ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#2$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω σώμα F και $K = F(t)$ το σώμα των ρητών συναρτήσεων στη μεταβλητή t. Αν $u \in K$, δείξτε ότι $K = F(u)$ αν και μόνο αν $u = (at+b)/(ct+d)$ για κάποια $a, b, c, d \in F$ με $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.
Υπόδειξη: Μελετήστε το παράδειγμα 1.17 του βιβλίου P. Morandi, *Field and Galois Theory*, τα συμπεράσματα του οποίου μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένα.

(2) Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι κάθε στοιχείο της $G(F(t)/F)$ δίνεται από κάποιο αντιστρέψιμο 2×2 πίνακα με εγγραφές στο F και αντίστροφα κάθε στοιχείο της $GL_2(F)$ αντιστοιχεί σε ένα αυτομορφισμό της $G(F(t)/F)$. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi : GL_2(F) \to G(F(t)/F)$ με $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\sigma : t \mapsto \frac{at+b}{ct+d})$ είναι επί. Δείξτε ακόμη ότι $\varphi(AB) = \varphi(B)\varphi(A)$ για κάθε $A, B \in GL_2(F)$.

(3) Έστω σώμα F και $f \in F[X]$ πολυώνυμο βαθμού p (πρώτος). Υποθέστε ότι για κάθε επέκταση K του F, εάν το f έχει ρίζα στο K τότε αναλύεται στο K (σε πρωτοβάθμιους παράγοντες). Αποδείξτε ότι είτε το f είναι ανάγωγο πάνω από το F ή έχει ρίζα στο F (και συνεπώς αναλύεται πάνω από το F).

(4) Αποδείξτε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα ικανοποιούν τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης:
   (α') $f(X) = X^p - a \in F[X]$, όπου η χαρακτηριστική του F είναι p.
   (β') $f(X) = X^p - a \in F[X]$, όπου η χαρακτηριστική του F είναι διαφορετική από το p και το σώμα F περιέχει στοιχείο $\omega \neq 1$, με $\omega^p = 1$.

(5) Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης, K, του πολυωνύμου $f(X) = X^4 - 2$ πάνω από το $\mathbb{Q}$ και υπολογίστε το βαθμό $[K : \mathbb{Q}]$.

(6) Δώστε ένα παράδειγμα ενός πολυωνύμου $f \in \mathbb{Q}[X]$ με $\deg(f) = n \geq 3$ τέτοιο ώστε το σώμα διάσπασης K του f πάνω από το $\mathbb{Q}$ να έχει βαθμό $[K : \mathbb{Q}] = n!$.