ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006

Θ. Γαρεφαλάκης

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

1. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

2. Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης 2 πάνω από το σώμα K, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ μια βάση του V και ο γραμμικός τελεστής $L : V \to V$ με $L(x_1) = x_2$, $L(x_2) = -x_1 + x_2$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του L, όταν
   (α΄) $K = \mathbb{R}$,
   (β΄) $K = \mathbb{C}$.

3. Δύο πίνακες $A, B \in M_n(K)$ ονομάζονται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε $B = PAP^{-1}$. Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και συνεπώς τις ίδιες ιδιοτιμές.

4. Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$
   Αν $\operatorname{tr}(A)$ είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του A, $\det(A)$ η ορίζουσα, και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του A δείξτε ότι $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ και $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.