

M113 – Γραμμική Άλγεβρα I

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

1. Θεωρούμε το \mathbb{C} ως διανυσματικό χώρο πάνω από το \mathbb{R} .
 - (α') Δείξτε ότι τα διανύσματα 1 και i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
 - (β') Δείξτε ότι τα διανύσματα $a + ib$ και $c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν $ad = bc$.
2. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $C^0(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με πράξεις κατά σημείο, δείξτε ότι το σύνολο $\{\sin, \cos\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Δείξτε το ίδιο για το σύνολο $\{x, e^x\}$.
3. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

των 2×2 πινάκων με συντελεστές στο \mathbb{R} .

(α') Δείξτε ότι τα σύνολα

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b - c = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a - d = 0 \right\}$$

είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$.

- (β') Για καθένα από τους V και W βρείτε τρία διανύσματα που τους παράγουν. Δηλαδή, προσδιορίστε διανύσματα $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ και $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.
- (γ') Δείξτε ότι τα σύνολα $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- (δ') Βρείτε δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $V \cap W$.
- (ε') Δείξτε ότι $V + W = M_2(\mathbb{R})$. Γράψτε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ στη μορφή $v + w$ με $v \in V$ και $w \in W$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.