

## M1212 – Γραμμική Άλγεβρα II

### Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

1. Έστω  $V$  ένας  $K$ -διανυσματικός χώρος και  $S$  ένα υποσύνολο του. Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Εάν  $v \in \text{Span}(S)$  τότε  $\text{Span}(S) = \text{Span}(S \cup \{v\})$ .

(β) Εάν  $v \in \text{Span}(S - \{v\})$ , τότε  $\text{Span}(S) = \text{Span}(S - \{v\})$ .

(γ) Εάν το  $S$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και  $v \in V - \text{Span}(S)$ , τότε το  $S \cup \{v\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

2. Έστω  $n \in \mathbb{N}_0$  και  $K[T]$  ο χώρος των πολυωνύμων πάνω από το σώμα  $K$ . Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{1, T + a, (T + a)^2, \dots, (T + a)^n\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

3. Έστω  $V$  ένας  $K$ -διανυσματικός χώρος και  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του. Δείξτε ότι και τα παρακάτω σύνολα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

(α)  $\{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_n - v_{n-1}\}$ ,

(β)  $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$ .

4. Έστω  $V$  ένας  $K$ -διανυσματικός χώρος και  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ένα παράγον υποσύνολο του. Δείξτε ότι το σύνολο  $\{v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$  παράγει τον  $V$ .

5. Έστω ο υπόχωρος  $U = \text{Span}(\{(1, 1, 1)\})$  του  $\mathbb{R}^3$ . Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3/U$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

(α)  $\{(1, 0, 0) + U, (0, 1, 0) + U\}$ ,

(β)  $\{(1, 1, 0) + U, (0, 0, 1) + U\}$ .

Βρείτε μία βάση του  $\mathbb{R}^3/U$ .