ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2008-2009
Θ. Γαρεφαλάκης

M110 – Άλγεβρα

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

1. Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι ομομορφισμοί ομάδων:

   (α') $f\ :\ (\mathbb{Z}_m, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_m, +)$, $f([n]_m) = [n+1]_m$, όπου $m \in \mathbb{N}$.

   (β') $f\ :\ (\mathbb{Z}_{10}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$, $f([n]_{10}) = [n]_5$.

   (γ') $f\ :\ (\mathbb{Z}_7, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_7, +)$, $f([n]_7) = [n^7 + 2n]_7$

2. Αν $(A, \odot_1)$ και $(B, \odot_2)$ είναι ομάδες, αποδείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ με την πράξη

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 \odot_1 a_2, b_1 \odot_2 b_2), \quad \forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$$

   είναι ομάδα.

3. Αν $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 2$ με μκδ$(n, m) = 1$, αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$f\ :\ \mathbb{Z}_{nm} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, \quad f([k]_{nm}) = ([k]_n, [k]_m)$$

   είναι ισομορφισμός ομάδων.

4. Εάν H είναι μία υποομάδα της ομάδας G με $(G : H) = 2$, αποδείξτε ότι $a^2 \in H$ για κάθε $a \in G$.