

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι
Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

1. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^2 .
 - (α') Δείξτε ότι η απεικόνιση $(x_1, x_2) \mapsto \|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ ορίζει μια νόρμα.
 - (β') Δείξτε ότι η απεικόνιση $(x_1, x_2) \mapsto |x_1 + 1| + |x_2|$ δεν ορίζει νόρμα.
2. Έστω η απεικόνιση $(u, w) \mapsto \langle u, w \rangle = 2u_1w_1 + 3u_2w_2$, όπου $u = (u_1, u_2)$ και $w = (w_1, w_2)$.
 - (α') Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^2 .
 - (β') Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο $(2, 1)$, ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο.
3. Έστω μιγαδικός διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ και υπόχωρος W του V . Δείξτε ότι τα σύνολα
 - (α') $X = \{x \in V : \langle x, v \rangle = 0\}$ και
 - (β') $Y = \{y \in V : \forall w \in W, \langle y, w \rangle = 0\}$είναι υπόχωροι του V .
4. Έστω μιγαδικός διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και $\|\cdot\|$ η σχετική νόρμα. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in V$ ισχύει

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$