ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2005-2006
Θ. Γαρεφαλάκης

Μ113 – Γραμμική Άλγεβρα Ι

Λύσεις Φυλλαδίου 6

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $p(t)$ του A,

$$p(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 3t - 2).$$

Οι ρίζες του $p(t)$ είναι οι ιδιοτιμές του A. Βλέπουμε εύκολα ότι το -1 είναι ρίζα του $p(t)$, οπότε διαιρώντας το $p(t)$ με το $t+1$ βρίσκουμε

$$p(t) = -(t+1)(t^2 - t - 2).$$

Οι ρίζες του $t^2 - t - 2$ είναι οι $-1, 2$, οπότε έχουμε

$$p(t) = -(t+1)^2(t-2).$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και $\lambda_2 = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Για να βρρούμε την γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών πρέπει να βρούμε τους αντίστοιχους ιδιόχωρους και να υπολογίσουμε τις διαστάσεις τους.

Για την $\lambda_1 = -1$, τα ιδιοδιανύσματα $v = (x, y, z)$ ορίζονται από τη σχέση $(A+I)v = 0$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ -2x - 2z & = & 0 \\ 3x + y + 4z & = & 0 \end{array} \right\} \iff$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Άρα $X_{\lambda_1} = \langle (1, -1, 1) \rangle$ και $\dim X_{\lambda_1} = 1$, που είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_1.

Για την $\lambda_2 = 2$, τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται ως οι μη μηδενικές λύσεις της $(A-2I)v = 0$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4x + y & = & 0 \\ -2x - 3y - 2z & = & 0 \\ 3x + y + z & = & 0 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 4x \\ z & = & -7x \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Άρα $X_{\lambda_2} = \langle (1, 4, -7) \rangle$ και $\dim X_{\lambda_2} = 1$, που είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_2.

2. Ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Θέλω να υπολογίσω $a, b \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε οι ιδιοτιμές του B να είναι οι δοθείσες. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι το

$$p(t) = \det(B - tI) = -(t^3 - 2t^2 - (3+2b)t + 4 - 2a - 4b.$$

Οι ρίζες του $p(t)$ είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές του B. Άρα θέλω

$$\begin{aligned} p(-1) = 0 &\implies a + b = 2 \\ p(1) = 0 &\implies a + 3b = 0 \\ p(2) = 0 &\implies a + 4b = -1 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $a = 3$, $b = -1$.

Άν w_1, w_2, w_3 είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 και λ_3, τότε ξέρουμε ότι το σύνολο $\mathcal{A} = \{w_1, w_2, w_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, οπότε θα είναι βάση του V. Ως προς αυτή τη βάση, $\mathcal{A}$, ο πίνακας του L θα είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Άρα αρκεί να βρω ένα ιδιοδιάνυσμα για κάθε ιδιοτιμή.

Για την $\lambda_1 = -1$ έχω

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ -2x + 4y + 2z & = & 0 \\ 3x - y + 2z & = & 0 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & -x \\ x & \in & \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του λ_1 είναι το w_1 με διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ το $(1, 1, -1)$. Για να το δείτε αυτό παρατηρήστε ότι ο B είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

οπότε $L(w_1) = -1 \cdot w_1$, όπου $w_1 = v_1 + v_2 - v_3$.

Όμοια εργαζόμαστε για να βρούμε ιδιοδιανύσματα για τις άλλες δύο ιδιοτιμές. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι τα $(1, 3, -2)$, $(1, 4, -1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα B που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 2$ οπότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του L είναι τα $w_2 = v_1 + 3v_2 - 2v_3$ και $w_3 = v_1 + 4v_2 - v_3$. Ως προς τη βάση $\mathcal{A} = \{w_1, w_2, w_3\}$ είδαμε ότι ο πίνακας του L είναι διαγώνιος.

3. Έστω L γραμμικός τελεστής του V με μία ιδιοτιμή λ που έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2. Τότε ο ιδιόχωρος του λ έχει διάσταση 2 και άρα είναι ο V. Οπότε για κάθε $v \in V$ έχουμε $L(v) = \lambda v$. Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ μια οποιαδήποτε βάση του V. Τότε $L(v_1) = \lambda v_1$ και $L(v_2) = \lambda v_2$, άρα ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Από το θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $p(A) = O$, δηλαδή $A^2 + A + I = O$. Από αυτή τη σχέση έχουμε
$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & -A - I \implies \\ A^3 & = & A(-A - I) \implies \\ A^3 & = & -A^2 - A. \end{array}$$
Από τη σχέση $A^2 + A + I = O$ έχουμε $-A^2 - A = I$, οπότε $A^3 = I$.