ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ $\#4$

ΘΕΟΔΟΥΛΟΣ ΓΑΡΕΦΑΛΑΚΗΣ

(1) Έστω C ένας κυκλικός γραμμικός κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Αποδείξτε ότι και ο $C^{\perp}$ είναι κυκλικός.

(2) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ και C ο δυαδικός κυκλικός $[n,k,d]$ κώδικας με γεννήτορα το $g(X) \in \mathbb{F}_2[X]$.
  (α′) Εάν $g(X) \neq 1$, δείξτε ότι $d \geq 2$.
  (β′) Εάν $g(X) \not| X^m - 1$ για $0 \leq m < n$, δείξτε ότι $d \geq 3$.

(3) Έστω q δύναμη πρώτου και φυσικός $n \geq 3$ με $(n,q) = 1$. Έστω επίσης α μία πρωταρχική n-οστη ρίζα της μονάδας, $g(X) = \min(\alpha, \mathbb{F}_q)$, και C ο κυκλικός κώδικας ελάχιστου μήκους με γεννήτορα το $g(X)$. Αποδείξτε ότι ο C έχει παραμέτρους $[n, n - \mathrm{ord}_n(q), d]$, με $d \geq 2$. Εάν επιπλέον ισχύει $(n, q(q-1)) = 1$, δείξτε ότι $d \geq 3$.

(4) Έστω C_i, $i = 1, 2$ κυκλικοί κώδικες μήκους n πάνω από το $\mathbb{F}_q$ με γεννήτορες $g_1(X)$ και $g_2(X)$ αντίστοιχα.
  (α′) Δείξτε ότι οι κώδικες $C_1 \cap C_2$ και $C_1 + C_2$ είναι κυκλικοί.
  (β′) Εκφράστε τους γεννήτορες των $C_1 \cap C_2$ και $C_1 + C_2$ σε σχέση με τα $g_1(X), g_2(X)$.

(5) Υπολογίστε τα παρακάτω:
  (α′) Το πλήθος των δυαδικών κωδίκων μήκους 21.
  (β′) Όλες τις τιμές k για τις οποίες υπάρχει δυαδικός, κυκλικός $[21, k]$ κώδικας.
  (γ′) Το πλήθος των δυαδικών, κυκλικών $[21, 12]$ κωδίκων.
  (δ′) Τον γεννήτορα κάθε δυαδικού, κυκλικού $[21, 12]$ κώδικα.

(6) Έστω C ένας κυκλικός $[n,k,d]$ κώδικας πάνω από το $\mathbb{F}_q$. Θέτουμε $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$. Εάν ισχύει $n \geq tk + 1$, δείξτε ότι κάθε διάνυσμα $e \in \mathbb{F}_q^n$ με βάρος το πολύ t έχει τουλάχιστον k κυκλικώς συνεχόμενα 0.