ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

M113 – Γραμμική Άλγεβρα I

Λύσεις Φυλλαδίου 8

1. Βλέπουμε ότι το τυχόν διάνυσμα του $\ker L$ είναι της μορφής $(x_1, -x_1, x_3, x_3)$ με $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\ker L = \{(x_1, -x_1, x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\ker L = \langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$. Πραγματικά,

$$(x_1, -x_1, x_3, x_3) = x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 1)$$

οπότε κάθε διάνυσμα του $\ker L$ ανήκει στον $\langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$. Αντίστροφα, κάθε γραμμικός συνδυασμός των $(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$ είναι της μορφής

$$x(1, -1, 0, 0) + y(0, 0, 1, 1) = (x, -x, y, y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

και ανήκει στον $\ker L$. Το σύνολο $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα είναι βάση του $\ker L$. Άρα $\dim \ker L = 2$. Γνωρίζουμε ότι

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker L + \dim \mathrm{im} L,$$

οπότε $\dim \mathrm{im} L = 2$. Επίσης $\mathrm{im} L \subseteq \mathbb{R}^2$ άρα $\mathrm{im} L = \mathbb{R}^2$.

2. Δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη άσκηση, βλέπουμε ότι $V = \langle (1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle$. Τα διανύσματα $v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θα επεκτείνουμε το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Αντικατάστασης. Ξεκινάμε με την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Γράφουμε

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_4 \implies e_4 = -e_1 + e_2 + v_1.$$

Άρα $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3, v_1 \rangle$. Συνεχίζουμε,

$$v_2 = e_3,$$

άρα $\langle e_1, e_2, e_3, v_1 \rangle = \langle e_1, e_2, v_1, v_2 \rangle$. Άρα τελικά το σύνολο $\{e_1, e_2, v_1, v_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$. Ισχυριζόμαστε ότι ο χώρος

$$W = \langle e_1, e_2 \rangle$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Πραγματικά, αν $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \cap W$ τότε υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) = ae_1 + be_2 &= cv_1 + dv_2 \implies \\ (a, b, 0, 0) &= (c, -c, d, c) \implies \\ a = b = c = d &= 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή $V \cap W = \{0\}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $V \oplus W \subseteq \mathbb{R}^4$ (το εσωτερικό ευθύ άθροισμα υπόχωρων είναι υπόχωρος). Επίσης $\mathbb{R}^4 \subseteq V \oplus W$, αφού κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^4$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2, v_1, v_2.

3. (α') Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_3$. Τότε

$$\begin{aligned} L(ap(x) + q(x)) &= (x+1)(ap(x) + q(x))' + (ap(x) + q(x)) \\ &= (x+1)ap'(x) + (x+1)q'(x) + ap(x) + q(x) \\ &= a((x+1)p'(x) + p(x)) + ((x+1)q'(x) + q(x)) \\ &= aL(p(x)) + L(q(x)). \end{aligned}$$

(β') Έστω η βάση $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{P}_3$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} L(1) &= (x+1)1' + 1 = 1 \\ L(x) &= (x+1)x' + x = 1 + 2x \\ L(x^2) &= (x+1)(x^2)' + x^2 = 2x + 3x^2 \end{aligned}$$

άρα ο πίνακας της L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$p(t) = \det(A - tI) = (3-t)(2-t)(1-t).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A και άρα της L είναι οι $1, 2, 3$.

4. (α') Έστω $v, u \in W^\perp$ και $a \in \mathbb{C}$. Τότε για οποιοδήποτε $w \in W$ έχουμε

$$\langle av + u, w \rangle = a\langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle = 0.$$

Άρα $av + u \in W^\perp$.

(β') Έστω $\{w_1, \dots, w_m\}$ μια βάση του W. Την επεκτείνουμε σε μια βάση του V, έστω την $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_{n-m}\}$. Με τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης μετατρέπουμε την $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_{n-m}\}$ σε ορθοκανονική βάση, έστω την $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$. Η μέθοδος μας εγκυάται ότι $\langle e_1, \dots, e_m\rangle = \langle w_1, \dots, w_m\rangle$ και φυσικά $\langle e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\rangle = \langle w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_{n-m}\rangle$. Τότε $W = \langle w_1, \dots, w_m\rangle = \langle e_1, \dots, e_m\rangle$. Έστω $W' = \langle e_{m+1}, \dots, e_n\rangle$. Είναι φανερό ότι $V = W \oplus W'$. Μένει να δείξουμε ότι $W^\perp = W'$.

Έστω $v \in W^\perp$. Γράφουμε το w ως προς την ορθοκανονική βάση,

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Τότε $\langle v, w\rangle = 0$ για κάθε $w \in W$, άρα $\langle v, e_k\rangle = 0$ για $k = 1, \dots, m$.

$$0 = \langle v, e_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_k\rangle = a_k.$$

Άρα $v = \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i \in W'$.

Έστω $v \in W'$. Τότε υπάρχουν $a_{m+1}, \dots a_n \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε $v = \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i$. Θα δείξουμε ότι $\langle v, w\rangle = 0$ για κάθε $w \in W$. Έστω $w = \sum_{j=1}^{m} a_j e_j \in W$. Τότε

$$\langle v, w\rangle = \langle \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{m} a_j e_j\rangle = \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{a_j} \langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

Άρα $v \in W^\perp$.