

M1212 – Γραμμική Άλγεβρα II
Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

1. Έστω K σώμα, $m, n \in \mathbb{N}$ και $A \in M_{m \times n}(K)$. Εάν $n > m$ δείξτε ότι το σύστημα $Ax = \mathbf{0}$ έχει τουλάχιστον μία μη μηδενική λύση.
2. Έστω K σώμα και V ένας K -διανυσματικός χώρος. Εάν $L \in \mathcal{L}(V)$ δείξτε ότι $\ker(L) \subseteq \ker(L^2)$ και $\text{im}(L^2) \subseteq \text{im}(L)$.
3. Έστω K σώμα και V ένας K -διανυσματικός χώρος. Εάν $L \in \mathcal{L}(V)$ δείξτε ότι οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:
 - (α) $V = \ker(L) \oplus \text{im}(L)$,
 - (β) $\ker(L) = \ker(L^2)$ και $\text{im}(L) = \text{im}(L^2)$.
4. Έστω V ένας K -διανυσματικός χώρος και $L, M \in \mathcal{L}(V)$. Εάν $L \circ M = \text{id}$ δείξτε ότι οι L και M είναι ισομορφισμοί και $M \circ L = \text{id}$.
5. Έστω K σώμα, V ένας K -διανυσματικός χώρος και U ένας υπόχωρος του V . Δείξτε ότι κάθε συμπλήρωμα του U εντός του V είναι ισόμορφο με τον χώρο πηλίκου V/U .