Θεωρία Σωμάτων
Φυλλάδιο ασκήσεων #3

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

5 Μαρτίου 2015

1. Έστω σώμα F και $f(X) \in F[X]$ ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού n. Εάν το σώμα K είναι επέκταση του F βαθμού $[K : F] = m$, και $(n, m) = 1$, δείξτε ότι το $f(X)$ παραμένει ανάγωγο στο δακτύλιο $K[X]$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $X^{11} - 6X^8 + 4X + 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[X]$ είναι ανάγωγο.

2. Έστω σώμα F και στοιχεία a, b αλγεβρικά πάνω από το F, τέτοια ώστε $[F(a) : F] = n$, $[F(b) : F] = m$ και $(n, m) = 1$. Δείξτε ότι $K(a) \cap K(b) = K$ και $[K(a, b) : K] = nm$.

3. Δείξτε ότι $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}\}$ και $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p) = \{\mathrm{id}\}$ για κάθε πρώτο p.

4. Έστω K επέκταση του σώματος F, όπου F είναι είτε το $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{F}_p$ για κάποιο πρώτο p. Δείξτε ότι $\mathrm{Aut}(K) = \mathrm{Gal}(K/F)$.

5. Κατασκευάστε τα στοιχεία της ομάδας $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$.

6. Έστω το πολυώνυμο $f(X) = X^3 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

   (α′) Δείξτε ότι το $f(X)$ είναι ανάγωγο και έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα α.

   (β′) Εάν ρ είναι μία μιγαδική ρίζα του $f(X)$, δείξτε ότι το $\mathbb{Q}(\alpha, \rho)$ είναι ένα σώμα ανάλυσης του $f(X)$ πάνω από το $\mathbb{Q}$ και $[\mathbb{Q}(\alpha, \rho) : \mathbb{Q}] = 6$.

7. Έστω ℓ πρώτος αριθμός.

   (α′) Δείξτε ότι $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{2})/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}\}$.
   Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι οι το πολ/μο $X^\ell - 2$ είναι ανάγωγο και έχει ρίζες τα $\sqrt[\ell]{2}\,\omega^j$, $j = 0, 1, \ldots, \ell - 1$, όπου $\omega = e^{2\pi i/\ell}$. Ποιές από αυτές τις ρίζες ανήκουν στο σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{2})$;

   (β′) Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης, E, του πολυωνύμου $X^\ell - 2$ πάνω από το $\mathbb{Q}$. Υπολογίστε τους βαθμούς $[E : \mathbb{Q}]$, $[E, \mathbb{Q}(\sqrt[\ell]{2})]$.

8. Έστω ℓ πρώτος αριθμός και $\omega = e^{2\pi i/\ell}$.

   (α′) Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \ell - 1$.

   (β′) Δείξτε ότι $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_j \ : \ j = 1, \ldots, \ell - 1\}$, όπου $\sigma_j(\omega) = \omega^j$.

   (γ′) Δείξτε ότι $\sigma_j^k(\omega) = \omega^{j^k}$ για κάθε $1 \leq j \leq \ell - 1$ και $k \in \mathbb{N}$.

   (δ′) Δείξτε ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ είναι κυκλική.
   Υπόδειξη: η ομάδα $\mathbb{Z}_\ell^*$ είναι κυκλική. Αν $1 \leq a \leq \ell - 1$ είναι φυσικός τέτοιος ώστε η κλάση του γεννά την $\mathbb{Z}_\ell^*$, δείξτε ότι ο αυτομορφισμός σ_a γεννά την $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$.