ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2008-2009
Θ. Γαρεφαλάκης

M110 – Άλγεβρα

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

1. (α') Έστω $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ και $r/s \in \mathbb{Q}$ μία ρίζα του, με μκδ$(r, s) = 1$. Δείξτε ότι $r|a_0$ και $s|a_n$.

   (β') Εάν το πολυώνυμο $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$, δείξτε ότι έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}$.

   (γ') Εάν $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, δείξτε ότι το πολυώνυμο $X^n + 2\kappa X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$.

2. Υπολογίστε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{4}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

3. Έστω p πρώτος και $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ ο ομομορφισμός δακτυλίων, που ορίζεται από τη σχέση $\phi(a) = \bar{a}$. Τότε:

   (α') Η απεικόνιση $\overline{\phi} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$, που ορίζεται από τη σχέση

   $$\overline{\phi}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \phi(a_0) + \phi(a_1)x + \cdots + \phi(a_n)x^n$$

   είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

   (β') Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, τέτοιο ώστε ο p δεν διαιρεί τον $lc(f)$ και το $\overline{\phi}(f(x))$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Αποδείξτε ότι, τότε, το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

   (γ') Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 17x + 36$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

4. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Q}[X]$.

   (α') $f(X) = X^3 - 2$,

   (β') $f(X) = X^2 + 5X + 1$,

   (γ') $f(X) = X^3 + 30X^2 - 5X + 8$.