ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2011-2012
Θ. Γαρεφαλάκης

M1212 – Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

1. Εάν V είναι ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, $L \in \mathcal{L}(V)$ και U ένας μη τετριμμένος L-αναλλοίωτος υπόχωρος του V δείξτε ότι ο U περιέχει ένα τουλάχιστον ιδιοδιάνυσμα της L.

2. Ορίζουμε τις ακολούθίες πραγματικών αριθμών (a_n) και (b_n), $n \in \mathbb{N}$ μέσω των αναδρομικών τύπων
$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}.$$
   (α') Υπολογίστε πίνακα $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$
   (β') Βρείτε κλειστούς τύπους για τις ακολουθίες (a_n), (b_n).

3. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $ab = 1$. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ορίζουμε τον πίνακα
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$
   Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\Delta_n = \det(A_n)$.
   (α') Βρείτε μία αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η ακολουθία Δ_n, $n \geq 2$.
   (β') Εάν $u_n = (\Delta_n, \Delta_{n-1})^\top$, $n \geq 3$, υπολογίστε πίνακα $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ τέτοιο ώστε $u_n = Bu_{n-1}$ για $n \geq 4$.
   (γ') Υπολογίστε την ορίζουσα Δ_n για $n \geq 2$.

4. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Υπολογίστε τον πίνακα $A^5 + 2A^2 - A + 2I_3$.