διαβαθμισμένος, αυτοδυϊκός σύνδεσμος με τάξη $rk(w) = l_T(w)$. Το πλήθος των στοιχείων*

του $\text{NC}(W)$ είναι ίσο με τον αντίστοιχο αριθμό Catalan $N(W) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i+h+1}{e_i+1}$ και το πλήθος στοιχείων τάξεως k είναι ίσο με $\text{Nar}_k(W)$. \square

Ο γενικός ορισμός του $\text{NC}(W)$ έχει μία γεωμετρική ερμηνεία η οποία οδήγησε στον παραπάνω αφηρημένο ορισμό ως εξής. Η μερική διάταξη (1.7) της ομάδας W είναι περιορισμός στην W μίας μερικής διάταξης της ομάδας $O(n)$ των ορθογωνίων απεικονίσεων του \mathbb{R}^n , η οποία εισήχθη στο άρθρο [25]. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $A \in O(n)$ ορίζουμε τους γραμμικούς υπόχωρους $\mathcal{F}(A)$ και $\mathcal{M}(A)$ του \mathbb{R}^n , όπου $\mathcal{F}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : A(x) = x\}$ και $\mathcal{M}(A) = \mathcal{F}(A)^\perp$ και συμβολίζουμε με $l(A)$ την διάσταση του χώρου $\mathcal{M}(A)$. Για $A, B \in O(n)$ ορίζουμε

$$A \preceq B \Leftrightarrow l(B) = l(A) + l(A^{-1}B).$$

Αν $w \in W$ τότε αποδεικνύεται ότι η διάσταση $l(w)$ του $\mathcal{M}(w)$ είναι ίση με το μήκος $l_T(w)$ που ορίσαμε παραπάνω και συνεπώς η μερική διάταξη \preceq στην W συμπίπτει με αυτήν της $O(n)$.



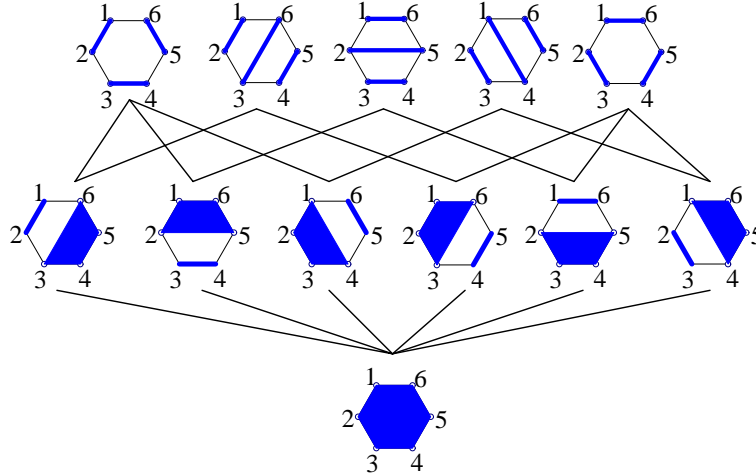
Σχήμα 1.16: Ο σύνδεσμος των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων $\text{NC}(B_3)$.

Ο σύνδεσμος των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων που αντιστοιχεί στην ομάδα ανακλάσεων B_n περιγράφεται συνδυαστικά ως εξής. Θεωρούμε τον σύνδεσμο των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων του συνόλου $[2n]$ και την αναπαράστασή του όπως στο Σχήμα 1.14. Έπειτα θεωρούμε τον υποσύνδεσμο αυτού που αποτελεί-

ται από τις διαμερίσεις των οποίων η αναπαράσταση στο επίπεδο είναι κεντρικώς συμμετρική. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1.16 βλέπουμε τον σύνδεσμο $\text{NC}(B_3)$.

1.4.3 m -Επιτρεπτές μή διασταυρούμενες διαμερίσεις

Στη διδακτορική του διατριβή [1], ο Armstrong εισήγαγε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\text{NC}_m(W)$ των m -επιτρεπτών μή διασταυρούμενων διαμερίσεων, γενικεύοντας την κατασκευή του συνδέσμου $\text{NC}(W)$. Σαν πρώτο βήμα θεώρησε την γενίκευση του συνδέσμου $\text{NC}(n)$ για $m \geq 1$, η οποία είναι πολύ απλή όπως φαίνεται και από τον παρακάτω ορισμό.



Σχήμα 1.17: Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\text{NC}_2(3)$.

Ορισμός 1.2. Συμβολίζουμε με $\text{NC}^m(n)$ το επαγόμενο υποσύμπλεγμα του $\text{NC}(mn)$ το οποίο αποτελείται από το σύνολο των διαμερίσεων των οποίων κάθε μέρος έχει πλήθος στοιχείων διαιρετό από m . Συμβολίζουμε με $\text{NC}_m(n)$ τη δυϊκή μερική διάταξη του $\text{NC}^m(n)$ την οποία και ονομάζουμε μερική διάταξη των m -επιτρεπτών μή διασταυρούμενων διαμερίσεων.

Στο άρθρο [35] ο Edelman εισήγαγε τον παραπάνω ορισμό, έδειξε ότι το πλήθος των στοιχείων του $\text{NC}_m(n)$ είναι ίσο με τον γενικευμένο αριθμό Catalan $N^{(m)}(A_{n-1}) = \frac{1}{mn+1} \binom{(m+1)n}{n}$ και επίσης έδωσε τύπους οι οποίοι απαριθμούν τις αλυσίδες του $\text{NC}_m(n)$ ως προς την τάξη. Το $\text{NC}_m(n)$ μελετήθηκε αργότερα από το Stanley [70] στο πλαίσιο των parking και quasisymmetric συναρτήσεων. Γενικώς όμως, πριν από την πρόσφατη διατριβή του Armstrong δεν είχαν γίνει προσπάθειες γενίκευσης του $\text{NC}(W)$ για $m \geq 1$. Όπως αποδεικνύεται στο [1], το σύνολο $\text{NC}_m(n)$ είναι η ειδική περίπτωση για $W = A_n$ μίας δομής που γενικεύεται για κάθε ομάδα ανακλάσεων W .

Όπως και στην περίπτωση $m = 1$, ο γενικός ορισμός του $\text{NC}_m(W)$ απαιτεί την επιλογή ενός συγκεκριμένου στοιχείου Coxeter γ . Στην συνέχεια μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι ο τύπος ισομορφισμού του $\text{NC}_m(W)$ είναι ανεξάρτητος αυτής της επιλογής. Για κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P, \leq) συμβολίζουμε με P^k το σύνολο των διατεταγμένων k -άδων στοιχείων του P με την μερική διάταξη $(x_1, \dots, x_k) \leq (x'_1, \dots, x'_k)$ αν και μόνον αν $x_i \leq x'_i$ για κάθε $1 \leq i \leq k$.

Ορισμός 1.3. [1, Ορισμός 3.2.2] Έστω μία ομάδα ανακλάσεων W και γ ένα στοιχείο Coxeter αυτής. Το σύνολο $\text{NC}_m(\gamma)$ των m -επιτρεπτών μή διασταρούμενων διαμερίσεων αποτελείται από διατεταγμένες m -άδες $(w_1, w_2, \dots, w_m) \in \text{NC}(\gamma)^m$ για τις οποίες ισχύει

$$(i) \ w = w_1 \cdots w_m \preceq \gamma \text{ και}$$

$$(ii) \ l_T(w) = \sum_{i=1}^m l_T(w_i).$$

Το σύνολο $\text{NC}_m(\gamma)$ κληρονομεί τη μερική διάταξη του $\text{NC}(\gamma)$, δηλαδή $(u_1, \dots, u_m) \preceq (w_1, \dots, w_m)$ στο $\text{NC}_m(\gamma)$ αν και μόνον αν

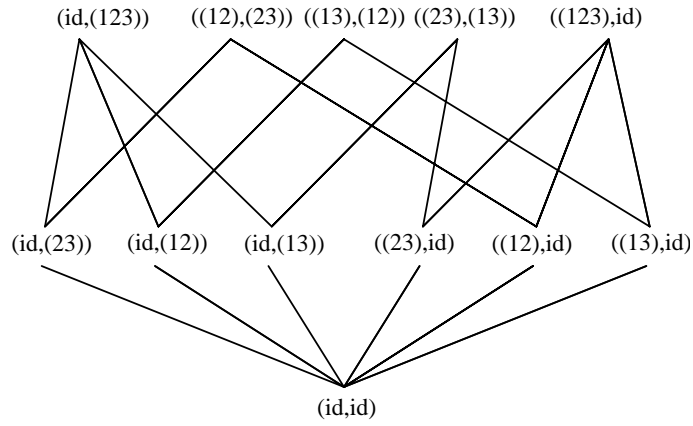
$$u_i \preceq w_i \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Ένα υποσύνολο I ενός διατεταγμένου συνόλου (P, \leq) λέγεται ιδεώδες αν $x, y \in P$, $x \in I$ και $y \leq x$ τότε $y \in I$. Το σύνολο $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι ιδεώδες του $\text{NC}(\gamma)^m$ με μεγιστικά στοιχεία τα $(w_1, w_2, \dots, w_m) \in \text{NC}(\gamma)^m$ με $w_1 w_2 \cdots w_m = \gamma$ και $\sum_{i=1}^m l_T(w_i) = n$ [1, Λήμμα 3.4.3]. Επομένως, το σύνολο $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι διαβαθμισμένο με

$$rk((w_1, \dots, w_m)) = \sum_{i=1}^m l_T(w_i).$$

Από το γεγονός ότι όλα τα στοιχεία Coxeter είναι συζυγή συμπεραίνουμε ότι ο ισομορφικός τύπος του $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του γ . Επομένως, όταν δεν μας ενδιαφέρει η επιλογή του γ γράφουμε $\text{NC}_m(W)$. Το $\text{NC}_m(W)$ έχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο το $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$ και είναι ημισύνδεσμος, δηλαδή κάθε δύο στοιχεία του έχουν μοναδικό μέγιστο κάτω φράγμα [1, Λήμμα 3.4.4]. Στο Σχήμα 1.18 ταυτίζουμε την ομάδα A_2 με την ομάδα μεταθέσεων \mathcal{S}_3 και σχηματίζουμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\text{NC}_2(A_2)$ όταν $\gamma = (123)$. Μπορεί να διαπιστώσει κανείς συγκρίνοντας με το Σχήμα 1.17 ότι $\text{NC}_2(A_2) = \text{NC}_2(3)$.

Θεώρημα 1.12. [1] Έστω Φ σύστημα ριζών τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W . Το πλήθος των στοιχείων του $\text{NC}_m(W)$ είναι ίσο με $N^{(m)}(\Phi)$. Το πλήθος στοιχείων του $\text{NC}_m(W)$ τάξεως k ισούται με τον αριθμό Narayana $\text{Nar}_{n-k}(\Phi, m)$ για κάθε ομάδα W όταν $m = 1$ και για τις κλασικές όταν $m \geq 1$.



Σχήμα 1.18: Η μερική διάταξη $NC_2(A_2)$.

Όπως είναι αναμενόμενο, το $NC_m(B_n)$ περιγράφεται συνδυαστικά ως το υποσύμπλεγμα του $NC(2nm)$ που αποτελείται από κεντρικά συμμετρικές διαμερίσεις των οποίων κάθε μέρος έχει πληθάρημο διαιρετό με το m . Πρόσφατα, ο Krattenthaler έδωσε μία συνδυαστική περιγραφή του $NC_m(D_n)$ [46, Παράγραφος 7] η οποία γενικεύει αυτή του $NC(D_n)$ των Αθανασιάδη και Reiner [11].

Κεφάλαιο 2

Πολυγωνικές υποδιαιρέσεις και γενικεύσεις του συμπλέγματος σμηνών

2.1 Εισαγωγή και αποτελέσματα

Ένα πρώτο κίνητρο για τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ήταν το άρθρο των Przytycki και Sikora [59], στο οποίο απαριθμούνται κάποιου είδους πολυγωνικές υποδιαιρέσεις. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύνολο των πολυγωνικών υποδιαιρέσεων ενός κυρτού $(mn + 2)$ -γώνου P από μή διασταυρούμενες διαγωνίους, σε πολύγωνα τα οποία έχουν πλήθος κορυφών ίσο με $2 \pmod{m}$. Ονομάζουμε αυτού του τύπου τις υποδιαιρέσεις m -επιτρεπτές.

Θεώρημα 2.1. [59, Πρόταση 2] *Το πλήθος των m -επιτρεπτών πολυγωνικών υποδιαιρέσεων ενός $(mn + 2)$ -γώνου από i διαγωνίους είναι ίσο με*

$$\frac{1}{n} \binom{mn + i + 1}{i} \binom{n}{i + 1}, \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

□

Θεωρούμε τώρα το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(A_{n-1})$ με πλευρές τις m -επιτρεπτές υποδιαιρέσεις ενός $(mn + 2)$ -γώνου P . Πιο αναλυτικά, οι κορυφές του $\Delta^m(A_{n-1})$ είναι οι διαγώνιοι οι οποίες υποδιαιρούν το P σε ένα $(mj + 2)$ -γωνο και ένα $(m(n - j) + 2)$ -γωνο ($1 \leq j \leq n - 1$) και οι πλευρές είναι τα σύνολα των διαγωνίων του παραπάνω τύπου οι οποίες δεν τέμνονται ανά δύο στο εσωτερικό του P . Οι έδρες του $\Delta^m(A_{n-1})$ είναι οι υποδιαιρέσεις του P σε $(m + 2)$ -γωνο. Όταν $m = 1$ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(A_{n-1})$ συμπίπτει με αυτό που περιγράφουμε στην Παράγραφο 1.3.4. Το Θεώρημα 2.1 υπολογίζει το πλήθος των $(i - 1)$ -διάστατων πλευρών του $\Delta^m(A_{n-1})$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε κάτι ανάλογο για την περίπτωση B_n , προσπαθώντας να γενικεύσουμε την περιγραφή του $\Delta(B_n)$ της Παραγράφου 1.3.4. Έτσι λοιπόν, ορίζουμε το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(B_n)$ ως εξής: θεωρούμε ένα κανονικό $(2mn + 2)$ -γωνο και επιγράφουμε τις κορυφές του με $1, 2, \dots, mn + 1, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{mn + 1}$, με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού. Μία B -διαγώνιος του P είναι είτε (i) μία διάμετρος, δηλαδή μία διαγώνιος η οποία συνδέει δύο αντιποδικά σημεία i και \bar{i} για κάποιο $1 \leq i \leq mn + 1$, είτε (ii) ένα ζεύγος μή διασταυρούμενων διαγωνίων $ij, \bar{i}\bar{j}$ όπου $i, j \in \{1, 2, \dots, mn + 1, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{mn + 1}\}$ είναι διακεκριμένα και μή διαδοχικά πάνω στο σύνορο του P . Εννοείται ότι αν $\alpha = \bar{i}$ για κάποιον θετικό ακέραιο i , τότε $\bar{\alpha} = i$. Ορίζουμε το $\Delta^m(B_n)$ ως το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με κορυφές τις B -διαγωνίους οι οποίες υποδιαιρούν το P σε ένα ζεύγος $(mj + 2)$ -γώνων και ένα κεντρικά συμμετρικό $(2m(n - j) + 2)$ -γωνο ($1 \leq j \leq n$) και πλευρές τα σύνολα των B -διαγωνίων του παραπάνω τύπου οι οποίες δεν τέμνονται ανά δύο στο εσωτερικό του P . Είναι φανερό ότι για $m = 1$ το παραπάνω σύμπλεγμα ταυτίζεται με αυτό που περιγράφουμε στην Παράγραφο 1.3.4 για $\Phi = B_n$. Στην Παράγραφο 2.3 υπολογίζουμε το f -διάνυσμα του $\Delta^m(B_n)$ όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.2. *Το πλήθος των $(i - 1)$ -διάστατων πλευρών του $\Delta^m(B_n)$ είναι ίσο με*

$$\binom{mn + i}{i} \binom{n}{i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Με δεδομένα τα παραπάνω υπολογίζουμε το h -διάνυσμα του $\Delta^m(\Phi)$ για $\Phi = A_{n-1}, B_n$ και δείχνουμε ότι η i -οστή συντεταγμένη του ισούται με τον αριθμό Narayana $\text{Nar}_{r-i}(\Phi, m)$, όπου $r = n - 1$ και n αντίστοιχα. Πίο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 2.1. *Η i -οστή συντεταγμένη του h -διανύσματος του $\Delta^m(\Phi)$ είναι ίση με*

$$\frac{1}{n} \binom{n}{i+1} \binom{mn}{i} \quad i = 0, \dots, n - 1,$$

$$\binom{n}{i} \binom{mn}{i} \quad i = 0, \dots, n,$$

όταν $\Phi = A_{n-1}$ και B_n αντιστοίχως.

Οι παραπάνω αριθμοί είναι ακριβώς αυτοί που εμφανίζονται στο Θεώρημα 1.6 για τις περιπτώσεις A_{n-1} και B_n . Στην περίπτωση όπου $W = B_n$ και $m = 1$ το Θεώρημα 2.2 και το Πόρισμα 2.1 έχουν αποδειχθεί από την R. Simion [65, Παράγραφος 3.1] με διαφορετική απαριθμητική μέθοδο. Επίσης σημειώνουμε ότι, όπως παρατηρήθηκε από την Simion [65], για $m = 1$ η i -οστή συντεταγμένη

του h -διανύσματος του $\Delta^m(\Phi)$ συμπίπτει με το πλήθος στοιχείων τάξεως i του συνδέσμου των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων $\text{NC}(W)$ όταν $W = A_{n-1}$ ή B_n .

Όπως είδαμε και στην Παράγραφο 1.3.4, τα συμπλέγματα $\Delta(A_{n-1})$ και $\Delta(B_n)$ μπορούν να υλοποιηθούν ως συνοριακά συμπλέγματα πολυτόπων. Αυτή η ιδιότητα δεν διατηρείται όταν $m > 1$ και αυτό μπορεί να το διαπιστώσει κανείς, παρατηρώντας ότι το h -διάνυσμα σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι συμμετρικό. Παρόλα αυτά έχουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο δίνει κάποια γεωμετρική πληροφορία για το $\Delta^m(\Phi)$.

Θεώρημα 2.3. *Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ είναι αποφλοιώσιμο όταν $\Phi = A_{n-1}, B_n$ και $m \geq 1$.*

Στην τοπολογία ορίζουμε το *σφηνοειδές άθροισμα* μίας οικογένειας τοπολογικών χώρων ως την ένωσή τους σε ένα σημείο. Πιο συγκεκριμένα, το p είναι *βασικό σημείο* ενός τοπολογικού χώρου X αν υπάρχει μία ανοικτή συστατή γειτονιά του p . Αν η $(X_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια τοπολογικών χώρων με βασικά σημεία $\{p_i\}$ τότε το σφηνοειδές άθροισμα $\bigvee_i X_i$ των $X_i, i \in I$ είναι το πηλίκο της ξένης ένωσης των X_i κάτω από ταύτιση των σημείων p_i . Δηλαδή

$$\bigvee_i X_i := \prod_i X_i / \{p_i \sim p_j | i, j \in I\}.$$

Πόρισμα 2.2. *Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ έχει τον ομοτοπικό τύπο σφηνοειδούς άθροίσματος $\text{Nar}_r(\Phi, m)$ το πλήθος σφαιρών διαστάσεως $r - 1$, όπου r είναι η τάξη του Φ , για $\Phi = A_{n-1}, B_n$, αντιστοίχως.*

Παρατηρήστε ότι για $\Phi = A_{n-1}$ και B_n το $\Delta^m(\Phi)$ είναι σύμπλεγμα flag, δηλαδή κάθε ελαχιστική μή πλευρά έχει δύο στοιχεία (βλ. [70, Παράγραφος III.4]). Επίσης, από το γεγονός ότι το $\Delta^m(\Phi)$ είναι αποφλοιώσιμο συμπεραίνουμε ότι είναι και Cohen-Macaulay. Επομένως, τα συμπλέγματα που μελετάμε είναι παραδείγματα συμπλεγμάτων τα οποία είναι Cohen-Macaulay και flag. Το ακόλουθο πόρισμα απαντάει εν μέρει την Εικασία 1.1 του Αθανασιάδη.

Πόρισμα 2.3. *Γιά τις ομάδες ανακλάσεων $W = A_n, B_n$ και $m \geq 1$ οι αριθμοί $\text{Nar}_k(\Phi, m)$ αποτελούν το h -διάνυσμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος διαστάσεως n .*

2.2 Προκαταρκτικά

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε ορολογία και ορισμένα στοιχεία τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

f -διανύσματα και h -διανύσματα. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διαστάσεως $d - 1$. Ορίζουμε το f -διάνυσμα $f(\Delta) =$

$(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ του Δ ως το διάνυσμα του οποίου η συντεταγμένη f_i είναι ίση με το πλήθος των i -διάστατων πλευρών του Δ ή αλλιώς των πλευρών με $i + 1$ κορυφές.

Μέσω του f -διανύσματος ορίζουμε το h -διάνυσμα $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ του Δ από τον παρακάτω τύπο

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i}.$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1} \quad (2.1)$$

και

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^k h_i \binom{d-i}{k-i}. \quad (2.2)$$

Ειδικότερα, από την (2.1) έχουμε ότι

$$(-1)^{d-1} h_d = -1 + f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1}, \quad (2.3)$$

το οποίο είναι ίσο με την *ανηγμένη χαρακτηριστική Euler* του Δ . Επίσης, το h -διάνυσμα έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες που σχετίζονται με την αποφλοιωσιμότητα και μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες, όπως για παράδειγμα το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4. (Εξισώσεις Dehn-Sommerville) Το h -διάνυσμα του συνοριακού συμπλέγματος ενός μονοπλεκτικού $(d-1)$ -διάστατου πολυτόπου ικανοποιεί την σχέση

$$h_k = h_{d-k} \quad \text{για κάθε } k = 0, \dots, d.$$

□

Αποφλοιωσιμότητα και αναλυσιμότητα κατά κορυφές. Έστω Δ ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα πάνω στο σύνολο E . Ο κώνος του Δ πάνω σε μία καινούρια κορυφή v , συμβολίζεται με $\Delta * v$ και είναι το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα πάνω στο σύνολο $E \cup \{v\}$ με έδρες $F \cup \{v\}$, όπου F είναι έδρα του Δ . Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι η μονοπλεκτική σύνδεση $\Delta * \Delta'$ δύο μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων Δ, Δ' πάνω στα σύνολα E, E' αντιστοίχως, είναι το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα πάνω στο σύνολο $E \cup E'$ με έδρες $F \cup F'$ όπου F είναι έδρα του Δ και F' έδρα του Δ' . Τέλος, αν $A \subseteq E$ τότε η *διαγραφή* του A από το Δ είναι το σύνολο $\Delta \setminus A := \{B \in \Delta : A \cap B = \emptyset\}$ και ο *σύνδεσμος* του A στο Δ είναι το σύνολο $\Delta/A := \{B \in \Delta : A \cap B = \emptyset, A \cup B \in \Delta\}$. Παρατηρήστε ότι αυτές οι δύο πράξεις αντιμετατίθενται.

Ορισμός 2.1. [21] Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ λέγεται αποφλοιώσιμο αν υπάρχει μία γραμμική διάταξη F_1, F_2, \dots, F_t των εδρών του τέτοια ώστε για κάθε $1 \leq i < k \leq t$ υπάρχουν $1 \leq j < k$ και $x \in F_k$ με $F_i \cap F_k \subseteq F_j \cap F_k = F_k \setminus \{x\}$.

Στις δικές μας αποδείξεις δεν χρησιμοποιούμε απευθείας τον ορισμό της αποφλοιωσιμότητας αλλά την παρακάτω πιό ισχυρή ιδιότητα.

Ορισμός 2.2. [16, 58] Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ λέγεται αναλύσιμο κατά κορυφές αν είναι αγνό και είτε είναι κενό είτε έχει μία κορυφή v τέτοια ώστε τα $\Delta \setminus v$ και Δ/v να είναι επίσης αναλύσιμα κατά κορυφές.

Σημειώνουμε ότι αν το Δ είναι αγνό διαστάσεως k τότε το Δ/v είναι αγνό διαστάσεως $k - 1$. Αν το $\Delta \setminus v$ είναι αγνό τότε είτε $\dim(\Delta \setminus v) = k$, είτε το Δ είναι κώνος πάνω στο $\Delta \setminus v$ και σε αυτήν την περίπτωση το $\Delta \setminus v = \Delta/v$ έχει διάσταση $k - 1$.

Στα άρθρα [16, 58] αποδεικνύεται ότι κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα το οποίο είναι αναλύσιμο κατά κορυφές είναι αποφλοιώσιμο. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω εύκολη συνέπεια του Ορισμού 2.2.

Λήμμα 2.1. [4, Λήμμα 2.2] Έστω ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διαστάσεως d και v_1, v_2, \dots, v_t διακεκριμένες κορυφές του. Αν

(i) το $\Delta \setminus \{v_1, \dots, v_t\}$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση d και

(ii) το $(\Delta/v_i) \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $d - 1$ για κάθε $1 \leq i \leq t$,

τότε το Δ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές.

Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των κορυφών παίρνουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2.2. Η μονοπλεκτική σύνδεση δύο αναλύσιμων κατά κορυφές μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων είναι επίσης αναλύσιμο κατά κορυφές μονοπλεκτικό σύμπλεγμα.

2.3 Απαριθμητικά αποτελέσματα

Καταρχήν, αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.2 βρίσκοντας μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Η αντιστοιχία αυτή είναι ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 1 του [59]. Συμβολίζουμε με $\Delta_{B_n}^m[i]$ το σύνολο των υποδιαίρέσεων του $\Delta^m(B_n)$ με i το πλήθος B -διαγωνίους, όπου $0 \leq i \leq n$. Στο εξής θεωρούμε ότι οι κορυφές κάθε $(2mn + 2)$ -γώνου επιγράφονται με τους αριθμούς $1, 2, \dots, mn + 1, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{mn + 1}$ με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού.

Θεώρημα 2.5. Υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\Phi_{m,n}$ από το σύνολο $\Delta_{B_n}^m[i]$ στο καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου όλων των ακολουθιών $\{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq mn + 1\}$ με το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ με ακριβώς i το πλήθος συντεταγμένες ϵ_j ίσες με 1.

Πόρισμα 2.4. Το πλήθος των $(i-1)$ -διάστατων πλευρών του $\Delta^m(B_n)$ είναι ίσο με

$$\binom{mn+i}{i} \binom{n}{i}.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3. Θεωρούμε ένα $(2mn+2)$ -γωνο P και ορίζουμε το αρχικό σημείο κάθε διαγωνίου ως εξής. Το αρχικό σημείο μίας διαμέτρου είναι αυτό του οποίου η επιγραφή είναι θετική ενώ κάθε μη διαμετρική διαγώνιος είναι προσανατολισμένη έτσι ώστε κινούμενοι κατά μήκος της με τον παραπάνω προσανατολισμό να έχουμε το κέντρο του πολυγώνου στα αριστερά. Αν η D είναι μία μη διαμετρική B -διαγώνιος τότε έχει δύο τμήματα με αρχικά σημεία a και \bar{a} αντιστοίχως. Ορίζουμε αρχικό σημείο της D αυτό με τη θετική επιγραφή.

Για συντομία θα γράφουμε $\Delta_n = \Delta^m(B_n)$ και $\Delta_n[i] = \Delta_{B_n}^m[i]$. Κατασκευάζουμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία επαγωγικά ως προς το n . Αν $n = 1$ τότε το Δ_n αποτελείται από $m+1$ διαμέτρους, ή ισοδύναμα από $m+1$ μεμονωμένες κορυφές. Αν λοιπόν $i = 0$, η απεικόνιση $\Phi_{m,1}$ στέλνει την τετριμμένη διαμέριση στο κενό σύνολο, ενώ αν $i = 1$ τότε κάθε διάμετρος $a_k \bar{a}_k$ του $\Delta_n[1]$ απεικονίζεται στο ζεύγος $((a_k), (\epsilon_1))$ με $\epsilon_1 = 1$.

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι έχουμε ήδη κατασκευάσει την αντιστοιχία

$$\Phi_{m,n} : \Delta_n[i] \longrightarrow \{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq mn + 1\}$$

$$\times \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n : \text{με ακριβώς } i \text{ συντεταγμένες } \epsilon_j \text{ ίσες με } 1\}$$

για κάθε ακέραιο m και $0 \leq i \leq n$. Για να ορίσουμε την απεικόνιση $\Phi_{m,n+1}$ θεωρούμε $D \in \Delta_{n+1}[i]$. Το ζητούμενο είναι τετριμμένο όταν $i = 0$. Αν $i \geq 1$ έστω $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq m(n+1) + 1$ τα αρχικά σημεία των B -διαγωνίων του D και $\mathcal{I} = \{a_1, \dots, a_i, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i\}$. Θεωρούμε τη δράση του \mathbb{Z} στο σύνολο των κορυφών του P η οποία ορίζεται ως εξής. Αν a είναι μία κορυφή του P και k ένας θετικός ακέραιος τότε η $a+k$ είναι η κορυφή του P η οποία βρίσκεται k κορυφές πέρα από την a με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού. Θεωρούμε το ελάχιστο a_j τέτοιο ώστε καμία από τις κορυφές a_j+1, \dots, a_j+m δεν ανήκει στο σύνολο \mathcal{I} . Θέτουμε $\epsilon_1 = 1$ αν $\{a_j(a_j+m+1), \bar{a}_j(\bar{a}_j+m+1)\}$ είναι B -διαγώνιος του D και $\epsilon_1 = 0$ αλλιώς. Έστω τώρα P' το $(2mn+2)$ -γωνο με κορυφές

$1, \dots, a_j, a_j + m + 1, \dots, m(n+1) + 1, \bar{1}, \dots, \bar{a}_j, \bar{a}_j + m + 1, \dots, \overline{m(n+1) + 1}$ το οποίο υποδιαιρείται από τις υπόλοιπες $i - \epsilon_1$ B -διαγωνίους του D και έστω D' η διαμέριση του P' η οποία αποτελείται από αυτές τις B -διαγωνίους. Παρατηρούμε ότι το αρχικό σημείο κάθε B -διαγωνίου είναι το ίδιο είτε θεωρήσουμε τη διαμέριση D' εντός του P είτε εντός του P' . Επομένως τα αρχικά σημεία των B -διαγωνίων του D' στο P' είναι $I_0 = (a_1, \dots, a_i)$ αν $\epsilon_1 = 0$ ή $I_1 = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_i)$ αν $\epsilon_1 = 1$. Λόγω επαγωγής, και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο D' μέσω της $\Phi_{m,n}$ μία ακολουθία I_{ϵ_1} αρχικών σημείων και μία ακολουθία $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1})$ με $i - \epsilon_1$ το πλήθος συντεταγμένες ϵ_j ίσες με 1. Ορίζουμε λοιπόν ως $\Phi_{m,n+1}(D)$ το ζεύγος $((a_1, \dots, a_i), (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}))$.

Για να αποδείξουμε ότι η $\Phi_{m,n+1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη κατασκευάζουμε την αντίστροφη της, θεωρώντας την περίπτωση $n = 1$ τετριμμένη. Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι έχουμε κατασκευάσει την αντίστροφη $\Phi_{m,n}^{-1}$. Για να ορίσουμε την $\Phi_{m,n+1}^{-1}$ θεωρούμε ακολουθίες $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq m(n+1) + 1$ και $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$ με i συντεταγμένες ϵ_j ίσες με 1. Για $i = 0$ η μηδενική ακολουθία απεικονίζεται στην τετριμμένη διαμέριση. Αν $i \geq 1$ θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{I} = \{a_1, \dots, a_i, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i\}$. Θα ορίσουμε μία διαμέριση $D \in \Delta_{n+1}[i]$ ως εξής. Βρίσκουμε το μικρότερο a_j τέτοιο ώστε καμία από τις κορυφές $a_j + 1, \dots, a_j + m$ του P να μην ανήκει στο \mathcal{I} . Τότε η $\{a_j(a_j + m + 1), \bar{a}_j(\bar{a}_j + m + 1)\}$ είναι μία B -διαγώνιος του D αν $\epsilon_1 = 1$ και δεν είναι αν $\epsilon_1 = 0$. Έστω P' το $(2mn+2)$ -γωνο με κορυφές $1, \dots, a_j, a_j + m + 1, \dots, m(n+1) + 1, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \bar{a}_j + m + 1, \dots, \overline{m(n+1) + 1}$. Θεωρούμε το ζεύγος $((a_1, \dots, a_i), (\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}))$ αν $\epsilon_1 = 0$ ή $((a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_i), (\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}))$ αν $\epsilon_1 = 1$ με ακριβώς $i - \epsilon_1$ το πλήθος συντεταγμένες ϵ_j ίσες με 1. Λόγω επαγωγής, αντιστοιχεί στο P' μέσω της $\Phi_{m,n}^{-1}$ μία μοναδική διαμέριση D' με $i - \epsilon_1$ το πλήθος B -διαγωνίους. Επομένως, ορίζουμε $\Phi_{m,n+1}^{-1}((a_1, \dots, a_i), (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}))$ να είναι η διαμέριση που αποτελείται από την D' μαζί με την B -διαγώνιο $\{a_j(a_j + m + 1), \bar{a}_j(\bar{a}_j + m + 1)\}$ αν $\epsilon_1 = 1$ ή η διαμέριση D' στο αρχικό πολύγωνο P αν $\epsilon_1 = 0$. Αφήνουμε στον αναγνώστη να διαπιστώσει ότι όντως αυτή η απεικόνιση είναι η αντίστροφη της $\Phi_{m,n+1}$. \square

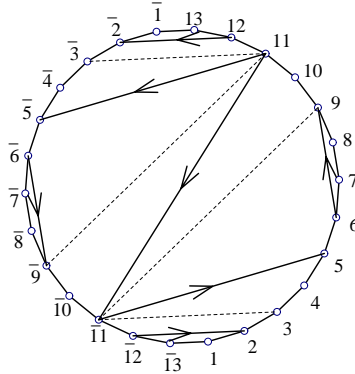
Παράδειγμα 2.1. Στο Σχήμα 2.1 έχουμε ένα 26-γωνο με $m = 2$, $n = 6$ και $i = 4$ B -διαγωνίους. Η απεικόνιση του Θεωρήματος 2.3 αντιστοιχεί τη διαμέριση του σχήματος στο ζεύγος $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (6, 11, 11, 12)$ και $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6) = (1, 1, 0, 1, 0, 1)$.

Παρατήρηση 2.1. Το πλήθος των υποδιαιρέσεων του $\Delta_{B_n}^m[i]$ οι οποίες περιέχουν διάμετρο είναι ίσο με

$$\binom{mn+i}{i} \binom{n-1}{i-1}.$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει από το Θεώρημα 2.3 και την παρατήρηση ότι κά-

θε διαμέριση D με i στοιχεία περιέχει διάμετρο αν και μόνον αν για το ζεύγος $((a_1, \dots, a_i), (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n))$ το οποίο αντιστοιχεί μέσω της $\Phi_{m,n}$ στο D έχουμε ότι $\epsilon_n = 1$. Διαφορετικά, προκύπτει και από το Θεώρημα 2.1.



Σχήμα 2.1:

Απόδειξη του Πορίσματος 2.1: Το αποτέλεσμα έπεται από τον τύπο (2.1), τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2 και στοιχειώδεις υπολογισμούς. \square

Από τη σχέση (2.3) συμπεραίνουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.5. Για τις κλασικές ομάδες ανακλάσεων $W = A_{n-1}, B_n$, η ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta^m(\Phi)$ είναι ίση με $(-1)^{r-1} \text{Nar}_r(\Phi, m)$, όπου r είναι η τάξη του W .

2.4 Αποφλοιωσιμότητα

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.3 δείχνοντας ότι το $\Delta^m(\Phi)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές όταν $\Phi = A_{n-1}, B_n$.

Πρόταση 2.1. Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(A_{n-1})$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές.

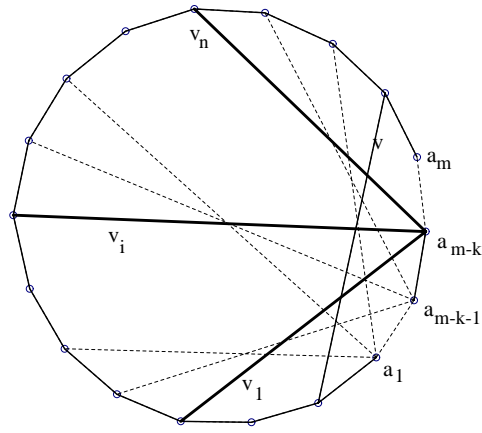
Απόδειξη. Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο. Θεωρούμε ένα $(mn+2)$ -γωνα P και v μία ελαχιστική διαγώνιο, δηλαδή μία διαγώνιο η οποία υποδιαιρεί το P σε ένα $(m+2)$ -γωνα και ένα $(m(n-1)+2)$ -γωνα. Θεωρούμε τις κορυφές a_1, a_2, \dots, a_m του $(m+2)$ -γώνου, οι οποίες δεν είναι άκρα της διαγωνίου v , με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού όπως στο Σχήμα 2.2. Συμβολίζουμε με $\Delta_{A_{n-1}}^m(k)$ το σύμπλεγμα που παίρνουμε διαγράφοντας από το $\Delta^m(A_{n-1})$ όλες τις διαγωνίους με άκρα τα

a_1, \dots, a_k και θέτουμε $\Delta_{A_{n-1}}^m(0) = \Delta^m(A_{n-1})$. Θα αποδείξουμε ότι το $\Delta_{A_{n-1}}^m(k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-2$ για κάθε n και k , $0 \leq k \leq m$. Για $k=0$ αυτό μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Ο ισχυρισμός μας είναι αληθής για $n=1$ διότι το μοναδικό στοιχείο του $\Delta^m(A_{n-1})$ σε αυτήν την περίπτωση είναι η τετριμμένη διαμέριση. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το $\Delta_{A_l}^m(m-k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $l-1$ για κάθε $1 \leq l \leq n-1$ και $0 \leq k \leq m$ και αποδεικνύουμε ότι το $\Delta_{A_n}^m(m-k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-1$ για κάθε k , $0 \leq k \leq m$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς k . Για $k=0$ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta_{A_n}^m(m)$ είναι ισόμορφο με τον κώνο $v * \Delta_{A_{n-1}}^m(0)$, ο οποίος είναι αναλύσιμος κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-1$ λόγω επαγωγής και Λήμματος 2.2. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι το $\Delta_{A_n}^m(m-k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-1$. Για να δείξουμε το ίδιο για το $\Delta_{A_n}^m(m-k-1)$, θεωρούμε τις διαγωνίους v_1, \dots, v_n με άκρο το a_{m-k} διατεταγμένες σύμφωνα με την, κατά τη φορά του ρολογιού, διάταξη των διαφορετικών από το a_{m-k} άκρων τους, όπως στο Σχήμα 2.2. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 στο $\Delta_{A_n}^m(m-k-1)$ και το σύνολο διαγωνίων $\{v_1, \dots, v_n\}$. Καταρχήν, παρατηρούμε ότι $\Delta_{A_n}^m(m-k-1) \setminus \{v_1, \dots, v_n\} = \Delta_{A_n}^m(m-k)$, το οποίο είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-1$ λόγω επαγωγής. Επομένως, η συνθήκη (i) του Λήμματος 2.1 ικανοποιείται. Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι το $\Delta_i = \Delta_{A_n}^m(m-k-1)/v_i \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-2$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Παρατηρούμε ότι το σύμπλεγμα Δ_i προκύπτει από το $\Delta_{A_n}^m/v_i$ διαγράφοντας τις διαγωνίους v_1, \dots, v_{i-1} καθώς επίσης και όλες τις διαγωνίους με άκρο κάποιο από τα a_1, \dots, a_{m-k-1} . Επίσης, η διαγωνίος v_i υποδιαιρεί το $(2m(n+1)+2)$ -γωνο σε ένα $(mi+2)$ -γωνο στο οποίο ανήκουν τα σημεία a_1, \dots, a_{m-k} και σε ένα $(m(n+1-i)+2)$ -γωνο. Επομένως, διαγράφοντας τις προαναφερόμενες διαγωνίους από το $\Delta_{A_n}^m/v_i$ ισοδυναμεί με το να διαγράψουμε όλες τις διαγωνίους με άκρο κάποιο από τα a_1, \dots, a_{m-k} στο $(mi+2)$ -γωνο. Από αυτό έπεται ότι το σύμπλεγμα Δ_i είναι η μονοπλεκτική σύνδεση δύο συμπλεγμάτων ισόμορφων με $\Delta_{A_{i-1}}^m(m-k)$ και $\Delta_{A_{n-i}}^m(0)$ αντιστοίχως. Αυτή όμως είναι αναλύσιμη κατά κορυφές λόγω του Λήμματος 2.2 και λόγω επαγωγής έχει τη διάσταση που θέλουμε. Επομένως, η συνθήκη (ii) του Λήμματος 2.1 ικανοποιείται και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας. \square

Πρόταση 2.2. *Το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta^m(B_n)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές.*

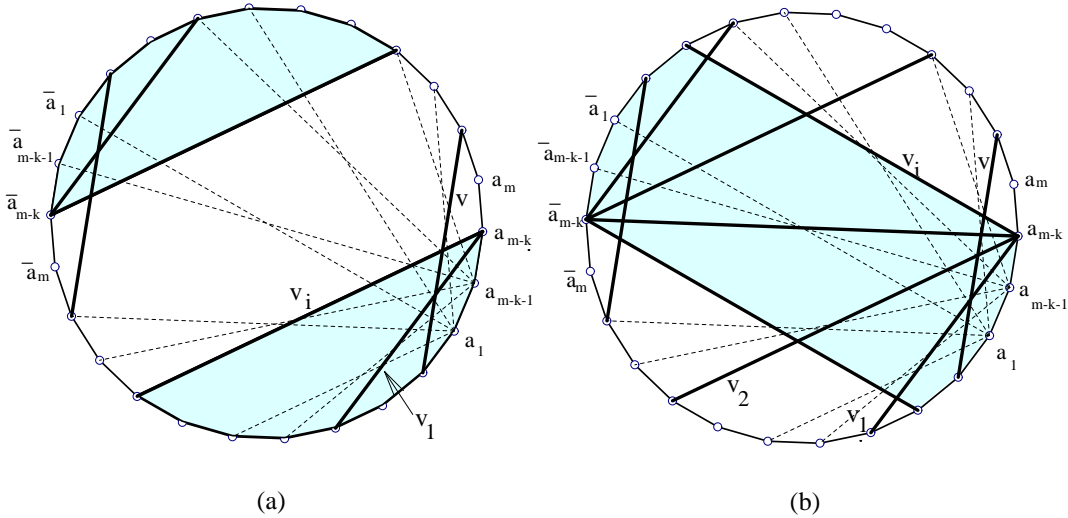
Απόδειξη. Όπως και προηγουμένως, θα αποδείξουμε το αντίστοιχο ισχυρότερο αποτέλεσμα. Έστω ένα $(2mn+2)$ -γωνο P και v μία ελαχιστική B -διαγωνίος, δηλαδή μία διαγωνίος η οποία υποδιαιρεί το P σε ένα ζεύγος $(m+2)$ -γώνων και ένα



Σχήμα 2.2:

κεντρικά συμμετρικό $(2m(n-1)+2)$ -γωνο. Έστω a_1, a_2, \dots, a_m οι κορυφές ενός εκ των δύο $(m+2)$ -γώνων οι οποίες δεν είναι άκρα του v , διατεταγμένες με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού, όπως στο Σχήμα 2.3. Συμβολίζουμε με $\Delta_n^m(k)$ το σύμπλεγμα που προκύπτει αν διαγράψουμε από το $\Delta^m(B_n)$ όλες τις B -διαγωνίους με άκρο κάποιο από τα a_1, \dots, a_k και θέτουμε $\Delta_n^m(0) = \Delta^m(B_n)$. Θα αποδείξουμε ότι το $\Delta_n^m(k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $n-1$, για κάθε n και k με $0 \leq k \leq m$. Ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n=0$ διότι το μοναδικό στοιχείο του $\Delta^m(B_n)$ σε αυτήν την περίπτωση είναι η τετριμμένη διαμέριση. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το $\Delta_l^m(m-k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση $l-1$ για κάθε $1 \leq l \leq n$ και $0 \leq k \leq m$ και αποδεικνύουμε ότι το $\Delta_{n+1}^m(m-k)$ έχει διάσταση n και είναι αναλύσιμο κατά κορυφές για κάθε $0 \leq k \leq m$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς k . Για $k=0$, το $\Delta_{n+1}^m(m)$ είναι ισόμορφο με τον κώνο του $\Delta_n^m(0)$ πάνω από το v και επομένως είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση n από επαγωγή και Λήμμα 2.2. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το $\Delta_{n+1}^m(m-k)$ είναι αναλύσιμο κατά κορυφές και έχει διάσταση n και αποδεικνύουμε το ίδιο για το $\Delta_{n+1}^m(m-k-1)$. Έστω v_1, \dots, v_{2n+1} οι B -διαγωνίοι με άκρο το σημείο a_{m-k} διατεταγμένες σύμφωνα με την φορά του ρολογιού ως προς το άλλο άκρο τους. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 στο σύμπλεγμα $\Delta_{n+1}^m(m-k-1)$ και το σύνολο των παραπάνω διαγωνίων. Καταρχήν, έχουμε ότι $\Delta_{n+1}^m(m-k-1) \setminus \{v_1, \dots, v_{2n+1}\} = \Delta_{n+1}^m(m-k)$ το οποίο έχει διάσταση n και είναι αναλύσιμο κατά κορυφές από επαγωγή. Επομένως, η συνθήκη (i) του Λήμματος 2.1 ικανοποιείται. Στην συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι το $\Delta_i = \Delta_{n+1}^m(m-k-1)/v_i \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ έχει διάσταση $n-1$ και είναι αναλύσιμο κατά κορυφές για κάθε $1 \leq i \leq 2n+1$. Παρατηρούμε ότι το σύμπλεγμα Δ_i προκύπτει από το $\Delta_{B_{n+1}}^m/v_i$ διαγράφοντας τις B -διαγωνίους v_1, \dots, v_{i-1} καθώς και όλες τις B -διαγωνίους με

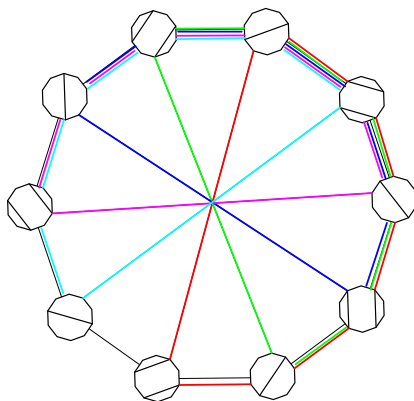
άκρο κάποιο από τα a_1, \dots, a_{m-k-1} . Συμβολίζουμε με \mathcal{S} το σύνολο αυτών των B -διαγωνίων. Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις. Πρώτα υποθέτουμε ότι $i \leq n+1$ (Σχήμα 3.13 (a)). Σε αυτήν την περίπτωση το v_i χωρίζει το $(2m(n+1)+2)$ -γωνο σε ένα ζεύγος $(mi+2)$ -γώνων στα οποία βρίσκονται τα σημεία a_1, \dots, a_{m-k} και ένα κεντρικά συμμετρικό $(2m(n+1-i)+2)$ -γωνο. Επομένως, διαγράφοντας τις B -διαγωνίους του συνόλου \mathcal{S} από το $\Delta_{B_{n+1}}^m/v_i$ ισοδυναμεί με το να διαγράψουμε όλες τις B -διαγωνίους με άκρο κάποιο από τα a_1, \dots, a_{m-k} στα $(mi+2)$ -γωνο. Συνεπώς, το Δ_i είναι η μονοπλεκτική σύνδεση των $\Delta_{n+1-i}^m(0)$ και $\Delta_{A_{i-1}}^m(i-1)$. Αν τώρα $i > n+1$ (Σχήμα 3.13 (b)) τότε το v_i χωρίζει το $(2m(n+1)+2)$ -γωνο σε ένα κεντρικά συμμετρικό $(2m(i-n-1)+2)$ -γωνο και ένα ζεύγος $((2n+2-i)m+2)$ -γώνων. Σε αυτήν την περίπτωση τα σημεία a_1, \dots, a_{m-k} βρίσκονται στο κεντρικά συμμετρικό πολύγωνο. Επομένως, διαγράφοντας τις B -διαγωνίους του συνόλου \mathcal{S} από το $\Delta_{B_{n+1}}^m/v_i$ ισοδυναμεί με το να διαγράψουμε όλες τις B -διαγωνίους με άκρο κάποιο από τα a_1, \dots, a_{m-k} στο $(2m(i-n-1)+2)$ -γωνο. Άρα το σύμπλεγμα Δ_i είναι η μονοπλεκτική σύνδεση των $\Delta_{i-n-1}^m(2(i-n-1)-1)$ και $\Delta_{A_{2n+1-i}}^m(0)$. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, το Δ_i έχει διάσταση $n-1$ και είναι αναλύσιμο κατά κορυφές λόγω επαγωγής, του Λήμματος 2.1 και της Πρότασης 2.1. Επομένως, η συνθήκη (ii) του Λήμματος 2.1 ικανοποιείται και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξή μας. \square



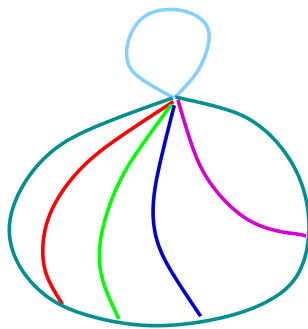
Σχήμα 2.3: Στα (a) και (b) βλέπουμε το σύμπλεγμα Δ_i όταν $i \leq n$ και $i > n$ αντίστοιχα. Για κάθε διαγώνιο που αναπαριστάται με διακεκομμένη γραμμή δεν έχουμε σχεδιάσει την αντίστοιχη κεντρικά συμμετρική της.

Παράδειγμα 2.2. Στο Σχήμα 2.4 βλέπουμε την υλοποίηση του συμπλέγματος

σμηγών $\Delta^2(B_2)$ με υποδιαίρεσεις ενός 10-γώνου από 2-επιτρεπτές B -διαγωνίους. Με βάση το Πόρισμα 2.2 και ελέγχοντας και στο Σχήμα 2.5, το $\Delta^2(B_2)$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με σφηνοειδές άθροισμα $\text{Nar}_2(B_2, 2) = 6$ κύκλων.



Σχήμα 2.4:



Σχήμα 2.5:

2.5 Ο γενικός ορισμός του $\Delta^m(\Phi)$

Λίγο μετά την ολοκλήρωση του παραπάνω μέρους της διατριβής [73], οι Fomin και Reading έδωσαν τον γενικό ορισμό και μελέτησαν το σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ [37]. Υπολόγισαν τους αριθμούς τάξεως και το h -διάγραμμα του $\Delta^m(\Phi)$, του οποίου οι συντεταγμένες συμπίπτουν με τους αριθμούς Narayana $\text{Nar}_{n-k}(\Phi, m)$ όταν $m = 1$ και για τις κλασικές ομάδες όταν $m \geq 1$. Στην περίπτωση όπου η W είναι κλασική ομάδα ανακλάσεων περιέγραψαν συνδυαστικά το $\Delta^m(\Phi)$ χρησιμοποιώντας πολυγωνικές υποδιαίρεσεις [37, Παράγραφος 5]. Οι κατασκευές τους για $W = A_{n-1}$ και B_n συμπίπτουν με τις δικές μας. Στην συνέχεια θα επαναλάβουμε τον γενικό ορισμό του $\Delta^m(\Phi)$, τον οποίο και θα χρειαστούμε στο Κεφάλαιο 4 και θα

αναφέρουμε ορισμένα από τα αποτελέσματα του [37] που συμπληρώνουν τα δικά μας.

Το γενικευμένο σύμπλεγμα σμηγών $\Delta^m(\Phi)$ [37] είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με σύνολο κορυφών το σύνολο $\Phi_{\geq -1}^m$ των χρωματισμένων σχεδόν θετικών ριζών. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο $\Phi_{\geq -1}^m$ είναι η ένωση του συνόλου $\Phi_{>0}^m$ που αποτελείται από m το πλήθος (χρωματισμένα) αντίγραφα $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ κάθε θετικής ρίζας $\alpha \in \Phi^+$ και του συνόλου $-\Pi$ των αρνητικών απλών ριζών. Επίσης, κάνουμε τη σύμβαση ότι κάθε αρνητική απλή ρίζα έχει χρώμα 1. Επομένως,

$$\Phi_{\geq -1}^m = \Phi_{>0}^m \cup (-\Pi)^1 = \{\alpha^k : \alpha \in \Phi^+, k \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{\alpha^1 : \alpha \in -\Pi\}.$$

Για κάθε ρίζα $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ ορίζουμε τον βαθμό $d(\alpha)$ της α ως τον ελάχιστο ακέραιο d για τον οποίο το $\mathcal{R}^d(\alpha)$ είναι αρνητική απλή ρίζα, όπου \mathcal{R} είναι η απεικόνιση (1.6). Προφανώς $d(\alpha) = 0$ αν η α είναι αρνητική απλή ρίζα. Ο παρακάτω ορισμός γενικεύει την έννοια της συμβατότητας ριζών του $\Delta(\Phi)$.

Ορισμός 2.3. [37, Ορισμός 3.1] Δύο χρωματισμένες ρίζες $\alpha^k, \beta^l \in \Phi_{\geq -1}^m$ ονομάζονται m -συμβατές αν και μόνον αν μία από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται:

- $k > l$, $d(\alpha) \leq d(\beta)$ και οι ρίζες $\mathcal{R}(\alpha)$ είναι β συμβατές με την αρχική έννοια της συμβατότητας (Θεώρημα 1.7),
- $k < l$, $d(\alpha) \geq d(\beta)$ και οι ρίζες α και $\mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατές,
- $k > l$, $d(\alpha) > d(\beta)$ και οι ρίζες α και β είναι συμβατές,
- $k < l$, $d(\alpha) < d(\beta)$ και οι ρίζες α και β είναι συμβατές, και
- $k = l$ και οι ρίζες α και β είναι συμβατές.

Προκύπτει αμέσως από τον ορισμό ότι η m -συμβατότητα είναι μία συμμετρική σχέση. Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να ορίσουμε την σχέση αυτή, εισάγοντας το m -ανάλογο της απεικόνισης \mathcal{R} ως εξής.

Ορισμός 2.4. [37, Ορισμός 2.3] Αν $\alpha^k \in \Phi_{\geq -1}^m$, ορίζουμε

$$\mathcal{R}_m(\alpha^k) = \begin{cases} \alpha^{k+1}, & \text{αν } \alpha \in \Phi_{>0}^m \text{ και } k < m \\ (\mathcal{R}(\alpha))^1, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Θεώρημα 2.6. [37, Θεώρημα 2.4] Η m -συμβατότητα στο $\Phi_{\geq -1}^m$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) η α^k είναι m -συμβατή με τη β^l αν και μόνον αν η $\mathcal{R}_m(\alpha^k)$ είναι m -συμβατή με την $\mathcal{R}_m(\beta^l)$,

(ii) η αρνητική απλή ρίζα $(-\alpha)^1$ είναι m -συμβατή με τη β^l αν και μόνον αν το ανάπτυγμα της β σε απλές ρίζες δεν περιέχει την α .

Επιπλέον, οι παραπάνω συνθήκες καθορίζουν μοναδικά την σχέση αυτή.

Αν το Φ δεν είναι ανάγωγο και έχει ανάγωγες συνιστώσες Φ_1, \dots, Φ_ℓ τότε $\Phi_{\geq -1}^m = \bigcup_{i=1}^{\ell} (\Phi_i)_{\geq -1}^m$. Σε αυτήν την περίπτωση δύο ρίζες εντός του $\Phi_{\geq -1}^m$ είναι m -συμβατές αν είτε ανήκουν σε διαφορετική συνιστώσα είτε ανήκουν στην ίδια συνιστώσα και είναι m -συμβατές εντός αυτής.

Ορισμός 2.5. Το γενικευμένο σύμπλεγμα σμηγών $\Delta^m(\Phi)$ είναι το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα πάνω στο σύνολο $\Phi_{\geq -1}^m$ με πλευρές τα υποσύνολα του $\Phi_{\geq -1}^m$ των οποίων οι ρίζες είναι m -συμβατές ανά δύο.

Είναι προφανές από τον παραπάνω ορισμό ότι αν $\Phi = \Phi_1 \times \dots \times \Phi_\ell$ τότε το σύμπλεγμα $\Delta^m(\Phi)$ είναι η μονοπλεκτική σύνδεση των $\Delta^m(\Phi_i)$, $1 \leq i \leq \ell$.

Όπως και στην περίπτωση $m = 1$, παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη του θετικού μέρους $\Delta_+^m(\Phi)$ του $\Delta^m(\Phi)$, το οποίο είναι το επαγόμενο υποσύμπλεγμα του $\Delta^m(\Phi)$ με σύνολο κορυφών το σύνολο $\Phi_{\geq 0}^m$ των θετικών χρωματισμένων ριζών. Σημείο εκκίνησης για τη μελέτη του $\Delta^m(\Phi)$ είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 2.7. [37, Πρόταση 8.4, Πρόσιμα 12.2] Για κάθε ανάγωγη ομάδα ανακλάσεων Φ και φυσικό αριθμό m ισχύει ότι

(i) το πλήθος των εδρών του συμπλέγματος σμηγών $\Delta^m(\Phi)$ είναι ίσο με

$$N^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{mh + e_i + 1}{e_i + 1},$$

(ii) το πλήθος των εδρών του θετικού συμπλέγματος σμηγών $\Delta_+^m(\Phi)$ είναι ίσο με

$$N_+^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{mh + e_i - 1}{e_i + 1}.$$

□

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται κατά περίπτωση. Οι περιπτώσεις $\Phi = A_{n-1}, B_n$ επαληθεύονται από τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2. Είναι γνωστό ότι η ανηγμένη χαρακτηριστική Euler ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος διαστάσεως $d - 1$ είναι ίση με $(-1)^{d-1} h_d$, όπου h_d είναι η τελευταία συντεταγμένη του h -διανύσματος (h_0, h_1, \dots, h_d) του Δ . Μπορεί να διαπιστώσει κανείς από το [37, Θεώρημα 10.2] ότι η τελευταία συντεταγμένη του h -διανύσματος του $\Delta^m(\Phi)$ είναι ίση με τον αριθμό Catalan τάξεως $m - 1$, δηλαδή $h_n(\Delta^m(\Phi)) = N^{(m-1)}(\Phi)$ και συνεπώς έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3. [37, Πρόταση 1.11] *Η ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta^m(\Phi)$ είναι ίση με*

$$\tilde{\chi}(\Delta^m(\Phi)) = (-1)^{n-1} N^{(m-1)}(\Phi).$$

□

Η παρακάτω πρόταση συμπληρώνει τα δικά μας απαριθμητικά αποτελέσματα των περιπτώσεων $\Phi = A_{n-1}$ και B_n .

Πρόταση 2.4. [37, Θεώρημα 9.5, Θεώρημα 11.2] *Το πλήθος των $(k-1)$ -διάστατων πλευρών του $\Delta^m(D_n)$ είναι ίσο με*

$$\binom{n}{k} \binom{(n-1)m+k}{k} + \binom{n-2}{k-2} \binom{(n-1)m+k-1}{k} \quad k = 0, \dots, n.$$

Η k -οστή συντεταγμένη του h -διανύσματος του $\Delta^m(D_n)$ είναι ίση με

$$\binom{n}{k} \binom{(n-1)m}{k} + \binom{n-2}{k-2} \binom{(n-1)m+1}{k} \quad k = 0, \dots, n.$$

□

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση όπου $m \geq 1$ και η W είναι κλασική ομάδα ανακλάσεων, η k -οστή συντεταγμένη του h -διανύσματος του $\Delta^m(W)$ ισούται με τον αριθμό Narayana $\text{Nar}_{n-k}(\Phi, m)$, όπου n είναι η τάξη του Φ . Επίσης, το ίδιο ισχύει όταν $m = 1$ και η W είναι οποιαδήποτε κρυσταλλογραφική ομάδα ανακλάσεων (σύγκρισε [6, Πίνακα 1] και [37, Θεώρημα 11.2]) και επεκτείνεται ως εικασία για κάθε κρυσταλλογραφική ομάδα ανακλάσεων και κάθε $m \geq 1$.

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο δίνοντας συνοπτικά την περιγραφή των $\Delta^m(A_n)$ και $\Delta^m(B_n)$ με χρήση πολυγωνικών υποδιαίρεσεων, βασιζόμενοι στο [37].

• $\Delta^m(A_n)$: Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι απλές ρίζες του A_n με την σειρά με την οποία αυτές εμφανίζονται στο διάγραμμα Coxeter και P ένα κανονικό πολύγωνο με $m(n+1) + 2$ κορυφές. Το σύνολο $\Phi_{\geq -1}^m$ ταυτίζεται με το σύνολο των m -επιτρεπόμενων διαγωνίων του P ως εξής:

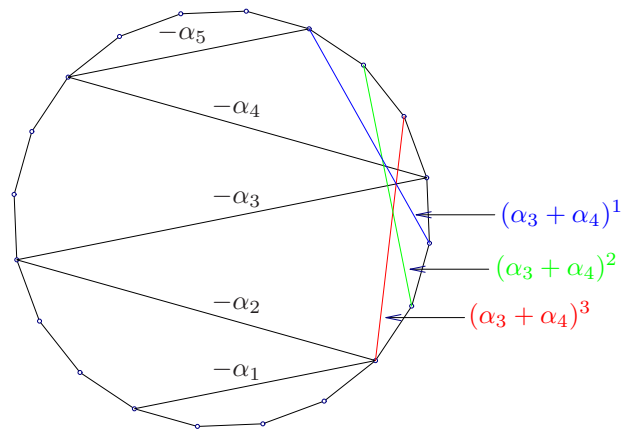
(i) ταυτίζουμε τις αρνητικές απλές ρίζες του A_n με διαδοχικές m -επιτρεπτές διαγωνίους του οι οποίες σχηματίζουν μια οδοντωτή τροχιά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6,

(ii) οι θετικές ρίζες του A_n είναι της μορφής $\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$ με $1 \leq i \leq j \leq n$,

(iii) υπάρχουν ακριβώς m το πλήθος m -επιτρεπτές διαγωνίους οι οποίες τέμνουν τις $-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_j$,

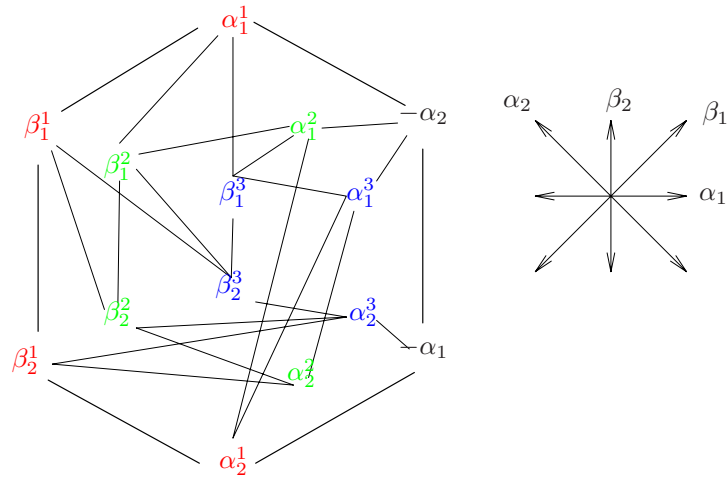
(iv) ταυτίζουμε την ρίζα $(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j)^k$ με την k -οστή (δεξιόστροφα) m -επιτρεπτή διαγωνίου η οποία τέμνει τις $-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_j$.

Αποδεικνύεται ότι, κάτω από την παραπάνω ταύτιση ριζών και m -επιτρεπόμενων διαγωνίων, δύο ρίζες του συμπλέγματος σμηνών $\Delta^m(A_n)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν οι αντίστοιχες m -επιτρεπτές διαγωνίους δεν τέμνονται στο εσωτερικό του P [37, Παράγραφος 5.1]. Οι έδρες του $\Delta^m(A_n)$ αντιστοιχούν σε υποδιαίρεσεις του P σε $(m+2)$ -γωνια, ή ισοδύναμα υποδιαίρεσεις από n το πλήθος m -επιτρεπτές διαγωνίους. Συνεπώς το $\Delta^m(A_n)$ είναι αγνό διαστάσεως $n-1$.



Σχήμα 2.6: Τα τρία χρωματισμένα αντίγραφα της ρίζας $\alpha_3 + \alpha_4$ στο $\Delta^3(A_5)$.

• $\Delta^m(B_n)$: Η υλοποίηση του συμπλέγματος σμηνών σε αυτήν την περίπτωση είναι ανάλογη και δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες. Θεωρούμε ένα κανονικό $(2mn+2)$ -γωνο και ταυτίζουμε τις αρνητικές ρίζες του B_n με μία οδοντωτή τροχία m -επιτρεπτών B -διαγωνίων, ακριβώς όπως κάναμε για το $\Delta(B_n)$ στην Παράγραφο 1.3.4. Θεωρούμε και πάλι τις περιπτώσεις (α) και (β) όπως και για $m=1$, αλλά αυτήν την φορά έχουμε m το πλήθος m -επιτρεπτές B -διαγωνίους οι οποίες έχουν τις ιδιότητες που περιγράφονται στα (α) και (β). Χρωματίζουμε τις m αυτές διαγωνίους με $1, 2, \dots, m$ με φορά σύμφωνη με αυτήν των δεικτών του ρολογιού και έτσι παίρνουμε όλες τις χρωματισμένες θετικές ρίζες του B_n .



Σχήμα 2.7: Το σύστημα ριζών B_2 και το σύμπλεγμα σημείων $\Delta^3(B_2)$. Το $\Delta^3(B_2)$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το σφηνοειδές άθροισμα 15 κύκλων. (Αντιγραφή σχήματος από το Σχήμα 1 στο [37].)

Κεφάλαιο 3

Απαρίθμηση θετικών κελιών γενικευμένων συμπλεγμάτων σμηνών και Καταλανείων παραταγμάτων υπερεπιπέδων

3.1 Εισαγωγή και αποτελέσματα

Θεωρούμε ένα ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα Weyl W και έναν θετικό αχέραιο m . Έστω $\mathcal{A}^m(\Phi)$ το m -οστό Καταλάνειο παράταγμα υπερ επιπέδων, που αποτελείται από τα υπερ επιπέδα που περιγράφονται από τις εξισώσεις $(\alpha, x) = k$ όπου $\alpha \in \Phi$ και $k = 0, 1, \dots, m$.

Η ομάδα W δρα στο πλέγμα συρριζών $L(\Phi^\vee)$ καθώς και στην διόγκωση αυτού $(mh - 1)L(\Phi^\vee)$, όπου h είναι ο αριθμός Coxeter του Φ . Επομένως, η W δρα και στο πηλίκο $T_m = L(\Phi^\vee)/(mh - 1)L(\Phi^\vee)$. Αν το Φ^+ είναι ένα θετικό σύστημα για το Φ τότε θεωρούμε τη γνωστή μερική διάταξη \leq στο Φ με $\alpha \leq \beta$ αν το $\beta - \alpha$ είναι μη αρνητικός γραμμικός συνδυασμός θετικών ριζών. Υπενθυμίζουμε ότι φίλτρο του Φ είναι ένα υποσύνολο \mathcal{I} του Φ^+ τέτοιο ώστε αν $\alpha \in \mathcal{I}$ και $\alpha \leq \beta$ στο Φ^+ τότε $\beta \in \mathcal{I}$. Το φίλτρο \mathcal{I} λέγεται θετικό αν δεν περιέχει καμία απλή ρίζα.

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τα αντικείμενα που μόλις αναφέραμε καθώς επίσης και το θετικό σύμπλεγμα σμηνών. Τα μέρη (i), (ii) και (iii) εμφανίζονται στα [5, Πρόταση 1.3], [37, Πρόταση 12.4] και [41, Θεώρημα 7.4.2] αντιστοίχως. Το τελευταίο μέρος του θεωρήματος εμφανίζεται ανεξάρτητα στα [5, 54, 66].

Θεώρημα 3.1. Έστω Φ ένα ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως

n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W , αριθμό Coxeter h και εκθέτες e_1, e_2, \dots, e_n . Θεωρούμε το θετικό αριθμό Catalan

$$N_+^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh - 1}{e_i + 1},$$

όπου το m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τα ακόλουθα είναι ίσα με $N_+^{(m)}(\Phi)$:

- (i) το πλήθος των κυρίαρχων φραγμένων περιοχών του $\mathcal{A}^m(\Phi)$,
- (ii) το πλήθος των εδρών του $\Delta_+^m(\Phi)$ και
- (iii) το πλήθος των τροχιών δράσης του W στο $L(\Phi^\vee)/(mh-1)L(\Phi^\vee)$.

Επιπλέον, για $m = 1$ ο παραπάνω αριθμός είναι ίσος με το πλήθος των θετικών φίλτρων του Φ . \square

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να ορίσουμε και να μελετήσουμε μία εκλέπτυνση του αριθμού $N_+^{(m)}(\Phi)$ και να αποδείξουμε ότι έχει παρόμοιες ιδιότητες με την αντίστοιχη εκλέπτυνση του αριθμού

$$N^{(m)}(\Phi) = \prod_{i=1}^n \frac{e_i + mh + 1}{e_i + 1},$$

την οποία περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.2.3 και υπάρχει αναλυτικά στο [6]. Πιο συγκεκριμένα, συμβολίζουμε με $H_{\alpha,k}$ το υπερεπίπεδο που περιγράφεται από την εξίσωση $(\alpha, x) = k$ και θεωρούμε το θεμελιώδη θαλαμίσκο A_o του αφρινικού παρατάγματος υπερεπιπέδων που αντιστοιχεί στο Φ . Υπενθυμίζουμε ότι τείχος μίας περιοχής R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ είναι κάθε υπερεπίπεδο το οποίο υποστηρίζει την R και λέμε ότι ένα υπερεπίπεδο $H_{\alpha,k}$ διαχωρίζει την περιοχή R από το A_o αν $(\alpha, x) > k$ για κάθε $x \in R$. Για $1 \leq i \leq n$ συμβολίζουμε με $h_i(\Phi, m)$ το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ με ακριβώς $n - i$ τείχη της μορφής $H_{\alpha,m}$ τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_o . Επίσης, συμβολίζουμε με $h_i(\Delta^m(\Phi))$ και $h_i(\Delta_+^m(\Phi))$ την i -οστή συντεταγμένη του h -διανυσματος του $\Delta^m(\Phi)$ και $\Delta_+^m(\Phi)$ αντιστοίχως. Εξετάζοντας κατά περίπτωση τα αποτελέσματα της Παραγράφου 5 στο [6] και του Θεωρήματος 10.2 στο [37] βλέπουμε ότι ισχύει $h_i(\Phi, m) = h_i(\Delta^m(\Phi))$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και σύστημα ριζών όταν $m = 1$ και για κάθε κλασικό σύστημα ριζών όταν $m \geq 1$.

Κατ' αντιστοιχία με τον αριθμό $h_i(\Phi, m)$ ορίζουμε τον $h_i^+(\Phi, m)$ ως το πλήθος των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ με ακριβώς $n - i$ τείχη της μορφής $H_{\alpha,k}$ τα οποία δεν διαχωρίζουν την R από το A_o . Από το Θεώρημα 3.1 συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των $h_i^+(\Phi, m)$ καθώς και αυτό των $h_i(\Delta_+^m(\Phi))$ είναι ίσο με $N_+^{(m)}(\Phi)$. Η σημασία αυτών των αριθμών $h_i^+(\Phi, m)$ φαίνεται στην ακόλουθη εικασία, της οποίας ανάλογη είναι η [37, Εικασία 10.1].

Εικασία 3.1. Για κάθε ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα Φ τάξεως n και $m \geq 1$ έχουμε ότι $h_i^+(\Phi, m) = h_i(\Delta_+^m(\Phi))$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου (Πόρισμα 3.9) επαληθεύει την παραπάνω εικασία όταν $m = 1$ και για κάθε κλασικό σύστημα ριζών Φ όταν $m \geq 1$. Δεύτερο βασικό αποτέλεσμα είναι κάποιες συνδυαστικές ερμηνείες των αριθμών $h_i^+(\Phi, m)$ ανάλογες με αυτές που δίνονται στο άρθρο [6] για τους αριθμούς $h_i(\Phi, m)$. Για να διατυπώσουμε αυτό το αποτέλεσμα χρειάζεται να ανακαλέσουμε (ή να τροποποιήσουμε) ορισμούς και ορολογία από το [6]. Αν $y \in T_m$ θεωρούμε τον σταθεροποιητή του y ως προς την δράση της W στο T_m . Τα στοιχεία του σταθεροποιητή αποτελούν υποομάδα της W η οποία παράγεται από ανακλάσεις. Ο ελάχιστος αριθμός ανακλάσεων που απαιτούνται για να παράγουν τον σταθεροποιητή του y ονομάζεται τάξη του y και συμβολίζεται με $rk(y)$. Επίσης, γράφουμε $rk(x)$ και στην περίπτωση όπου το x είναι μία W -τροχιά εντός του T_m , διότι οι σταθεροποιητές στοιχείων της ίδιας τροχιάς είναι συζυγείς υποομάδες της W .

Ένα υποσύνολο \mathcal{J} του Φ^+ λέγεται ιδεώδες αν το $\Phi^+ \setminus \mathcal{J}$ είναι φίλτρο του Φ^+ . Μία αύξουσα αλυσίδα $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{J}_m$ ιδεωδών του Φ^+ λέγεται γεωμετρική αλυσίδα ιδεωδών μήκους m αν ισχύει

$$(\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_j) \cap \Phi^+ \subseteq \mathcal{J}_{i+j} \quad (3.1)$$

για κάθε $i, j \geq 1$ με $i + j \leq m$, και

$$(\mathcal{I}_i + \mathcal{I}_j) \cap \Phi^+ \subseteq \mathcal{I}_{i+j} \quad (3.2)$$

για κάθε i, j , όπου $\mathcal{I}_i = \Phi^+ \setminus \mathcal{J}_i$ για $0 \leq i \leq m$ και $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_m$ για $i > m$. Μία τέτοια αλυσίδα ονομάζεται θετική όταν το ιδεώδες \mathcal{J}_m περιέχει όλες τις απλές ρίζες του Φ ή αλλιώς το αντίστοιχο φίλτρο \mathcal{I}_m είναι θετικό. Μία ρίζα $\alpha \in \Phi^+$ ονομάζεται μη αναλύσιμη τάξεως m ως προς την παραπάνω αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών αν το α είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{J}_m \setminus \mathcal{J}_{m-1}$ και επιπλέον δεν είναι δυνατόν να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta \in \mathcal{J}_i$, $\gamma \in \mathcal{J}_j$ όπου $i, j \geq 0$ και $i + j = m$. Το παρακάτω θεώρημα είναι εκλεπτύση του Θεώρηματος 3.1.

Θεώρημα 3.2. Έστω Φ ένα ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα Weyl W , m ένας μη αρνητικός ακέραιος και $O_m(\Phi)$ το σύνολο τροχιών δράσης της W στο $L(\Phi^\vee)/(mh - 1)L(\Phi^\vee)$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ τα ακόλουθα είναι ίσα:

- (i) ο αριθμός $h_{n-i}^+(\Phi, m)$,
- (ii) το πλήθος των θετικών γεωμετρικών αλυσίδων ιδεωδών του Φ οι οποίες έχουν i το πλήθος μη αναλύσιμα στοιχεία τάξεως m ,
- (iii) το πλήθος των τροχιών $x \in O_m(\Phi)$ με $rk(x) = i$ και

(iv) το πλήθος των σημείων του $L(\Phi^\vee) \cap (mh - 1)\bar{A}_\circ$ τα οποία βρίσκονται σε i τείχη του $(mh - 1)A_\circ$.

Ειδικότερα, το πλήθος των θετικών γεωμετρικών αλυσίδων ιδεωδών του Φ^+ μήκους m είναι ίσο με $N_+^{(m)}(\Phi)$.

Η ισοδυναμία των (iii) και (iv) προκύπτει από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 7.4 του [41]. Στην ειδική περίπτωση όπου $m = 1$ το παράταγμα $\mathcal{A}^m(\Phi)$ αποτελείται από υπερεπίπεδα της μορφής H_α και $H_{\alpha,1}$, ονομάζεται *Καταλάνειο παράταγμα υπερεπιπέδων* του Φ και συμβολίζεται με Cat_Φ . Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση η αντίστοιχη γεωμετρική αλυσίδα ιδεωδών αποτελείται από ένα και μοναδικό ιδεώδες \mathcal{J} . Η αλυσίδα αυτή είναι θετική αν όλες οι απλές ρίζες του Φ είναι στοιχεία του \mathcal{J} ή ισοδύναμα αν το φίλτρο $\mathcal{I} = \Phi^+ \setminus \mathcal{J}$ είναι θετικό. Σε αυτήν την περίπτωση τα μη αναλύσιμα στοιχεία τάξεως ένα είναι τα μεγιστικά στοιχεία του \mathcal{J} . Μέρος του παρακάτω πορίσματος εμφανίζεται στο [66, Παράγραφος 6].

Πόρισμα 3.1. Έστω Φ ένα ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα Weyl W και $O(\Phi)$ το σύνολο τροχιών δράσης της W στο $L(\Phi^\vee)/(h-1)L(\Phi^\vee)$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ τα ακόλουθα είναι ίσα:

- (i) το πλήθος ιδεωδών του Φ τα οποία περιέχουν όλες τις απλές ρίζες του Φ και έχουν i το πλήθος μεγιστικά στοιχεία,
- (ii) το πλήθος $h_{n-i}^+(\Phi)$ των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών R του Cat_Φ με i τείχη της μορφής $H_{\alpha,k}$ τα οποία δεν διαχωρίζουν την R από το A_\circ ,
- (iii) το πλήθος των τροχιών $x \in O(\Phi)$ με $rk(x) = i$,
- (iv) το πλήθος των σημείων του $L(\Phi^\vee) \cap (h-1)\bar{A}_\circ$ τα οποία βρίσκονται σε i τείχη του $(h-1)A_\circ$ και
- (v) η συντεταγμένη $h_{n-i}(\Delta_+(\Phi))$ του h -διανύσματος του $\Delta_+(\Phi)$.

Στο παρακάτω θεώρημα, κάνοντας χρήση φίλτρων του Φ , δίνουμε μία διαφορετική ερμηνεία για τους αριθμούς $h_i^+(\Phi)$.

Θεώρημα 3.3. Για κάθε ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα Φ και μη αρνητικό ακέραιο i , ο αριθμός $h_i^+(\Phi)$ είναι ίσος με το πλήθος των θετικών φίλτρων του Φ^+ τα οποία έχουν i το πλήθος ελαχιστικά στοιχεία.

Στο άρθρο [29] ο Chapoton όρισε κάποιες γεννήτριες συναρτήσεις πάνω σε κυρίαρχες περιοχές του Καταλάνειου παρατάγματος υπερεπιπέδων Cat_Φ και πλευρές του συμπλέγματος σημνών $\Delta(\Phi)$ και διατύπωσε την εικασία ότι αυτές συνδέονται με μία συγκεκριμένη απαριθμητική σχέση [29, Εικασία 6.1]. Αυτή η σχέση γενικεύεται απευθείας και στην περίπτωση του m -οστού Καταλάνειου παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και του γενικευμένου συμπλέγματος σημνών

$\Delta^m(\Phi)$. Πιο συγκεκριμμένα, το F -τρίγωνο του $\Delta^m(\Phi)$ ορίζεται από την γεννήτρια συνάρτηση

$$F_{\Phi}^{(m)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n f_{k,\ell}(\Delta^m(\Phi)) x^k y^{\ell}, \quad (3.3)$$

όπου $f_{k,\ell}(\Delta^m(\Phi))$ είναι το πλήθος των πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ με k χρωματισμένες θετικές ρίζες και ℓ αρνητικές απλές ρίζες. Παρατηρήστε ότι $\sum_{i+j=k} f_{i,j}(\Delta^m(\Phi)) = f_{k-1}(\Delta^m(\Phi))$ και $f_{k,0}(\Delta^m(\Phi)) = f_{k-1}(\Delta_+^m(\Phi))$. Το H -τρίγωνο του παρατάγματος $\mathcal{A}^m(\Phi)$ ορίζεται από την γεννήτρια συνάρτηση

$$H_{\Phi}^{(m)}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n h_{i,j}(\Phi, m) x^i y^j, \quad (3.4)$$

όπου $h_{i,j}(\Phi, m)$ είναι το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ με i τείχη της μορφής $H_{\alpha,m}$ όπου $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Pi$ και j τείχη της μορφής $H_{\alpha,m}$ όπου $\alpha \in \Pi$, τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_0 . Παρατηρήστε ότι $\sum_{i+j=k} h_{i,j}(\Phi, m) = h_{n-k}(\Phi, m)$.

Η παρακάτω εικασία διατυπώθηκε από τον Charoton [29, Εικασία 6.1] για $m = 1$. Εμείς την γενικεύουμε για κάθε $m \geq 1$ και την αποδεικνύουμε για όλα τα συστήματα ριζών όταν $m = 1$ και για τα κλασικά όταν $m \geq 1$.

Εικασία 3.2. Για κάθε κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως n και μή αρνητικό ακέραιο m ισχύει η σχέση

$$F_{\Phi}^{(m)}(x, y) = x^n H_{\Phi}^{(m)}\left(\frac{x+1}{x}, \frac{1+y}{x}\right). \quad (3.5)$$

Η δομή του κεφαλαίου αυτού είναι η εξής. Το Θεώρημα 3.2 αποδεικνύεται στις Παραγράφους 3.3 και 3.4 μέσω δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων. Η πρώτη από αυτές είναι ουσιαστικά περιορισμός της απεικόνισης της Παραγράφου 3 στο [6] και απεικονίζει το σύνολο των θετικών γεωμετρικών αλυσίδων ιδεωδών του Φ^+ μήκους m στο σύνολο των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ (Θεώρημα 3.5) ενώ η δεύτερη απεικονίζει το παραπάνω σύνολο περιοχών στο σύνολο των W -τροχιών του T_m . Στην περίπτωση όπου $m = 1$ η σύνθεση των δύο παραπάνω αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων είναι ουσιαστικά η απεικόνιση του Sommers [66] από το σύνολο των θετικών φίλτρων του Φ^+ στο $L(\Phi^V) \cap (h-1)\overline{A}_0$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 είναι ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 1.2 στο [6]. Η βασική διαφορά είναι ότι ο μοναδικός θαλαμίσκος κάθε κυρίαρχης περιοχής του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ ο οποίος είναι ο πιο απομακρυσμένος από το A_0 παίζει τον ρόλο που έχει στο [6] ο μοναδικός θαλαμίσκος της περιοχής που είναι ο πλησιέστερος στο A_0 . Η ύπαρξη αυτών των θαλαμίσκων μελετήθηκε αρχικά για $m = 1$ από τον Sommers [66]. Στην Παράγραφο 3.5 αποδεικνύουμε την Εικασία 3.1 όταν $m = 1$

και για κάθε κλασικό σύστημα ριζών όταν $m \geq 1$ (Πόρισμα 3.9) χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $h_i(\Phi, m) = h_i(\Delta^m(\Phi))$ σε αυτές τις περιπτώσεις. Βασικό στοιχείο στην απόδειξη μας είναι μία νέα συνδυαστική ερμηνεία (βλ. Θεώρημα 3.8 (iii) και Θεώρημα 3.9 (iii)) των f -αριθμών οι οποίοι ορίζονται μέσω των $h_i(\Phi, m)$ και $h_i^+(\Phi, m)$ από την γνωστή σχέση που συνδέει το f -διάγραμμα με το h -διάγραμμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος. Επίσης, στην Παράγραφο 3.6, εκλεπτύνοντας περαιτέρω την παραπάνω συνδυαστική ερμηνεία αποδεικνύουμε την Εικασία 3.2 όταν $m = 1$ και για κάθε κλασικό σύστημα ριζών όταν $m \geq 1$. Στην Παράγραφο 3.7 υπολογίζουμε τους αριθμούς του Θεωρήματος 3.2 για τα κλασικά συστήματα ριζών και αυτούς του Πορίσματος 3.1 για τα υπόλοιπα συστήματα ριζών. Επίσης, αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3.3 εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία της κατανομής του συνόλου των φίλτρων του Φ^+ από τον αριθμό των ελαχιστικών στοιχείων, η οποία παρατηρήθηκε από τον Panyushev [54]. Στην Παράγραφο 3.2 συνοψίζουμε ορισμένα στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούμε στη συνέχεια. Τελειώνουμε το κεφάλαιο με ορισμένες παρατηρήσεις (Παράγραφος 3.8).

Εκτός από το άρθρο [6], κίνητρο για το συγκεκριμένο μέρος της διατριβής αποτέλεσαν και τα άρθρα των Fomin και Reading [37], Fomin και Zelevinsky [40] και Sommers [66].

3.2 Προκαταρκτικά

Σε αυτήν την παράγραφο εισάγουμε συμβολισμούς και ορολογία και ανακαλούμε ορισμένα στοιχεία τα οποία θα χρειαστούμε αργότερα.

Συστήματα ριζών και ομάδες Weyl. Θεωρούμε ένα κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ τάξεως n με θετικό σύστημα Φ^+ και σύνολο απλών ριζών $\Pi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Για $1 \leq i \leq n$ συμβολίζουμε με s_i την ανάκλαση μέσω του υπερεπιπέδου H_{σ_i} , την οποία ονομάζουμε *απλή ανάκλαση*. Συχνά θα γράφουμε Φ_I αντί για Φ , όπου το I είναι ένα σύνολο σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των απλών ριζών Π και θα συμβολίζουμε με Φ_J το παραβολικό υποσύστημα που αντιστοιχεί στο $J \subseteq I$. Αν το Φ είναι ανάγωγο συμβολίζουμε με $\tilde{\alpha}$ την *μεγιστική ρίζα* του, δηλαδή την ρίζα για την οποία το $\tilde{\alpha} - \alpha$ είναι μη αρνητικό άθροισμα θετικών ριζών για κάθε $\alpha \in \Phi^+$. Τα ακόλουθα γνωστά λήμματα θα χρησιμοποιηθούν όπως και στο [6].

Λήμμα 3.1. [6, Λήμμα 2.1] (i) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \Phi^+$ με $r \geq 2$ και $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \in \Phi^+$ τότε υπάρχει i με $1 \leq i \leq r$ τέτοιο ώστε $\alpha - \alpha_i \in \Phi^+$.

(ii) [54, 66] Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \Phi$ και $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r \in \Phi$ τότε $\alpha_1 = \alpha$ ή υπάρχει i με $2 \leq i \leq r$ τέτοιο ώστε $\alpha_1 + \alpha_i \in \Phi \cup \{0\}$. \square

Λήμμα 3.2. [6, Λήμμα 2.2] *Αν το Φ είναι ανάγωγο και $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n c_i \sigma_i$ τότε $\sum_{i=1}^n c_i = h - 1$. \square*

Στο εξής υποθέτουμε ότι το σύστημα ριζών Φ είναι ανάγωγο. Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής, η ομάδα W δρα στο πλέγμα συρριζών $L(\Phi^\vee)$, στο υποπλέγμα αυτού $(mh-1)L(\Phi^\vee)$ και επομένως στο πηλίκο $T_m(\Phi) = L(\Phi^\vee)/(mh-1)L(\Phi^\vee)$. Συμβολίζουμε με $O_m(\Phi)$ το σύνολο τροχιών δράσεως της ομάδας W στο $T_m(\Phi)$ και γράφουμε $T(\Phi)$ και $O(\Phi)$ όταν $m = 1$. Θεωρούμε την αφφινική ομάδα W_α και υπενθυμίζουμε ότι αυτή η ομάδα είναι το ημιευθύ γινόμενο της ομάδας W με την ομάδα μεταφορών που παράγεται από το πλέγμα συρριζών $L(\Phi^\vee)$. Ένα ελάχιστο σύνολο γεννητόρων της W_α είναι το σύνολο των απλών αφφινικών ανακλάσεων $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$, όπου s_0 είναι η αφφινική ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $H_{\tilde{\alpha},1}$. Αν $w \in W_\alpha$ και $0 \leq i \leq n$, ονομάζουμε την ανάκλαση s_i δεξιά άνοδο του w αν $\ell(ws_i) > \ell(w)$, όπου $\ell(w)$ είναι το μήκος της ελάχιστης παραγοντοποίησης του w σε γινόμενο απλών αφφινικών ανακλάσεων. Η ομάδα W_α δρα απλά μεταβατικά στο σύνολο των θαλαμίσκων του αφφινικού παρατάγματος υπερεπιπέδων \tilde{A}_Φ και ο θεμελιώδης θαλαμίσκος A_o είναι το σύνολο $A_o = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < (\sigma_i, x) \text{ για } 1 \leq i \leq n \text{ και } (\tilde{\alpha}, x) < 1\}$. Κάθε θαλαμίσκος μπορεί να γραφεί ως wA_o για ένα μοναδικό $w \in W_\alpha$. Επίσης, δεδομένου ενός $\alpha \in \Phi^+$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος $r = r(\alpha, w)$ για τον οποίο ισχύει $r - 1 < (\alpha, x) < r$ για κάθε $x \in wA_o$. Το ακόλουθο λήμμα είναι αναδιατύπωση του βασικού αποτελέσματος του άρθρου [61].

Λήμμα 3.3. [61, Θεώρημα 5.2] *Έστω r_α ένας ακέραιος αριθμός για κάθε $\alpha \in \Phi^+$. Υπάρχει $w \in W_\alpha$ τέτοιο ώστε $r(w, \alpha) = r_\alpha$ για κάθε $\alpha \in \Phi^+$ αν και μόνον αν*

$$r_\alpha + r_\beta - 1 \leq r_{\alpha+\beta} \leq r_\alpha + r_\beta \quad (3.6)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \Phi^+$ με $\alpha + \beta \in \Phi^+$. \square

Λέμε ότι δύο ανοιχτές περιοχές του \mathbb{R}^n διαχωρίζονται με ένα υπερεπίπεδο $H \in \tilde{A}_\Phi$ αν περιέχονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς το H . Αν το R είναι περιοχή ή η κλειστότητα μίας περιοχής ενός υποπαρατάγματος του \tilde{A}_Φ (ειδικότερα, αν το R είναι δώμα ή θαλαμίσκος) τότε ονομάζουμε τα υπερεπίπεδα τα οποία υποστηρίζουν κάποια έδρα της κλειστότητας του R , *τείχη* του R .

Γενικευμένο σύμπλεγμα σημνών: Έστω Φ ένα χρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών (ενδεχομένως μη ανάγωγο) τάξεως n και ένας μη αρνητικός ακέραιος m . Θεωρούμε το γενικευμένο σύμπλεγμα σημνών $\Delta^m(\Phi)$, το οποίο είναι αγνό διαστάσεως $n - 1$ [37, Θεώρημα 3.9]. Αν $\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2$ τότε το $\Delta^m(\Phi)$ είναι η μονοπλεκτική σύνδεση των $\Delta^m(\Phi_1)$ και $\Delta^m(\Phi_2)$. Θεωρούμε επίσης το θετικό μέρος $\Delta^m_+(\Phi)$ του $\Delta^m(\Phi)$ το οποίο είναι το υποσύμπλεγμα με σύνολο κορυφών

το σύνολο $\Phi_{>0}^m$ των χρωματισμένων θετικών ριζών. Για $1 \leq i \leq n$ ορίζουμε τους αριθμούς $f_{i-1}(\Delta^m(\Phi))$ και $f_{i-1}(\Delta_+^m(\Phi))$ ως το πλήθος των $(i-1)$ -διάστατων πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ και $\Delta_+^m(\Phi)$ αντιστοίχως. Αυτοί οι αριθμοί σχετίζονται με τους αριθμούς $h_i(\Delta^m(\Phi))$ και $h_i(\Delta_+^m(\Phi))$ μέσω των παρακάτω εξισώσεων

$$\sum_{i=1}^n f_{i-1}(\Delta^m(\Phi))(x-1)^{n-i} = \sum_{i=1}^n h_i(\Delta^m(\Phi))x^{n-i} \quad (3.7)$$

και

$$\sum_{i=1}^n f_{i-1}(\Delta_+^m(\Phi))(x-1)^{n-i} = \sum_{i=1}^n h_i(\Delta_+^m(\Phi))x^{n-i} \quad (3.8)$$

αντιστοίχως.

Το αρνητικό μέρος μιας πλευράς c του $\Delta^m(\Phi)$ είναι το σύνολο δεικτών $J \subseteq I$, όπου $\Phi = \Phi_I$, οι οποίοι αντιστοιχούν στις απλές αρνητικές ρίζες του c . Το παρακάτω λήμμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.7 του [37].

Λήμμα 3.4. Έστω σύστημα ριζών Φ και I σύνολο δεικτών των απλών ριζών του Φ . Για κάθε $J \subseteq I$ η απεικόνιση $c \mapsto c \setminus \{-\alpha_i : i \in J\}$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των πλευρών του $\Delta^m(\Phi_I)$ με αρνητικό μέρος J στο σύνολο των πλευρών του $\Delta_+^m(\Phi_{I \setminus J})$. Ειδικότερα,

$$f_{k-1}(\Delta^m(\Phi_I)) = \sum_{J \subseteq I} f_{k-|J|-1}(\Delta_+^m(\Phi_{I \setminus J})), \quad (3.9)$$

όπου $f_{i-1}(\Delta) = 0$ όταν $i < 0$ για οποιοδήποτε σύμπλεγμα Δ . \square

Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει το παραπάνω λήμμα στις περιπτώσεις όπου $\Phi = A_{n-1}$ και B_n , από την αναπαράσταση του αντίστοιχου συμπλέγματος σμηνών με πολυγωνικές υποδιαρέσεις [37] (Παράγραφος 1.3.4). Τέλος, αναφέρουμε ότι η σχέση (3.9) εμφανίζεται στο περιεχόμενο των αναπαραστάσεων quiver [50, Παράγραφος 6].

Περιοχές του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και αλυσίδες φίλτρων: Έστω Φ ένα ανάγωγο και χρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως n . Για $0 \leq i \leq n$ ορίζουμε $h_i(\Phi, m)$ ως το πλήθος των κυρίαρχων περιοχών R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ στις οποίες ακριβώς $n-i$ τείχη της μορφής $H_{\alpha, m}$ διαχωρίζουν την R από το A_\circ . Θεωρούμε μία γεωμετρική αλυσίδα \mathcal{I} φίλτρων του Φ^+

$$\Phi^+ = \mathcal{I}_0 \supseteq \mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{I}_m$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (3.2) και (3.1). Μία θετική ρίζα α είναι μη αναλύσιμη τάξεως m ως προς την αλυσίδα \mathcal{I} αν $\alpha \in \mathcal{I}_m$ και δεν είναι δυνατόν να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta \in \mathcal{I}_i$, $\gamma \in \mathcal{I}_j$, $i, j \geq 0$ και $i+j = m$. Τώρα θεωρούμε το σύνολο $R_{\mathcal{I}}$ σημείων $x \in \mathbb{R}^n$ τα οποία ικανοποιούν

$$\begin{aligned} (\alpha, x) &> r, & \text{αν } \alpha \in \mathcal{I}_r \\ 0 < (\alpha, x) &< r, & \text{αν } \alpha \in \mathcal{J}_r \end{aligned} \quad (3.10)$$

για $0 \leq r \leq m$, όπου $\mathcal{J}_r = \Phi^+ \setminus \mathcal{I}_r$. Το παρακάτω θεώρημα είναι συνδυασμός των Θεωρημάτων 3.6 και 3.11 του [6].

Θεώρημα 3.4. *Η απεικόνιση $\mathcal{I} \mapsto R_{\mathcal{I}}$ είναι αμφιμονοσήμαντη από το σύνολο των γεωμετρικών αλυσίδων φίλτρων μήκους m στο Φ^+ στο σύνολο των κυρίαρχων περιοχών του $\mathcal{A}^m(\Phi)$. Επίσης, μία ρίζα $\alpha \in \Phi^+$ είναι μη αναλύσιμη τάξεως m ως προς την \mathcal{I} αν και μόνον αν το υπερεπίπεδο $H_{\alpha,m}$ είναι τείχος της περιοχής $R_{\mathcal{I}}$ το οποίο την χωρίζει από το A_{\circ} .*

Ειδικότερα το $h_i(\Phi, m)$ είναι ίσο με το πλήθος των γεωμετρικών αλυσίδων φίλτρων του Φ^+ μήκους m οι οποίες έχουν $n - i$ μη αναλύσιμες ρίζες τάξεως m . \square

Τροποποιώντας τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως ή χρησιμοποιώντας την ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να ορίσουμε τους αριθμούς $h_i(\Phi, m)$ όταν το Φ δεν είναι ανάγωγο. Προφανώς ισχύει

$$h_k(\Phi_1 \times \Phi_2, m) = \sum_{i+j=k} h_i(\Phi_1, m) h_j(\Phi_2, m)$$

όπου Φ_1 και Φ_2 είναι χρυσταλλογραφικά συστήματα.

Αντιστροφή Möbius: Έστω (P, \leq) ένα πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Η συνάρτηση Möbius πάνω σε ένα ζεύγος στοιχείων $x \leq y$ του P ορίζεται ως:

$$\mu(x, x) = 1, \text{ για κάθε } x \in P$$

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \text{ για κάθε } x < y \text{ στο } P.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή ως “αντιστροφή Möbius”.

Πρόταση 3.1. [67, Πρόταση 3.7.1] *Αν $f, g : P \mapsto \mathbb{C}$ τότε*

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \quad \text{για κάθε } x \in P$$

αν και μόνον αν

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x) \quad \text{για κάθε } x \in P.$$

\square

3.3 Αλυσίδες ιδεωδών, φραγμένες περιοχές και μεγιστικοί θαλαμίσκοι

Σε αυτήν την παράγραφο γενικεύουμε ορισμένα από τα αποτελέσματα του Sommers [66] για φραγμένες κυρίαρχες περιοχές του παρατάγματος Cat_{Φ} και φίλτρα του Φ^+ σε κυρίαρχες φραγμένες περιοχές του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και θετικές γεωμετρικές αλυσίδες ιδεωδών του Φ^+ μήκους m και αποδεικνύουμε την ισότητα των αριθμών που εμφανίζονται στα (i) και (ii) του Θεωρήματος 3.2. Τα αποτελέσματα καθώς και οι αποδείξεις αυτής και της επόμενης παραγράφου είναι ανάλογα με αυτά των Παραγράφων 3 και 4 του [6].

Έστω Φ ένα ανάγωγο χρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως n και \mathcal{J} μια θετική γεωμετρική αλυσίδα ιδεωδών

$$\emptyset = \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_m$$

του Φ^+ μήκους m τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.2) και (3.1), όπου $\mathcal{I}_i = \Phi^+ \setminus \mathcal{J}_i$ και $\Pi \subseteq \mathcal{J}_m$. Ορίζουμε

$$r_{\alpha}(\mathcal{J}) = \min\{r_1 + r_2 + \cdots + r_k : \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \text{ με } \alpha_i \in \mathcal{J}_{r_i} \text{ για κάθε } i\}$$

για κάθε $\alpha \in \Phi^+$. Παρατηρήστε ότι το $r_{\alpha}(\mathcal{J})$ είναι καλώς ορισμένο διότι $\Pi \subseteq \mathcal{J}_m$. Επίσης ισχύει ότι $r_{\alpha}(\mathcal{J}) \leq r$ αν και μόνον αν $\alpha \in \mathcal{J}_r$ και συνεπώς $r_{\alpha}(\mathcal{J}) = 1$ αν και μόνον αν $\alpha \in \mathcal{J}_1$.

Λήμμα 3.5. Αν $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \in \Phi^+$ και $\alpha_i \in \Phi^+$ για κάθε i τότε

$$r_{\alpha}(\mathcal{J}) \leq \sum_{i=1}^k r_{\alpha_i}(\mathcal{J}).$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του ορισμού. □

Λήμμα 3.6. Έστω ότι $\alpha \in \Phi^+$ και $r_{\alpha}(\mathcal{J}) = r$.

(i) Αν $r \leq m$ τότε $\alpha \in \mathcal{J}_r$.

(ii) Αν $r > m$ τότε υπάρχουν $\beta, \gamma \in \Phi^+$ με $\alpha = \beta + \gamma$ και $r = r_{\beta}(\mathcal{J}) + r_{\gamma}(\mathcal{J})$. Επιπλέον, μπορούμε να διαλέξουμε το β έτσι ώστε $r_{\beta}(\mathcal{J}) \leq m$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το (i) με επαγωγή ως προς r , θεωρώντας την περίπτωση $r = 1$ τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι το (i) ισχύει για κάθε $1 \leq i \leq r - 1$ και το αποδεικνύουμε για $i = r$. Θεωρούμε λοιπόν $\alpha \in \Phi^+$ με $r_{\alpha}(\mathcal{J}) = r \leq m$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε $\alpha = \alpha_{r_1} + \alpha_{r_2} + \cdots + \alpha_{r_{\ell}}$ όπου $\alpha_{r_i} \in \mathcal{J}_{r_i}$ και $r_1 + r_2 + \cdots + r_{\ell} = r$. Αν $\ell = 1$ τότε προφανώς $\alpha \in \mathcal{J}_{r_1} = \mathcal{J}_r$. Αν $\ell > 1$ τότε λόγω του Λήμματος 3.1 (i) υπάρχει κάποιο r_i τέτοιο ώστε $\alpha - \alpha_{r_i} \in \Phi^+$. Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $r_i = r_1$. Από τον ορισμό προκύπτει

ότι $r_{\alpha-\alpha_{r_1}}(\mathcal{J}) = r_2 + \dots + r_\ell = r - r_1 < r$ και συνεπώς $\alpha - \alpha_{r_1} \in \mathcal{J}_{r-r_1}$ από επαγωγή. Αφού $\alpha = (\alpha - \alpha_{r_1}) + \alpha_{r_1}$, $\alpha - \alpha_{r_1} \in \mathcal{J}_{r-r_1}$ και $\alpha_{r_1} \in \mathcal{J}_{r_1}$, τότε από την συνθήκη (3.1) προκύπτει ότι $\alpha \in \mathcal{J}_r$ το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. Για την απόδειξη του (ii) θεωρούμε και πάλι $\alpha = \alpha_{r_1} + \alpha_{r_2} + \dots + \alpha_{r_\ell}$ με $\alpha_{r_i} \in \mathcal{J}_{r_i}$ και $r_1 + r_2 + \dots + r_\ell = r$. Αφού $r > m$ τότε θα πρέπει $\ell \geq 2$. Επομένως, λόγω του Λήμματος 3.1 (i) υπάρχει i τέτοιο ώστε $\alpha - \alpha_{r_i} \in \Phi^+$. Θέτουμε $\beta = \alpha_{r_i}$ και $\gamma = \alpha - \alpha_{r_i}$. Από το μέρος (i) του λήμματος έχουμε ότι $r_\beta(\mathcal{J}) \leq r_i \leq m$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Λήμμα 3.7. *Αν $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi^+$ και a, b είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) \leq a + b$ τότε $r_\alpha(\mathcal{J}) \leq a$ ή $r_\beta(\mathcal{J}) \leq b$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς $r = r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J})$. Αν $r \leq m$ τότε χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $a + b \leq m$. Διότι, αν $a + b > m$ τότε βρίσκουμε $a' \leq a$ και $b' \leq b$ τέτοια ώστε $r \leq a' + b' \leq m$ και αναγόμεσθε στην προηγούμενη περίπτωση. Έχουμε $\alpha + \beta \in \mathcal{J}_r \subseteq \mathcal{J}_{a+b}$ λόγω του Λήμματος 3.6 (i). Όμως, αφού $\alpha + \beta \in \mathcal{J}_{a+b}$ τότε $\alpha \in \mathcal{J}_a$ ή $\beta \in \mathcal{J}_b$ λόγω της συνθήκης (3.1) και συνεπώς $r_\alpha(\mathcal{J}) \leq a$ ή $r_\beta(\mathcal{J}) \leq b$. Αν $r > m$ τότε, λόγω του Λήμματος 3.6 (ii), μπορούμε να γράψουμε $\alpha + \beta = \eta + \theta$ με $\eta, \theta \in \Phi^+$, $r_\eta(\mathcal{J}) = t$, $r_\theta(\mathcal{J}) = r - t$ και $0 < t \leq m < r$. Αν $\alpha = \eta$ και $\beta = \theta$ ή αντιστρόφως, τότε $r_\alpha(\mathcal{J}) + r_\beta(\mathcal{J}) = r_\eta(\mathcal{J}) + r_\theta(\mathcal{J}) = r \leq a + b$ και το ζητούμενο ισχύει. Διαφορετικά, επειδή ισχύει ότι

$$(\alpha, \eta) + (\alpha, \theta) + (\beta, \eta) + (\beta, \theta) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) > 0,$$

τότε τουλάχιστον ένας από τους όρους του αριστερού αθροίσματος θα είναι θετικός. Έτσι, λόγω του Λήμματος 9.4 του [42] τουλάχιστον ένα από τα $\alpha - \eta = \theta - \beta$ και $\alpha - \theta = \eta - \beta$ θα είναι ρίζα του Φ . Ανταλλάσσοντας ενδεχομένως τους ρόλους των α, β και η, θ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha - \eta \in \Phi^+$. Έστω ότι $\alpha = \eta + \mu$ όπου $\mu \in \Phi^+$, έτσι ώστε $\beta = \theta - \mu$. Αν $r_\alpha(\mathcal{J}) \leq a$ τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν $r_\alpha(\mathcal{J}) > a$ τότε $r_\eta(\mathcal{J}) + r_\mu(\mathcal{J}) > a$ λόγω του Λήμματος 3.5 και επομένως $r_\mu(\mathcal{J}) > a - t$. Αφού $\theta = \beta + \mu$ και $r_\theta(\mathcal{J}) = r - t$ εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση για $r_{\beta+\mu}(\mathcal{J}) \leq (r - a) + (a - t)$. Αφού $r_\mu(\mathcal{J}) > a - t$ τότε $r_\beta(\mathcal{J}) \leq r - a \leq b$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Πόρισμα 3.2. *Έχουμε ότι*

$$r_\alpha(\mathcal{J}) + r_\beta(\mathcal{J}) - 1 \leq r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) \leq r_\alpha(\mathcal{J}) + r_\beta(\mathcal{J})$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \Phi^+$ με $\alpha + \beta \in \Phi^+$.

Απόδειξη. Η δεξιά ανισότητα είναι ειδική περίπτωση του Λήμματος 3.5 ενώ η αριστερή προκύπτει από το Λήμμα 3.7 θέτοντας $a = r_\alpha(\mathcal{J}) - 1$ και $b = r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) - a$. \square

Συμβολίζουμε με $R_{\mathcal{J}}$ το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^n τα οποία ικανοποιούν τις ανισότητες στο (3.10). Αφού $\Pi \subseteq \mathcal{J}_m$ τότε είναι $0 < (\sigma_i, x) < m$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $x \in R_{\mathcal{J}}$ και επομένως το σύνολο $R_{\mathcal{J}}$ είναι φραγμένο.

Πρόταση 3.2. *Υπάρχει $w \in W_{\alpha}$ τέτοιο ώστε $r(w, \alpha) = r_{\alpha}(\mathcal{J})$ για κάθε $\alpha \in \Phi^+$. Επιπλέον $wA_{\circ} \subseteq R_{\mathcal{J}}$. Ειδικότερα, το σύνολο $R_{\mathcal{J}}$ είναι μή κενό.*

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι συνέπεια του Λήμματος 3.3 και του Πορίσματος 3.2. Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε $\alpha \in \Phi^+$ και $1 \leq r \leq m$. Από το Λήμμα 3.6 (i) συμπεραίνουμε ότι $r_{\alpha}(\mathcal{J}) \leq r$ αν και μόνον αν $\alpha \in \mathcal{J}_r$. Επομένως, από τις ανισότητες

$$r_{\alpha}(\mathcal{J}) - 1 < (\alpha, x) < r_{\alpha}(\mathcal{J}),$$

οι οποίες ισχύουν για $x \in wA_{\circ}$, συμπεραίνουμε ότι $wA_{\circ} \subseteq R_{\mathcal{J}}$. \square

Έστω ψ η απεικόνιση που στέλνει το σύνολο $R_{\mathcal{J}}$ στη θετική γεωμετρική αλυσίδα \mathcal{J} ιδεωδών του Φ^+ μήκους m . Αντιστρόφως, δεδομένης μίας φραγμένης κυρίαρχης περιοχής R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ ορίζουμε $\phi(R)$ ως την αλυσίδα $\emptyset = \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{J}_m$ όπου \mathcal{J}_r είναι το σύνολο των $\alpha \in \Phi^+$ για τα οποία ισχύει $(\alpha, x) < r$ για κάθε $x \in R$. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε \mathcal{J}_r είναι ιδεώδες του Φ^+ .

Θεώρημα 3.5. *Η απεικόνιση ψ είναι αμφιμονοσήμαντη από το σύνολο των θετικών γεωμετρικών αλυσίδων ιδεωδών του Φ^+ μήκους m στο σύνολο των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και η απεικόνιση ϕ είναι η αντίστροφή της.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση ψ είναι καλώς ορισμένη, διότι από την Πρόταση 3.2 εξασφαλίζουμε ότι το σύνολο $R_{\mathcal{J}}$ είναι μή κενό και φραγμένο. Για να διαπιστώσουμε ότι και η ϕ είναι καλώς ορισμένη παρατηρούμε ότι αν η R είναι μια φραγμένη κυρίαρχη περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και αν $(\alpha, x) < i$ και $(\beta, x) < j$ ισχύουν για κάθε $x \in R$ τότε ισχύει ότι $(\alpha + \beta, x) < i + j$ για κάθε $x \in R$ και επομένως η $\phi(\mathcal{J})$ ικανοποιεί την συνθήκη (3.1). Ομοίως η $\phi(\mathcal{J})$ ικανοποιεί την (3.2). Επίσης από το [5, Λήμμα 4.1] συμπεραίνουμε ότι $\Pi \subseteq \mathcal{J}_m$. Τέλος, είναι προφανές ότι οι απεικονίσεις ϕ και ψ είναι αντίστροφες η μία της άλλης. \square

Έστω $R = R_{\mathcal{J}}$ μία φραγμένη κυρίαρχη περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$, όπου $\mathcal{J} = \phi(R)$. Συμβολίζουμε με w_R το στοιχείο της αφινικής ομάδας W_{α} το οποίο αντιστοιχεί στην αλυσίδα \mathcal{J} μέσω της Πρότασης 3.2. Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι ο θαλαμίσκος w_RA_{\circ} είναι ο πιο απομακρυσμένος από το A_{\circ} θαλαμίσκος εντός της R . Στην ειδική περίπτωση $m = 1$ η υπέρξη ενός τέτοιου θαλαμίσκου διαπιστώθηκε από τον Sommers [66, Πρόταση 5.4].

Πρόταση 3.3. Έστω R μία φραγμένη κυρίαρχη περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$. Το στοιχείο w_R είναι το μοναδικό $w \in W_\alpha$ τέτοιο ώστε $wA_\circ \subseteq R$ και το οποίο έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $\alpha \in \Phi^+$, $r \in \mathbb{Z}$ με $(\alpha, x) > r$ για κάποιο $x \in R$ τότε $(\alpha, x) > r$ για κάθε $x \in wA_\circ$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in \Phi^+$ τέτοιο ώστε $(\alpha, x) > r$ για κάποιο $x \in R = R_{\mathcal{J}}$ και $r \in \mathbb{Z}$. Για να δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα $(\alpha, x) > r$ για κάθε $x \in w_RA_\circ$ αρκεί να δείξουμε ότι $r_\alpha(\mathcal{J}) > r$. Γράφουμε λοιπόν $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ με $\alpha_i \in \mathcal{J}_{r_j}$, $1 \leq j \leq k$ και $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r_\alpha(\mathcal{J})$. Έχουμε ότι $(\alpha_i, x) < r_i$ για κάθε $x \in R$ και επομένως $(\alpha, x) < r_\alpha(\mathcal{J})$ για κάθε $x \in R$. Άρα, αν $(\alpha, x) > r$ για κάποιο $x \in R$ θα πρέπει να ισχύει ότι $r_\alpha(\mathcal{J}) > r$. Η μοναδικότητα είναι προφανής. \square

Τώρα εισάγουμε την έννοια του μη αναλύσιμου στοιχείου ως προς την αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών \mathcal{J} .

Ορισμός 3.1. Έστω $1 \leq r \leq m$. Μία ρίζα $\alpha \in \Phi^+$ λέγεται αναλύσιμη τάξεως r ως προς την αλυσίδα \mathcal{J} αν $\alpha \in \mathcal{J}_r$ και

- (i) $r_\alpha(\mathcal{J}) = r$,
- (ii) δεν είναι δυνατόν να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta \in \mathcal{J}_i$ και $\gamma \in \mathcal{J}_j$ με δείκτες $i, j \geq 1$ και $i + j = r$ και
- (iii) αν $r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) = t \leq m$ για κάποιο $\beta \in \Phi^+$ τότε $\beta \in \mathcal{J}_{t-r}$.

Παρατηρήστε ότι λόγω του Λήμματος 3.6 (i), η υπόθεση ότι $\alpha \in \mathcal{J}_r$ είναι περιττή διότι έπεται από την συνθήκη (i) του ορισμού. Στην περίπτωση όπου $r = m$ ο παραπάνω ορισμός ανάγεται σε αυτόν που δώσαμε στην Παράγραφο 3.1, όπως άλλωστε φαίνεται από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.8. Μία θετική ρίζα α είναι μη αναλύσιμη τάξεως m ως προς την γεωμετρική αλυσίδα ιδεωδών \mathcal{J} αν και μόνον αν η α είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{J}_m \setminus \mathcal{J}_{m-1}$ και δεν είναι δυνατόν να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta \in \mathcal{J}_i$ και $\gamma \in \mathcal{J}_j$ όπου $i, j \geq 1$ και $i + j = m$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μία ρίζα $\alpha \in \Phi^+$ μη αναλύσιμη ως προς \mathcal{J} τάξεως m . Αφού $r_\alpha(\mathcal{J}) = m$ τότε $\alpha \notin \mathcal{J}_{m-1}$. Επομένως, για να δείξουμε ότι η ρίζα α ικανοποιεί την υπόθεση του λήμματος, αρκεί να δείξουμε ότι η α είναι μεγιστικό στοιχείο του \mathcal{J}_m . Αν υποθέσουμε το αντίθετο τότε υπάρχει $\beta \in \Phi^+$ τέτοιο ώστε $\alpha + \beta \in \mathcal{J}_m$ και συνεπώς $r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) \leq m$. Επίσης $r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) \geq m$ λόγω του Πορίσματος 3.2. Επομένως $r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) = m$, το οποίο αντιφάσκει με την συνθήκη (iii) του Ορισμού 3.1.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η ρίζα $\alpha \in \mathcal{J}_m$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος. Τότε λόγω του Λήμματος 3.6 (i), η συνθήκη (iii) του Ορισμού 3.1

ικανοποιείται διότι η ρίζα α είναι μεγιστικό στοιχείο του \mathcal{J}_m . Επομένως, μένει ακόμα να δείξουμε ότι $r_\alpha(\mathcal{J}) = m$. Αυτό όμως έπεται από την υπόθεση ότι $\alpha \notin \mathcal{J}_{m-1}$ και το Λήμμα 3.6 (i). \square

Λήμμα 3.9. Έστω $\alpha \in \Phi^+$ μη αναλύσιμη ρίζα ως προς την αλυσίδα \mathcal{J} .

(i) Αν $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \Phi^+$ τότε $r_\alpha(\mathcal{J}) = r_\beta(\mathcal{J}) + r_\gamma(\mathcal{J}) - 1$

(ii) Αν $\beta, \alpha + \beta \in \Phi^+$ τότε $r_\alpha(\mathcal{J}) + r_\beta(\mathcal{J}) = r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J})$.

Απόδειξη. Έστω ότι $r_\alpha(\mathcal{J}) = k$ ώστε $\alpha \in \mathcal{J}_k$.

(i) Θεωρούμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \Phi^+$ και θέτουμε $r_\beta(\mathcal{J}) = i$ και $r_\gamma(\mathcal{J}) = j$. Λόγω του Λήμματος 3.6 (i) έχουμε ότι $\beta \in \mathcal{J}_i$ και $\gamma \in \mathcal{J}_j$. Όμως, η συνθήκη (ii) του Ορισμού 3.1 δεν επιτρέπει την ισότητα $i + j = k$ και συνεπώς $i + j = k - 1$ λόγω του Πορίσματος 3.2.

(ii) Θεωρούμε $\beta, \alpha + \beta \in \Phi^+$ και γράφουμε $\alpha + \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell$ με $\alpha_i \in \mathcal{J}_{k_i}$ και $k_1 + k_2 + \dots + k_\ell = r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J})$. Θέτουμε $t = r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J})$. Λόγω του Πορίσματος 3.2 αρκεί να δείξουμε ότι $k + r_\beta(\mathcal{J}) \leq t$. Αν $\ell = 1$ τότε $\alpha + \beta \in \mathcal{J}_t$ και από την συνθήκη (iii) του Ορισμού 3.1 έπεται ότι $\beta \in \mathcal{J}_{t-k}$, οπότε $r_\beta(\mathcal{J}) \leq t - k$ που είναι αυτό που θέλουμε. Αν τώρα $\ell \geq 2$ τότε $-\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_\ell = \beta \in \Phi$ και συνεπώς $-\alpha + \alpha_i \in \Phi \cup \{0\}$ για κάποιο $1 \leq i \leq \ell$ λόγω του Λήμματος 3.1 (ii). Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $i = 1$. Έχουμε τα εξής ενδεχόμενα: $\alpha = \alpha_1$ ή $\alpha = \alpha_1 + \mu$ ή $\alpha_1 = \alpha + \mu$, όπου $\mu \in \Phi^+$. Στην πρώτη περίπτωση $\beta = \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell$ και τότε $r_\beta(\mathcal{J}) = t - k_1 = t - k$. Στην δεύτερη περίπτωση $\beta + \mu = \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell$ άρα $r_{\beta+\mu}(\mathcal{J}) = k_2 + \dots + k_\ell = t - k_1$. Αφού όμως το α είναι μη αναλύσιμο ως προς \mathcal{J} θα ισχύει $r_\alpha(\mathcal{J}) = r_{\alpha_1}(\mathcal{J}) + r_\mu(\mathcal{J}) - 1 = k_1 + r_\mu(\mathcal{J}) - 1$ λόγω του (i). Τότε $r_\beta(\mathcal{J}) + r_\alpha(\mathcal{J}) = r_\beta(\mathcal{J}) + k_1 + r_\mu(\mathcal{J}) - 1 \leq r_{\beta+\mu}(\mathcal{J}) + k_1 = t$. Στην τελευταία περίπτωση έχουμε ότι $k + r_\mu(\mathcal{J}) \leq k_1$ λόγω του Πορίσματος 3.2. Επίσης, αφού $\beta = \mu + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell$ θα είναι $r_\beta(\mathcal{J}) \leq r_\mu(\mathcal{J}) + k_2 + \dots + k_\ell$ λόγω του ίδιου πορίσματος. Επομένως $r_\beta(\mathcal{J}) \leq k_1 + \dots + k_\ell - k = t - k$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. \square

Το επόμενο θεώρημα εξηγεί τη σχέση ανάμεσα στα μη αναλύσιμα στοιχεία της γεωμετρικής αλυσίδας \mathcal{J} και τα τείχη της περιοχής $R_{\mathcal{J}}$. Παρατηρούμε ότι από την απόδειξη της Πρότασης 3.2 και την Πρόταση 3.3 προκύπτει ότι $(\alpha, x) < r_\alpha(\mathcal{J})$ για κάθε $\alpha \in \Phi^+$ και $x \in R_{\mathcal{J}}$.

Θεώρημα 3.6. Αν η \mathcal{J} είναι μία θετική αλυσίδα ιδεωδών του Φ^+ μήκους m με αντίστοιχη περιοχή $R_{\mathcal{J}} = R$ και $1 \leq r \leq m$ τότε τα ακόλουθα σύνολα ταυτίζονται:

(i) το σύνολο των μη αναλύσιμων ριζών $\alpha \in \Phi^+$ ως προς \mathcal{J} τάξεως r

(ii) το σύνολο των $\alpha \in \Phi^+$ τέτοιων ώστε το υπερεπίπεδο $H_{\alpha,r}$ είναι τείχος της $R_{\mathcal{J}}$ το οποίο δεν διαχωρίζει την R από το A_0 και

(iii) το σύνολο των $\alpha \in \Phi^+$ τέτοιων ώστε το υπερεπίπεδο $H_{\alpha,r}$ είναι τείχος του $w_R A_0$ το οποίο δεν διαχωρίζει το $w_R A_0$ από το A_0 .

Απόδειξη. Θεωρούμε $\emptyset = \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{J}_m$ μία φθίνουσα αλυσίδα ιδεωδών \mathcal{J} . Συμβολίζουμε με $w = w_R$, $F_r(\mathcal{J})$, $F_r(R)$, και $F_r(w)$ τα σύνολα που αναφέρονται στα (i), (ii) και (iii) του θεωρήματος. Για να δείξουμε ότι αυτά τα σύνολα ταυτίζονται δείχνουμε ότι $F_r(R) \subseteq F_r(\mathcal{J}) \subseteq F_r(w) \subseteq F_r(R)$.

Θεωρούμε $\alpha \in F_r(R)$. Αφού $(\alpha, x) < r$ για κάθε $x \in R$ τότε $\alpha \in \mathcal{J}_r$. Για να δείξουμε ότι η ρίζα α είναι μη αναλύσιμη τάξεως r σε σχέση με το \mathcal{J} πρέπει να ελέγξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του Ορισμού 3.1. Καταρχήν, ισχυριζόμαστε ότι δεν είναι δυνατόν να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $r_\beta(\mathcal{J}) \leq i$ και $r_\gamma(\mathcal{J}) \leq j$ για $i, j \geq 0$ με $i + j = r$. Πράγματι, αν ίσχυε κάτι τέτοιο τότε θα είχαμε $(\beta, x) < i$ και $(\gamma, x) < j$ για κάθε $x \in R$. Επειδή όμως από αυτές τις ανισώσεις προκύπτει ότι $(\alpha, x) < r$ για κάθε $x \in R$ συμπεραίνουμε ότι το υπερεπίπεδο $H_{\alpha,r}$ δεν υποστηρίζει κάποια πλευρά της R , το οποίο είναι άτοπο. Ο παραπάνω ισχυρισμός επαληθεύει την συνθήκη (ii) του Ορισμού 3.1. Επίσης, παρατηρούμε ότι αφού $\alpha \in \mathcal{J}_r$ τότε $r_\alpha(\mathcal{J}) \leq r \leq m$. Επιπλέον, αφού το $H_{\alpha,r}$ είναι τείχος της R τότε $r-1 < (\alpha, x) < r$ για κάθε $x \in R$ και επομένως $\alpha \notin \mathcal{J}_{r-1}$. Αφού $\alpha \in \mathcal{J}_{r_\alpha(\mathcal{J})}$ τότε $r-1 < r_\alpha(\mathcal{J})$ άρα $r = r_\alpha(\mathcal{J})$. Αυτό επαληθεύει την συνθήκη (i) του ορισμού. Για να επαληθεύσουμε την συνθήκη (iii) θεωρούμε $\alpha + \beta \in \mathcal{J}_t$ για κάποιο $\beta \in \Phi^+$ και $r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J}) = t$. Αφού η ανίσωση $(\alpha, x) < r$ προκύπτει από τις $(\alpha + \beta, x) < t$ και $(\beta, x) > t - r$ και η πρώτη ισχύει για κάθε $x \in R$ τότε η δεύτερη δεν μπορεί να ισχύει για κάθε τέτοιο x . Από αυτό έπεται ότι $\beta \in \mathcal{J}_{t-r}$.

Στην συνέχεια θεωρούμε $\alpha \in F_r(\mathcal{J})$, δηλαδή μία ρίζα $\alpha \in \Phi^+$ μη αναλύσιμη τάξεως r ως προς \mathcal{J} . Ισχύει ότι $(\alpha, x) < r$ για κάθε $x \in R$ και επομένως για κάθε $x \in w_R A_0$. Υπενθυμίζουμε ότι $r(w_R, \beta) = r_\beta(\mathcal{J})$ για κάθε $\beta \in \Phi^+$. Για να δείξουμε ότι το $H_{\alpha,r}$ είναι τείχος του $w_R A_0$ αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $w' \in W_\alpha$ με $r(w', \beta) = r_\beta$ για κάθε $\beta \in \Phi^+$, όπου

$$r_\beta = \begin{cases} r_\beta(\mathcal{J}), & \text{αν } \beta \neq \alpha \\ r_\beta(\mathcal{J}) + 1, & \text{αν } \beta = \alpha \end{cases}$$

Λόγω του Λήμματος 3.3 και του Πορίσματος 3.2 αρκεί να δείξουμε ότι $r_\alpha(\mathcal{J}) = r_\beta(\mathcal{J}) + r_\gamma(\mathcal{J}) - 1$ όταν $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \Phi^+$ και $r_\alpha(\mathcal{J}) + r_\beta(\mathcal{J}) = r_{\alpha+\beta}(\mathcal{J})$ για κάθε $\beta, \alpha + \beta \in \Phi^+$. Αυτό όμως είναι ακριβώς το περιεχόμενο του Λήμματος 3.9.

Τέλος, θεωρούμε $\alpha \in F_r(w_R)$. Αν ο $w' A_0$ είναι ο θαλαμισκος του $\tilde{\mathcal{A}}_\Phi$ ο οποίος είναι ανάκλαση του $w_R A_0$ ως προς το υπερεπίπεδο $H_{\alpha,r}$ τότε ισχύει $(\alpha, x) > r$ για κάθε $x \in w' A_0$. Επομένως, λόγω της Πρότασης 3.3 ο θαλαμισκος $w' A_0$ δεν περιέχεται στην περιοχή R . Συνεπώς το $H_{\alpha,r}$ είναι τείχος της περιοχής R , δηλαδή $\alpha \in F_r(R)$. \square

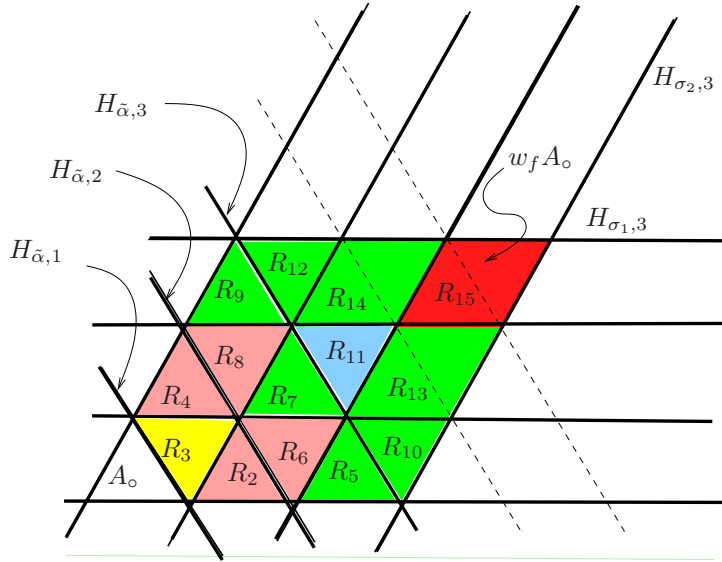
Συμβολίζουμε με $W_m(\Phi)$ το υποσύνολο του W_α που αποτελείται από τα στοιχεία w_R όπου R είναι κυρίαρχη περιοχή του παρατάγματος $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και γράφουμε για συντομία $W(\Phi)$ όταν $m = 1$. Στο άρθρο [66] τα στοιχεία του $W(\Phi)$ ονομάζονται μεριστικά.

Πόρισμα 3.3. *Αν οι αριθμοί i_1, i_2, \dots, i_m είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τότε τα ακόλουθα είναι ίσα:*

- (i) το πλήθος των θετικών γεωμετρικών αλυσίδων ιδεωδών του Φ^+ μήκους m οι οποίες έχουν i_r το πλήθος μη αναλύσιμα στοιχεία τάξεως r ,
- (ii) το πλήθος των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ με i_r τείχη της μορφής $H_{\alpha,r}$ τα οποία δεν διαχωρίζουν την R από το A_\circ ,
- (iii) το πλήθος των $w \in W_m(\Phi)$ τέτοιων ώστε i_r το πλήθος τείχη του wA_\circ της μορφής $H_{\alpha,r}$ δεν διαχωρίζουν το wA_\circ από το A_\circ .

Απόδειξη. Συνδυάστε τα Θεωρήματα 3.5 και 3.6. □

Συνδυάζοντας το Σχήμα 3.1 και τον Πίνακα 3.1 μπορεί κανείς να επαληθεύσει το Θεώρημα 3.6.



Σχήμα 3.1: Φραγμένες κυρίαρχες περιοχές του $\mathcal{A}^3(A_2)$.

Το επόμενο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω.

Πόρισμα 3.4. *Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο i οι αριθμοί οι οποίοι εμφανίζονται στα (i) και (ii) του Θεωρήματος 3.2 είναι ίσοι με το πλήθος των $w \in W_m(\Phi)$ για τα οποία i τείχη του wA_\circ της μορφής $H_{\alpha,m}$ δεν διαχωρίζουν το wA_\circ από το A_\circ .*

□

Περιοχή	\mathcal{J}_1	\mathcal{J}_2	\mathcal{J}_3	μη αναλύσιμες ρίζες ως προς \mathcal{J} τάξεως 1	μη αναλύσιμες ρίζες ως προς \mathcal{J} τάξεως 2	μη αναλύσιμες ρίζες ως προς \mathcal{J} τάξεως 3
A_0	Φ^+	Φ^+	Φ^+	$\tilde{\alpha}$		
R_2	$\langle \sigma_1 \rangle$	Φ^+	Φ^+		$\tilde{\alpha}$	
R_3	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	Φ^+	Φ^+	σ_1, σ_2		
R_4	$\langle \sigma_2 \rangle$	Φ^+	Φ^+		$\tilde{\alpha}$	
R_5	$\langle \sigma_1 \rangle$	$\langle \sigma_1 \rangle$	Φ^+			$\tilde{\alpha}$
R_6	$\langle \sigma_1 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	Φ^+	σ_1	σ_2	
R_7	\emptyset	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	Φ^+			$\tilde{\alpha}$
R_8	$\langle \sigma_2 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	Φ^+	σ_2	σ_1	
R_9	$\langle \sigma_2 \rangle$	$\langle \sigma_2 \rangle$	Φ^+			$\tilde{\alpha}$
R_{10}	$\langle \sigma_1 \rangle$	$\langle \sigma_1 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	σ_1		σ_2
R_{11}	\emptyset	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$		σ_1, σ_2	
R_{12}	$\langle \sigma_2 \rangle$	$\langle \sigma_2 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$	σ_2		σ_1
R_{13}	\emptyset	$\langle \sigma_1 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$		σ_1	σ_2
R_{14}	\emptyset	$\langle \sigma_2 \rangle$	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$		σ_2	σ_1
R_{15}	\emptyset	\emptyset	$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$			σ_1, σ_2

Πίνακας 3.1: Κυρίαρχες φραγμένες περιοχές και αλυσίδες ιδεωδών στο $\mathcal{A}^3(A_2)$

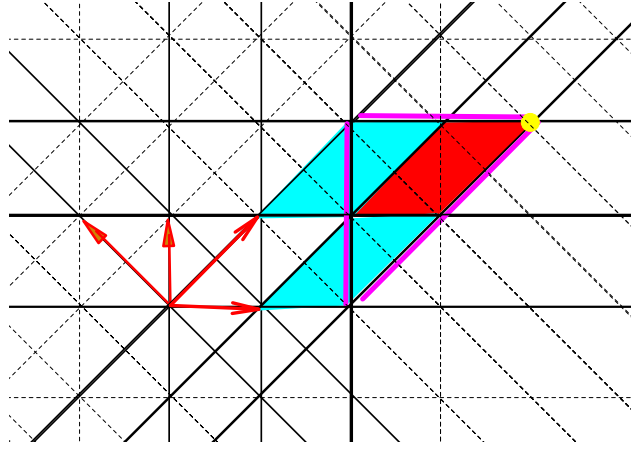
Όπως και για τους αριθμούς $h_i(\Phi, m)$, η ερμηνεία των αριθμών του μέρους (ii) του Θεωρήματος 3.2 στο παραπάνω πόρισμα ή και ο αρχικός ορισμός τους, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουμε τους αριθμούς $h_i^+(\Phi, m)$ όταν το Φ δεν είναι ανάγωγο. Έχουμε λοιπόν,

$$h_k^+(\Phi_1 \times \Phi_2, m) = \sum_{i+j=k} h_i^+(\Phi_1, m) h_j^+(\Phi_2, m),$$

όπου Φ_1, Φ_2 είναι χρυσταλλογραφικά συστήματα. Τώρα, θεωρούμε την ειδική περίπτωση $m = 1$. Μία γεωμετρική αλυσίδα ιδεωδών \mathcal{J} μήκους m σε αυτήν την περίπτωση είναι ένα ιδεώδες \mathcal{J} του Φ^+ τέτοιο ώστε $\Pi \subseteq \mathcal{J}$ και επομένως το $\mathcal{I} = \Phi^+ \setminus \mathcal{J}$ είναι θετικό φίλτρο. Λόγω του Λήμματος 3.8 τα μη αναλύσιμα στοιχεία του \mathcal{J} τάξεως ένα είναι ακριβώς τα μεγιστικά στοιχεία του \mathcal{J} .

Πόρισμα 3.5. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο i τα ακόλουθα είναι ίσα με $h_{n-i}^+(\Phi)$:

- (i) το πλήθος των ιδεωδών του Φ^+ τα οποία περιέχουν όλες τις απλές ρίζες και έχουν i το πλήθος μεγιστικά στοιχεία,
- (ii) το πλήθος των φραγμένων περιοχών R του $\mathcal{A}^1(\Phi)$ για τις οποίες i τείχη της μορφής $H_{\alpha,1}$ δεν διαχωρίζουν την R από το A_0 ,
- (iii) το πλήθος των $w \in W(\Phi)$ για τα οποία i τείχη του wA_0 της μορφής $H_{\alpha,1}$ δεν διαχωρίζουν το wA_0 από το A_0 και
- (iv) το πλήθος των $w \in W(\Phi)$ τα οποία έχουν i ανόδους.

Σχήμα 3.2: Φραγμένες κυρίαρχες περιοχές του $A^2(B_2)$.

Απόδειξη. Τα παραπάνω προκύπτουν από το Πόρισμα 3.3 θέτοντας $m = 1$ και το [6, Λήμμα 2.5], σύμφωνα με το οποίο το πλήθος των τειχών του θαλαμίσκου wA_0 τα οποία δεν διαχωρίζουν το wA_0 από το A_0 είναι ίσο με το πλήθος των δεξιών ανόδων του w . \square

3.4 Σημεία του πλέγματος συρριζών και η αφφινική ομάδα

Σε αυτήν την παράγραφο ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 (βλ. Πόρισμα 3.7). Υποθέτουμε ότι το σύστημα ριζών Φ είναι ανάγωγο και κρυσταλλογραφικό τάξεως n .

Όπως και στο [6, Παράγραφος 4], λέγοντας ανάκλαση που αντιστοιχεί στο υπερεπίπεδο $H_{\alpha,k}$ εννοούμε την αφφινική ανάκλαση $r_{\alpha,k}$ (βλ. (1.1)) που αφήνει σταθερό το $H_{\alpha,k}$. Θέτουμε $p = mh - 1$ και $D_m(\Phi) = L(\Phi^\vee) \cap p\bar{A}_0$. Από το ακόλουθο λήμμα, το οποίο έπεται από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 7.4 του [41], προκύπτει ότι το $D_m(\Phi)$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων της δράσης της ομάδας W στο $T_m(\Phi)$.

Λήμμα 3.10. [41, Λήμμα 7.4.1] *Ο φυσικός εγκλεισμός από το $D_m(\Phi)$ στο σύνολο $O_m(\Phi)$ των τροχιών της W -δράσης στο $T_m(\Phi)$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.*

Επιπλέον, αν $y \in D_m(\Phi)$ τότε ο σταθεροποιητής του y ως προς την δράση της W στο $T_m(\Phi)$ είναι η υποομάδα της W με γεννήτορες τις ανακλάσεις που αντιστοιχούν στα τείχη του $p\bar{A}_0$ τα οποία περιέχουν το y . Ειδικότερα, το $r(y)$ είναι ίσο με το πλήθος των τειχών του $p\bar{A}_0$ τα οποία περιέχουν το y . \square

Θα ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\rho : W_m(\Phi) \rightarrow D_m(\Phi)$ τέτοια ώστε για κάθε $w \in W_m(\Phi)$ το πλήθος των τειχών του wA_0 της μορφής $H_{\alpha,m}$ τα

οποία δεν διαχωρίζουν το wA_o από το A_o να είναι ίσο με το πλήθος των τειχών του $p\bar{A}_o$ στα οποία περιέχεται το $\rho(w)$. Έστω R_f η περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ η οποία ορίζεται από τις ανισώσεις $m-1 < (\alpha, x) < m$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Έστω $w_f = w_{R_f}$ το μοναδικό στοιχείο $w \in W_m(\Phi)$ τέτοιο ώστε $wA_o \subseteq R_f$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\rho : W_m(\Phi) \rightarrow L(\Phi^\vee)$ με

$$\rho(w) = (w_f w^{-1}) \cdot 0$$

για $w \in W_m(\Phi)$. Παρατηρήστε ότι λόγω του Λήμματος 3.2 ο θαλαμίσκος $w_f(A_o)$ είναι το ανοικτό μονόπλοκο του \mathbb{R}^n που περιγράφεται από τις ανισότητες $(\sigma_i, x) < m$ για $1 \leq i \leq n$ και $(\tilde{\alpha}, x) > mh - m - 1$. Για κάθε $1 \leq r \leq m$ ορίζουμε το μονόπλοκο

$$\Sigma_m^r = \{x \in \mathbb{R}^n : m-r \leq (\sigma_i, x) \text{ για } 1 \leq i \leq n \text{ και } (\tilde{\alpha}, x) \leq mh - m + r - 1\},$$

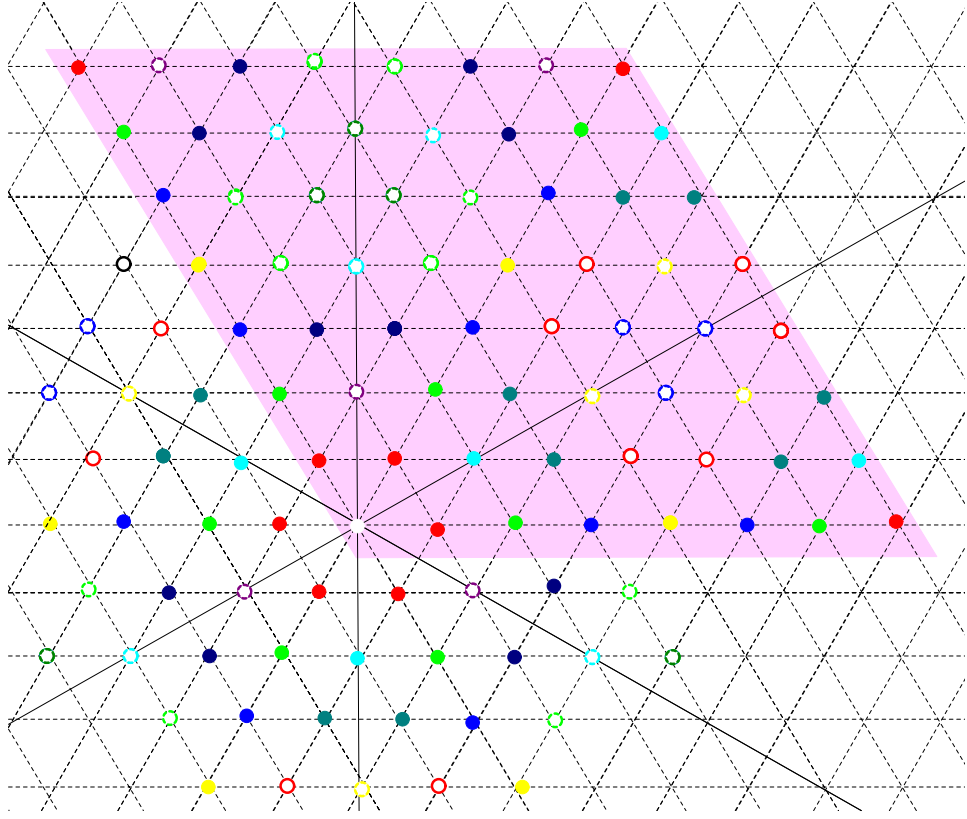
έτσι ώστε $\Sigma_m^m = pA_o$. Για κάθε n -διάστατο μονόπλοκο Σ το οποίο φράσσεται από υπερεπίπεδα της μορφής $H_{\alpha, k}$ του \tilde{A}_Φ όπου $\alpha \in \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ συμβολίζουμε με $H(\Sigma, i)$ το τείχος του Σ το οποίο είναι κάθετο στο $\tilde{\alpha}$ ή στο σ_i , αν $i = 0$ ή $i > 0$, αντίστοιχα. Επίσης, γράφουμε $H(w, i)$ αντί για $H(w\bar{A}_o, i)$, όπου $w \in W_\alpha$.

Θεώρημα 3.7. Η απεικόνιση ρ είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ των συνόλων $W_m(\Phi)$ και $D_m(\Phi)$. Επίσης, για κάθε $w \in W_m(\Phi)$, $1 \leq r \leq m$ και $0 \leq i \leq n$, το σημείο $\rho(w)$ βρίσκεται στο τείχος $H(\Sigma_m^r, i)$ αν και μόνον αν το τείχος $(ww_f^{-1})H(w_f, i)$ του $w\bar{A}_o$ είναι της μορφής $H_{\alpha, r}$ και δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o .

Απόδειξη. Καταρχήν ελέγχουμε ότι η ρ είναι ένα προς ένα. Πράγματι, αν $\rho(w_1) = \rho(w_2)$ με $w_1, w_2 \in W_m(\Phi)$, τότε $w_2 w_1^{-1}(0) = 0$ και επομένως $w_2 w_1^{-1} \in W$. Επιπλέον, το $w_2 w_1^{-1}$ στέλνει το $w_1 A_o$ στο $w_2 A_o$ και οι δύο αυτοί θαλαμίσκοι βρίσκονται στο θεμελιώδες δώμα του $\mathcal{A}^0(\Phi)$. Αφού όμως η W δρά απλά μεταβατικά στα δώματα του $\mathcal{A}^0(\Phi)$, θα πρέπει το $w_1 w_2^{-1}$ να είναι το ταυτοτικό στοιχείο της W , δηλαδή $w_1 = w_2$.

Στη συνέχεια ελέγχουμε ότι $\rho(w) \in D_m(\Phi)$ για κάθε $w \in W_m(\Phi)$ και αποδεικνύουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος. Προφανώς $\rho(w) \in L(\Phi^\vee)$, οπότε για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $\rho(w) \in p\bar{A}_o$. Γράφουμε λοιπόν $w_f w^{-1} = t_\lambda u$, όπου $u \in W$, $\lambda \in L(\Phi^\vee)$ και t_λ είναι η απεικόνιση μεταφοράς η οποία στέλνει το x στο $x + \lambda$, ώστε $\rho(w) = \lambda$. Έστω $0 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$ και H το τείχος $(ww_f^{-1})H(w_f, i)$ του $w\bar{A}_o$. Πρέπει να δείξουμε ότι (i)

$$\begin{aligned} (\lambda, \tilde{\alpha}) &\leq mh - 1, \quad \text{αν } i = 0 \\ (\lambda, \sigma_i) &\geq 0 \quad \text{αν } 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{3.11}$$



Σχήμα 3.3: Τροχιές δράσης της A_2 στο πηλίκο $T_3 = L(\Phi^\vee)/8L(\Phi^\vee)$. Οι τροχιές είναι 15, δηλαδή όσες είναι και οι περιοχές στο Σχήμα 3.1.

και (ii) $H = H_{\alpha,k}$ για κάποιο $\alpha \in \Phi^+$ και το H δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o αν και μόνον αν

$$\begin{aligned} (\lambda, \tilde{\alpha}) &= mh - m + k - 1, \quad \text{αν } i = 0 \\ (\lambda, \sigma_i) &= m - k \quad \text{αν } 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Έστω ότι $H = H_{\alpha,r}$ για κάποιο $\alpha \in \Phi^+$ και μη αρνητικό ακέραιο r . Παρατηρήστε ότι το H δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o αν και μόνον αν το $H(w_f, i) = (w_f w^{-1})H$ δεν διαχωρίζει το $w_f A_o$ από το $(w_f w^{-1})A_o = (t_\lambda u)A_o$ ή ισοδύναμα για κάθε $x \in A_o$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (ux + \lambda, \tilde{\alpha}) &> mh - m - 1, \quad \text{αν } i = 0 \\ (ux + \lambda, \sigma_i) &< m \quad \text{αν } 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Στην συνέχεια παρατηρήστε ότι $0 < (\beta, x) < 1$ για κάθε $x \in A_o$ και $\beta \in \Phi^+$ και επομένως $-1 < (\beta, ux) < 1$ για κάθε τέτοιο x και β . Λόγω της Πρότασης 1.3 και αφού $t_\lambda u H_{\alpha,r} = (w_f w^{-1})H = H(w_f, i)$, έχουμε ότι

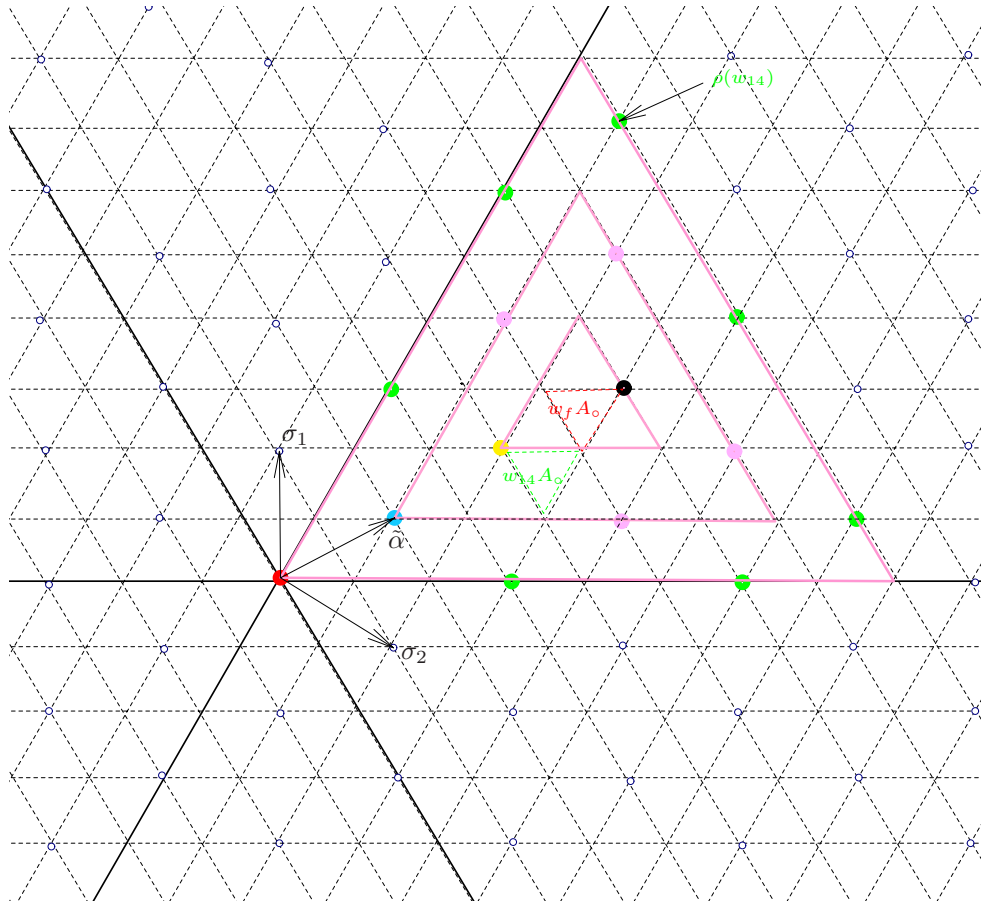
$$H_{u\alpha, r+(u\alpha, \lambda)} = \begin{cases} H_{\tilde{\alpha}, mh-m-1}, & \text{αν } i = 0 \\ H_{\sigma_i, m}, & \text{αν } 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (3.14)$$

Για να αποδείξουμε το (3.11) υποθέτουμε καταρχήν ότι $i = 0$. Λόγω του (3.14) ισχύει ότι είτε $u\alpha = \tilde{\alpha}$ και $r + (u\alpha, \lambda) = mh - m - 1$ είτε $u\alpha = -\tilde{\alpha}$ και $r + (u\alpha, \lambda) = -mh + m + 1$. Επομένως, για να δείξουμε ότι $(\lambda, \tilde{\alpha}) \leq mh - 1$ αρκεί να δείξουμε ότι $r \leq m$ στη δεύτερη περίπτωση. Πράγματι, θεωρούμε $(\lambda, \tilde{\alpha}) = mh - m + r - 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r \geq 1$. Λόγω του (3.13) συμπεραίνουμε ότι το $H = H_{\alpha, r}$ δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o . Αφού όμως το H είναι έδρα κάποιας κυρίαρχης περιοχής του παρατάγματος $\mathcal{A}^m(\Phi)$ (Θεώρημα 3.6), θα πρέπει $r \leq m$. Η περίπτωση $1 \leq i \leq m$ είναι ανάλογη. Από το (3.14) συμπεραίνουμε ότι είτε $u\alpha = \sigma_i$ και $r + (u\alpha, \lambda) = m$ είτε $u\alpha = -\sigma_i$ και $r + (u\alpha, \lambda) = -m$. Επομένως, $(\lambda, \sigma_i) = m - r$ ή $m + r$. Αν $(\lambda, \sigma_i) = m - r$ και $r \geq 1$, τότε ξανά λόγω του (3.13) το $H = H_{\alpha, r}$ δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o και συνεπώς $r \leq m$, όπως και προηγουμένως. Άρα το (3.11) ισχύει, δηλαδή $\rho(w) \in p\bar{A}_o$.

Τώρα αποδεικνύουμε τον δεύτερο ισχυρισμό μας. Υποθέτουμε και πάλι ότι $H = H_{\alpha, k}$ για κάποιο $\alpha \in \Phi^+$ και ότι το H δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o . Οπότε έχουμε ότι $k \geq 1$ και επαναλαμβάνοντας την παραπάνω ανάλυση με k στην θέση του r , συμπεραίνουμε ότι $(\lambda, \tilde{\alpha}) = mh - m - k - 1$ ή $mh - m + k - 1$ αν $i = 0$ και ότι $(\lambda, \sigma_i) = m - k$ ή $m + k$ αν $1 \leq i \leq n$. Η (3.12) έπεται από την (3.13) και την ανισότητα $-1 < (ux, \beta) < 1$ για $x \in A_o$ και $\beta \in \Phi^+$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ισχύει η (3.12) για κάποιο $1 \leq k \leq m$. Τότε ισχύει και η (3.13) και συνεπώς το H δεν διαχωρίζει το wA_o από το A_o . Θέτοντας $H = H_{\alpha, r}$ για κάποιο $r \geq 1$ προκύπτει το (3.14) όπως πριν, και ότι $(\lambda, \tilde{\alpha}) = mh - m - r - 1$ ή $mh - m + r - 1$ αν $i = 0$ και $(\lambda, \sigma_i) = m - r$ ή $m + r$ αν $1 \leq i \leq n$. Από την (3.12) έχουμε ότι $r = k$.

Τέλος, παρατηρήστε ότι τα σύνολα $D_m(\Phi)$ και $W_m(\Phi)$ είναι ισοπληθή λόγω των Θεωρημάτων 3.1 και 3.10. Επομένως, αφού η απεικόνιση $\rho : W_m(\Phi) \rightarrow D_m(\Phi)$ είναι ένα προς ένα, θα πρέπει να είναι και αμφιμονοσήμαντη. \square

Παράδειγμα 3.1. Στο Σχήμα 3.4 βλέπουμε τα μονόπλοκα Σ_r^3 ($1 \leq r \leq 3$), όταν $\Phi = A_2$ και $m = 3$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πλέγμα συρριζών ταυτίζεται με το πλέγμα ριζών. Ο θαλαμίσκος $w_f A_o$ είναι αυτός που σημειώνεται με κόκκινο και έχουμε ότι $w_f = t_{3\tilde{\alpha}} r_{\tilde{\alpha}}$. Στο Σχήμα 3.4 μπορεί κανείς να πειραματιστεί με την δράση της απεικόνισης ρ του Θεωρήματος 3.7 και να διαπιστώσει ότι τα χρώματα των συρριζών συμφωνούν με τα αντίστοιχα χρώματα των περιοχών του Σχήματος 3.1. Για παράδειγμα, ο θαλαμίσκος $w_{14} A_o$ που αντιστοιχεί στην περιοχή R_{14} σημειώνεται με πράσινο στο Σχήμα 3.4 και ισχύει $w_{14} = t_{2\tilde{\alpha}} r_{\sigma_1}$. Έχουμε $\rho(w_{14}) = w_f w_{14}^{-1}(\mathbf{0}) = t_{3\tilde{\alpha}} r_{\tilde{\alpha}} r_{\sigma_1} t_{-2\tilde{\alpha}}(\mathbf{0})$ το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι είναι το σημείο που σημειώνεται με $\rho(w_{14})$.



Σχήμα 3.4:

Πόρισμα 3.6. Για κάθε ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων i_1, i_2, \dots, i_m κάθε μία από τις ποσότητες οι οποίες εμφανίζονται στο Πόρισμα 3.3 είναι ίση με το πλήθος των σημείων του $D_m(\Phi)$ τα οποία βρίσκονται σε i_r τείχη του Σ_m^r για κάθε $1 \leq r \leq m$.

Απόδειξη. Έπεται από το Θεώρημα 3.7. □

Το ακόλουθο πόρισμα συμπληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.

Πόρισμα 3.7. Για κάθε $1 \leq i \leq n$, κάθε μία από τις ποσότητες οι οποίες εμφανίζονται στο Θεώρημα 3.2 είναι ίση με:

- (i) το πλήθος των σημείων του $D_m(\Phi)$ τα οποία βρίσκονται σε i τείχη του $p\bar{A}_0$ και
- (ii) το πλήθος των $w \in W_m(\Phi)$ τέτοιων ώστε i τείχη του wA_0 της μορφής $H_{\alpha, m}$ δεν διαχωρίζουν το wA_0 από το A_0 .

Απόδειξη. Λογω του Λήμματος 3.10, το πλήθος των τροχιών $x \in O_m(\Phi)$ με

τάξη $r(x) = i$ ισούται με το πλήθος των σημείων στο $D_m(\Phi)$ τα οποία περιέχονται σε i τείχη του $p\bar{A}_o$. Ο ισχυρισμός μας τότε προκύπτει από το Πρόρισμα 3.6 στην ειδική περίπτωση $r = m$ και το γεγονός ότι $\Sigma_m^m = p\bar{A}_o$. \square

Παρατήρηση 3.1. Από το Πρόρισμα 3.7 (ii) προκύπτει ότι το $h_n^+(\Phi, m)$ είναι ίσο με το πλήθος των σημείων του $L(\Phi^\vee) \cap (mh - 1)A_o$. Με επιχείρημα ανάλογο με αυτό της Παρατήρησης 4.5 [6] συμπεραίνουμε ότι το $L(\Phi^\vee) \cap (mh - 1)A_o$ είναι ισοπληθές με το $L(\Phi^\vee) \cap (mh - h - 1)\bar{A}_o$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.1 (iii) συμπεραίνουμε ότι $h_n^+(\Phi, m) = N_+^{(m-1)}(\Phi)$. Αφού η ανηγμένη χαρακτηριστική Euler $\tilde{\chi}(\Delta_+^m(\Phi))$ είναι ίση με $(-1)^{n-1}h_n(\Delta_+^m(\Phi))$, από τα αποτελέσματα της επόμενης παραγράφου, θα έχουμε ότι

$$\tilde{\chi}(\Delta_+^m(\Phi)) = (-1)^{n-1}N_+^{(m-1)}(\Phi),$$

όταν $m = 1$ ή όταν $m \geq 1$ και το σύστημα ριζών Φ είναι κλασικό.

Η παρακάτω εικασία είναι ανάλογη με την Εικασία 3.7 [37].

Εικασία 3.3. Για κάθε κρυσταλλογραφικό σύστημα Φ και $m \geq 1$ το σύμπλεγμα $\Delta_+^m(\Phi)$ είναι αγνό διαστάσεως $n - 1$, αποφλοιώσιμο και έχει χαρακτηριστική Euler ίση με $(-1)^{n-1}N_+^{(m-1)}(\Phi)$.

Ειδικότερα, το $\Delta_+^m(\Phi)$ είναι Cohen-Macaulay και έχει τον ομοτοπικό τύπο σφαινοειδούς αθροίσματος $N_+^{(m-1)}(\Phi)$ το πλήθος σφαιρών διαστάσεως $n - 1$. \square

3.5 Οι αριθμοί $f_i(\Phi, m)$ και $f_i^+(\Phi, m)$.

Έστω Φ ένα κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών τάξεως n . Ορίζουμε τους αριθμούς $f_i(\Phi, m)$ και $f_i^+(\Phi, m)$ μέσω των σχέσεων

$$\sum_{i=0}^n f_{i-1}(\Phi, m)(x-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^n h_i(\Phi, m)x^{n-i} \quad (3.15)$$

και

$$\sum_{i=0}^n f_{i-1}^+(\Phi, m)(x-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^n h_i^+(\Phi, m)x^{n-i} \quad (3.16)$$

αντιστοίχως. Συγκρίνοντας με την ισότητα (3.8) βλέπουμε ότι η Εικασία 3.1 είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι

$$f_{i-1}^+(\Phi, m) = f_{i-1}(\Delta_+^m(\Phi)) \quad (3.17)$$

για κάθε i , όπου $f_{i-1}(\Delta_+^m(\Phi))$ είναι το πλήθος των $(i-1)$ -διάστατων πλευρών του θετικού μέρους του συμπλέγματος σημνών $\Delta^m(\Phi)$. Στην συνέχεια θα δώσουμε μία συνδυαστική ερμηνεία των αριθμών $f_{i-1}(\Phi, m)$ και $f_{i-1}^+(\Phi, m)$ ως εξής. Για

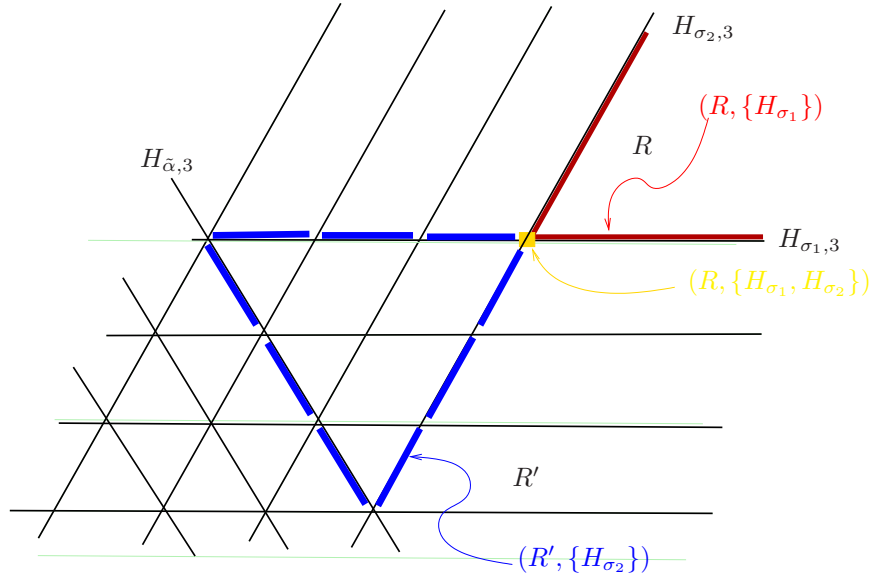
$0 \leq k \leq n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_k(\Phi, m)$ το σύνολο των k -διάστατων (μή κενών) συνόλων της μορφής

$$\bigcap_{(\alpha, r) \in \Phi^+ \times \{0, 1, \dots, m\}} \tilde{H}_{\alpha, r} \quad (3.18)$$

όπου το $\tilde{H}_{\alpha, r}$ μπορεί να είναι

$$\begin{cases} H_{\alpha, 0}^+ & \text{αν } r = 0 \\ H_{\alpha, m}^-, H_{\alpha, m}^+ \text{ ή } H_{\alpha, m} & \text{αν } r = m \\ H_{\alpha, r}^- \text{ ή } H_{\alpha, r}^+ & \text{αν } 1 \leq r < m \end{cases} \quad (3.19)$$

και τα $H_{\alpha, r}^+$ και $H_{\alpha, r}^-$ είναι οι ανοιχτοί ημιχώροι του \mathbb{R}^n που ορίζονται από τις ανισότητες $(\alpha, x) > r$ και $(\alpha, x) < r$ αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο του $\mathcal{F}_k(\Phi, m)$ βρίσκεται εντός του θεμελιώδους δώματος του \mathcal{A}_Φ , δηλαδή είναι κυρίαρχο. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_k^+(\Phi, m)$ το σύνολο των στοιχείων του $\mathcal{F}_k(\Phi, m)$ τα οποία είναι φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R}^n ή αλλιώς το σύνολο των στοιχείων της μορφής (3.18) με $\tilde{H}_{\sigma_i, m} = H_{\sigma_i, m}^-$ ή $H_{\sigma_i, m}$ για $1 \leq i \leq n$.



Σχήμα 3.5:

Παράδειγμα 3.2. Στο Σχήμα 3.5 θεωρούμε $\Phi = A_2$ και $m = 3$. Το σύνολο $\mathcal{F}_2(\Phi, m)$ αποτελείται από όλες τις κυρίαρχες περιοχές, το $\mathcal{F}_1(\Phi, m)$ από τα μπλέ και κόκκινα ευθύγραμμα τμήματα και τέλος το $\mathcal{F}_0(\Phi, m)$ από ένα και μόνο σημείο (κίτρινο). Το $\mathcal{F}_2^+(\Phi, m)$ είναι το σύνολο των φραγμένων κυρίαρχων περιοχών, το $\mathcal{F}_1^+(\Phi, m)$ αποτελείται από τα μπλε ευθύγραμμα τμήματα και τέλος $\mathcal{F}_0^+(\Phi, m) = \mathcal{F}_0(\Phi, m)$.

Στην ειδική περίπτωση $m = 1$ το (iii) του παρακάτω θεωρήματος είναι το περιεχόμενο της Παρατήρησης 5.10 (v) στο [36].

Θεώρημα 3.8. Για κάθε ανάγωγο και κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ , κάθε $m \geq 1$ και $0 \leq k \leq n$ το $f_{k-1}(\Phi, m)$ απαριθμεί:

- (i) ζεύγη (R, S) όπου το R είναι κυρίαρχη περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και το S είναι ένα σύνολο $n - k$ τειχών R της μορφής $H_{\alpha, m}$ τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_\circ ,
- (ii) ζεύγη (\mathcal{I}, T) όπου το \mathcal{I} είναι μία γεωμετρική αλυσίδα φίλτρων του Φ^+ μήκους m και το T είναι ένα σύνολο $n - k$ μη αναλύσιμων ριζών ως προς \mathcal{I} τάξεως m και
- (iii) στοιχεία του $\mathcal{F}_k(\Phi, m)$.

Απόδειξη. Από την σχέση (3.15) έχουμε ότι

$$f_{k-1}(\Phi, m) = \sum_{i=0}^k h_i(\Phi, m) \binom{n-i}{n-k},$$

από το οποίο, λόγω του Θεωρήματος 3.4, συνεπάγονται άμεσα τα (i) και (ii). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να βρούμε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του συνόλου $\mathcal{R}_k(\Phi, m)$ των ζευγών (R, S) του (i) και του $\mathcal{F}_k(\Phi, m)$. Αν $\tau = (R, S) \in \mathcal{R}_k$ τότε ορίζουμε $g(\tau)$ ως την τομή (3.18), όπου το $\tilde{H}_{\alpha, r}$ είναι τέτοιο ώστε $R \subseteq \tilde{H}_{\alpha, r}$ εκτός από την περίπτωση όπου $r = m$ και $H_{\alpha, r} \in S$ στην οποία $\tilde{H}_{\alpha, r} = H_{\alpha, r}$. Έστω $S = \{H_{\alpha_1, m}, H_{\alpha_2, m}, \dots, H_{\alpha_{n-k}, m}\}$ και F_S η τομή των υπερεπιπέδων στο S . Από το [6, Πόρισμα 3.14] συμπεραίνουμε ότι το S είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των τειχών κάποιου θαλαμίσκου του \tilde{A}_Φ και επομένως η τομή F_S είναι k -διάστατη και μη κενή. Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $g : \mathcal{R}_k(\Phi, m) \rightarrow \mathcal{F}_k(\Phi, m)$ είναι καλά ορισμένη, πρέπει να δείξουμε ότι η τομή F_S δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο $H_{\alpha, r}$ με $\alpha \in \Phi^+$ και $0 \leq r \leq m$ εκτός από αυτά του S . Υποθέτουμε λοιπόν ότι $F_S \subseteq H_{\alpha, r}$ με $\alpha \in \Phi^+$ και $r \geq 0$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k}$ τέτοιοι ώστε

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_{n-k} \alpha_{n-k} \quad (3.20)$$

και $r = m(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-k})$. Παρατηρήστε ότι οι ρίζες α_i είναι ελαχιστικά στοιχεία του τελευταίου φίλτρου της γεωμετρικής αλυσίδας φίλτρων που αντιστοιχεί στην περιοχή R και επομένως αποτελούν αντιαλυσίδα, δηλαδή είναι μη συγκρίσιμα ανά δύο. Από το πρώτο βασικό αποτέλεσμα του [66] (βλ. επίσης την απόδειξη του Πορίσματος 6.2 στο [11]) συμπεραίνουμε ότι οι συντελεστές λ_i στο (3.20) είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Επομένως, είτε $r > m$ είτε $\alpha = \alpha_i$ και $r = m$ για κάποιο i . Εφόσον το πρώτο δεν μπορεί να συμβεί, έχουμε ότι $H_{\alpha, r} \in S$.

Για να δείξουμε ότι η g είναι αμφιμονοσήμαντη, θα δείξουμε ότι αν $F \in \mathcal{F}_k(\Phi, m)$ τότε υπάρχει μοναδικό $\tau \in \mathcal{R}_k(\Phi, m)$ με $g(\tau) = F$. Έστω

$(\varpi_1^\vee, \varpi_2^\vee, \dots, \varpi_n^\vee)$ η γραμμική βάση του \mathbb{R}^n δυϊκή του Π , δηλαδή ισχύει

$$(\sigma_i, \varpi_j^\vee) = \delta_{ij}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $g(\tau) = F$ με $\tau = (R, S)$, το x είναι σημείο του F και τα ϵ_i είναι πολύ μικροί θετικοί αριθμοί, τότε

$$x + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \varpi_i^\vee \in R. \quad (3.21)$$

Αφού οι περιοχές του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ είναι ανά δύο ξένες τότε η παραπάνω περιοχή R είναι μοναδική, άρα και το τ είναι μοναδικό. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη, θεωρούμε τη μοναδική περιοχή R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ η οποία ορίζεται από την (3.21). Ισοδύναμα, μπορούμε να πάρουμε την R αντικαθιστώντας όλα τα υπερεπίπεδα της μορφής $H_{\alpha, m}$ στην τομή (3.18) τα οποία ορίζουν το F με $H_{\alpha, m}^+$. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τέτοιο υπερεπίπεδο $H_{\alpha, m}$ είναι τείχος της R διότι τότε, αν το S είναι το σύνολο των υπερεπιπέδων της μορφής $H_{\alpha, m}$ τα οποία περιέχουν το F τότε $\tau = (R, S)$ και $g(\tau) = F$.

Υποθέτουμε, αντιθέτως, ότι κάποιο $H_{\alpha, m} \supseteq F$ δεν είναι τείχος του R . Τότε, λόγω του Θεωρήματος 3.4 το α δεν είναι μή αναλύσιμο τάξεως m ως προς την γεωμετρική αλυσίδα \mathcal{I} φίλτρων $\Phi^+ = \mathcal{I}_0 \supseteq \mathcal{I}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{I}_m$ που αντιστοιχεί στην R , και επομένως μπορούμε να γράψουμε $\alpha = \beta + \gamma$ με $\beta \in \mathcal{I}_i$, $\gamma \in \mathcal{I}_j$ και $i + j = m$. Αφού $(\alpha, x) = m$ για κάθε $x \in F$ και $(\beta, x) > i$ και $(\gamma, x) > j$ για κάθε $x \in R$, τότε $(\beta, x) \geq i$ και $(\gamma, x) \geq j$ για κάθε $x \in F$ και επομένως θα πρέπει $(\beta, x) = i$ και $(\gamma, x) = j$ για κάθε $x \in F$. Όμως κάποιο από τα i, j θα πρέπει να είναι μικρότερο του m και αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το F περιέχεται σε κάποιο $H_{\alpha, r}$ με $\alpha \in \Phi^+$ μόνο όταν $r = m$. \square

Στο Σχήμα 3.5 μπορεί να ελέγξει κανείς την αντιστοιχία (i) και (ii) του Θεωρήματος 3.8 για $\Phi = A_2$ και $m = 3$.

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος είναι όμοια με αυτήν του Θεωρήματος 3.8 και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.9. Για κάθε ανάγωγο και κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών Φ , κάθε $m \geq 1$ και $0 \leq k \leq n$ το $\mathcal{F}_{k-1}^+(\Phi, m)$ απαριθμεί:

- (i) ζεύγη (R, S) όπου το R είναι κυρίαρχη φραγμένη περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και το S είναι ένα σύνολο από $n - k$ τείχη της R της μορφής $H_{\alpha, m}$ τα οποία δεν διαχωρίζουν την R από το A_\circ ,
- (ii) ζεύγη (\mathcal{J}, T) όπου το \mathcal{J} είναι μία γεωμετρική αλυσίδα ιδεωδών του Φ^+ μήκους m και το T είναι ένα σύνολο $n - k$ μή αναλύσιμων ριζών ως προς \mathcal{J} τάξεως m και
- (iii) στοιχεία του $\mathcal{F}_k^+(\Phi, m)$.

Είναι προφανές ότι κάνοντας τις απαραίτητες αλλαγές στα (i) και (ii), τα Θεωρήματα 3.8 και 3.9 ισχύουν και όταν το Φ δεν είναι ανάγωγο.

Λήμμα 3.11. Για κάθε κρυσταλλογραφικό σύστημα Φ , $m \geq 1$ και $0 \leq k \leq n$ ισχύει ότι

$$f_{k-1}(\Phi_I, m) = \sum_{J \subseteq I} f_{k-|J|-1}^+(\Phi_{I \setminus J}, m).$$

Απόδειξη. Για $J \subseteq I$ συμβολίζουμε με \mathbb{R}_J^n τον υπόχωρο του \mathbb{R}^n που παράγεται από τις απλές ρίζες με δείκτες τα στοιχεία του J και συμβολίζουμε με $p_J : \mathbb{R}_I^n \rightarrow \mathbb{R}_{I \setminus J}^n$ την φυσική προβολή στο $\mathbb{R}_{I \setminus J}^n$. Ορίζουμε απλό μέρος ενός $F \in \mathcal{F}_k(\Phi, m)$ το σύνολο δεικτών $j \in I$ για τους οποίους $F \subseteq H_{\sigma_j, m}^+$. Παρατηρήστε ότι αν το J είναι το απλό μέρος του F τότε για $\alpha \in \Phi^+$ και $x \in F$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha, x) &= (\alpha, p_J(x)), \text{ αν } \alpha \in \Phi_{I \setminus J} \\ (\alpha, x) &> m, \text{ αλλιώς.} \end{aligned}$$

Επομένως, η p_J επάγει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του $\mathcal{F}_k(\Phi_I, m)$ με απλό μέρος J και των στοιχείων του $\mathcal{F}_{k-|J|}^+(\Phi_{I \setminus J})$. Επομένως, απαριθμώντας τα στοιχεία του $\mathcal{F}_k(\Phi_I, m)$ σε σχέση με το απλό τους μέρος παίρνουμε το ζητούμενο. \square

Το επιχείρημα που χρησιμοποιούμε στο ακόλουθο πόρισμα εμφανίζεται επίσης και στην Πρόταση 6.1 του [50].

Πόρισμα 3.8. Αν για κάποιο ζεύγος (Φ, m) ισχύει $h_i(\Phi, m) = h_i(\Delta^m(\Phi))$ για κάθε i , τότε ισχύει επίσης ότι $h_i^+(\Phi, m) = h_i(\Delta_+^m(\Phi))$ για κάθε i .

Απόδειξη. Έστω $\Phi = \Phi_I$ με $|I| = n$. Θεωρούμε τα ζεύγη (ℓ, J) με την μερική διάταξη

$$(\ell, J) \leq (\ell', J') \text{ αν και μόνον αν } J \subseteq J' \text{ και } \ell' - \ell = |J' \setminus J|.$$

Σταθεροποιούμε $0 \leq k \leq n$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g(J, i) = f_{k-1}(\Delta^m(\Phi_J))$ και $f(J, i) = f_{k-(n-i)-1}(\Delta_+^m(\Phi_J))$. Από την σχέση (3.9) έχουμε

$$f_{k-1}(\Delta^m(\Phi_I)) = \sum_{J \subseteq I} f_{k-|I \setminus J|-1}(\Delta_+^m(\Phi_J)),$$

το οποίο ισοδυναμεί με

$$g(I, n) = \sum_{(J, i) \leq (I, n)} f(J, i).$$

Τώρα, εφαρμόζοντας αντιστροφή Möbius (Πρόταση 3.1) έχουμε ότι

$$f(I, n) = \sum_{(J, i) \leq (I, n)} \mu((J, i), (I, n)) g(J, i),$$

δηλαδή

$$f_{k-1}(\Delta_+^m(\Phi_I)) = \sum_{(J,i) \leq (I,n)} \mu((J,i), (I,n)) f_{k-1}(\Delta^m(\Phi_J)).$$

Επίσης, από το Λήμμα 3.11 έχουμε

$$f_{k-1}(\Phi_I, m) = \sum_{J \subseteq I} f_{k-|I \setminus J|-1}^+(\Phi_J, m)$$

και ακολουθώντας τους ίδιους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι

$$f_{k-1}^+(\Phi_I, m) = \sum_{(J,i) \leq (I,n)} \mu((J,i), (I,n)) f_{k-1}(\Phi_J, m).$$

Εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι $f_{k-1}(\Phi_J, m) = f_{k-1}(\Delta^m(\Phi_J))$ για κάθε $J \subseteq I$ τότε συμπεραίνουμε ότι $f_{k-1}(\Delta_+^m(\Phi_I)) = f_{k-1}^+(\Phi_I, m)$. Η παραπάνω διαδικασία ισχύει για κάθε $0 \leq k \leq n$ και συνεπώς $h_i(\Delta_+^m(\Phi_I)) = h_i^+(\Phi_I, m)$ για κάθε $0 \leq i \leq n-1$. \square

Πόρισμα 3.9. Η Εικασία 3.1 ισχύει για κάθε κρυσταλλογραφικό σύστημα όταν $m = 1$ και κάθε κλασικό σύστημα όταν $m \geq 1$.

Απόδειξη. Από τους αναλυτικούς τύπους στα [5, 37, 73] βλέπουμε ότι $h_i(\Phi, m) = h_i(\Delta^m(\Phi))$ για τις περιπτώσεις που θεωρούμε. Τότε, το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 3.4 και το Πόρισμα 3.8. \square

Θα ολοκληρώσουμε αυτήν την παράγραφο με μία ακόμη συνδυαστική ερμηνεία του αριθμού $f_{k-1}^+(\Phi, m)$ παρόμοια με αυτές των (i) και (ii) του Θεωρήματος 3.9.

Θεώρημα 3.10. Για κάθε ανάγωγο κρυσταλλογραφικό σύστημα Φ , μη αρνητικό ακέραιο m και $0 \leq k \leq n$ το $f_{k-1}^+(\Phi, m)$ απαριθμεί:

- (i) ζεύγη (R, S) όπου η R είναι κυρίαρχη περιοχή του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ και το S είναι σύνολο $n-k$ τειχών της R της μορφής $H_{\alpha, m}$ τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_0 και το S περιέχει όλα τα παραπάνω τείχη της R για τα οποία $\alpha \in \Pi$, και
- (ii) ζεύγη (\mathcal{I}, T) όπου η \mathcal{I} είναι γεωμετρική αλυσίδα φίλτρων του Φ^+ μήκους m και το T είναι σύνολο $n-k$ μη αναλύσιμων ριζών τάξεως m ως προς \mathcal{I} το οποίο περιέχει όλες τις απλές μη αναλύσιμες ρίζες τάξεως m ως προς \mathcal{I} .

Απόδειξη. Τα σύνολα (i) και (ii) είναι ισοπληθή λόγω του Θεωρήματος 3.4. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ισχυριζόμαστε ότι η απεικόνιση g της απόδειξης του Θεωρήματος 3.8 περιορίζεται σε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο του (i) στο $\mathcal{F}_k^+(\Phi, m)$. Διαφορετικά, με επιχείρημα όμοιο με αυτό του Πορίσματος 3.8 αρκεί να δείξουμε ότι

$$f_{k-1}(\Phi_I, m) = \sum_{J \subseteq I} g_{k-|J|-1}^+(\Phi_{I \setminus J}, m),$$

όπου $\Phi = \Phi_I$ και το $g_{k-1}^+(\Phi, m)$ συμβολίζει τον πληθάρημο του συνόλου $\mathcal{G}_k^+(\Phi, m)$ των ζευγών που εμφανίζονται στο (ii). Έστω $\mathcal{G}_k(\Phi_I, m)$ το σύνολο των ζευγών που ορίζονται στο μέρος (ii) του Θεωρήματος 3.8. Αν $(\mathcal{I}, T) \in \mathcal{G}_k(\Phi_I, m)$ ονομάζουμε απλό μέρος του (\mathcal{I}, T) το σύνολο των απλών ριζών οι οποίες είναι μή αναλύσιμες ως προς \mathcal{I} τάξεως m και δεν περιέχονται στο T . Για κάθε $J \subseteq I$ συμβολίζουμε με Λ_J το φίλτρο ριζών $\alpha \in \Phi_I$ για τις οποίες $\sigma_j \leq \alpha$ για κάποιο $j \in J$. Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε απευθείας από τους ορισμούς ότι η απεικόνιση η οποία στέλνει το ζεύγος (\mathcal{I}, T) στο $(\mathcal{I} \setminus \Lambda_J, T)$, όπου το $\mathcal{I} \setminus \Lambda_J$ είναι η αλυσίδα φίλτρων που παίρνουμε από την \mathcal{I} αν αφαιρέσουμε από κάθε φίλτρο το Λ_J , είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου των στοιχείων του $\mathcal{G}_k(\Phi_I, m)$ με απλό μέρος J και του συνόλου $\mathcal{G}_{k-|J|}^+(\Phi_{I \setminus J}, m)$. Επομένως, μετρώντας τα στοιχεία του $\mathcal{G}_k(\Phi_I, m)$ ως προς το απλό τους μέρος παίρνουμε τη ζητούμενη ισότητα. \square

3.6 Η ισότητα $F = H$

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε την Εικασία 3.2 για $m = 1$ και για τα κλασικά συστήματα ριζών όταν $m \geq 1$.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}_{k,\ell}(\Phi, m)$ των $F \in \mathcal{F}_{k+\ell}(\Phi, m)$ των οποίων το απλό μέρος $\mathcal{S}p(F) = \{H_{\alpha,m} : F \subseteq H_{\alpha,m}^+, \alpha \in \Pi\}$ έχει ℓ στοιχεία. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία του $\mathcal{F}_{k,\ell}(\Phi, m)$ είναι τομές της μορφής (3.18) διαστασεως $k + \ell$ οι οποίες έχουν ℓ το πλήθος στοιχεία $\tilde{H}_{\alpha,r}$ της μορφής $H_{\sigma,m}^+$ με $\sigma \in \Pi$. Ονομάζουμε ένα τείχος $H_{\alpha,r}$ μίας περιοχής R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ απλό αν $\alpha \in \Pi$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}_{i,j}(\Phi, m)$ το σύνολο των περιοχών R του $\mathcal{A}^m(\Phi)$ οι οποίες έχουν j απλά και i μη απλά τείχη της μορφής $H_{\alpha,m}$ τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_0 . Επίσης, γράφουμε $f_{k,\ell}(\Phi, m) = |\mathcal{F}_{k,\ell}(\Phi, m)|$ και $h_{i,j}(\Phi, m) = |\mathcal{R}_{i,j}(\Phi, m)|$.

Παράδειγμα 3.3. Στο Σχήμα 3.6 θεωρούμε το παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}^3(A_2)$. Είναι $f_{0,0} = 1$ (χίτρινο σημείο), $f_{0,1} = 2$ (κόκκινες ευθείες), $f_{1,0} = 9$ (μπλέ ευθ. τμήματα), $f_{0,2} = 1$ (ροζ περιοχή), $f_{1,1} = 6$ (πράσινες περιοχές) και $f_{2,0} = 15$ (άσπρες περιοχές).

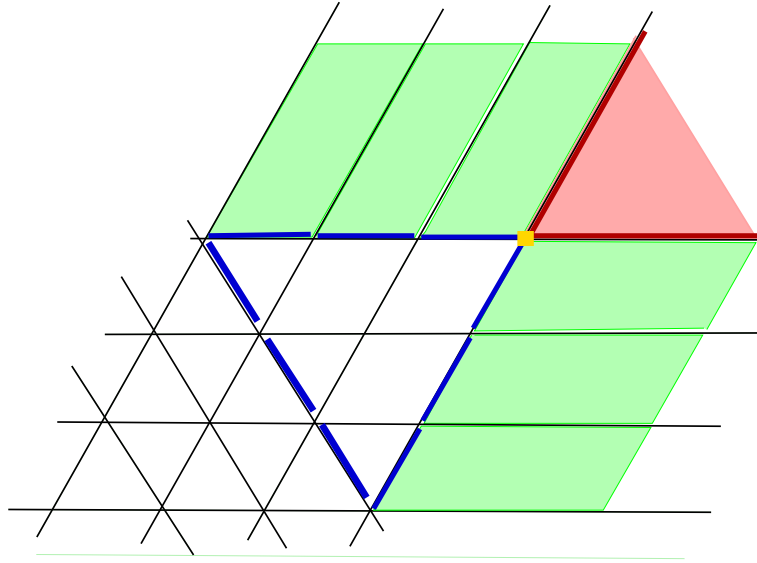
Λήμμα 3.12. Ισχύει η ισότητα

$$f_{k,\ell}(\Phi, m) = f_{k,\ell}(\Delta^m(\Phi))$$

για κάθε κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών όταν $m = 1$ και για κάθε κλασικό σύστημα ριζών όταν $m \geq 1$.

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 3.4 ισχύει

$$f_{k,\ell}(\Delta^m(\Phi_I)) = \sum_{J \subseteq I, |J|=\ell} f_{k,0}(\Delta^m(\Phi_{I \setminus J})) = \sum_{J \subseteq I, |J|=\ell} f_{k-1}^+(\Delta^m(\Phi_{I \setminus J})),$$



Σχήμα 3.6:

για κάθε σύστημα ριζών Φ και μη αρνητικό ακέραιο m . Επίσης, αν $J \subseteq I$ με $|J| = \ell$ και p_J είναι η φυσική προβολή όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.11 τότε η p_J στέλνει τα στοιχεία του $\mathcal{F}_{k+\ell}(\Phi_I, m)$ με θετικό μέρος J στα στοιχεία του $\mathcal{F}_k^+(\Phi_{I \setminus J}, m)$ και συνεπώς ισχύει

$$f_{k,\ell}(\Phi_I, m) = \sum_{J \subseteq I, |J|=\ell} f_{k,0}(\Phi_{I \setminus J}, m) = \sum_{J \subseteq I, |J|=\ell} f_{k-1}^+(\Phi_{I \setminus J}, m).$$

Το ζητούμενο, τότε, προκύπτει από το Πρόσχημα 3.9. □

Πρόταση 3.4. Υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των

- (i) στοιχείων του $\mathcal{F}_{k,\ell}(\Phi, m)$
- (ii) τριάδων (R, S, S') όπου $R \in \mathcal{R}_{i,j}$, $\ell \leq j \leq n$, $n - k - j \leq i \leq n$, το S είναι σύνολο απλών και το S' μη απλών τειχών της μορφής $H_{\alpha,m}$ τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_o με $|S| = \ell$ και $|S'| = n - k - j$.

Απόδειξη. Έστω $F \in \mathcal{F}_{k,\ell}(\Phi, m)$, δηλαδή $F \in \mathcal{F}_{k+\ell}(\Phi, m)$ και $|\mathcal{S}p(F)| = \ell$. Έστω $g^{-1}(F) = (R, \tilde{S})$ όπου g είναι η απεικόνιση του Θεωρήματος 3.8. Υποθέτουμε ότι $R \in \mathcal{R}_{i,j}(\Phi, m)$ και υπενθυμίζουμε ότι το \tilde{S} είναι υποσύνολο των τειχών $H_{\alpha,m}$ της R που τη διαχωρίζουν από το A_o με $F \subseteq H_{\alpha,m}$ και επίσης $|\tilde{S}| = n - k - \ell$. Το F περιέχεται στους ίδιους ημιχώρους με το R εκτός από τους $H_{\alpha,m}^+$, $\alpha \in \tilde{S}$ για τους οποίους ισχύει $F \subseteq H_{\alpha,m}$. Επομένως, έχουμε ότι $F \subseteq H_{\alpha,m}^+ \cup H_{\alpha,m}$ αν και μόνον αν $R \subseteq H_{\alpha,m}^+$. Άρα $\mathcal{S}p(F) \subseteq \mathcal{S}p(R)$ και συνεπώς $\ell \leq j$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $\mathcal{S}p(R) \setminus \mathcal{S}p(F) \subseteq \tilde{S}$ και θέτουμε $S' = \tilde{S} \setminus (\mathcal{S}p(R) \setminus \mathcal{S}p(F))$.

Προφανώς $|S'| = (n - k - \ell) - (j - \ell) = n - k - j$. Τώρα δείχνουμε ότι το S' αποτελείται από μή απλά τείχη της R της μορφής $H_{\alpha, m}$ τα οποία διαχωρίζουν την R από το A_0 . Πράγματι, αν ήταν $H_{\sigma, m} \in S'$ τότε $F \subseteq H_{\sigma, m}$ και $R \not\subseteq H_{\sigma, m}^+$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $n - k - j \leq i$ και αντιστοιχούμε στο F την διατεταγμένη τριάδα $(R, Sp(F), S')$.

Αντιστρόφως, έστω (R, S, S') όπως στο (ii) της πρότασης. Προφανώς $S \subseteq Sp(R)$ και επομένως $|Sp(R) \setminus S| = j - \ell$. Επίσης, τα σύνολα $Sp(R) \setminus S$ και S' είναι ξένα διότι περιέχουν απλά και μή απλά αντίστοιχα τείχη της R . Συνεπώς $|(Sp(R) \setminus S) \cup S'| = (j - \ell) + (n - k - j) = n - k - \ell$. Θέτουμε $\tilde{S} = (Sp(R) \setminus S) \cup S'$ και θεωρούμε το $g(R, \tilde{S}) = F$. Αφού $|\tilde{S}| = n - k - \ell$ τότε $F \in \mathcal{F}_{k+\ell}(\Phi, m)$. Επίσης, $Sp(F) = S$ διότι, από τον ορισμό της g , είναι $Sp(F) \subseteq Sp(R)$ και $Sp(F) \cap \tilde{S} = \emptyset$. Επομένως, αφού $|Sp(F)| = |S| = \ell$ τότε $F \in \mathcal{F}_{k,\ell}(\Phi, m)$. Αντιστοιχούμε λοιπόν στην τριάδα (R, S, S') το F .

Τέλος, αφήνουμε στον αναγνώστη να διαπιστώσει ότι η παραπάνω αντιστοιχία είναι αμφιμονοσήμαντη διότι και η g είναι αμφιμονοσήμαντη. \square

Λόγω της Πρότασης 3.4 έχουμε την σχέση

$$f_{k,\ell}(\Phi, m) = \sum_{i=n-k-j}^n \sum_{j=\ell}^n h_{i,j}(\Phi, m) \binom{j}{\ell} \binom{i}{n-k-j} \quad (3.22)$$

Πόρισμα 3.10. Η Εικασία 3.2 ισχύει για κάθε κρυσταλλογραφικό σύστημα όταν $m = 1$ και κάθε κλασικό σύστημα όταν $m \geq 1$.

Απόδειξη. Προκύπτει από το Λήμμα 3.12 και το γεγονός ότι η σχέση (3.22) είναι ισοδύναμη με την ισότητα (3.5). \square

3.7 Οι κλασικές περιπτώσεις και η περίπτωση $m = 1$

Σε αυτήν την παράγραφο υπολογίζουμε τους αριθμούς $h_i^+(\Phi, m)$ και $f_{i-1}^+(\Phi, m)$ για τα κλασικά συστήματα ριζών.

Πρόταση 3.5. Ο αριθμός $h_i^+(\Phi, m)$ είναι ίσος με

$$\begin{aligned} \frac{1}{i+1} \binom{n-1}{i} \binom{mn-2}{i} & \quad \text{αν } \Phi = A_{n-1}, \\ \binom{n}{i} \binom{mn-1}{i} & \quad \text{αν } \Phi = B_n \text{ ή } C_n, \\ \binom{n}{i} \binom{m(n-1)-1}{i} + \binom{n-2}{i-2} \binom{m(n-1)}{i} & \quad \text{αν } \Phi = D_n. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Οι παραπάνω αριθμοί υπολογίζονται ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 5.1 στο [6], αντικαθιστώντας την ποσότητα $mh+1$ με $mh-1$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2 (iii) αντί του Θεωρήματος 1.2 (ii) του [6]. \square

Το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεσο από την Πρόταση 3.5 και τη σχέση (3.16).

Πόρισμα 3.11. Ο αριθμός $f_{k-1}^+(\Phi, m)$ είναι ίσος με

$$\frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} \binom{mn+k-1}{k} \quad \text{αν } \Phi = A_{n-1},$$

$$\binom{n}{k} \binom{mn+k-1}{k} \quad \text{αν } \Phi = B_n \text{ ή } C_n,$$

$$\binom{n}{k} \binom{m(n-1)+k-1}{k} + \binom{n-2}{k-2} \binom{m(n-1)+k-2}{k} \quad \text{αν } \Phi = D_n.$$

\square

Πόρισμα 3.12. Ο αριθμός $f_{k-1}(\Delta_+^n(\Phi))$ είναι ίσος με

$$\frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} \binom{mn+k-1}{k} \quad \text{αν } \Phi = A_{n-1},$$

$$\binom{n}{k} \binom{mn+k-1}{k} \quad \text{αν } \Phi = B_n \text{ ή } C_n,$$

$$\binom{n}{k} \binom{m(n-1)+k-1}{k} + \binom{n-2}{k-2} \binom{m(n-1)+k-2}{k} \quad \text{αν } \Phi = D_n.$$

\square

Απόδειξη. Συνδυάστε τα Πορίσματα 3.9 και 3.11. \square

Παρατήρηση 3.2. Για τις μη κλασικές κρυσταλλογραφικές ομάδες ανακλάσεων, το πλήθος των θετικών φίλτρων του Φ^+ με i ελαχιστικά στοιχεία υπολογίστηκε από τον Reiner και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\Phi = G_2$	1	4						
$\Phi = F_4$	1	20	35	10				
$\Phi = E_6$	1	30	135	175	70	7		
$\Phi = E_7$	1	56	420	952	770	216	16	
$\Phi = E_8$	1	112	1323	4774	6622	3696	770	44

Πίνακας 3.2: Οι αριθμοί $h_i^+(\Phi)$ για τις μη κλασικές κρυσταλλογραφικές ομάδες ανακλάσεων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3. Θα αποδείξουμε το θεώρημα χωρίς την υπόθεση ότι το Φ είναι ανάγωγο. Έστω n η τάξη του $\Phi = \Phi_I$. Θα γράφουμε $h_k(\Phi_I)$ αντί

για $h_k(\Phi_I, 1)$, ώστε το $h_{n-k}(\Phi_I)$ είναι το πλήθος των φίλτρων του Φ_I^+ με k ελαχιστικά στοιχεία καθώς και το πλήθος των ιδεωδών με k μεγιστικά στοιχεία. Συμβολίζουμε με $\tilde{h}_k^+(\Phi)$ το πλήθος των θετικών φίλτρων του Φ^+ με k ελαχιστικά στοιχεία. Μετρώντας τα φίλτρα του Φ_I^+ με βάση το πλήθος των απλών ριζών που περιέχουν παίρνουμε

$$h_{n-k}(\Phi_I) = \sum_{J \subseteq I} \tilde{h}_{k-|J|}^+(\Phi_{I \setminus J}). \quad (3.23)$$

Ομοίως, μετρώντας ιδεώδη του Φ_I^+ με βάση το σύνολο των απλών ριζών που δεν περιέχουν παίρνουμε

$$h_{n-k}(\Phi_I) = \sum_{J \subseteq I} h_{n-|J|-k}^+(\Phi_{I \setminus J}).$$

Από το [54] ξέρουμε ότι $h_{n-k}(\Phi_I) = h_k(\Phi_I)$ και επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται

$$h_{n-k}(\Phi_I) = \sum_{J \subseteq I} h_{k-|J|}^+(\Phi_{I \setminus J}). \quad (3.24)$$

Συγκρίνοντας τις (3.23) και (3.24) και χρησιμοποιώντας αντιστροφή Möbius όπως και στην Παράγραφο 3.5, παίρνουμε ότι $\tilde{h}_k^+(\Phi_J) = h_k^+(\Phi_J)$ για κάθε $J \subseteq I$, που είναι αυτό που θέλουμε. \square

3.8 Παρατηρήσεις

1. Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα πολύτοπο διαστάσεως d και Δ μία βάση του \mathbb{R}^n . Το P λέγεται *ρητό* ως προς την βάση Δ αν όλες οι κορυφές του ανήκουν στο $\mathbb{Q}\Delta$, δηλαδή γράφονται ως ρητοί γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του Δ . Θέτουμε

$$i(P, r) = |rP \cap \mathbb{Z}\Delta|$$

και

$$i^*(P, r) = |r(P \setminus \partial P) \cap \mathbb{Z}\Delta|.$$

Μία απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται *ψευδοπολυώνυμο τάξεως το πολύ d* αν υπάρχουν πολυώνυμα f_1, f_2, \dots, f_N βαθμού το πολύ d τέτοια ώστε

$$f(n) = f_i(n) \quad \text{αν} \quad n \equiv i \pmod{N}.$$

Αποδεικνύεται ότι αν το P είναι ρητό πολύτοπο διαστάσεως d τότε το $i(P, r)$ είναι *ψευδοπολυώνυμο τάξεως το πολύ d* (βλ. Παράγραφο 4.6 του [67]). Συνεπώς το $i(P, r)$ μπορεί να οριστεί και όταν το r είναι αρνητικός ακέραιος. Ένα κλασικό αποτέλεσμα, γνωστό ως *αντιστροφή Ehrhart*, είναι η ακόλουθη σχέση

$$i^*(P, r) = (-1)^d i(P, -r).$$

Η παρακάτω σχέση

$$N_+^{(m-1)}(\Phi) = (-1)^n N^{(-m)}(\Phi) \quad (3.25)$$

παρατηρήθηκε από τους Fomin και Reading [37, (2.12)]. Θα δείξουμε ότι αυτή η σχέση μπορεί να ερμηνευτεί ως αντιστροφή Ehrhart. Θέτουμε $i(k)$ το πλήθος των στοιχείων του $L(\Phi^\vee) \cap k\bar{A}_o$ για $n \in \mathbb{N}$. Οι κορυφές του μονόπλοκου \bar{A}_o έχουν ρητές συντεταγμένες ως προς την βάση Π του \mathbb{R}^n άρα και ως προς την βάση $\Pi^\vee = \{2\alpha/(\alpha, \alpha) : \alpha \in \Pi\}$ του \mathbb{R}^n . Συνεπώς, η συνάρτηση $i(k)$ είναι το Ehrhart ψευδοπολυώνυμο του \bar{A}_o σε σχέση με το πλέγμα $L(\Phi^\vee)$. Επομένως, λόγω αντιστροφής Ehrhart έχουμε ότι

$$(-1)^n i(-k) = |L(\Phi^\vee) \cap kA_o|$$

όπου $k \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $k = mh - 1$ και λαμβανοντας υπόψιν το Θεώρημα 1.1 του [6] έχουμε

$$(-1)^n N^{(-m)}(\Phi) = |L(\Phi^\vee) \cap (mh - 1)A_o|.$$

Από την Παρατήρηση 3.1 συμπεραίνουμε ότι

$$|L(\Phi^\vee) \cap (mh - 1)A_o| = N_+^{(m-1)}(\Phi),$$

από το οποίο παίρνουμε την σχέση (3.25).

Επίσης, σημειώνουμε ότι η σχέση (3.25) αποδεικνύεται και με την χρήση ενός πιο πρόσφατου θεωρήματος [8, Θεώρημα 1.1] που αφορά μία σχέση αντιστροφής πάνω στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο παρατάγματος υπερεπιπέδων (βλ. [8, Παράδειγμα 3.3]).

2. Οι αριθμοί $f_{k,\ell}(\Phi, m)$ υπολογίστηκαν αργότερα από τον Krattenthaler και είναι οι εξής.

Πρόταση 3.6. [44] *Ο αριθμός $f_{k,\ell}(\Phi, m)$ είναι ίσος με*

$$\frac{\ell + 1}{k + \ell + 1} \binom{n}{k + \ell} \binom{m(n + 1) + k - 1}{k} \quad \text{αν } \Phi = A_n,$$

$$\binom{n}{k + \ell} \binom{mn + k - 1}{k} \quad \text{αν } \Phi = B_n,$$

και

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k + \ell} \binom{m(n - 1) + k - 1}{k} + m \binom{n - 1}{k + \ell - 1} \binom{m(n - 1) + k - 2}{k - 1} \\ & - \delta_{\ell,0} \frac{1}{n - 1} \binom{n - 1}{k - 1} \binom{m(n - 1) + k - 1}{k} \quad \text{αν } \Phi = D_n, \end{aligned}$$

όπου το $\delta_{\ell,0}$ είναι 1 όταν $\ell = 0$ και 0 όταν $\ell \geq 1$. □

Παρατηρήστε ότι θέτοντας $\ell = 0$ παίρνουμε τους αριθμούς του Πορίσματος 3.11.

3. Θα ήταν ενδιαφέρον να βρεθούν συνδυαστικές ερμηνείες για τους αριθμούς του Πορίσματος 3.12 απευθείας από την περιγραφή των αντίστοιχων συμπλεγμάτων με χρήση πολυγωνικών υποδιαρέσεων (βλ. Παράγραφο 1.3.4 και [37, 40, 73]).

Κεφάλαιο 4

Πλευρές γενικευμένων συμπλεγμάτων σμηνών και μή διασταυρούμενες διαμερίσεις

4.1 Εισαγωγή

Έστω Φ ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W . Έστω Φ^+ ένα θετικό σύστημα για το Φ με σύνολο απλών ριζών Π . Θεωρούμε το γενικευμένο σύμπλεγμα σμηνών $\Delta^m(\Phi)$, το οποίο είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με σύνολο κορυφών το σύνολο $\Phi_{\geq -1}^m$ των σχεδόν θετικών χρωματισμένων ριζών. Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι ένας νέος χαρακτηρισμός των πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ με χρήση m -επιτρεπτών μή διασταυρούμενων διαμερίσεων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα ανάγωγο σύστημα ριζών Φ και μία διαμέρισή του $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$ σε δύο ξένα σύνολα τέτοια ώστε οι ρίζες σε κάθε ένα από αυτά να είναι ανά δύο κάθετες. Έστω γ το διμερές στοιχείο Coxeter που προκύπτει από την παραπάνω διαμέριση (βλ. (4.5)). Δεδομένης μίας πλευράς σ του $\Delta^m(\Phi)$ συμβολίζουμε με σ^i το υποσύνολο της σ που αποτελείται από ρίζες χρώματος i και $\sigma_{\pm} = \sigma \cap (-\Pi_{\pm})$. Αν $\tau \subseteq \Phi_{\geq -1}^m$ είναι τέτοιο ώστε είτε $\tau \subseteq (-\Pi)$ είτε το τ αποτελείται από ρίζες του ίδιου χρώματος, συμβολίζουμε με w_{τ} το γινόμενο των ανακλάσεων που αντιστοιχούν στις ρίζες του τ με μία συγκεκριμένη σειρά την οποία θα ορίσουμε αργότερα (βλ. (4.7)). Θέτουμε κατά σύμβαση $w_{\emptyset} = \mathbf{1}$, όπου $\mathbf{1}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της W . Οι πλευρές του $\Delta^m(\Phi)$ χαρακτηρίζονται από το παρακάτω κριτήριο.

Θεώρημα 4.1. *Το σύνολο $\sigma \subseteq \Phi_{\geq -1}^m$ είναι πλευρά του $\Delta^m(\Phi)$ αν και μόνον αν η ακολουθία $(w_{\sigma_+} w_{\sigma^m}, w_{\sigma^{m-1}}, \dots, w_{\sigma^2}, w_{\sigma^1} w_{\sigma_-})$ είναι στοιχείο του $\text{NC}_m(\gamma)$*

τάξεως $|\sigma|$.

Το Θεώρημα 4.1 ανάγεται στον χαρακτηρισμό των Brady και Watt [27, Παράγραφος 8] στην περίπτωση $m = 1$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο μπορεί κανείς να αποδείξει ενδιαφέρουσες ιδιότητες του $\Delta^m(\Phi)$, όπως για παράδειγμα ότι το $\Delta^m(\Phi)$ είναι αποφλοιώσιμο και $(m+1)$ -Cohen-Macaulay. Αυτά μελετώνται στο άρθρο [13].

Το δεύτερο βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι η απόδειξη μίας εικασίας η οποία συνδέει το σύμπλεγμα σιγνών $\Delta^m(\Phi)$ με το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\text{NC}_m(W)$. Ο Chapoton [30] ανακάλυψε και έκανε την εικασία ότι ισχύει μία απεριθμητική σχέση μεταξύ μίας εκλέπτυνσης του συνόλου των πλευρών του $\Delta(\Phi)$ και της συνάρτησης Möbius του μερικώς διατεταγμένου συνόλου των μή διασταυρούμενων διαμερίσεων. Αυτή η εικασία, η οποία αποδείχτηκε από τον Αθανασιάδη [7], μπορεί να διατυπωθεί για τυχαίο $m \geq 1$ ως εξής [1] (βλ. επίσης [44, 45]). Το F -τρίγωνο του $\Delta^m(\Phi)$ ορίζεται από την γεννήτρια συνάρτηση

$$F_{\Phi}^{(m)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n f_{k,l}(\Phi, m) x^k y^l, \quad (4.1)$$

όπου το $f_{k,l}(\Phi, m)$ είναι το πλήθος των πλευρών του $\Delta^m(\Phi)$ που αποτελούνται από k χρωματισμένες θετικές ρίζες και l αρνητικές απλές ρίζες. Το M -τρίγωνο του $\text{NC}_m(W)$ ορίζεται ως

$$M_W^{(m)}(x, y) = \sum_{a \leq b} \mu(a, b) x^{rk(b)-rk(a)} y^{rk(a)}, \quad (4.2)$$

όπου το \leq συμβολίζει τη μερική διάταξη στο $\text{NC}_m(W)$, μ είναι η συνάρτηση Möbius και $rk(a)$ η τάξη του $a \in \text{NC}_m(W)$. Η ακόλουθη σχέση διατυπώθηκε από τον F. Chapoton [30, Εικασία 1] σαν εικασία στην περίπτωση $m = 1$ και επαναδιατυπώθηκε από τον Armstrong για κάθε $m \geq 1$.

Θεώρημα 4.2. [1, Εικασία 5.3.2] Έστω Φ ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών τάξεως n με αντίστοιχη ομάδα ανακλάσεων W και m ένας μή αρνητικός ακέραιος. Το F -τρίγωνο του $\Delta^m(\Phi)$ και το M -τρίγωνο του $\text{NC}_m(W)$ συνδέονται με την ισότητα

$$(1-y)^n F_{\Phi}^{(m)}\left(\frac{x+y}{1-y}, \frac{y}{1-y}\right) = M_W^{(m)}(-x, -y/x). \quad (4.3)$$

Ορισμένες φορές θα αναφερόμαστε στη σχέση (4.3) ως τη σχέση “ $M = F$ ”. Το Θεώρημα 4.2 έχει αποδειχθεί εν μέρει από τον Krattenthaler [44], κάνοντας υπολογισμούς κατά περίπτωση, για όλα τα πεπερασμένα συστήματα ριζών όταν $m = 1$ και για αυτά τα οποία δεν περιέχουν κάποιο αντίγραφο του D_k για $k \geq 4$

όταν $m \geq 2$. Επίσης, παρατηρήθηκε από τον Krattenthaler ότι η σχέση (4.3) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη σχέση αντιστροφής [45, Θεώρημα 8]

$$y^n M_W^{(-m)}(xy, 1/y) = M_W^{(m)}(x, y),$$

για την οποία δεν έχει βρεθεί ακόμη κάποια φυσική εξήγηση.

Το κεφάλαιο αυτό έχει την ακόλουθη δομή. Στην Παράγραφο 4.2 δίνουμε τα απαραίτητα προαπαιτούμενα και συνεχίζουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 στην Παράγραφο 4.3. Στην Παράγραφο 4.4 βρίσκουμε μία EL-επιγραφή του μερικώς διατεταγμένου συνόλου $NC_m(\gamma)$, στην οποία οι φθίνουσες αλυσίδες βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις έδρες του $\Delta_+^m(\Phi)$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2 στην Παράγραφο 4.5, γενικεύοντας την αντίστοιχη του Αθανασιάδη [7] για την περίπτωση $m = 1$.

4.2 Προκαταρκτικά

Σε αυτήν την παράγραφο παραθέτουμε ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία τα οποία θα χρειαστούμε αργότερα.

Έστω W μία πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων τάξεως n και T το σύνολο των ανακλάσεων της W . Υπενθυμίζουμε ότι το απόλυτο μήκος $l_T(w)$ ενός $w \in W$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος k τέτοιος ώστε το w να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο k ανακλάσεων του T . Ορίζουμε τη μερική διάταξη \preceq στο W με

$$u \preceq v \text{ αν και μόνον αν } l_T(u) + l_T(u^{-1}v) = l_T(v),$$

δηλαδή, με άλλα λόγια, αν υπάρχει μία παραγοντοποίηση του u σε ελάχιστο δυνατό πλήθος ανακλάσεων του T η οποία είναι πρόθεμα μία παραγοντοποίησης του v σε επίσης ελάχιστο δυνατό πλήθος ανακλάσεων.

Τα παρακάτω λήμματα θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

Ορισμός 4.1. [1, Ορισμός 3.1.1] Η διατεταγμένη m -άδα $(w_1, \dots, w_m) \in W^m$ ονομάζεται ελαχιστική παραγοντοποίηση του $w \in W$ αν $w = w_1 w_2 \cdots w_m$ και $l_T(w) = \sum_{i=1}^m l_T(w_i)$.

Λήμμα 4.1.

- (i) Συζυγή στοιχεία της W έχουν το ίδιο απόλυτο μήκος.
- (ii) [1, Λήμμα 3.1.2] Αν το (w_1, w_2, \dots, w_k) είναι μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του $w \in W$, τότε και το

$$(w_i, w_i^{-1} w_1 w_i, \dots, w_i^{-1} w_{i-1} w_i, w_{i+1}, \dots, w_k)$$

είναι επίσης ελαχιστική παραγοντοποίηση, για κάθε $1 \leq i \leq k$. Ειδικότερα, για κάθε $1 \leq i \leq k$ υπάρχει μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του w που αρχίζει με w_i .

- (iii) Αν το (w_1, w_2, \dots, w_k) είναι ελαχιστική παραγοντοποίηση του w , τότε $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_\ell} \leq w$ και $l_T(w_{i_1} \cdots w_{i_\ell}) = \sum_{j=1}^{\ell} l_T(w_{i_j})$, για κάθε $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq k$.

Απόδειξη. Το (i) έπεται από το γεγονός ότι αν $t \in T$ τότε $wtw^{-1} \in T$ για κάθε $w \in W$. Το (ii) έπεται άμεσα από το (i). Για το (iii) αρκεί να εφαρμόσουμε το (ii) για κάθε w_{i_j} με $1 \leq j \leq \ell$, ώστε να προκύψει μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του w η οποία να αρχίζει με $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_\ell}$. \square

Λήμμα 4.2. [7, Λήμμα 2.1] Έστω $a, b, w \in W$.

- (i) $a \preceq aw \preceq b$ αν και μόνον αν $w \preceq a^{-1}b \preceq b$.
(ii) $a \preceq aw \preceq b$ αν και μόνον αν $a \preceq bw^{-1} \preceq b$.
(iii) $a \preceq b$ αν και μόνον αν $a^{-1}b \preceq b$ και, σε αυτήν την περίπτωση, το διάστημα $[a, b]$ είναι ισόμορφο με το $[1, a^{-1}b]$. \square

Λήμμα 4.3.

- (i) [9, Λήμμα 2.1 (iv)] Αν $a, b \preceq c \preceq w$ για κάποιο $w \in W$ και $ab \preceq w$ τότε $ab \preceq c$.
(ii) [27, Σχέση (3)] Αν $a \preceq b \preceq c$ τότε $a^{-1}b \preceq a^{-1}c$ και $ba^{-1} \preceq ca^{-1}$.
(iii) [27, Σχέση (7)] Για διακεκριμένες ανακλάσεις t_1, t_2 και $w \in W$ έχουμε $t_1 t_2 \preceq w \Leftrightarrow t_2 \preceq t_1 w \Leftrightarrow t_1 \preceq wt_2$. \square

Η ακόλουθη απλή παρατήρηση είναι συνέπεια του ορισμού της μερικής διάταξης \preceq της W και του Λήμματος 4.1(i).

Λήμμα 4.4. Για $u, v, w \in W$ έχουμε $u \preceq v$ αν και μόνον αν $uwu^{-1} \preceq wv^{-1}$. \square

Μερικώς διατεταγμένα σύνολα και EL-επιγραφές: Έστω (P, \leq) ένα πεπερασμένο διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Λέμε ότι το y καλύπτει το x και γράφουμε $x \rightarrow y$ αν $x < y$ και $x < z \leq y$ ισχύει μόνον όταν $z = y$. Έστω $\mathcal{E}(P)$ το σύνολο των σχέσεων κάλυψης του P και Λ ένα γραμμικώς διατεταγμένο σύνολο. Ονομάζουμε *επιγραφή ακμών* του P με σύνολο επιγραφής Λ κάθε απεικόνιση $\lambda : \mathcal{E}(P) \rightarrow \Lambda$. Αν η $C : x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_r$ είναι μία κορεσμένη αλυσίδα στο P ονομάζουμε το $\lambda(C) = (\lambda(x_0 \rightarrow x_1), \lambda(x_1 \rightarrow x_2), \dots, \lambda(x_{r-1} \rightarrow x_r))$ επιγραφή της C ως προς την απεικόνιση λ . Ονομάζουμε την αλυσίδα C *αύξουσα* ή *φθίνουσα* σε σχέση με το λ αν οι συντεταγμένες του $\lambda(C)$ αυξάνουν αυστηρά ή φθίνουν ασθενώς αντίστοιχα, σε σχέση με την ολική διάταξη του Λ . Αφού το P είναι διαβαθμισμένο, όλες οι μεγιστικές αλυσίδες C κάθε διαστήματος $I = [x, y]$ έχουν το ίδιο μήκος, ίσο με $rk(y) - rk(x)$. Μέσω της επιγραφής ακμών μπορούμε να διατάξουμε τις μεγιστικές αλυσίδες C του I διατάσσοντας τις επιγραφές $\lambda(C)$ λεξικογραφικά. Δηλαδή, η C προηγείται λεξικογραφικά της C' αν το $\lambda(C)$

προηγείται του $\lambda(C')$ με την επαγόμενη λεξικογραφική διάταξη από τη γραμμική διάταξη του Λ .

Ορισμός 4.2. ([19]) Μία επιγραφή ακμών λ του P λέγεται EL-επιγραφή αν για κάθε διάστημα $[x, y]$ του P με $x < y$

(i) υπάρχει μοναδική αύξουσα μεριστική αλυσίδα του $[x, y]$ και

(ii) αυτή η αλυσίδα προηγείται λεξικογραφικά ως προς Λ όλων των υπολοίπων μεριστικών αλυσίδων του $[x, y]$.

Αν επιπλέον το P έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο τότε λέμε ότι το P είναι EL-αποφλοιώσιμο.

Αν τα P_1, \dots, P_m είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα τότε το ευθύ γινόμενο τους $P = P_1 \times \dots \times P_m$ είναι το σύνολο με στοιχεία $\{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in P_i\}$ μερικώς διατεταγμένα έτσι ώστε $(x_1, \dots, x_m) \leq (x'_1, \dots, x'_m)$ στο P αν $x_i \leq x'_i$ στο P_i για κάθε $1 \leq i \leq m$. Παρατηρούμε ότι το (x'_1, \dots, x'_m) καλύπτει το (x_1, \dots, x_m) στο P αν υπάρχει $1 \leq i_0 \leq m$ τέτοιο ώστε $x_i = x'_i$ για κάθε $1 \leq i \neq i_0 \leq m$ και το x'_{i_0} καλύπτει το x_{i_0} στο P_{i_0} . Το παρακάτω λήμμα είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος 4.3 στο [19].

Λήμμα 4.5. [19] Αν τα P_1, P_2, \dots, P_m είναι διαβαθμισμένα μερικώς διατεταγμένα σύνολα τα οποία επιδέχονται EL-επιγραφή, τότε το $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$ επιδέχεται επίσης EL-επιγραφή. \square

Η EL-επιγραφή την οποία το P κληρονομεί από τα P_1, \dots, P_m είναι η εξής. Έστω Λ_i το ολικώς διατεταγμένο σύνολο των EL-επιγραφών του P_i , για $1 \leq i \leq m$. Αν $\lambda_i \in \Lambda_i$, τότε διατάσσουμε ολικά τις διατεταγμένες m -άδες $(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_i, \emptyset, \dots, \emptyset)$ με λ_i στην i -οστή συντεταγμένη, θεωρώντας

$$(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_i, \emptyset, \dots, \emptyset) \leq (\emptyset, \dots, \emptyset, \mu_j, \emptyset, \dots, \emptyset) \text{ αν και μόνον αν } \quad (4.4)$$

$$i = j \text{ και } \lambda_i \leq \mu_j \text{ με την ολική διάταξη του } \Lambda_i \\ \text{ ή } i > j.$$

Αν το $x = (x_1, \dots, x_m)$ καλύπτεται από το $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ στο P τότε υπάρχει κάποιο $1 \leq i_0 \leq m$ τέτοιο ώστε $x_i = x'_i$ για κάθε $1 \leq i \neq i_0 \leq m$ και $x_{i_0} \rightarrow x'_{i_0}$ στο P_{i_0} . Αν το $\lambda_{i_0} = \lambda(x_{i_0} \rightarrow x'_{i_0})$ είναι η επιγραφή της αντίστοιχης ακμής από την EL-επιγραφή του P_{i_0} τότε επιγράφουμε την ακμή $x \rightarrow x'$ στο P με την διατεταγμένη m -άδα $(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_{i_0}, \emptyset, \dots, \emptyset)$, όπου το λ_{i_0} βρίσκεται στην i_0 -οστή συντεταγμένη. Οι επιγραφές ακμών του P που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο, ολικώς διατεταγμένες όπως στο (4.4), αποτελούν EL-επιγραφή του $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$.

Η EL-επιγραφή του $NC(\gamma)$: Θεωρούμε ένα ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξεως n με θετικό σύστημα Φ^+ και μία επιλογή $\Pi = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ απλών ριζών του Φ τέτοια ώστε τα $\Pi_+ = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ και $\Pi_- = \{\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n\}$ να αποτελούνται από διανύσματα κάθετα ανά δύο. Για κάθε $\alpha \in \Phi$ συμβολίζουμε με r_α την ανάκλαση στον \mathbb{R}^n μέσω του υπερεπιπέδου κάθετου στο α . Ονομάζουμε *διμερές στοιχείο Coxeter* συστήματος Φ το στοιχείο Coxeter $\gamma = \gamma_+ \gamma_-$, όπου

$$\gamma_\pm = \prod_{\alpha \in \Pi_\pm} r_\alpha. \quad (4.5)$$

Επομένως, στην συγκεκριμένη περίπτωση, το διμερές στοιχείο Coxeter είναι $\gamma = r_{\sigma_1} \cdots r_{\sigma_n}$.

Έστω $N = nh/2$ το πλήθος των θετικών ριζών του Φ^+ . Για $1 \leq i \leq 2N$ ορίζουμε $\rho_i = r_{\sigma_1} r_{\sigma_2} \cdots r_{\sigma_{i-1}}(\sigma_i)$ θεωρώντας τις απλές ρίζες σ_i διατεταγμένες κυκλικά modulo n σε σχέση με τους δείκτες τους και κάνουμε την συμφωνία ότι $\rho_{-i} = \rho_{2N-i}$ για $i \geq 0$. Η παρακάτω σχέση, η οποία επαληθεύεται εύκολα, υπάρχει στην Παράγραφο 3 του [27]

$$\rho_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{για } i = 1, \dots, r, \\ -\gamma(\sigma_i) & \text{για } i = r+1, \dots, n \\ \gamma(\rho_{i-n}) & \text{για } i > n. \end{cases} \quad (4.6)$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \{\rho_1, \dots, \rho_N\} &= \Phi^+, \\ \{\rho_{N+i} : 1 \leq i \leq r\} &= -\Pi_+, \\ \{\rho_{-i} : 0 \leq i < n-r\} &= \{\rho_{N-i} : 0 \leq i < n-r\} = -\Pi_-. \end{aligned}$$

Επιπλέον, οι τελευταίες $n-r$ θετικές ρίζες είναι μετάθεση του συνόλου Π_- . Θεωρούμε το σύνολο των σχεδόν θετικών ριζών $\Phi_{\geq -1} = \Phi^+ \cup (-\Pi)$ και διατάσσουμε τα στοιχεία του ως εξής:

$$\underbrace{\rho_{-n+r+1} < \cdots < \rho_0}_{-\Pi_-} < \underbrace{\rho_1 < \cdots < \rho_N}_{\Phi^+} < \underbrace{\rho_{N+1} < \cdots < \rho_{N+r}}_{-\Pi_+} \quad (4.7)$$

Συμφωνα με το παραπάνω, διατάσσουμε ολικά το σύνολο των ανακλάσεων T ως εξής:

$$r_{\rho_1} < r_{\rho_2} < \cdots < r_{\rho_N}. \quad (4.8)$$

Έστω $u, v \in NC(\gamma)$ τέτοια ώστε το v να καλύπτει το u . Προφανώς $v = ut$ όπου το t είναι μία ανάκλαση του W . Η φυσική επιγραφή της ακμής $u \rightarrow v$ είναι η ανάκλαση $t = u^{-1}v$.

Θεώρημα 4.3. [10, Θεώρημα 4.2] *Αν το σύνολο T των ανακλάσεων του Φ^+ είναι ολικά διατεταγμένο όπως στην (4.8) και $\gamma = r_{\sigma_1} r_{\sigma_2} \cdots r_{\sigma_n}$ τότε η φυσική επιγραφή του $NC(\gamma)$ με σύνολο επιγραφών το T είναι EL-επιγραφή. \square*

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα χρειαστούμε βασικούς ορισμούς και ιδιότητες του συνόλου $NC_m(W)$ των γενικευμένων μή διασταρούμενων διαμερίσεων και του συμπλέγματος σημνών $\Delta^m(\Phi)$, για τις οποίες ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στις Παραγράφους 1.3.3 και 1.4.3.

4.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1

Σε αυτήν την παράγραφο υποθέτουμε ότι το Φ είναι ανάγωγο και ότι το γ είναι ένα διμερές στοιχείο Coxeter. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 χρειαζόμαστε ορισμένα λήμματα.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η οποία εισήχθη στο [27] με

$$\mu(x) = 2(\mathbf{1} - \gamma)^{-1}(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Στο εξής θα συμβολίζουμε με $\alpha \cdot \beta$ το εσωτερικό γινόμενο των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 4.6.

- (i) [27, Παράγραφος 8] Έστω $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$ με $\alpha < \beta$. Οι ρίζες α, β είναι συμβατές αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$.
- (ii) Για $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$ ισχύει ότι $\mu(\alpha) \cdot \beta = 0$ αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$.

Απόδειξη του (ii). Από το Λήμμα 2.2 του [9] έχουμε ότι αν οι ρίζες $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$ είναι μη παράλληλες τότε $\mu(\alpha) \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$. Από το Πρόσχημα 3.3 (b) του [27] ισχύει ότι $\mu(\alpha) \cdot \alpha = 1$ για κάθε $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$. Επομένως, αν $\mu(\alpha) \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha \neq \pm\beta$ δηλαδή οι α, β δεν είναι παράλληλες και συνεπώς $r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$. Αντιστρόφως, αν $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$ τότε $\alpha \neq \pm\beta$ και συνεπώς $\mu(\alpha) \cdot \beta = 0$. \square

Λήμμα 4.7. [27, Θεώρημα 3.7] Για την ολική διάταξη (4.7) ριζών στο $\Phi_{\geq -1}$ ισχύει $\mu(\rho_j) \cdot \rho_{i-n} = -\mu(\rho_i) \cdot \rho_j$ για κάθε i, j .

Λήμμα 4.8. Αν η ρ_i είναι θετική ρίζα τότε $\rho_{i-n} = \gamma^{-1}(\rho_i)$.

Απόδειξη. Αν $n+1 \leq i \leq N$ τότε το ζητούμενο είναι προφανές από το (4.6). Αν $1 \leq i \leq n$ τότε θυμηθείτε ότι $\rho_{i-n} = \rho_{2N+i-n} = \rho_{nh+i-n}$, όπου το N είναι το πλήθος των θετικών ριζών. Από την σχέση $\rho_i = \gamma(\rho_{i-n})$ η οποία ισχύει για κάθε $i > n$ και το γεγονός ότι $\gamma^h = \mathbf{1}$ έχουμε

$$\rho_{n(h-1)+i} = \gamma(\rho_{n(h-2)+i}) = \gamma^2(\rho_{n(h-3)+i}) = \dots = \gamma^{h-1}(\rho_i) = \gamma^{-1}(\rho_i),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Λήμμα 4.9. Έστω $w \in W$ και t_1, t_2, \dots, t_k ανακλάσεις της W τέτοιες ώστε $\mathbf{1} \neq t_i t_j \preceq w$ για κάθε $i < j$. Τότε $t_1 t_2 \dots t_k \preceq w$ και $l_T(t_1 t_2 \dots t_k) = k$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς k , θεωρώντας την περίπτωση $k = 2$ τετριμμένη. Θεωρούμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για k και τον αποδεικνύουμε για $k + 1$. Έχουμε $t_1 \cdots t_k \preceq w$ και $t_2 \cdots t_{k+1} \preceq w$ λόγω της επαγωγικής υποθέσεως. Αφού $t_1 \preceq t_1 \cdots t_k \preceq w$ έχουμε $t_2 \cdots t_k \preceq t_1 w$ λόγω του Λήμματος 4.3 (ii). Επίσης, αφού $t_1 t_{k+1} \preceq w$ έχουμε $t_{k+1} \preceq t_1 w$ λόγω του (iii) του ίδιου λήμματος. Θέτοντας $a = t_2 \cdots t_k$, $b = t_{k+1}$, $c = t_1 w$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3 (i) έχουμε ότι $t_2 \cdots t_{k+1} \preceq t_1 w$. Επομένως, $t_1 \cdots t_{k+1} \preceq w$ λόγω του Λήμματος 4.3 (ii).

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για το μήκος, παρατηρούμε ότι αφού $t_2 \cdots t_{k+1} \preceq t_1 w$ τότε $l_T(t_1 w) = l_T(t_2 \cdots t_{k+1}) + l_T(t_{k+1} \cdots t_2 t_1 w)$. Ισοδύναμα, $l_T(w) - 1 = k + l_T(w) - l_T(t_1 \cdots t_{k+1})$ λόγω της επαγωγικής υποθέσεως και του γεγονότος ότι $t_1 \cdots t_{k+1} \preceq w$. Άρα $l_T(t_1 \cdots t_{k+1}) = k + 1$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Υπενθυμίζουμε την απεικόνιση $\mathcal{R} : \Phi_{\geq -1} \rightarrow \Phi_{\geq -1}$ με

$$\mathcal{R}(\alpha) = \begin{cases} \gamma^{-1}(\alpha) & \text{αν } \alpha \notin \Pi_+ \cup (-\Pi_-) \\ -\alpha & \text{αν } \alpha \in \Pi_+ \cup (-\Pi_-), \end{cases} \quad (4.9)$$

που ορίστηκε στην Παράγραφο 1.3.3. Όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 2.5, για κάθε ρίζα $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ ορίζουμε τον βαθμό $d(\alpha)$ της α ως τον ελάχιστο ακέραιο d για τον οποίο το $\mathcal{R}^d(\alpha)$ είναι αρνητική απλή ρίζα. Προφανώς $d(\alpha) = 0$ αν και μόνον αν η α είναι αρνητική απλή ρίζα.

Βλέποντας την σχέση (4.6) και την παρατήρηση που την ακολουθεί, διαπιστώνουμε ότι η ολική διάταξη (4.7) του συνόλου των σχεδόν θετικών ριζών $\Phi_{\geq -1}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} -\Pi_- &< \underbrace{\Pi_+ < \gamma(-\Pi_-)}_{d=1} < \underbrace{\gamma(\Pi_+) < \gamma^2(-\Pi_-)}_{d=2} < \gamma^2(\Pi_+) < \cdots < \\ &< \gamma^{-1}(-\Pi_+) < \Pi_- < -\Pi_+. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Λήμμα 4.10.

- (i) Αν $\alpha, \beta \in \Phi^+$ και $d(\alpha) < d(\beta)$ τότε $\alpha < \beta$.
- (ii) Αν $\alpha \in \Phi^+$, $\beta \in \Phi^+ \setminus \Pi_+$ και $d(\beta) \leq d(\alpha)$ τότε $\mathcal{R}(\beta) < \alpha$.

Απόδειξη. Το (i) προκύπτει από την (4.10) παρατηρώντας ότι για τις θετικές ρίζες ο βαθμός αυξάνει σύμφωνα με την ολική διάταξη $<$. Για να αποδείξουμε το (ii), βλέπουμε ότι αφού $\beta \in \Phi^+ \setminus \Pi_+$ έχουμε $\mathcal{R}(\beta) = \gamma^{-1}(\beta)$ και έτσι $d(\mathcal{R}(\beta)) = d(\beta) - 1$. Άρα $d(\mathcal{R}(\beta)) < d(\alpha)$ και συνεπώς $\mathcal{R}(\beta) < \alpha$ λόγω του (i). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1: Πρέπει να δείξουμε ότι το $\sigma \subseteq \Phi_{\geq -1}^m$ είναι πλευρά του $\Delta^m(\Phi)$ αν και μόνον αν $w_\sigma = w_{\sigma_+} w_{\sigma^m} \cdots w_{\sigma_1} w_{\sigma_-} \preceq \gamma$ και $l_T(w_\sigma) =$

$|\sigma|$. Θυμηθείτε ότι το $\sigma \subseteq \Phi_{\geq -1}^m$ είναι πλευρά του $\Delta^m(\Phi)$ αν και μόνον αν κάθε δύο ρίζες εντός του σ είναι m -συμβατές. Ισχυριζόμαστε ότι οι ρίζες $\alpha^i, \beta^j \in \Phi_{\geq -1}^m$ είναι m -συμβατές αν και μόνον αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

- (i) $i = j$ και είτε $\alpha < \beta$ και $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$, είτε $\beta < \alpha$ και $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$,
- (ii) $\beta^j \in \Phi_{>0}^m, i = 1$ και είτε $\alpha^1 \in (-\Pi_+)^1$ και $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$, είτε $\alpha^1 \in (-\Pi_-)^1$ και $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$,
- (ii') $\alpha^i \in \Phi_{>0}^m, j = 1$ και είτε $\beta^1 \in (-\Pi_+)^1$ και $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$, είτε $\beta^1 \in (-\Pi_-)^1$ και $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$,
- (iii) $\alpha^i, \beta^j \in \Phi_{>0}^m$, και είτε $i < j$ και $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$, είτε $j < i$ και $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_\beta \preceq \gamma$.

Από το Λήμμα 4.9, με γ στην θέση του w , και τον παραπάνω ισχυρισμό προκύπτει ότι το $\sigma \subseteq \Phi_{\geq -1}^m$ είναι πλευρά του $\Delta^m(\Phi)$ αν και μόνον αν $w_\sigma \preceq \gamma$ και $l_T(w_\sigma) = |\sigma|$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού θεωρούμε $\alpha^i, \beta^j \in \Phi_{\geq -1}^m$. Αν $i = j$ τότε, για την ισοδυναμία με το (i), θυμηθείτε από τον Ορισμό 2.3 ότι ρίζες του ίδιου χρώματος είναι m -συμβατές αν και μόνον αν είναι συμβατές με την μή χρωματική έννοια. Τότε η ισοδυναμία προκύπτει από το Λήμμα 4.6 (i). Αν $\alpha^1 \in (-\Pi)^1$ και $\beta \in \Phi_{>0}^m$ τότε, για την ισοδυναμία με το (ii), παρατηρήστε ότι οι ρίζες $\alpha^1 \in (-\Pi)^1$ και $\beta^j \in \Phi_{>0}^m$ είναι m -συμβατές αν και μόνον αν οι $\alpha \in -\Pi, \beta \in \Phi^+$ είναι συμβατές με την μή χρωματική έννοια (Θεώρημα 1.7 (ii) και 2.6 (ii)). Αφού οι ρίζες στο $-\Pi_+$ ($-\Pi_-$) διαδέχονται (προηγούνται) τις ρίζες στο Φ^+ , τότε η ισοδυναμία είναι άμεση από το Λήμμα 4.6 (i). Όμοιο συλλογισμό ακολουθούμε και για την ισοδυναμία με το (ii').

Τέλος, υποθέτουμε ότι $\alpha^i, \beta^j \in \Phi_{>0}^m$. Για την ισοδυναμία με το (iii), λόγω συμμετρίας, θεωρούμε μόνο την περίπτωση $i < j$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $d(\alpha) < d(\beta)$ ώστε $\alpha < \beta$ από το Λήμμα 4.10 (i). Σε αυτήν την περίπτωση, οι ρίζες α^i, β^j είναι m -συμβατές αν και μόνον αν οι α, β είναι συμβατές. Από το Λήμμα 4.6 (i) έχουμε ότι οι ρίζες α, β είναι συμβατές αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$, που είναι αυτό που θέλουμε. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι $d(\alpha) \geq d(\beta)$ οπότε οι α^i, β^j είναι m -συμβατές αν και μόνον αν οι $\alpha, \mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατές. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\alpha \in \Phi^+$ και $\beta \in \Pi_+$. Από το (1.6) έχουμε ότι $\mathcal{R}(\beta) = -\beta \in -\Pi_+$ και αφού οι ρίζες στο Φ^+ προηγούνται αυτών στο $-\Pi_+$, έχουμε ότι $\alpha < \mathcal{R}(\beta)$. Λόγω του Λήμματος 4.6 (i) οι ρίζες $\alpha, \mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_{\mathcal{R}(\beta)} r_\alpha \preceq \gamma$. Αφού $r_{\mathcal{R}(\beta)} = r_{-\beta} = r_\beta$ τότε οι $\alpha, \mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$, που είναι αυτό που θέλουμε.

Περίπτωση 2: $\alpha \in \Phi_+$ και $\beta \in \Phi^+ \setminus \Pi_+$. Αφού $d(\beta) \leq d(\alpha)$ έχουμε ότι $\mathcal{R}(\beta) < \alpha$ λόγω του Λήμματος 4.10 (ii). Από το Λήμμα 4.6 (i) έχουμε ότι οι

ρίζες α , $\mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_{\mathcal{R}(\beta)} \preceq \gamma$. Θέτουμε $\alpha = \rho_i$, $\beta = \rho_j$ με $i \geq 0$ και $j \geq r+1$ και παρατηρούμε ότι $\mathcal{R}(\rho_j) = \gamma^{-1}(\rho_j) = \rho_{j-n}$ εξ' ορισμού της \mathcal{R} και λόγω του Λήμματος 4.8. Έχουμε $\mathbf{1} \neq r_\alpha r_{\mathcal{R}(\beta)} \preceq \gamma \Leftrightarrow \mathbf{1} \neq r_{\rho_i} r_{\mathcal{R}(\rho_j)} \preceq \gamma \Leftrightarrow \mathbf{1} \neq r_{\rho_i} r_{\rho_{j-n}} \preceq \gamma \Leftrightarrow \mu(\rho_i) \cdot \rho_{j-n} = 0 \Leftrightarrow \mu(\rho_j) \cdot \rho_i = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1} \neq r_{\rho_j} r_{\rho_i} \preceq \gamma \Leftrightarrow \mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$ λόγω των Λημμάτων 4.6 (ii) και 4.7. Συνεπώς οι $\alpha, \mathcal{R}(\beta)$ είναι συμβατές αν και μόνον αν $\mathbf{1} \neq r_\beta r_\alpha \preceq \gamma$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

4.4 EL-Επιγραφή και φθίνουσες αλυσίδες του $\text{NC}_m(\gamma)$

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την EL-επιγραφή την οποία το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\text{NC}_m(\gamma)$ κληρονομεί από το $\text{NC}(\gamma)$. Επίσης, εξηγούμε την σχέση των φθίνουσών αλυσίδων αυτής της EL-επιγραφής με τις πλευρές του $\Delta_+^m(\Phi)$. Η ιδέα της EL-επιγραφής δόθηκε από τον Armstrong (βλ. [1, Παράγραφος 3.7]).

Αφού το $\text{NC}(\gamma)$ επιδέχεται EL-επιγραφή τότε το ίδιο ισχύει και για το $\text{NC}(\gamma)^m$ λόγω της Πρότασης 4.5. Επίσης, αφού το $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι ιδεώδες του $\text{NC}(\gamma)^m$ τότε μπορούμε να περιορίσουμε την EL-επιγραφή του δευτέρου στο πρώτο. Η EL-επιγραφή την οποία το $\text{NC}_m(\gamma)$ κληρονομεί από το $\text{NC}(\gamma)^m$ είναι η εξής. Αν $(w_1, \dots, w_m) \rightarrow (w'_1, \dots, w'_m)$ στο $\text{NC}_m(\gamma)$ τότε υπάρχει κάποιο $1 \leq i_0 \leq m$ τέτοιο ώστε $w_i = w'_i$ για όλα τα $1 \leq i \neq i_0 \leq m$ και $w_{i_0} \leq w'_{i_0} = w_{i_0} t_{i_0}$ για κάποια ανάκλαση t_{i_0} στην W . Επιγράφουμε την ακμή $(w_1, \dots, w_m) \rightarrow (w'_1, \dots, w'_m)$ με $(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, t_{i_0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$ όπου το t_{i_0} βρίσκεται στην i_0 -οστή συντεταγμένη και ονομάζουμε αυτή την επιγραφή του $\text{NC}_m(\gamma)$ φυσική. Έστω Λ το σύνολο των διατεταγμένων m -άδων $(\mathbf{1}, \dots, r_\alpha, \dots, \mathbf{1})$ όπου r_α είναι η ανάκλαση που αντιστοιχεί στη ρίζα α . Σύμφωνα με την (4.4), διατάσσουμε ολικά τα στοιχεία του Λ θεωρώντας

$$(\mathbf{1}, \dots, r_\alpha, \dots, \mathbf{1}) \leq (\mathbf{1}, \dots, r_{\alpha'}, \dots, \mathbf{1}) \quad (4.11)$$

με την ανάκλαση στην i -οστή και i' -οστή συντεταγμένη, αντίστοιχα, αν και μόνον αν

$$i = i' \text{ και } \alpha \leq \alpha' \text{ ή } i > i'.$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο ακόλουθο αποτέλεσμα. Σημειώνουμε ότι η ακόλουθη πρόταση είναι μέρος ενός ισχυρότερου αποτελέσματος [1, Θεώρημα 3.7.2], συγκεκριμένα ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\text{NC}_m(\gamma) \cup \{\hat{\mathbf{1}}\}$ των m -επιτρεπτών μή διασταρούμενων διαμερίσεων στο οποίο έχουμε προσθέσει και το μέγιστο στοιχείο $\hat{\mathbf{1}}$ είναι EL-αποφλοιώσιμο.

Πρόταση 4.1. Αν το Λ είναι ολικώς διατεταγμένο όπως στο (4.11) τότε η φυσική επιγραφή του $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι EL-επιγραφή. \square

Επόμενος στόχος μας είναι να συσχετίσουμε τις φθίνουσες μεγιστικές αλυσίδες των διαστημάτων $[\hat{0}, w]$ του $\text{NC}_m(\gamma)$ με πλευρές κάποιων υποσυμπλεγμάτων του $\Delta_+^m(\Phi)$. Για κάθε $w = (w_1, \dots, w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ ορίζουμε το $\Delta_+^m(w)$ ως το επαγόμενο υποσύμπλεγμα του $\Delta_+^m(\Phi)$ με σύνολο κορυφών το σύνολο των χρωματισμένων θετικών ριζών $\alpha^i \in \Phi_{>0}^m$ για τις οποίες $r_\alpha \preceq w_{m-i+1}$. Από το γεγονός ότι οι ρίζες ίδιου χρώματος που είναι m -συμβατές είναι επίσης συμβατές με τη μη χρωματική έννοια και λόγω των Λημμάτων 4.6 (i) και 4.9, συμπεραίνουμε ότι το $\Delta_+^m(w)$ είναι το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα του οποίου οι πλευρές είναι τα σύνολα $\sigma \subseteq \Phi_{>0}^m$ με $(w_{\sigma^m}, \dots, w_{\sigma^1}) \preceq (w_1, \dots, w_m)$, δηλαδή αυτά για τα οποία ισχύει $w_{\sigma^i} \preceq w_{m-i+1}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Το σύμπλεγμα $\Delta_+^m(w)$ είναι ισόμορφο με την μονοπλεκτική σύνδεση των $\Delta_+(w_i)$ $1 \leq i \leq m$, και συνεπώς είναι αγνό διαστάσεως $rk(w) - 1$.

Θεωρούμε $w = (w_1, \dots, w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ με $rk(w) = k$ και γράφουμε $\hat{0} = (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$. Αν η C είναι μία φθίνουσα μεγιστική αλυσίδα στο $[\hat{0}, w]$ τότε, με βάση τις επιγραφές ακμών της, μπορούμε να την διαμερίσουμε σε m τμήματα C_i ($1 \leq i \leq m$) ως εξής. Ορίζουμε το C_i να είναι η κορεσμένη υποαλυσίδα της C της οποίας οι επιγραφές έχουν μία ανάκλαση στην i -οστή συντεταγμένη. Επομένως, λόγω της γραμμικής διάταξης (4.11), η C είναι η αλυσίδα που παίρνουμε παραθέτοντας τις C_i γραμμικά τη μία μετά την άλλη, ξεκινώντας από την C_1 και καταλήγοντας στην C_m . Στη συνέχεια θεωρούμε τα υποσύνολα του Φ^+

$$\begin{aligned} \sigma(C_i) &= \{ \alpha \in \Phi^+ : \text{το } (\mathbf{1}, \dots, r_\alpha, \dots, \mathbf{1}) \text{ είναι επιγραφή ακμής της } C_i \} = \\ &= \{ \alpha \in \Phi^+ : \text{το } (\mathbf{1}, \dots, r_\alpha, \dots, \mathbf{1}) \text{ είναι επιγραφή ακμής της } C \\ &\quad \text{με } r_\alpha \text{ στην } i\text{-οστή συντεταγμένη} \}, \end{aligned}$$

για $1 \leq i \leq m$. Έστω $w_{\sigma(C_i)}$ το γινόμενο των ανακλάσεων που αντιστοιχούν στις ρίζες του $\sigma(C_i)$ σε φθίνουσα σειρά ως προς την ολική διάταξη (4.7). Λόγω της (4.11), αυτή είναι η σειρά με την οποία οι ανακλάσεις αυτές εμφανίζονται στις επιγραφές ακμών της C_i . Επομένως $w_{\sigma(C_i)} = w_i$ και συνεπώς $(w_{\sigma(C_1)}, \dots, w_{\sigma(C_m)}) \in \text{NC}_m(\gamma)$. Λόγω του Θεωρήματος 4.1, αν χρωματίζουμε τις ρίζες σε κάθε $\sigma(C_i)$ με $m-i+1$ παίρνουμε μία πλευρά του $\Delta_+^m(\Phi)$ και ειδικότερα του $\Delta_+^m(w)$.

Αντιστρόφως, έστω σ μία πλευρά του $\Delta_+^m(w)$ ώστε $w_{\sigma^{m-i+1}} = w_i$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Lambda_\sigma := \{ (\mathbf{1}, \dots, r_\alpha, \dots, \mathbf{1}) \text{ με } r_\alpha \text{ στην } i\text{-οστή συντεταγμένη: } \alpha \in \sigma^{m-i+1}, 1 \leq i \leq m \}$$

και διατάσσουμε τα στοιχεία του σε φθίνουσα σειρά ως προς την (4.11). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε επαγωγικά μία φθίνουσα αλυσίδα C_σ στο διάστημα $[\hat{0}, w]$

του $\text{NC}_m(\gamma)$ ως εξής. Πρώτο στοιχείο της C είναι το $(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$. Έστω τώρα ότι έχουμε βρει τα $k+1$ πρώτα στοιχεία της C_σ χρησιμοποιώντας τα k πρώτα (με την γραμμική διάταξη (4.11)) στοιχεία του Λ_σ . Αν το $(k+1)$ -οστό στοιχείο της C_σ είναι το (u_1, \dots, u_m) και το $(k+1)$ -οστό στοιχείο του Λ_σ είναι το $(\mathbf{1}, \dots, r_{\alpha_j}, \dots, \mathbf{1})$ με r_{α_j} στην j -οστή συντεταγμένη, τότε το $(k+2)$ -οστό στοιχείο της αλυσίδας C_σ είναι το $(\mathbf{1}, \dots, u_{j-1}, r_{\alpha_j} u_j, u_{j+1}, \dots, \mathbf{1})$.

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε το σύστημα ριζών $\Phi = A_5$ και $m = 3$ και ταυτίζουμε την ομάδα W_{A_5} με την ομάδα μεταθέσεων \mathcal{S}_6 . Πίο συγκεκριμένα, αν $\alpha \in \Phi^+$ τότε η ανάκλαση r_α ως προς το υπερεπίπεδο κάθετο στο α δρα στον \mathbb{R}^6 αντιμεταθέτοντας ένα ζεύγος συντεταγμένων, έστω τις i και j , και τότε ταυτίζουμε την r_α με την αντιμετάθεση (ij) .

Διαχωρίζουμε τις απλές ρίζες σε $\Pi_+ = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ και $\Pi_- = \{\sigma_4, \sigma_5\}$ έτσι ώστε $r_{\sigma_1} = (12), r_{\sigma_2} = (36), r_{\sigma_3} = (45), r_{\sigma_4} = (26)$ και $r_{\sigma_5} = (35)$. Το διμερές στοιχείο Coxeter σε αυτήν την περίπτωση είναι το $\gamma = (123456)$. Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε μία φθίνουσα αλυσίδα C του διαστήματος $[(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), ((46), (136), (12)(45))]$ του $\text{NC}^3(\gamma)$ και την διαμέριση της C στις υποαλυσίδες C_1, C_2 και C_3 . Υπολογίζουμε ότι $r_{\sigma_2+\sigma_3+\sigma_5} = (46), r_{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4} = (13)$ και επίσης, με βάση την (4.6), ότι $\sigma_2 < \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4$ και $\sigma_1 < \sigma_3$. Έχουμε $\sigma(C_1) = \{\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_5\}$, $\sigma(C_2) = \{\sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4\}$, $\sigma(C_3) = \{\sigma_1, \sigma_3\}$ και $w_{\sigma(C_1)} = (46), w_{\sigma(C_2)} = (13)(36), w_{\sigma(C_3)} = (45)(12)$. Με βάση το Θεώρημα 4.1, αφού $(w_{\sigma(C_1)}, w_{\sigma(C_2)}, w_{\sigma(C_3)}) \in \text{NC}_3(\gamma)$ έχουμε ότι το σύνολο $\{(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_5)^3, \sigma_2^2, (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)^2, \sigma_1^1, \sigma_3^1\}$ είναι πλευρά του συμπλέγματος σημνών $\Delta_+^3(\Phi)$.

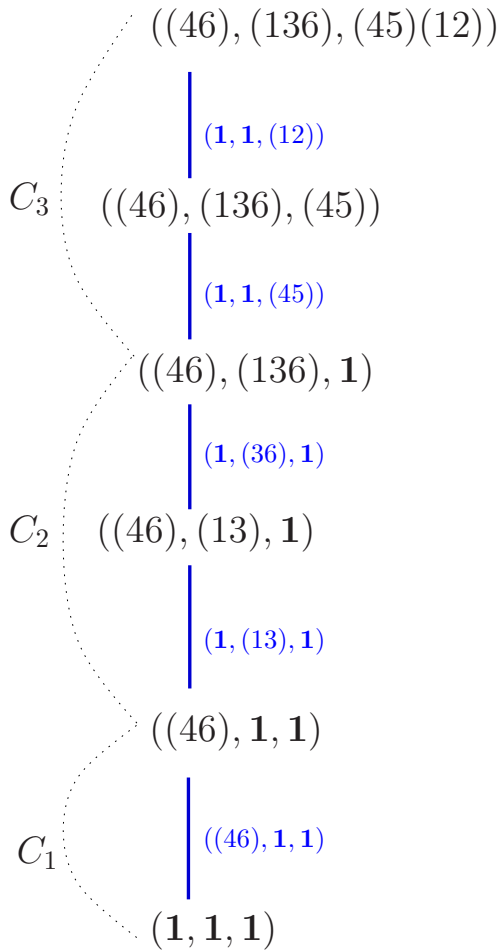
Αντιστρόφως, αν θεωρήσουμε την πλευρά $\{(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_5)^3, \sigma_2^2, (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4)^2, \sigma_1^1, \sigma_3^1\}$ του $\Delta_+^3(\Phi)$ τότε $\Lambda_\sigma = \{((46), \mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, (36), \mathbf{1}), (\mathbf{1}, (13), \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, (12)), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, (45))\}$. Διατάσσοντας τα στοιχεία του Λ_C σε φθίνουσα σειρά ως προς την (4.11) παίρνουμε τις επιγραφές $((46), \mathbf{1}, \mathbf{1}) < (\mathbf{1}, (13), \mathbf{1}) < (\mathbf{1}, (36), \mathbf{1}) < (\mathbf{1}, \mathbf{1}, (45)) < (\mathbf{1}, \mathbf{1}, (12))$, από τις οποίες καθορίζεται μοναδικά η αλυσίδα C του Σχήματος 4.1.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2. Έστω $w = (w_1, \dots, w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ και C μία φθίνουσα μεγιστική αλυσίδα του $[\hat{0}, w]$. Η απεικόνιση η οποία στέλνει την C στο $\bigcup_{i=1}^m \sigma(C_i)^{m-i+1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου των φθινουσών μεγιστικών αλυσίδων του $[\hat{0}, w]$ και του συνόλου των εδρών του $\Delta_+^m(w)$. \square

Πόρισμα 4.1. Το σύνολο των φθινουσών μεγιστικών αλυσίδων του $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο των εδρών του $\Delta_+^m(\Phi)$.

Απόδειξη. Το σύνολο των φθινουσών μεγιστικών αλυσίδων του $\text{NC}_m(\gamma)$ είναι η ξένη ένωση των συνόλων τέτοιων αλυσίδων κάθε διαστήματος $[\hat{0}, w]$ με $rk(w) =$

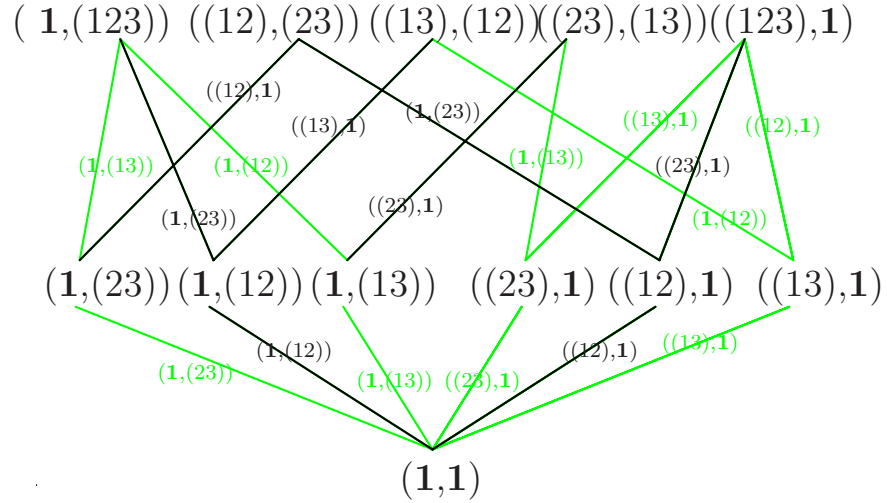


Σχήμα 4.1:

n . Επιπλέον, το σύνολο των εδρών του $\Delta_+^m(\Phi)$ είναι η ξένη ένωση του συνόλου των εδρών των $\Delta_+^m(w)$ όπου $rk(w) = n$. Τότε ο ισχυρισμός μας προκύπτει από την Πρόταση 4.2. \square

Μπορεί κανείς να επαληθεύσει το Πρόσμμα 4.1 στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2. Θεωρούμε το σύστημα ριζών A_2 με θετικές ρίζες σ_1, σ_2 και $\alpha = \sigma_1 + \sigma_2$, όπου οι σ_1, σ_2 είναι απλές ρίζες. Θέτουμε $\Pi_+ = \{\sigma_1\}, \Pi_- = \{\sigma_2\}$ ώστε $\sigma_1 < \alpha < \sigma_2$. Ταυτίζουμε τα στοιχεία της ομάδας ανακλάσεων W_{A_2} με τις μεταθέσεις του S_3 . Στις ρίζες σ_1, σ_2 και α αντιστοιχούν οι αντιμεταθέσεις $r_{\sigma_1} = (12), r_{\sigma_2} = (23)$ και $r_\alpha = (13)$. Το διμερές στοιχείο Coxeter σε αυτήν την περίπτωση είναι το $\gamma = (123)$. Στο Σχήμα 4.2 βλέπουμε τη φυσική επιγραφή του $NC_2(\gamma)$. Το σύνολο των μεγιστικών φθινουσών αλυσίδων του $NC_2(\gamma)$ βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των θετικών σμηνών, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα.



Σχήμα 4.2: Η φυσική EL-επιγραφή του $\text{NC}_2((123))$ για $\Phi = A_2$. Οι φθίνουσες αλυσίδες απεικονίζονται με πράσινο.

Επιγραφές ακμών φθίνουσών αλυσίδων	θετικά σμήνη
$(\mathbf{1}, (23)) \rightarrow (\mathbf{1}, (13))$	σ_2^1, α^1
$(\mathbf{1}, (13)) \rightarrow (\mathbf{1}, (12))$	α^1, σ_1^1
$((23), \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{1}, (13))$	σ_2^2, α^1
$((23), \mathbf{1}) \rightarrow ((13), \mathbf{1})$	σ_2^2, α^2
$((12), \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{1}, (23))$	σ_1^2, σ_2^1
$((13), \mathbf{1}) \rightarrow ((12), \mathbf{1})$	α^2, σ_1^2
$((13), \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{1}, (12))$	α^2, σ_1^1

Λήμμα 4.11. Αν $w = (w_1, \dots, w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ τότε ο αριθμός $(-1)^{rk(w)} \mu(\hat{0}, w)$ είναι ίσος με το πλήθος των εδρών του $\Delta_+^m(w)$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση Möbius σε κάθε διάστημα $[a, b]$ ενός EL-αποφλοιώσιμου μερικώς διατεταγμένου συνόλου είναι ίση με $(-1)^{rk(b)-rk(a)}$ επί το πλήθος των μεγιστικών φθίνουσών αλυσιδών του $[a, b]$ [67, Παράγραφος 3.13]. Εφαρμόζοντας αυτό στην περίπτωση μας με $a = \hat{0}$ και $b = w$, παίρνουμε ότι το $(-1)^{rk(w)} \mu(\hat{0}, w)$ είναι ίσο με το πλήθος των φθίνουσών μεγιστικών αλυσίδων του $[\hat{0}, w]$ το οποίο, λόγω της Πρότασης 4.2, είναι ίσο με το πλήθος των εδρών του $\Delta_+^m(w)$. \square

4.5 Απόδειξη της ισότητας $F = M$

Όπως επισημαίνεται και στην [44, Πρόταση F(i)], για πεπερασμένα συστήματα ριζών Φ και Φ' ισχύει ότι

$$F_{\Phi \times \Phi'}^{(m)}(x, y) = F_{\Phi}^{(m)}(x, y) \cdot F_{\Phi'}^{(m)}(x, y).$$

Επίσης, από την πολλαπλασιαστικότητα της συνάρτησης Möbius [67, Πρόταση 3.8.2], η παραπάνω σχέση ισχύει και για το M -τρίγωνο. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.2 στην περίπτωση όπου το Φ είναι ανάγωγο.

Το h -πολύωνυμο ενός αφηρημένου $(n-1)$ -διάστατου μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ ορίζεται ως

$$h(\Delta, y) = \sum_{i=0}^n f_i(\Delta) y^i (1-y)^{n-i},$$

όπου $f_i(\Delta)$ είναι το πλήθος των πλευρών του Δ διαστάσεως $i-1$. Ο σύνδεσμος μία πλευράς σ του Δ είναι το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\text{lk}_{\Delta}(\sigma) = \{\tau \setminus \sigma : \sigma \subseteq \tau \in \Delta\}$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, συγκρίνοντας τον πίνακα στο [1, Σχήμα 3.4] και το [37, Θεώρημα 10.2] διαπιστώνουμε ότι για κάθε ανάγωγο σύστημα ριζών Φ το h -πολύωνυμο του $\Delta^m(\Phi)$ συμπίπτει με το πολύωνυμο αριθμών τάξεως του $\text{NC}_m(\gamma)$, δηλαδή

$$h(\Delta^m(\Phi), y) = \sum_{w \in \text{NC}_m(\gamma)} y^{rk(w)}.$$

Το παρακάτω λήμμα θα χρησιμοποιηθεί όπως στο [7]. Για κάθε απλή ρίζα $\alpha \in \Pi$ συμβολίζουμε με Φ_{α} το παραβολικό σύστημα ριζών το οποίο παίρνουμε τέμνοντας το Φ με τη γραμμική θήκη του $\Pi \setminus \{\alpha\}$.

Λήμμα 4.12. Έστω Φ ένα ανάγωγο σύστημα ριζών, $\alpha \in \Pi$ και $\sigma \subseteq \Phi_{\Sigma_{-1}^m}$.

(i) Αν $\sigma \in \Delta^m(\Phi)$ τότε ισχύει ότι $-\alpha \in \sigma$ αν και μόνον αν $\sigma \setminus \{-\alpha\} \in \Delta^m(\Phi_{\alpha})$.

(ii) Για κάθε $\beta^{\ell} \in \Phi_{>0}^m$ υπάρχει i τέτοιο ώστε $\mathcal{R}_m^i(\beta^{\ell}) \in (-\Pi)$.

(iii) $\sigma \in \Delta^m(\Phi)$ αν και μόνον αν $\mathcal{R}_m(\sigma) \in \Delta^m(\Phi)$.

Απόδειξη. Το (i) προκύπτει εύκολα από το [37, Θεώρημα 2.7]. Το (ii) προκύπτει από τον Ορισμό 2.4 και το γεγονός ότι για κάθε $\beta \in \Phi^+$ υπάρχει κάποιο j τέτοιο ώστε $\mathcal{R}^j(\beta) \in (-\Pi)$ [40, Παράγραφος 3]. Τέλος, το (iii) είναι φανερό από το Θεώρημα 2.6 (i). \square

Συνεχίζουμε με κάποια τεχνικά λήμματα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.

Λήμμα 4.13. Αν το σύνολο σ είναι πλευρά του $\Delta = \Delta^m(\Phi)$ και $w_\sigma = w_{\sigma_+} w_{\sigma^m} w_{\sigma^{m-1}} \cdots w_{\sigma^1} w_{\sigma_-}$ τότε

$$h(\text{lk}_\Delta(\sigma), y) = \sum_{\alpha \in \text{NC}_m(\gamma w_\sigma^{-1})} y^{rk(\alpha)}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη του Λήμματος 2.6 στο [7], αντικαθιστώντας το \mathcal{R} με \mathcal{R}_m και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.12 αντί της Πρότασης [7, Πρόταση 2.3]. \square

Λήμμα 4.14. Αν $(a_1, \dots, a_m) \preceq (b_1, \dots, b_m)$ στο $\text{NC}_m(\gamma)$ τότε $(a_1^{-1}b_1, \dots, a_m^{-1}b_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ και τα διαστήματα $I = [(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)]$ και $I' = [(1, \dots, 1), (a_1^{-1}b_1, \dots, a_m^{-1}b_m)]$ είναι ισόμορφα.

Απόδειξη. Αν $(a_1, \dots, a_m) \preceq (b_1, \dots, b_m)$ στο $\text{NC}_m(\gamma)$ τότε $a_i \preceq b_i$ για κάθε i και συνεπώς $a_i^{-1}b_i \preceq b_i$ λόγω του Λήμματος 4.2 (iii). Άρα η $(a_1, a_1^{-1}b_1, \dots, a_m, a_m^{-1}b_m)$ είναι μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του $b_1 \cdots b_m$ και από το Λήμμα 4.1 (iii) έχουμε ότι $(a_1^{-1}b_1, \dots, a_m^{-1}b_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του λήμματος.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : I \rightarrow I'$ με $\varphi((w_1, \dots, w_m)) = (a_1^{-1}w_1, \dots, a_m^{-1}w_m)$. Ισχυριζόμαστε ότι η φ είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι η φ καθώς επίσης και η αντίστροφή φ^{-1} της διατηρούν την διάταξη, οπότε τα διαστήματα I και I' είναι ισόμορφα. Καταρχήν πρέπει να ελέγξουμε ότι οι φ και φ^{-1} είναι καλώς ορισμένες. Πράγματι, αν $(w_1, \dots, w_m) \in I$ τότε η $(a_1, a_1^{-1}w_1, \dots, a_m, a_m^{-1}w_m)$ είναι ελαχιστική παραγοντοποίηση του $w_1 \cdots w_m$ και συνεπώς $(a_1^{-1}w_1, \dots, a_m^{-1}w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ λόγω του Λήμματος 4.1 (iii). Αντιστρόφως, έστω $(w_1, \dots, w_m) \in I'$ τέτοιο ώστε $w_i \preceq a_i^{-1}b_i \preceq b_i$ για $1 \leq i \leq m$. Από το Λήμμα 4.2 (i) έχουμε ότι $a_i \preceq a_i w_i \preceq b_i$ και συνεπώς η $(a_1 w_1, w_1^{-1} a_1^{-1} b_1, \dots, a_m w_m, w_m^{-1} a_m^{-1} b_m)$ είναι μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του $b_1 \cdots b_m$. Άρα $(a_1 w_1, \dots, a_m w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Το ότι η φ είναι αμφιμονοσήμαντη είναι τετριμμένο. Επίσης, από το γεγονός ότι $a_i \preceq w_i \preceq b_i$ αν και μόνον αν $a_i^{-1}w_i \preceq a_i^{-1}b_i$ (Λήμμα 4.2 (i)) προκύπτει ότι οι φ και φ^{-1} διατηρούν την διάταξη. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας. \square

Λήμμα 4.15. Έστω $(w_1, \dots, w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$. Υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία που διατηρεί την τάξη, μεταξύ των συνόλων $A = \{(a_1, \dots, a_m) : (a_1, \dots, a_m) \leq (a_1 w_1, \dots, a_m w_m) \text{ στο } \text{NC}_m(\gamma)\}$ και $\text{NC}_m(\gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1})$.

Απόδειξη. Θέτουμε $a'_i = w_1 \cdots w_{i-1} a_i w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1}$ για $1 \leq i \leq m$ και επίσης $\phi(a_1, \dots, a_m) = (a'_1, \dots, a'_m)$. Θα δείξουμε ότι η ϕ διατηρεί την τάξη και είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ των συνόλων A και $\text{NC}_m(\gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1})$. Προφανώς, η απεικόνιση ϕ καθώς και η αντίστροφή της $\phi^{-1}(a'_1, \dots, a'_m) = (a_1, \dots, a_m)$ με

$a_i = w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1} a'_i w_1 \cdots w_{i-1}$ είναι ένα προς ένα. Επίσης, αφού τα a_i, a'_i είναι συζυγή τότε $l_T(a_i) = l_T(a'_i)$ και συνεπώς η ϕ διατηρεί την τάξη. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η ϕ είναι καλώς ορισμένη. Θεωρούμε λοιπόν $(a_1, \dots, a_m) \in A$ και παρατηρούμε ότι $a'_1 \cdots a'_m = (a_1 w_1 \cdots a_m w_m) w_m^{-1} \cdots w_1^{-1}$. Αφού $a_i \leq a_i w_i$ έχουμε $l_T(a_i w_i) = l_T(a_i) + l_T(w_i)$ και επομένως η $(a_1, w_1, \dots, a_m, w_m)$ είναι μία ελαχιστική παραγοντοποίηση του $a_1 w_1 \cdots a_m w_m$. Άρα, από το Λήμμα 4.1 (iii) έχουμε

$$w_1 \cdots w_m \preceq a_1 w_1 \cdots a_m w_m \preceq \gamma$$

με $l_T(w_1 \cdots w_m) = \sum_{i=1}^m l_T(w_i)$. Λόγω του Λήμματος 4.3 (ii) από αυτό έπεται ότι

$$(a_1 w_1 \cdots a_m w_m) w_m^{-1} \cdots w_1^{-1} \preceq \gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1}$$

με $l_T((a_1 w_1 \cdots a_m w_m) w_m^{-1} \cdots w_1^{-1}) = \sum_{i=1}^m l_T(a_i)$. Ισοδύναμα, $a'_1 \cdots a'_m \preceq \gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1}$ και $l_T(a'_1 \cdots a'_m) = \sum_{i=1}^m l_T(a_i) = \sum_{i=1}^m l_T(a'_i)$, το οποίο δείχνει ότι πράγματι $(a'_1, \dots, a'_m) \in \text{NC}_m(\gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1})$.

Για το αντίστροφο θεωρούμε $(a'_1, \dots, a'_m) \in \text{NC}_m(\gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1})$ και παρατηρούμε ότι $a_1 w_1 \cdots a_m w_m = a'_1 \cdots a'_m w_1 \cdots w_m$. Αφού $a'_1 \cdots a'_m \preceq \gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1} \preceq \gamma$, από το Λήμμα 4.2 (ii) έχουμε $a'_1 \cdots a'_m w_1 \cdots w_m \preceq \gamma$ με $l_T(a'_1 \cdots a'_m w_1 \cdots w_m) = \sum_{i=1}^m l_T(a'_i) + \sum_{i=1}^m l_T(w_i)$. Αυτό δείχνει ότι $(a_1 w_1, \dots, a_m w_m) \in \text{NC}_m(\gamma)$. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι $(a_1, \dots, a_m) \preceq (a_1 w_1, \dots, a_m w_m)$. Έχουμε $a'_i \preceq \gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1}$ ή ισοδύναμα $w_1 \cdots w_{i-1} a_i w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1} \preceq \gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1}$. Λόγω του Λήμματος 4.4 έχουμε ότι $a_i \preceq w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1} \gamma w_m^{-1} \cdots w_i^{-1}$. Από το Λήμμα 4.4 και απλούς υπολογισμούς μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1} \gamma w_m^{-1} \cdots w_i^{-1} \preceq w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1} \gamma w_i^{-1} \preceq \gamma w_i^{-1}$. Άρα $a_i \preceq \gamma w_i^{-1} \preceq \gamma$ και επομένως $a_i \preceq a_i w_i \preceq \gamma$ από το Λήμμα 4.2 (ii). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2. Απλοποιούμε τους συμβολισμούς γράφοντας $\Delta^m, \Delta_+^m, F(x, y)$ και $M(x, y)$ αντί για $\Delta^m(\Phi), \Delta_+^m(\Phi), F_\Phi^{(m)}(x, y)$ και $M_W^{(m)}(x, y)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε την σχέση

$$(1-y)^n F\left(\frac{x+y}{1-y}, \frac{y}{1-y}\right) = \sum_{\sigma \in \Delta_+^m} x^{|\sigma|} h(\text{lk}_{\Delta^m}(\sigma), y), \quad (4.12)$$

η οποία εμφανίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 στο [7] για $m = 1$ και γενικεύεται απευθείας στην περίπτωση $m \geq 1$. Έχουμε

$$M(-x, -y/x) = \sum_{\substack{a \leq b \\ a, b \in \text{NC}_m(\gamma)}} \mu(a, b) (-x)^{rk(b) - rk(a)} y^{rk(a)}.$$

Θέτουμε $\hat{0} = (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$, $w = (w_1, \dots, w_m) = (a_1^{-1} b_1, \dots, a_m^{-1} b_m)$ και παρατηρούμε ότι $rk(w) = rk(b) - rk(a)$. Λόγω των Λημμάτων 4.14 και 4.15

το τελευταίο άθροισμα γίνεται

$$\sum_{w \in \text{NC}_m(\gamma)} \mu(\hat{0}, w) (-x)^{rk(w)} \sum_{a' \in \text{NC}_m(\gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1})} y^{rk(a')},$$

το οποίο, λόγω του Λήμματος 4.11, είναι ίσο με

$$\sum_{w \in \text{NC}_m(\gamma)} \sum_{\substack{\sigma \in \Delta_+^m(w) \\ |\sigma| = rk(w)}} x^{rk(w)} \sum_{a' \in \text{NC}_m(\gamma w_m^{-1} \cdots w_1^{-1})} y^{rk(a')}.$$

Αν η σ είναι πλευρά του $\Delta_+^m(w)$ τότε $w_\sigma = w_{\sigma^m} \cdots w_{\sigma^1} = w_1 \cdots w_m$ και συνεπώς η τελευταία παράσταση είναι ίση με

$$\sum_{w \in \text{NC}_m(\gamma)} \sum_{\substack{\sigma \in \Delta_+^m(w) \\ |\sigma| = rk(w)}} x^{|\sigma|} \sum_{a' \in \text{NC}_m(\gamma w_\sigma^{-1})} y^{rk(a')},$$

ή, λόγω του Λήμματος 4.13, με

$$\sum_{w \in \text{NC}_m(\gamma)} \sum_{\substack{\sigma \in \Delta_+^m(w) \\ |\sigma| = rk(w)}} x^{|\sigma|} h(\text{lk}_{\Delta^m}(\sigma), y).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι τα σύνολα των εδρών των συμπλεγμάτων $\Delta_+^m(w)$ με $w \in \text{NC}_m(\gamma)$ αποτελούν μία διαμέριση του Δ_+^m , άρα το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με

$$\sum_{\sigma \in \Delta_+^m} x^{|\sigma|} h(\text{lk}_{\Delta^m}(\sigma), y)$$

το οποίο, λόγω της (4.12), ισούται με

$$(1-y)^n F\left(\frac{x+y}{1-y}, \frac{y}{1-y}\right),$$

που είναι αυτό που θέλουμε. \square

Βιβλιογραφία

- [1] D. Armstrong, *Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups*, Ph.D thesis, Cornell University, 2006.
- [2] C.A. Athanasiadis, *Algebraic Combinatorics of Graph Spectra, Subspace Arrangements and Tutte Polynomials*, Ph.D thesis, MIT, 1996.
- [3] C.A. Athanasiadis, *Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields*, Adv. Math. **122** (1996), 193–233.
- [4] C.A. Athanasiadis, *Decompositions and connectivity of matching and chess-board complexes*, Discrete Comput. Geom. **31** (2004), 395–403.
- [5] C.A. Athanasiadis, *Generalized Catalan numbers, Weyl groups and arrangements of hyperplanes*, Bull. London Math Soc. **36** (2004), 294–392.
- [6] C.A. Athanasiadis, *On a refinement of the generalized Catalan numbers for Weyl groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 179–196.
- [7] C.A. Athanasiadis, *On some enumerative aspects of generalized associahedra*, European J. Combin. (to appear).
- [8] C.A. Athanasiadis, *A combinatorial reciprocity theorem for hyperplane arrangements*, ArXiv preprint math.CO/0610482, 2006.
- [9] C.A. Athanasiadis, T. Brady, J. McCammond and C. Watt, *h -Vectors of generalized associahedra and noncrossing partitions*, Int. Math. Res. Not. **vol 2006**, Article 69705, 2006, 28 pp.
- [10] C.A. Athanasiadis, T. Brady and C. Watt, *Shellability of noncrossing partition lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 939–949.
- [11] C.A. Athanasiadis and V. Reiner, *Noncrossing partitions for the group D_n* , SIAM J. Discrete Math. **18** (2004), 397–417.

- [12] C.A. Athanasiadis and E. Tzanaki, *On the enumeration of positive cells in generalized cluster complexes and Catalan hyperplane arrangements*, J. Algebraic Combin. **23** (2006), 355–375.
- [13] C.A. Athanasiadis and E. Tzanaki, *Shellability and higher Cohen-Macaulay connectivity of generalized cluster complexes*, ArXiv preprint math.CO/0606018, 2006.
- [14] D. Bessis, *The dual braid monoid*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **36** (2003), 647–683.
- [15] P. Biane, *Some properties of crossings and partitions*, Discrete Math. **175** (1997), no. 1-3, 41–53.
- [16] L.J. Billera and J.S. Provan, *A decomposition property for simplicial complexes and its relation to diameter shellings*, Ann. NY Acad. Sci. **319** (1979), 82–85.
- [17] L.J. Billera and B. Sturmfels, *Fiber Polytopes*, Ann. of Math (2) **135** (1992), no. 3, 527–549.
- [18] L.J. Billera and B. Sturmfels, *Iterated fiber polytopes*, Mathematika **41** (1994), 348–363.
- [19] A. Björner, *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 159–183.
- [20] A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [21] A. Björner and M. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets, I*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 4, 1299–1327.
- [22] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras*, Chapters 4-6, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [23] R. Bott and C. Taubes, *On the self-linking of knots*, Topology and Physics, J. Math. Phys. **35** (1994), 5247–5287.
- [24] T. Brady, *A partial order on the symmetric group and new $K(\pi, 1)$'s for the braid groups*, Adv. Math. **161** (2002), 20–40.
- [25] T. Brady and C. Watt, *A partial order on the orthogonal group*, Comm. Algebra **30** (2002), no.8, 3749–3754.

- [26] T. Brady and C. Watt, *K(π, 1)'s for Artin groups of finite type*, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000), *Geom. Dedicata* **94** (2002), 225–250.
- [27] T. Brady and C. Watt, *Lattices in finite real reflection groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).
- [28] P. Cellini and P. Papi, *ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra II*, *J. Algebra* **258** (2002), 112–121.
- [29] F. Chapoton, *Sur le nombre de réflexions pleines dans les groupes de Coxeter finis*, ArXiv preprint math.RT/0405371, 2004.
- [30] F. Chapoton, *Enumerative properties of generalized associahedra*, *Semin. Loth. de Combinatoire* **51** (2004), #B51b (electronic).
- [31] F. Chapoton, S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Polytopal realizations of generalized associahedra*, *Canad. Math. Bull.* **45** (2002), 537–566.
- [32] Y. Chen and K. Kriloff, *Dominant regions in noncrystallographic hyperplane arrangements*, *J. Combin. Theory Series A* (to appear).
- [33] H.S.M. Coxeter, *The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$* , *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 21–25.
- [34] S.L. Devadoss, *A space of cyclohedra*, *Discrete Comp. Geom.* **29** (2003), 61–75.
- [35] P.H. Edelman, *Chain Enumeration and Non-Crossing Partitions*, *Discrete Math.* **31** (1980), 171–180.
- [36] S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, to appear in *Geometric Combinatorics* (Park City, UT, 2003), IAS/Park City Mathematics Ser., 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (to appear), arXiv preprint math.CO/0505518.
- [37] S. Fomin and N. Reading, *Generalized cluster complexes and Coxeter combinatorics*, *Int. Math. Res. Not.* **44** (2005), 2709–2757.
- [38] S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Cluster Algebras I: Foundations*, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 497–529.
- [39] S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Cluster Algebras II: Finite type classification*, *Invent. Math.* **154** (2003), no.1, 63–121.

- [40] S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. **158** (2003), 977–1018.
- [41] M.D. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, J. Algebraic Combin. **3** (1994), 17–76.
- [42] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics **9**, Springer-Verlag, Berlin and New York 1980.
- [43] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [44] C. Krattenthaler, *The F-triangle of the generalized cluster complex*, Topics in Discrete Mathematics, pp. 93–126, Algorithms Combin. **26**, Springer, Berlin, 2006.
- [45] C. Krattenthaler, *The M-triangle of the generalized noncrossing partitions for the types E_7 and E_8* , Séminaire Lotharingien Combin. **54** (2006), Article B54l (electronic).
- [46] C. Krattenthaler and T.W. Müller, *Decomposition numbers for finite Coxeter groups and generalized non-crossing partitions*, preprint, 2007.
- [47] G. Kreweeras, *Sur les partitions noncroisees d' un cycle*, Discrete Math **1** (1972), 333–350.
- [48] C.W. Lee, *The associahedron and triangulations of the n-gon*, European J. Combin. **10** (1989), no. 6, 551–560.
- [49] J.-L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, Arch. Math. **83** (2004), 267–278.
- [50] R. Marsh, M. Reineke and A. Zelevinsky, *Generalized associahedra via quiver representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4171–4186.
- [51] J. McCammond, *Noncrossing partitions in surprising locations*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), no. 7, 598–610.
- [52] J. McCammond, *Associahedra and noncrossing partitions*, webpage, www.math.ucsb.edu/~jon.mccammond/associahedra/.
- [53] T.V. Narayana, *Sur les treillis formés par les partitions d' un entier, leur applications à la théorie des propabilités*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris **240** (1955), 1188–1189.

- [54] D.I. Panyushev, *ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra: generators and duality*, J. Algebra **274** (2004), 822–846.
- [55] A. Postnikov, *Enumeration in Algebra and Geometry*, Ph.D thesis, MIT, 1997.
- [56] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra and beyond*, arXiv preprint math.CO/0507163, 2005.
- [57] A. Postnikov and R.P. Stanley, *Deformation of Coxeter hyperplane arrangements*, J. Combin. Theory Series A **91** (2000), no. 1-1, 544–597.
- [58] J.S. Provan and L.J. Billera, *Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra*, Math. Operations Research **5** (1980), 576–594.
- [59] J. Przytycki and A. Sikora, *Polygon dissections and Euler, Fuss, Kirkman and Cayley numbers*, J. Combin. Theory Series A **92** (2000), 68–76.
- [60] V. Reiner, *Non-crossing partitions for classical reflection groups*, Discrete Math. **177** (1997), 195–222.
- [61] J.-Y. Shi, *Alcoves corresponding to an affine Weyl group*, J. London Math. Soc. **35** (1987), 42–55.
- [62] J.-Y. Shi, *Sign types corresponding to an affine Weyl group*, J. London Math. Soc. **35** (1987), 56–74.
- [63] J.-Y. Shi, *The number of \oplus -sign types*, Quart. J. Math. Oxford **48** (1997), 93–105.
- [64] R. Simion, *Non-crossing partitions*, Discrete Math. **217** (2000), 397–409.
- [65] R. Simion, *A type-B associahedron*, Adv. in Appl. Math. **30** (2003), 2–25.
- [66] E. Sommers, *B-stable ideals in the nilradical of a Borel subalgebra*, Canad. Math. Bull. **48** (2005), no. 3, 460–472.
- [67] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol.1*, Wadsworth and Brooks / Cole, Pacific Grove, CA, 1986; second printing, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [68] R.P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second ed., Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [69] R.P. Stanley, *Hyperplane arrangements, interval orders, and trees*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **93** (1996), no. 6, 2620–2625.

- [70] R.P. Stanley, *Parking functions and noncrossing partitions*, Electr. J. Combin. **4** (1997), Research Paper 20 (electronic).
- [71] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. **2**, Cambridge University Press, New York/Cambridge, 1999.
- [72] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of H -spaces. I,II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292, 293–312.
- [73] E. Tzanaki, *Polygon dissections and some generalizations of cluster complexes*, J. Combin. Theory Series A **113** (2006), 1189–1198.
- [74] E. Tzanaki, *Faces of generalized cluster complexes and noncrossing partitions*, ArXiv preprint math.CO/0605785, 2006.
- [75] M. Yoshinaga, *Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner*, Invent. Math. **157** (2004), no. 2, 449–454.
- [76] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Mem. Amer. Math. Soc. vol. 1, no. 154, (1975).
- [77] G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1995.