

M110 – Άλγεβρα  
Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο  $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}\}$  εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών είναι υποομάδα της  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ .

2. Έστω  $(G, \cdot)$  ομάδα. Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

(α') Για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$  και για κάθε  $a, b \in G$ ,  $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$ ,

(β') Για κάθε  $a \in G$ ,  $\text{ord}(a) = \text{ord}(a^{-1})$ .

3. Έστω  $(G, \cdot)$  ομάδα. Για  $g \in G$  ορίζουμε το σύνολο

$$C_g = \{h \in G : hg = gh\}.$$

Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $g \in G$  το  $C_g$  είναι υποομάδα της  $G$  (η υποομάδα αυτή ονομάζεται κεντροποιητής του  $g$ ).

4. Έστω  $(G, \cdot)$  αβελιανή ομάδα και  $a, b \in G$  στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Αποδείξτε ότι  $\text{ord}(ab) \mid \text{εκπ}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$ . Δώστε ένα παράδειγμα όπου  $\text{ord}(ab) \neq \text{εκπ}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$  και ένα παράδειγμα όπου  $\text{ord}(ab) = \text{εκπ}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$ .

5. Αποδείξτε ότι οι ομάδες  $(\mathbb{Z}_7^\times, \cdot)$  και  $(\mathbb{Z}_9^\times, \cdot)$  είναι κυκλικές.

6. Έστω η πολλαπλασιαστική ομάδα  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ . Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

(α') Οι κυκλικές υποομάδες  $\langle i \rangle$  και  $\langle \frac{\sqrt{3}+i}{4} \rangle$  είναι πεπερασμένες. Να υπολογιστούν οι τάξεις τους.

(β') Η υποομάδα  $\langle 1+i \rangle$  είναι άπειρη.

7. Έστω  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  και  $M_n(\mathbb{Z}_m)$  το σύνολο των  $n \times n$  πινάκων με εγγραφές από την ομάδα  $\mathbb{Z}_m$ . Αποδείξτε ότι το σύνολο  $M_n(\mathbb{Z}_m)$  εφοδιασμένο με την πρόσθεση πινάκων, που ορίζεται με το «φυσικό» τρόπο, δηλαδή αν  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}_m)$ , ορίζουμε  $C = A + B$ , όπου  $C = (c_{ij})$ , με  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , είναι αβελιανή ομάδα. Για δεδομένο πίνακα  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}_m)$  δείξτε ότι

$$\text{ord}(A) = \text{εκπ}(\text{ord}(a_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n).$$

Ποιά είναι η τάξη της ομάδας  $(M_n(\mathbb{Z}_m), +)$ ; Για ποιές των  $n, m$  είναι η ομάδα κυκλική;