

M113 – Γραμμική Άλγεβρα I

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

1. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) &\mapsto (a + b - c, 2b + c, a + c). \end{aligned}$$

- (α') Βρείτε τον πίνακα της T ως προς την κανονική βάση $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ και για τους δύο χώρους.
- (β') Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις $\mathcal{X} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ και $\mathcal{Y} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ για τα πεδία ορισμού και τιμών αντίστοιχα.
- (γ') Βρείτε τον πίνακα της ταυτοτικής απεικόνισης από τον \mathbb{R}^3 στον \mathbb{R}^3 ως προς τις βάσεις \mathcal{E} και \mathcal{X} για τα πεδία ορισμού και τιμών αντίστοιχα.
- (δ') Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις \mathcal{E} και \mathcal{Y} για τα πεδία ορισμού και τιμών αντίστοιχα.
- (ε') Εκφράστε το $T(1, 2, 2)$ ως προς τη βάση \mathcal{Y} .

2. Συμβολίζουμε με $P_m(K)$ τον διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής πάνω από το K βαθμού το πολύ $m - 1$. Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} D : P_n(K) &\longrightarrow P_{n-1}(K) \\ a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} &\mapsto a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}. \end{aligned}$$

Δηλαδή ο D είναι ο γνωστός μετασχηματισμός παραγώγισης.

- (α') Βρείτε τον πίνακα του D ως προς τις βάσεις $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ και $\{1, x, \dots, x^{n-2}\}$ των $P_n(K)$ και $P_{n-1}(K)$ αντίστοιχα.
- (β') Βρείτε τον πίνακα του D ως προς τις βάσεις $\{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+\cdots+x^{n-1}\}$ και $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-2}\}$ των $P_n(K)$ και $P_{n-1}(K)$ αντίστοιχα.
3. Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n πάνω από σώμα K και $L : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι αν η L είναι ισομορφισμός τότε ο πίνακας της L ως προς οποιαδήποτε βάση \mathcal{X} του V είναι αντιστρέψιμος. Αντίστροφα, αν ο πίνακας της L ως προς κάποια βάση είναι αντιστρέψιμος τότε η L είναι ισομορφισμός.