ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#2$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω α μια ρίζα του $X^2+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$ και C ο γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_4$ με πίνακα βάσης τον
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
Υπολογίστε τις παραμέτρους του C. Υπολογίστε ένα μη μηδενικό διάνυσμα του κώδικα με ελάχιστο βάρος. Βρείτε δύο διανύσματα του $\mathbb{F}_4^6$ τα οποία ανήκουν σε διαφορετικά σύμπλοκα.

(2) Για $n, d \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $1 \leq d \leq n-1$ αποδείξτε ότι $A_q(n,d) \leq qA_q(n-1,d)$.
Υπόδειξη: Εάν C είναι ένας (n, M, d) κώδικας με $M = A_q(n,d)$, θεωρήστε τη διαμέριση του C που αποτελείται από τα σύνολα $C_a = \{c_1c_2\cdots c_n \in C \mid c_1 = a\}$, $a \in A$, όπου A είναι το αλφάβητο. Διαγράψτε το πρώτο σύμβολο κάθε λέξης, οπότε έχετε τα σύνολα $C'_a = \{c_2\cdots c_n \mid ac_2\cdots c_n \in C\}$, $a \in A$. Ποιά είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ διαφορετικών λέξεων κάθε συνόλου;

(3) Έστω C ένας $[n,k]$ γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$ και $1 \leq i \leq n$. Δείξτε ότι εάν υπαρχει κωδική λέξη της οποίας η i συντεταγμένη δεν είναι μηδέν τότε κάθε στοιχείο $a \in \mathbb{F}_q$ εμφανίζεται στην i συντεταγμένη ακριβώς σε q^{k-1} λέξεις του κώδικα.
Υπόδειξη: εξετάστε την προβολή $\pi_i : C \to \mathbb{F}_q$, $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Ποιά είναι η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας; Εμφανίζεται κάθε $a \in \mathbb{F}_q$ στην i συντεταγμένη κάποιας λέξης; Εφόσον εμφανίζεται, σε ποιές λέξεις εμφανίζεται;

(4) Έστω C ένας $[n,k,d]$ γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Έστω ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει λέξη του κώδικα της οποίας η i συντεταγμένη δεν είναι μηδέν.
(α΄) Δείξτε ότι $\sum_{c \in C} \mathrm{wt}(c) = n(q-1)q^{k-1}$.
(β΄) Δείξτε ότι $d \leq n(q-1)q^{k-1}/(q^k-1)$.
(γ΄) Δείξτε ότι δεν υπάρχει κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_2$ με παραμέτρους $[15,7,d]$ με $d \geq 8$.

(5) Συγκρίνετε τα άνω φράγματα των Singleton, Hamming και Plotkin για το $A_2(n,9)$ για $9 \leq n \leq 14$.