ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2011-2012

Θ. Γαρεφαλάκης

Μ1212 – Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

1. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ με τύπο
$$L(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 2x + z).$$
Αποδείξτε ότι η L είναι ισομορφισμός και υπολογίστε τον τύπο της L^{-1}.

2. Δίνονται οι βάσεις $\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$ και $\mathcal{B} = \{1, T + 1, T^2 + T\}$ του K-διανυσματικού χώρου $K[T]_{\leq 2}$. Υπολογίστε τον πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{E}$ στη βάση $\mathcal{B}$. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα που υπολογίσατε για να γράψετε τον πολυώνυμο $\phi = a + bT + cT^2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

3. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση
$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) &\mapsto (a + b - c, 2b + c, a + c) \end{aligned}$$
και η βάση $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Με $\mathcal{E}$ συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$.

   (α') Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}$ για τα πεδία ορισμού και τιμών αντίστοιχα.

   (β') Εκφράστε το $L(1, 2, 2)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

4. Έστω V ένας K-διανυσαμτικός χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$ και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση του. Ορίζουμε τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_n$ ως εξής:
$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad j = 1, \ldots, n$$
όπου $a_{ij} \in K$ για $1 \leq i, j \leq n$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{w_1, \ldots, w_n\}$ είναι βάση του V αν και μόνο αν ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος.