

M1212 – Γραμμική Άλγεβρα II
Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

1. Στις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε εάν το σύνολο U είναι διανυσματικός υπόχωρος του K -διανυσματικού χώρου K^3 .

(α) $K = \mathbb{R}, U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 5x_3\}$.

(β) $K = \mathbb{R}, U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.

(γ) $K = \mathbb{C}, U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.

2. Δίνονται τα παρακάτω στοιχεία του \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (0, 1, -2), u_1 = (-2, -5, 0), u_2 = (1, 3, -1).$$

Αποδείξτε ότι $\text{Span}(\{v_1, v_2\}) = \text{Span}(\{u_1, u_2\})$.

3. Έστω V ένας K -διανυσματικός χώρος και A, B υποσύνολα του V . Δείξτε ότι

$$\text{Span}(A \cap B) \subseteq \text{Span}(A) \cap \text{Span}(B).$$

Δώστε ένα παράδειγμα όπου ο εγκλεισμός είναι αυστηρός.

4. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

των 2×2 πινάκων με εγγραφές στο \mathbb{R} .

- (α') Δείξτε ότι τα σύνολα

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a - d = 0 \right\}$$

είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$.

(β) Για καθένα από τους V και W βρείτε τρία διανύσματα που τους παράγουν. Δηλαδή, προσδιορίστε διανύσματα $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $V = \text{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$ και $W = \text{Span}(\{w_1, w_2, w_3\})$.

(γ) Βρείτε δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $V \cap W$.

(δ) Δείξτε ότι $V + W = M_2(\mathbb{R})$. Γράψτε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ στη μορφή $v + w$ με $v \in V$ και $w \in W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.

5. Δίνονται οι υπόχωροι

$$U_1 = \text{Span}(\{T^2 + 1, T + 1\}), \quad U_2 = \text{Span}(\{-T^2 + T + 1, T - 1\})$$

του $\mathbb{R}[T]$. Δείξτε ότι $U_1 \cap U_2 = \text{Span}(\{-2T^2 + 3T + 1\})$.