

M1212 – Γραμμική Άλγεβρα II

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

1. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικές:

(α') $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, z),$

(β') $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x + z, y + z + 1, x + z),$

(γ') $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (|x|, x + y, y + z),$

(δ') $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x^2 + 1, y, z).$

2. Έστω K σώμα και $a, b, c, d \in K$. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$L : K^2 \longrightarrow K^2, \quad L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

είναι γραμμική. Αποδείξτε ότι είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0$.

3. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$L : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad L(x, y, z) = (ax + y, y - z, x - (a - 1)z).$$

Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{C}$ η L είναι 1-1. Απαντήστε την ίδια ερώτηση για τη γραμμική απεικόνιση

$$M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad M(x, y, z) = (ax + y, y - z, x - (a - 1)z),$$

όπου η παράμετρος $a \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η απεικόνιση

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x + 2y + z).$$

Προσδιορίστε μία βάση του $\text{im}(L)$ και δείξτε ότι $\text{im}(L) = \mathbb{R}^3$.

5. Έστω ο γραμμικός τελεστής τυπικής παραγώγισης

$$D : K[T] \longrightarrow K[T], \quad D \left(\sum_{i=0}^n a_i T^i \right) = \sum_{i=1}^n i a_i T^{i-1}.$$

Αποδείξτε ότι $\ker(D) = K$ (όπου το K θεωρείται υπόχωρος του $K[T]$ κατά τον προφανή τρόπο).