ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Λύσεις Φυλλαδίου 4

1. (α΄) Υπολογίζουμε τις εικόνες των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0,1) = e_1 + e_3 \\ T(0,1,0) &= (1,2,0) = e_1 + 2e_2 \\ T(0,0,1) &= (-1,1,1) = -e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(β΄) Υπολογίζουμε τις εικόνες των διανυσμάτων $x_1 = (1,0,0), x_2 = (1,1,0), x_3 = (1,1,1)$ της βάσης $\mathcal{X}$ και τις εκφράζουμε ως προς τα διανύσματα $y_1 = (1,0,1), y_2 = (0,1,0), y_3 = (0,0,1)$ της βάσης $\mathcal{Y}$.

$$\begin{aligned} T(x_1) = T(1,0,0) = (1,0,1) &= y_1 \\ T(x_2) = T(1,1,0) = (2,2,1) &= 2y_1 + 2y_2 - y_3 \\ T(x_3) = T(1,1,1) = (1,3,2) &= y_1 + 3y_2 + y_3. \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ για τα πεδία ορισμού και τιμών αντίστοιχα είναι

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(γ΄) Για την ταυτοτική απεικόνιση $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δουλεύουμε όμοια:

$$\begin{aligned} I(e_1) = (1,0,0) &= x_1 \\ I(e_2) = (0,1,0) &= -x_1 + x_2 \\ I(e_3) = (0,0,1) &= -x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της ταυτοτικής απεικόνισης ως προς τις βάσεις $\mathcal{E}$ και $\mathcal{X}$ για τα πεδία ορισμού και τιμών αντίστοιχα είναι

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(δ′) Βλέπουμε ότι

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3.$$

Άρα η σύνθεση $T \circ I = T$ είναι γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^3$ και $[T \circ I; \mathcal{E}, \mathcal{Y}] = [T; \mathcal{X}, \mathcal{Y}] \cdot [I; \mathcal{E}, \mathcal{X}]$. Έχουμε υπολογίσει

$$[I; \mathcal{E}, \mathcal{X}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$[T; \mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα υπολογίζουμε

$$[T; \mathcal{E}, \mathcal{Y}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ε′) Το διάνυσμα συντεταγμένων του $T(1,2,2)$ ως προς τη βάση $\mathcal{Y}$ είναι το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, $T(1,2,2) = y_1 + 6y_2 + 2y_3$.

2. (α′) Υπολογίζουμε τις εικόνες των στοιχείων της βάσης $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$.

$$D(1) = 0, D(x) = 1, \ldots, D(x^{n-2}) = (n-2)x^{n-1}, D(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}.$$

Άρα ο πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

(β′) Υπολογίζουμε τις εικόνες της βάσης $\{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+\cdots+x^{n-1}\}$ και τις εκφράζουμε ως προς τη βάση $\{1, x, \dots, x^{n-2}\}$.

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 \\ D(1+x) &= 1 \\ D(1+x+x^2) &= 1+2x \\ &\vdots \\ D(1+x+x^2\cdots+x^{n-1}) &= 1+2x+\cdots+(n-2)x^{n-3}+(n-1)x^{n-2}. \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας του D ως προς τις δύο παραπάνω βάσεις είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

3. Έστω $\mathcal{X}$ μια βάση του V. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $I : V \to V$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε $[I; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = I_n$, όπου I_n είναι ο ταυτοτικός πίνακας διάστασης n.

Ας υποθέσουμε ότι η L είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $L^{-1} : V \to V$ που είναι επίσης γραμμική και ισχύει $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = I$. Ας συμβολίσουμε $A = [L; \mathcal{X}, \mathcal{X}]$ και $B = [L^{-1}; \mathcal{X}, \mathcal{X}]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$[I; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = [L \circ L^{-1}; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = [L; \mathcal{X}, \mathcal{X}] \cdot [L^{-1}; \mathcal{X}, \mathcal{X}],$$

δηλαδή

$$I_n = AB.$$

Όμοια έχουμε

$$[I; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = [L^{-1} \circ L; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = [L^{-1}; \mathcal{X}, \mathcal{X}] \cdot [L; \mathcal{X}, \mathcal{X}],$$

οπότε

$$I_n = BA.$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις μας δείχνουν ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$.

Έστω τώρα ότι $\mathcal{X}$ είναι μια βάση του V και ο πίνακας $A = [L; \mathcal{X}, \mathcal{X}]$ είναι αντιστρέψιμος. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αντίστροφος γραμμικός μετασχηματισμός L^{-1}.

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, θεωρούμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}. Δεδομένης της βάσης $\mathcal{X}$, υπάρχει ισομορφισμός

$$\eta : \mathrm{Hom}(V, V) \quad \longrightarrow \quad M_n(K).$$

Έστω M ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζει ο A^{-1}, δηλαδή $\eta(M) = A^{-1}$. Τότε $[M; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = A^{-1}$. Βλέπουμε ότι

$$[L \circ M; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = AA^{-1} = I_n$$

και

$$[M \circ L; \mathcal{X}, \mathcal{X}] = A^{-1}A = I_n.$$

Δηλαδή $\eta(L \circ M) = \eta(M \circ L) = I_n$. Όμως για την ταυτοτική γραμμική απεικόνιση $I : V \to V$ ισχύει $\eta(I) = I_n$. Καθώς ο η είναι ισομορφισμός, οι σχέσεις $\eta(L \circ M) = \eta(I)$ και $\eta(M \circ L) = \eta(I)$ συνεπάγωνται $L \circ M = M \circ L = I$, δηλαδή η L έχει αντίστροφη γραμμική απεικόνιση, την M, και συνεπώς είναι ισομορφισμός.