ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#1$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω το πολυώνυμο $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.
   (α') Δείξτε ότι το f είναι ανάγωγο πάνω από το $\mathbb{F}_2$.
   (β') Αν α είναι μια ρίζα του f, υπολογίστε την τάξη των στοιχείων α και $\alpha+1$ στην ομάδα $\mathbb{F}_{16}^*$.
   (γ') Εκφράστε τρεις γεννήτορες της πολ/κης ομάδας ως προς τη βάση $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.

(2) Κατασκευάζουμε την επέκταση $\mathbb{F}_{125}|\mathbb{F}_5$, χρησιμοποιώντας μια ρίζα, β, του πολυωνύμου $g = X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$. Εκφράστε τις ρίζες $\beta, \beta^5, \beta^{25}$ ως προς τη βάση $\{1, \beta, \beta^2\}$. Είναι γραμμικά ανεξάρτητες;

(3) Έστω α μια ρίζα του $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Λύστε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + (\alpha+1)x_3 & = & 0 \\ x_1 + \alpha^5 x_2 + x_3 & = & \alpha \end{array} \right\}.$$

(4) Υπολογίστε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου V του $\mathbb{F}_2^8$, όπου

$$V = \langle 10101010, 01010101, 10011001, 01100110 \rangle.$$

(5) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_H : \mathbb{F}_{q^2}^n \times \mathbb{F}_{q^2}^n \longrightarrow \mathbb{F}_{q^2}^n, \quad \langle x, y \rangle_H = \sum_{i=1}^n x_i y_i^q,$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$. Δείξτε ότι η απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο (το οποίο ονομάζεται Hermitian inner product). Αποδείξτε ότι είναι διαφορετικό από το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο.