Δ. Ι. Νταής

Περί Κανονικών Πολυέδρων

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΜΙΛΙΩΝ ΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Β′ (18 Δεκεμβρίου 2000)

Προοίμιο. Στην προηγούμενη διάλεξη παρουσιάσθηκε η *γεωμετρική* ταξινόμηση των κανονικών πολυέδρων (και, γενικότερα, των κανονικών πολυτόπων) «ως προς ομοιότητα». Επίσης έγινε μνεία για την επανεμφάνιση των κανονικών πολυέδρων (όταν ο ορισμός τους γενικεύται καταλλήλως εντός των πλαισίων τής τοπολογικής κατηγορίας) ως εκείνων των τοπολογικών πολυέδρων, τα οποία είναι *ομοιομορφικά με τη δισδιάστατη σφαίρα*. Στην παρούσα διάλεξη θα αλλάξουμε και πάλι το «σκηνικό» μεταβαίνοντας σε ορισμένες «ταξινομήσεις ομάδων», στις οποίες υπεισέρχονται κατ' ανάγκην οι συνήθεις ή οι δυαδικές ομάδες περιστροφών των Πλατωνικών Στερεών. Ορισμένες από τις βασικές έννοιες από τη Θεωρία Ομάδων επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας.

1 Υπενθυμίσεις βασικών εννοιών από τη Θεωρία Ομάδων

Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Μια (**διμελής**) **πράξη** επί τού A είναι μια συνάρτηση $A \times A \to A$. Για την μέσω αυτής εικόνα ενός ζεύγους $(a_1, a_2) \in A \times A$ χρησιμοποιούνται διάφοροι συμβολισμοί, όπως π.χ. $a_1 \cdot a_2$ (ή $a_1 a_2$), $a_1 + a_2$, $a_1 \star a_2$, $a_1 \circledcirc a_2$ κ.α. Μια πράξη, ας πούμε "$\circledcirc$", επί τού A λέγεται

(a) **προσεταιριστική** όταν $a \circledcirc (b \circledcirc c) = (a \circledcirc b) \circledcirc c$ για όλα τα a, b και $c \in A$, και

(b) **μεταθετική** όταν $a \circledcirc b = b \circledcirc a$ για όλα τα a και $b \in A$.

Ένα στοιχείο e τού A καλείται **ουδέτερο στοιχείο** ως προς την πράξη $\circledcirc$ όταν ισχύει

$$a \circledcirc e = e \circledcirc a = a, \ \ \forall a, \quad a \in A.$$

(Εάν ένα ουδέτερο στοιχείο υπάρχει, τότε αυτό είναι μονοσημάντως ορισμένο). Έστω τώρα ένα τυχόν $a \in A$. Εάν το A διαθέτει ουδέτερο στοιχείο e, ένα στοιχείο $a' \in A$ καλείται **συμμετρικό**[1] *τού* a ως προς την πράξη $\circledcirc$ όταν ισχύει

$$a \circledcirc a' = a' \circledcirc a = e \, .$$

(Όταν ένα τέτοιο a' υπάρχει, τότε είναι το μοναδικό στοιχείο που πληροί αυτήν την ιδιότητα.)

Ένα μη κενό σύνολο G, το οποίο είναι εφοδιασμένο με μια προσεταιριστική πράξη $\circledcirc$, λέγεται **ομάδα** όταν διαθέτει ουδέτερο στοιχείο e, και όταν ταυτοχρόνως για κάθε στοιχείο τού G υπάρχει το συμμετρικό του ως προς την $\circledcirc$. Η **τάξη** $|G|$ μιας ομάδας G είναι εξ ορισμού η ισχύς (ο πληθικός αριθμός) τού συνόλου G. Εάν η $|G|$ είναι πεπερασμένη, τότε λέμε πως η G έχει **πεπερασμένη τάξη** ή απλώς ότι η G είναι μια **πεπερασμένη**

[1] Όταν χρησιμοποιούμε τον προσθετικό "$+$" (κι αντιστοίχως, τον πολλαπλασιαστικό "$\cdot$") συμβολισμό, αντί για «συμμετρικό» στοιχείο, είθισται να ομιλούμε για «αντίθετο» (κι αντιστοίχως, για «αντίστροφο») και αντί τού a' να γράφουμε $-a$ και a^{-1}, αντιστοίχως.

ομάδα. (Και αντιστοίχως, εάν η $|G|$ είναι ένας άπειρος αριθμός, τότε λέμε πως η G πρόκειται για μια **άπειρη ομάδα**). Μια ομάδα G λέγεται **αβελιανή** (ή **ομάδα τού Abel**) όταν η πράξη, με την οποία είναι εφοδιασμένη, είναι μεταθετική.

Από εδώ και στο εξής, όταν αναφερόμαστε σε ομάδες, θα υιοθετούμε ως επί το πλείστον τον πολλαπλασιαστικό συμβολισμό για τις εκάστοτε θεωρούμενες πράξεις (γράφοντας π.χ. $g_1 g_2$ αντί τού $g_1 \circledcirc g_2$), ενώ θα εισαγάγουμε τη συντομογραφία[2]

$$g^n = \underbrace{g\, g \cdots g}_{n \text{ φορές}}$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Ένα μη κενό υποσύνολο H μιας ομάδας G καλείται **υποομάδα** όταν το H καθίσταται αφ' εαυτού μια ομάδα (ως προς τον περιορισμό τής πράξης τής G επ' αυτού). Κάθε ομάδα έχει πάντοτε δύο προφανείς υποομάδες, ήτοι τον εαυτό της και την **τετριμμένη ομάδα** (που αποτελείται μόνον από το ουδέτερο στοιχείο). Εάν τα H και K είναι δυο μη κενά υποσύνολα μιας ομάδας G, τότε ορίζουμε το HK ως εξής

$$HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}\ .$$

Το HK αποτελεί μια υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν $HK = KH$. Σημειωτέον ότι η **τομή** $\cap_{j\in J} G_j$ μιας οικογενείας υποομάδων $\{H_j \mid j \in J\}$ μιας ομάδας G είναι κι αυτή μια υποομάδα τής G. Για ένα αυθαίρετο υποσύνολο H μιας ομάδας G, χαρακτηρίζουμε την τομή

$$\bigcap \{\text{υποομάδες } K \text{ τής } G \mid H \subseteq K\},$$

η οποία αποτελεί την ελάχιστη υποομάδα τής G που περιέχει το H, ως την υποομάδα τής G την **παραγόμενη από το** H. Εάν $H \neq \varnothing$, τότε η υποομάδα αυτή (για την οποία λέμε πως έχει το H ως **το σύνολο** ή **το σύστημα γεννητόρων** της) αποτελείται από όλα τα στοιχεία τής μορφής

$$g = h_1^{\delta_1} h_2^{\delta_2} \cdots h_k^{\delta_k}, \text{ όπου } h_1, h_2, \ldots, h_k \in H \text{ και } \delta_j \in \{+1, -1\},\ \forall j,\ 1 \leq j \leq k.$$

Μια ομάδα καλείται **κυκλική** όταν μπορεί (υπό την παραπάνω έννοια) να παραχθεί από ένα μονοσύνολο. Εάν η G είναι κυκλική και παράγεται από το g, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα· είτε όλες οι «δυνάμεις» $g^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ είναι σαφώς διακεκριμένες, είτε υπάρχουν ακέραιοι n, m, με $n > m$, τέτοιοι ώστε $g^n = g^m$, ήτοι $g^{n-m} = e$. Στην πρώτη περίπτωση η G έχει άπειρη τάξη και λέγεται **άπειρη κυκλική ομάδα**. Στη δεύτερη περίπτωση, $G = \{e, g, g^2, \ldots, g^{k-1}\}$, όπου ο k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο $g^k = e$.

(1.1) Πρόταση. *Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, τότε παίρνουμε $g^n = e$, για κάθε $g \in G$, όπου $n = |G|$.*

[2] Σημειώνουμε επίσης με g^{-n} το στοιχείο $(g^{-1})^{n}$.

(1.2) Πρόταση. *Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.*

Έστω G μια ομάδα. Ένα υποσύνολο τής G που έχει τη μορφή $gH = \{gh \mid h \in H\}$ (και αντιστοίχως, $Hg = \{hg \mid h \in H\}$), όπου η H είναι μια υποομάδα τής G και το $g \in G$, καλείται **αριστερή** (και αντιστοίχως, **δεξιά**) **πλευρική κλάση**[3] τής H εντός τής G. Οι αριστερές (και αντιστοίχως, οι δεξιές) πλευρικές κλάσεις μιας υποομάδας έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, ενώ το πλήθος των (διακεκριμένων) δεξιών πλευρικών κλάσεων ισούται με το πλήθος των αριστερών πλευρικών κλάσεων. Αυτό το πλήθος των δεξιών (ή των αριστερών) πλευρικών κλάσεων ονομάζεται **δείκτης** τής H εντός τής G και συμβολίζεται με $[G : H]$.

(1.3) Πρόταση. (Lagrange) *Εάν η H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G, τότε έχουμε*

$$|G| = [G : H]\ |H|\ .$$

Έστω G μια ομάδα. Μια υποομάδα H τής G ονομάζεται **ορθόθετη** (ή, κατ' άλλους, **κανονική**) όταν $gH = Hg$ για κάθε $g \in G$. Το **κέντρο** $Z(G)$ τής G ορίζεται ως εξής:

$$Z(G) = \{g \in G \mid hg = gh,\ \forall g,\ \ g \in G\}\,.$$

(1.4) Πρόταση. *Το κέντρο $Z(G)$ τής G αποτελεί μια αβελιανή ορθόθετη υποομάδα τής G.*

Δυο στοιχεία a, b τής G λέγονται **συζυγή** όταν υπάρχει ένα $g \in G$, τέτοιο ώστε $gag^{-1} = b$. Η σχέση συζυγίας επί των στοιχείων τής G αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας. Η ισχύς τής κλάσης συζυγίας $C(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$ ενός $a \in G$ ισούται με τον δείκτη $[G : \{g \in G \mid gag^{-1} = a\}]$. (Η έννοια τής συζυγίας επεκτείνεται κατ' ανάλογο τρόπο και για υποομάδες· λέμε πως δυο υποομάδες H_1, H_2 τής G είναι **συζυγείς** όταν υπάρχει ένα $g \in G$, τέτοιο ώστε $gH_1g^{-1} = H_2$).

Για κάθε ορθόθετη ομάδα H μιας ομάδας G, το σύνολο

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

[3]Εδώ προτιμήθηκε η απόδοση τού *coset* ως *πλευρική κλάση* κατά τον αντίστοιχο γερμανικό όρο *Nebenklasse*. Λέξεις όπως *συσύνολο* ή *ομοσύνολο* είναι εν γένει αδόκιμες, ενώ η αντ' αυτών χρήση τής λέξης *σύμπλοκο* είναι προβληματική. Το «σύμπλοκο» ή «σύμπλεγμα» χρησιμοποιείται (ορθώς) για τη μετάφραση τής λέξης complex, αλλά βεβαίως αναφέρεται στη σύγχρονη εννοιολόγησή της στα πλαίσια τής ομολογικής άλγεβρας και τής αλγεβρικής τοπολογίας! Έτσι η εμμονή σε πεπαλαιωμένη ορολογία (βλ. παραδόσεις τού Dedekind στο χειμερινό εξάμηνο τού 1855/56 στο πανεπιστήμιο τού Göttingen) σαφώς βλάπτει. Ο ίδιος ο van der Waerden (ενδεχομένως και άθελά του) ήταν αυτός που έδωσε τέλος στη χαοτική πολυσημία των αρχών τού εικοστού αιώνα, διότι χρησιμοποίησε *και* τον όρο Nebenklasse, ο οποίος τελικώς και επεβλήθη έναντι όλων των άλλων που ήσαν τότε διαθέσιμοι (βλ. Algebra I, Springer, 1936, σελ. 25).

εφοδιάζεται με τη δομή τής ομάδας μέσω τής πράξης

$$(g_1H)\ (g_2H) = (g_1g_2)\ H, \text{ για όλα τα } g_1 \text{ και } g_2 \in G.$$

Η ομάδα G/H καλείται **ομάδα πηλίκων** (ή **παραγοντική ομάδα**) τής G σχετικώς προς την H. Ο **μεταθέτης** $[x, y]$ δυο στοιχείων x, y μιας ομάδας G είναι εξ ορισμού το στοιχείο

$$[x, y] = x\, y\, x^{-1}\, y^{-1}\,.$$

Η **μεταθέτρια υποομάδα** $G' = [G, G]$ τής G είναι η υποομάδα εκείνη, η οποία παράγεται από όλους τούς μεταθέτες. (Ας σημειωθεί ότι το γινόμενο δύο μεταθετών δεν είναι κατ' ανάγκην ένας μεταθέτης).

(1.5) Πρόταση. (a) *Η μεταθέτρια υποομάδα G' τής G είναι ορθόθετη.*

(b) *Η μεταθέτρια υποομάδα G' τής G είναι η ελάχιστη υποομάδα τής G για την οποία η G/G' είναι αβελιανή.*

Ας υποθέσουμε τώρα πως οι G και H είναι δυο ομάδες. Μια συνάρτηση $f : G \to H$ λέγεται **ομομορφισμός (ομάδων)** όταν

$$f(g_1\, g_2) = f(g_1)\, f(\,g_2), \text{ για όλα τα } g_1 \text{ και } g_2 \in G.$$

Ένας ομομορφισμός ομάδων $f : G \to H$ ονομάζεται ιδιαιτέρως **μονομορφισμός** (και αντιστοίχως, **επιμορφισμός**) όταν η f ως συνάρτηση είναι ενριπτική (και αντιστοίχως, επιρριπτική). Η σύνθεση δυο μονομορφισμών (και αντιστοίχως, δυο επιμορφισμών) είναι ένας μονομορφισμός (και αντιστοίχως, ένας επιμορφισμός). Ένας **ισομορφισμός (ομάδων)** $f : G \to H$ είναι ένας αμφιρριπτικός ομομορφισμός. (Σε αυτήν την περίπτωση λέμε πως οι G και H είναι μεταξύ τους ισόμορφες, πράγμα που ενίοτε σημειώνεται με το σύμβολο $G \cong H$. Η "$\cong$" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τής κλάσεως όλων των ομάδων). Ένας ομομορφισμός μιας ομάδας G στον εαυτό της καλείται **ενδομορφισμός** τής G. Ένας ισομορφισμός μιας ομάδας G επί τού εαυτού της καλείται **αυτομορφισμός** τής G. Το σύνολο $\mathrm{Aut}(G)$ όλων των αυτομορφισμών μιας ομάδας G αποτελεί μια ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

Παραδείγματα.

1. Ως πρώτα παραδείγματα ομάδων αναφέρουμε τις προσθετικές ομάδες $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ των ακεραίων, των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών, αντιστοίχως, καθώς και τις πολλαπλασιαστικές ομάδες $\mathbb{Q}\smallsetminus\{0\}, \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}, \mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}$ των μη μηδενικών ρητών, των μη μηδενικών πραγματικών, των θετικών ρητών και των θετικών πραγματικών αριθμών.

2. Η προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ των ακεραίων $(\mathrm{mod}\ n)$ έχει τάξη ίση με n.

3. Κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$, ενώ κάθε πεπερασμένη κυκλική ομάδα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n.

4. Κάθε ομάδα, η οποία έχει τάξη έναν πρώτο αριθμό, είναι κυκλική.

5. Η ομάδα D_n, $n \geq 2$, η οποία παράγεται από δύο στοιχεία x και y, όπου $x^n = y^2 = e$, $yx = x^{n-1}y$, καλείται **διεδρική ομάδα**[4], είναι καλώς ορισμένη ως προς ισομορφισμό, και έχει τάξη $2n$.

6. Από τη θεωρία πινάκων με στοιχεία από τους πραγματικούς αριθμούς μάς είναι γνωστός ο ακόλουθος «πύργος» πολλαπλασιαστικών (υπο)ομάδων

$$\begin{gathered}
\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \\
\cup \\
\mathrm{O}\,(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\} \\
\cup \\
\mathrm{SO}\,(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}\,(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\},
\end{gathered}$$

όπου με το $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πραγματικών $(n \times n)$-πινάκων, με $\det(A)$ την ορίζουσα ενός $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, με A^t τον ανάστροφο[5] πίνακα και με A^{-1} τον αντίστροφο πίνακα ενός $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Η $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ονομάζεται **(πραγματική) γενική γραμμική**, η $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ **ορθογώνια** και η $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ **ειδική ορθογώνια ομάδα**.

7. Αντιστοίχως, από τη θεωρία πινάκων με στοιχεία από τους μιγαδικούς αριθμούς μάς είναι γνωστός ο ακόλουθος «πύργος» πολλαπλασιαστικών (υπο)ομάδων

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\} & \supset \mathrm{SL}\,(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\} \\
\qquad\qquad \cup & \\
\mathrm{U}\,(n,\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{C}) \;\middle|\; \overline{A}^t = A^{-1}\right\} & \\
\qquad\qquad \cup & \\
\quad \mathrm{SU}\,(n,\mathbb{C}) = \mathrm{U}\,(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}\,(n,\mathbb{C}), &
\end{array}$$

όπου με το $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μιγαδικών $(n \times n)$-πινάκων, με $\det(A)$ την ορίζουσα ενός $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, με A^t τον ανάστροφο πίνακα, με $\overline{A}$ τον συζυγή και με A^{-1} τον αντίστροφο πίνακα ενός $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Η $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ονομάζεται **(μιγαδική) γενική γραμμική**, η $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ **ειδική γραμμική**, η $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ **μοναδιακή** και η $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ **ειδική μοναδιακή ομάδα**.

[4] Εδώ επιτρέπουμε στον n να ξεκινά από το 2, ταυτίζοντας την D_2 με τη λεγομένη **ομάδα των τεσσάρων στοιχείων τού Klein**.

[5] Ο **ανάστροφος** ενός δεδομένου πίνακα είναι αυτός που προκύπτει όταν καταστήσουμε τις γραμμές του στήλες (και τις στήλες του γραμμές).

8. Οι αμφιρριπτικές συναρτήσεις ενός οιουδήποτε συνόλου X επί τού εαυτού του λέγονται **μετατάξεις** *(ή, κατ' άλλους,* ***μεταθέσεις)*** **τού** X. Η συλλογή όλων των μετατάξεων τού X σχηματίζει μια ομάδα $\mathfrak{S}_X$ όταν κανείς χρησιμοποιεί ως πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Όταν το X είναι απειροπληθικό, τότε η $\mathfrak{S}_X$ είναι μια άπειρη ομάδα. Όταν $X = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, τότε η $\mathfrak{S}_X$ γράφεται ως $\mathfrak{S}_n$, λέγεται **συμμετρική ομάδα βαθμού** n (**ή συμμετρική ομάδα σε** n **σύμβολα**) κι έχει τάξη ίση με $n!$. (Η $\mathfrak{S}_n$ δεν είναι αβελιανή για $n \geq 3$). Μια μετάταξη $\vartheta : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, ως στοιχείο τής $\mathfrak{S}_n$, γράφεται συνήθως ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

όπου το $\alpha_i = \vartheta(i)$ είναι η εικόνα τού i μέσω τής ϑ. Αυτή η γραφή διευκολύνει τον υπολογισμό τού γινομένου δύο μετατάξεων. Έτσι π.χ. έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Μια $\vartheta \in \mathfrak{S}_n$ λέγεται **κύκλος μήκους** k ή k**-κύκλος** και γράφεται ως $(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_k)$ όταν υπάρχουν σαφώς διακεκριμένοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ από το $\{1, \ldots, n\}$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\begin{cases} \vartheta(\alpha_1) = \alpha_2, \vartheta(\alpha_2) = \alpha_3, \ldots, \vartheta(\alpha_{k-1}) = \alpha_k, \vartheta(\alpha_k) = \alpha_1 \\ \text{και } \vartheta(\beta) = \beta, \quad \forall \beta, \quad \beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}. \end{cases}$$

Ο συμβολισμός για το γινόμενο δυο κύκλων ακολουθεί τη συλλογιστική εκείνου που προαναφέραμε για τις μετατάξεις. Έτσι, π.χ., έχουμε $(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$, και

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 2)(3\ 6\ 5)(4\ 7).$$

Ένας 2-κύκλος καλείται ιδιαιτέρως **αντιμετάθεση**. Δυο κύκλοι $(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_k)$ και $(\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_l)$ είναι **ξένοι μεταξύ τους** όταν

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \cap \{\beta_1, \ldots, \beta_l\} = \varnothing.$$

Κάθε (μη ταυτοτική) μετάταξη από την $\mathfrak{S}_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ανά δύο ξένων μεταξύ τους κύκλων μήκους ≥ 2. Και μάλιστα μια τέτοια έκφραση είναι μονοσημάντως ορισμένη (ενδεχομένως ύστερα από κάποια αναδιάταξη των παραγόντων τού γινομένου). Επειδή κάθε κύκλος είναι δυνατόν να παρασταθεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων, κάθε μετάταξη από την $\mathfrak{S}_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων. Εάν $\vartheta \in \mathfrak{S}_n$, τότε το πλήθος των παραγόντων σε όλες τις δυνατές παραστάσεις τής

ϑ ως γινομένου αντιμεταθέσεων είναι ή πάντοτε ένας άρτιος ή πάντοτε ένας περιττός φυσικός αριθμός. Στην πρώτη περίπτωση η ϑ καλείται **άρτια μετάταξη** και στη δεύτερη **περιττή μετάταξη.** Η $\vartheta \in \mathfrak{S}_n$ είναι άρτια (κι αντιστοίχως, περιττή) εάν και μόνον εάν[6] $\mathrm{sign}(\vartheta) = +1$ (κι αντιστοίχως, $\mathrm{sign}(\vartheta) = -1$), όπου

$$\mathrm{sign}\,(\vartheta) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\vartheta\,(j) - \vartheta\,(i)}{j - i} \in \{+1, -1\}$$

είναι το **πρόσημο** (ή το «**σημείο**») τής ϑ. Τέλος, ας σημειωθεί ότι, εκτός τού συνόλου όλων των αντιμεταθέσεων, *και* καθένα των συνόλων

$$\{(1\,2)\,,(1\,3)\,,\ldots\,,(1\,n)\}\,,\ \{(1\,2)\,,(2\,3)\,,\ldots\,,(n-1\;n)\}\,,\ \{(1\,2)\,,(1\,2\,3\,...\,n)\}$$

αποτελεί ένα σύστημα γεννητόρων τής ομάδας μετατάξεων $\mathfrak{S}_n$, ενώ για κάθε $n, n \neq 6, n \geq 3$, έχουμε $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$.

9. Η **εναλλάσσουσα ομάδα** $\mathfrak{A}_n$ είναι η υποομάδα τής $\mathfrak{S}_n$ (τάξης $n!/2$) η αποτελούμενη από όλες τις άρτιες μετατάξεις τής $\mathfrak{S}_n$. Για $n \geq 3$, η $\mathfrak{A}_n$ παράγεται από όλους τούς κύκλους μήκους 3 και ισούται με τη μεταθέτρια υποομάδα $\mathfrak{S}'_n$ τής $\mathfrak{S}_n$. Εξάλλου, για $n \geq 5$, οι μόνες ορθόθετες υποομάδες τής $\mathfrak{A}_n$ είναι η τετριμμένη και η ίδια η $\mathfrak{A}_n$.

10. Κάθε άθροισμα τής μορφής $q = a + b\,i + c\,j + d\,k$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, όπου

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i\,j = -j\,i = k,$$

καλείται **τετράνιο**[7]. Το σύνολο $\mathbb{H}$ όλων των τετρανίων εφοδιάζεται με τη δομή μιας (προσθετικής) ομάδας μέσω τής πράξης

$$q + q' = (a + a') + (b + b')\ i + (c + c')\ j + (d + d')\ k,$$

για δύο οποιαδήποτε $q = a + b\,i + c\,j + d\,k$, $q' = a' + b'\,i + c'\,j + d'\,k$, και με τη βοήθεια

[6]Εάν η μετάταξη $\vartheta \in \mathfrak{S}_n$ γράφεται ως γινόμενο k αντιμεταθέσεων $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, τότε έχουμε $\mathrm{sign}(\vartheta) = \mathrm{sign}(\tau_1)\,\mathrm{sign}(\tau_2) \cdots \mathrm{sign}(\tau_k) = (-1)^k$, αφού κάθε αντιμετάθεση έχει $\mathrm{sign} = -1$.

[7]Αποδίδουμε τον όρο *quaternion* ως *τετράνιο* (κατ' αναλογίαν προς την απόδοση τού *octane* ως *οκτάνιο*), και όχι ως *τετράδα*, αφού κάτι τέτοιο μάλλον θα οδηγούσε σε σύγχυση. Αλλά και ο κατά καιρούς προταθείς όρος *τετρακτύς* δεν φαίνεται να είναι ο πλέον κατάλληλος, καθότι η *τετρακτύς* κατά τους Πυθαγορείους ήταν, ως γνωστόν, ο αριθμός 10 (γραφόμενος ως άθροισμα $1 + 2 + 3 + 4$), και εθεωρείτο ως «η πηγή πάσης δημιουργίας».

τής ακόλουθης πολλαπλασιαστικής λίστας για τα i, j, k :

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Η αντιστοιχία $a + b\,i + c\,j + d\,k \longleftrightarrow (a, b, c, d)$ δίνει έναν ισομορφισμό προσθετικών ομάδων από την $\mathbb{H}$ επί τής $\mathbb{R}^4$. Επί τού συνόλου $\mathbb{H}$ ορίζεται η στάθμη

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad \text{για κάθε} \quad q = a + b\,i + c\,j + d\,k \in \mathbb{H}.$$

Εξάλλου το $\mathbb{H}\smallsetminus\{\mathbf{0}\}$ γίνεται μια πολλαπλασιαστική ομάδα ως εξής:

$$\begin{aligned} q \cdot q' &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')\; i + \\ &\quad + (ac' - bd' + ca' + db')\; j + (ad' + bc' - cb' + da')\; k\;. \end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι το αντίστροφο ενός στοιχείου $q = a + b\,i + c\,j + d\,k \in \mathbb{H}\smallsetminus\{\mathbf{0}\}$ είναι το

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|}, \quad \text{όπου} \quad \overline{q} = a - b\,i - c\,j - d\,k.$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως το σύνολο $\{q \in \mathbb{H} \;:\; \|q\| = 1\}$ σχηματίζει μια υποομάδα τής $\mathbb{H}\smallsetminus\{\mathbf{0}\}$. Αυτή η υποομάδα συμβολίζεται συχνά και ως $\mathbb{S}^3$ επειδή αντιστοιχεί στη μοναδιαία σφαίρα όταν ταυτίζουμε το $\mathbb{H}$ με το $\mathbb{R}^4$.

11. Έστω ότι οι H και J είναι δυο ομάδες. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $H \times J$. Επί τού $H \times J$ ορίζεται μια πράξη ως εξής

$$(x, y)\,(x', y') = (x\,x',\; y\,y')\,.$$

Το σύνολο $G = H \times J$ με αυτήν την πράξη είναι προφανώς μια ομάδα, η οποία καλείται **ευθύ γινόμενο**[8] των H και J. Αναλόγως ορίζεται και το ευθύ γινόμενο των μελών μιας πεπερασμένης οικογένειας ομάδων (αν και η όλη κατασκευή γενικεύεται πολύ εύκολα ακόμη και για τυχούσες οικογένειες ομάδων.)

12. Ας υποθέσουμε ότι οι H και J είναι δυο ομάδες και η $\varphi : J \to \mathrm{Aut}(H)$ ένας ομομορφισμός. Το **ημιευθύ γινόμενο** $H \times_{\varphi} J$ των H και J, το προσδιοριζόμενο μέσω

[8] Ορισμένες φορές, όταν χρησιμοποιείται ο προσθετικός συμβολισμός για τις H και J, μπορούμε να γράφουμε και $H \oplus J$ στη θέση τού $H \times J$ (αποκαλώντας το **ευθύ άθροισμα** των H και J).

τού φ, αποτελείται από το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y), όπου $x \in H, y \in J$, το οποίο εφοδιάζεται με τη δομή τής ομάδας μέσω τής πράξης

$$(x, y)(x', y') = (x\,\varphi(y)(x'),\, y\,y')\ .$$

Ειδικότερα, εάν οι H, J είναι υποομάδες μιας ομάδας G, η H ορθόθετη με $HJ = G$, και $H \cap J = \{e\}$, τότε η G είναι ισόμορφη με το ημιευθύ γινόμενο $H \times_{\varphi} J$, όπου ο ομομορφισμός $\varphi : J \to \mathrm{Aut}(H)$ είναι αυτός που ορίζεται διά μέσου τού τύπου

$$\varphi(y)(x) = yxy^{-1},\ \ \forall x,\ \ x \in H, \ \ \text{και}\ \forall y,\ \ y \in J.$$

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα δίνοντας τις διατυπώσεις κάποιων βασικών θεωρημάτων που αναφέρονται στην ύπαρξη χαρακτηριστικών ισομορφισμών ομάδων.

(1.6) Θεώρημα. (Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών) *Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες και ότι η $f : G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός. Τότε ο* πυρήνας

$$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = \ \text{ουδέτερο στοιχείο τής}\ H\}$$

τού ομομορφισμού f είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G και ισχύει

$$G\,/\,\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)\,.$$

(1.7) Παράδειγμα. Έστω ότι η G είναι μια ομάδα, $Z(G)$ το κέντρο της και $\mathrm{Aut}(G)$ η ομάδα των αυτομορφισμών της. Το υποσύνολο $\mathrm{Inn}(G)$ τής $\mathrm{Aut}(G)$ το αποτελούμενο από όλους τούς αυτομορφισμούς τής μορφής

$$\phi_h : G \longrightarrow G,\ \ \ \phi_h(g) = h^{-1}gh,\ \ \forall g,\ g \in G,$$

όπου $h \in G$, είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathrm{Aut}(G)$. Τα στοιχεία τού $\mathrm{Inn}(G)$ ονομάζονται **εσωτερικοί αυτομορφισμοί τής** G. Η συνάρτηση

$$f : G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G),\ \ \ \ f(h) = \phi_h,\ \ \forall h,\ h \in G,$$

είναι ένας επιμορφισμός ομάδων με πυρήνα του τον $\mathrm{Ker}(f) = Z(G)$. Επομένως $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

(1.8) Θεώρημα. (Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών) *Έστω ότι οι H και J είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας G με την J ορθόθετη εντός τής G. Τότε η HJ είναι μια υποομάδα τής G, η $H \cap J$ μια ορθόθετη υποομάδα τής H, και ισχύει*

$$HJ\,/\,J \cong H\,/\,H \cap J\,.$$

(1.9) Θεώρημα. (Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών) *Έστω ότι οι H και J είναι δυο ορθόθετες υποομάδες μιας ομάδας G και ότι η H περιέχεται στην J. Τότε η J/H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G/H και ισχύει*

$$(G/H)\ /\ (J/H) \cong G/J\,.$$

2 Δράσεις ομάδων επί συνόλων

(2.1) Ορισμός. Έστω G μια ομάδα και X ένα μη κενό σύνολο. Μια (εξ αριστερών) **δράση** τής G επί τού X καθορίζεται από μια απεικόνιση

$$G \times X \longrightarrow X,\ \ (g,x) \longmapsto gx$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $(gh)x = g(hx),\ \ \forall g,h \in G,\ \forall x \in X,$

(β) $ex = x,\ \forall x \in X,$ (όπου e το ουδέτερο στοιχείο τής G).

(Σε αυτήν την περίπτωση λέμε πως το X είναι ένα G**-σύνολο** ως προς την προκειμένη απεικόνιση.)

(2.2) Παρατήρηση. Κάθε στοιχείο $g \in G$ δίνει το έναυσμα για τον ορισμό μιας απεικόνισης

$$\Phi_g : X \longrightarrow X,\ \ \ x \longmapsto \Phi_g(x) = gx$$

(ενός **μετασχηματισμού** τού X). Προφανώς η Φ_g αποτελεί μια αμφίρριψη, ήτοι έχουμε $\Phi_g \in \mathfrak{S}_X$, διότι

$$\Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g = \mathrm{Id}_X = \Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}},\ \ \ ((\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}).$$

Επίσης, $\Phi_e = \mathrm{Id}_X$, $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h, \forall g,h \in G$. Επομένως ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων

$$\Phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X,\ \ \ g \longmapsto \Phi_g.$$

Κι αντιστρόφως· εάν ο $\phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, τότε ορίζεται μια «φυσική» δράση τής G επί τού X:

$$G \times X \longrightarrow X,\ \ (g,x) \longmapsto gx := \phi\,(g)\,(x)\,.$$

(2.3) Ορισμός. Έστω $G \times X \longrightarrow X$ μια δράση τής G επί τού X και έστω $\Phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X$ ο μέσω αυτής επαγόμενος ομομορφισμός. Η υποομάδα

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi) = \{g \in G \mid \Phi_g = \mathrm{Id}_X\} = \{g \in G \mid gx = x,\ \forall x \in X\}$$

ονομάζεται **πυρήνας** τής εν λόγω δράσης. (Τα στοιχεία τής Ker(Φ) δρουν κατά τρόπο «τετριμμένο» επί τού X). Η δράση λέγεται **αποτελεσματική** όταν Ker(Φ) $= \{e\}$. Σε αυτήν την περίπτωση η εικόνα

$$\Phi\,(G) = \{\Phi_g \mid g \in G\} \subseteq \mathfrak{S}_X$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathfrak{S}_X$, η οποία είναι ισόμορφη με την G. (Αυτού τού είδους οι υποομάδες τής $\mathfrak{S}_X$ ονομάζονται **ομάδες μετασχηματισμών** επί τού X.)

(2.4) Παρατήρηση. Έστω G μια ομάδα και έστω H μια υποομάδα της. Τότε η H δρα επί τής G μέσω τού (εξ αριστερών) πολλαπλασιασμού

$$H \times G \longrightarrow G, \ \ (h,g) \longmapsto hg.$$

Αυτή η δράση είναι αποτελεσματική (διότι $hg = g \Rightarrow g = e$), ενώ ο

$$\lambda : H \longrightarrow \mathfrak{S}_G, \ \ h \longmapsto \lambda_h, \ \ \lambda_h(g) = hg,$$

είναι ο επαγόμενος μονομορφισμός ομάδων. Ιδιαιτέρως, βάσει τού θεωρήματος (1.6), ισχύει

$$H \xrightarrow{\cong} \lambda(H) = \text{μια υποομάδα τής } \mathfrak{S}_G.$$

(Επομένως, και *κάθε ομάδα είναι ισόμορφη με μια κατάλληλη ομάδα μετασχηματισμών*.)

(2.5) Ορισμός. Μια σημαντική κλάση δράσεων μάς παρέχουν οι λεγόμενες *γραμμικές αναπαραστάσεις* ομάδων. Ας υποθέσουμε ότι το K είναι ένα σώμα, ο V ένας K-διανυσματικός χώρος και η G μια ομάδα. Μια δράση

$$G \times V \longrightarrow V, \ \ (g,v) \longmapsto gv$$

τής G επί τού V καλείται **γραμμική αναπαράσταση τής** G όταν η εικόνα $\Phi(G) \subseteq \mathfrak{S}_X$ τής G μέσω τής Φ εμπεριέχεται στη γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(V,K)$, δηλαδή όταν για όλα τα στοιχεία $g \in G$ οι αμφιρρίψεις $\Phi_g : V \longrightarrow V$ είναι K-γραμμικές (K-ισομορφισμοί τού διανυσματικού χώρου V). Όταν $\dim_K(V) = n$, τότε ομιλούμε για μια n**-διάστατη** K**-γραμμική αναπαράσταση τής** G.

(2.6) Ορισμός. Έστω G μια ομάδα και X ένα G-σύνολο. Επί τού X ορίζεται η εξής σχέση ισοδυναμίας: Για $(x,y) \in X^2$,

$$x \sim_G y \Longleftrightarrow (\exists g)\,(g \in G : y = gx)\,.$$

Οι $\sim_G$-κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται G-**τροχιές** (εντός τού X). Ιδιαιτέρως, για κάθε στοιχείο $x \in X$, το

$$[x]_{\sim_G} := Gx := \{gx \mid g \in G\}$$

είναι η G-**τροχιά η διερχόμενη από το** x, ενώ το σύνολο

$$X\,/\,G := X\,/\sim_G = \{Gx \mid x \in X\}$$

είναι ο **τροχιακός χώρος** τού X ως προς τη δρώσα ομάδα G.

(2.7) Ορισμός. Έστω G μια ομάδα και X ένα G-σύνολο.

(α) Έστω $x \in X$. Η υποομάδα

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

τής G καλείται **ομάδα ισοτροπίας** (ή **σταθεροποιητής**) τού x.

(β) Λέμε πως το X είναι ένα **ελεύθερο** G**-σύνολο** (ή ότι η ομάδα G **δρα ελευθέρως επί τού** X) όταν για *κάθε* $x \in X$ έχουμε

$$(gx = x \Longrightarrow x = e) \quad (\Longleftrightarrow G_x = \{e\}) \, .$$

(γ) Ένα $x \in X$ καλείται **σταθερό σημείο** (τής δράσης τής G επί τού X) όταν

$$Gx = \{x\}$$

(ή, ισοδυνάμως, όταν $G_x = G$). Το σύνολο όλων των σταθερών σημείων τού X συμβολίζεται ως $\mathbf{Fix}_G(X)$. Σημειωτέον ότι

$$\mathbf{Fix}_G(X) = \bigcup_{g \in G} \mathbf{Fix}_g(X),$$

όπου

$$\mathbf{Fix}_g(X) := \{x \in X \mid gx = x\}.$$

(δ) Μια δράση $G \times X \longrightarrow X$ καλείται **μεταβατική** (και το X **ομογενές** G**-σύνολο**) όταν

$$(\exists x) \, (x \in X : Gx = X)$$

(Τότε βέβαιως έχουμε και $Gy = X$ για *όλα* τα $y \in X$.)

(2.8) Λήμμα. *Έστω X ένα πεπερασμένο G-σύνολο. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(α) *Εάν το* $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ *είναι ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων τής σχέσης ισοδυναμίας* $\sim_G$ *επί τού* $X \smallsetminus \mathbf{Fix}_G(X)$*, τότε*

$$|X| = |\mathbf{Fix}_G(X)| + \sum_{i=1}^{k} |Gx_i| \, .$$

(β) *Εάν το X είναι ένα ελεύθερο G-σύνολο, τότε η δρώσα ομάδα G είναι πεπερασμένη και*

$$|X| = |X \, / \, G| \cdot |G| \ .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Η $X = \mathbf{Fix}_G(X) \coprod \left(\coprod_{i=1}^{k} Gx_i\right)$ αποτελεί μια αποσυνδετή αποσύνθεση τού X, επειδή η $\sim_G$ πρόκειται για μια σχέση ισοδυναμίας.

(β) Εάν η G δρα ελευθέρως επί τού X και δεν είναι η τετριμμένη ομάδα, τότε έχουμε προφανώς $\mathbf{Fix}_G(X) = \varnothing$ και η απεικόνιση

$$\psi_x : G \longrightarrow Gx, \quad g \longmapsto gx$$

είναι αμφιρριπτική, διότι

$$gx = hx \Longrightarrow \left(h^{-1}g\right) x = x \Longrightarrow h^{-1}g = e \Longrightarrow g = h.$$

Επομένως, $|G| = |Gx|$, για όλα τα $x \in X$, και

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} |Gx_i| = k \ |G|,$$

όπου $k = |X \,/\, G|$ είναι το πλήθος των G-τροχιών εντός τού X. □

(2.9) Παράδειγμα. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια υποομάδα της. Η δράση

$$H \times G \longrightarrow G, \ (h, g) \longmapsto hg$$

(πρβλ. (2.4)) είναι ελεύθερη και οι H-τροχιές είναι ακριβώς οι (δεξιές) πλευρικές κλάσεις

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

τής H εντός τής G. (Εφαρμόζοντας το λήμμα (2.8) για το H-σύνολο G, παίρνουμε την κλασική πρόταση (1.3) τού Lagrange.)

(2.10) Παράδειγμα. Έστω ότι η G είναι μια ομάδα, $Z(G)$ το κέντρο της και $\mathrm{Aut}(G)$ η ομάδα των αυτομορφισμών της. Στο (1.7) ορίσαμε την (ορθόθετη) υποομάδα $\mathrm{Inn}(G)$ τής $\mathrm{Aut}(G)$ την αποτελούμενη από όλους τούς εσωτερικούς αυτομορφισμούς, ήτοι τους αυτομορφισμούς

$$\phi_h : G \longrightarrow G, \quad \phi_h(g) = h^{-1}gh, \ \forall g, \ g \in G,$$

όπου $h \in G$. Οι G-τροχιές τής αντίστοιχης δράσης (ήτοι τού σχηματισμού συζυγών):

$$G \times G \longrightarrow G, \ (h, g) \longmapsto \phi_h(g) = h^{-1}gh$$

είναι ακριβώς οι κλάσεις συζυγίας τής G. Επίσης, η ομάδα ισοτροπίας ενός οιουδήποτε $g \in G$ ταυτίζεται με τον **κεντροποιητή** $Z\left(g\right) = \{h \in G \mid hg = gh\}$ τού g.

(2.11) Παράδειγμα. Εάν το X είναι ένα ομογενές G-σύνολο και $x_0 \in X$, τότε η

$$\psi : G \longrightarrow X, \quad g \longmapsto \psi(g) := gx_0$$

είναι επιρριπτική και $\psi(g_1) = \psi(g_2) \iff g_1 H = g_2 H$. Επομένως υπάρχει μια φυσική αμφίρριψη

$$G \,/\, G_{x_0} \longrightarrow X = Gx_0 \,.$$

Για παράδειγμα, εάν $X = \mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ είναι η μοναδιαία δισδιάστατη σφαίρα και $G = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, τότε η G δρα επί τής $\mathbb{S}^2$ διότι

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|\,, \quad \forall A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Η δράση αυτή είναι μεταβατική. Πράγματι· εάν θεωρήσουμε ένα $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$, τότε υπάρχει ένας πίνακας $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ τής μορφής $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, με $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{S}^2$, οπότε για το σημείο $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ έχουμε $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$, $G\mathbf{x}_0 = \mathbb{S}^2$ και

$$G_{\mathbf{x}_0} = \{A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \mid A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \,\middle|\, A' \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \right\},$$

που σημαίνει ότι $\mathbb{S}^2 \cong \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \,/ \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ ως «ομογενής $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$-χώρος».

(2.12) Λήμμα. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα.*

(α) *Για όλα τα $g \in G$ έχουμε*

$$|G| = |C\,(g)| \cdot |Z\,(g)|\,,$$

όπου $C\,(g)$ η κλάση συζυγίας και $Z\,(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$ ο κεντροποιητής τής G.

(β) *Επίσης ισχύει η ισότητα*

$$|X| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |C\,(g_i)|\,,$$

όπου οι $C\,(g_1)\,, \ldots\,, C\,(g_k)$ είναι οι σαφώς διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας, οι οποίες βρίσκονται εντός τού συνόλου $G \smallsetminus Z(G)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Το $C\,(g)$ πρόκειται για ένα ομογενές G-σύνολο, οπότε κατά το (2.11) έχουμε $G/Z(g) \cong C(g)$. Αρκεί λοιπόν η εφαρμογή τής πρότασης (1.3) τού Lagrange. Το (β) είναι προφανές βάσει τού λήμματος (2.8) (α). □

(2.13) Λήμμα. (α) *Για κάθε δράση $G \times X \to X$ μιας ομάδας G επί ενός συνόλου X και για κάθε $g \in G$ και $h \in G$ ισχύει η ισότητα*

$$h\,(\mathbf{Fix}_g\,(X)) = \mathbf{Fix}_{hgh^{-1}}\,(X)\,.$$

(β) *Επίσης, για κάθε $x \in X$ και $g \in G$ ισχύει*

$$G_{gx} = gG_xg^{-1},$$

ήτοι οι ομάδες ισοτροπίας G_{gx} των σημείων τής τροχιάς Gx είναι μεταξύ τους συζυγείς.

Αποδειξη. (α) Εάν $gx = x$, τότε

$$\left(hgh^{-1}\right)(hx) = hgx = h\,(gx) = hx \Longrightarrow hx \in \mathbf{Fix}_{hgh^{-1}}(X)\,,$$

που σημαίνει ότι $h\,(\mathbf{Fix}_g(X)) \subseteq \mathbf{Fix}_{hgh^{-1}}(X)$. Και αντιστόφως· εάν $hgh^{-1}x = x$, τότε

$$gh^{-1}x = h^{-1}x \Longrightarrow h^{-1}x \in \mathbf{Fix}_g(X) \Longrightarrow x = h\left(h^{-1}x\right) \in h\,(\mathbf{Fix}_g(X))\,,$$

οπότε παίρνουμε και την αντίστροφη εγκλειστική σχέση $\mathbf{Fix}_{hgh^{-1}}(X) \subseteq h\,(\mathbf{Fix}_g(X))$.
(β) Επειδή

$$h \in G_{gx} \Longleftrightarrow hgx = gx \Longleftrightarrow g^{-1}hgx = x \Longleftrightarrow g^{-1}hg \in G_x \Longleftrightarrow h \in gG_xg^{-1},$$

ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

(2.14) Πρόταση. (Τύπος καταμέτρησης των τροχιών) *Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, το X ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο, και η $G \times X \to X$ μια δράση τής G επί τού X. Τότε έχουμε*

$$|X\,/\,G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathbf{Fix}_g(X)|\,, \tag{1}$$

ήτοι το πλήθος των G-τροχιών ισούται με τον αριθμητικό μέσο των πληθικών αριθμών των συνόλων των σταθερών σημείων $\mathbf{Fix}_g(X)$, $g \in G$.

Αποδειξη. Έστω $M := \{(x,g) \in X \times G \ \ | \ gx = x\}$. Εάν υποθέσουμε ότι οι

$$p_1 : M \longrightarrow X,\ (x,g) \longmapsto x, \quad p_2 : M \longrightarrow G,\ (x,g) \longmapsto g$$

είναι οι φυσικές απεικονίσεις των προβολών του, τότε έχουμε

$$p_1^{-1}(x) = G_x, \quad p_2^{-1}(g) = \mathbf{Fix}_g(X)\,,$$

οπότε

$$\sum_{x\in X}|G_x| = |M| = \sum_{g\in G}|\mathbf{Fix}_g(X)|\,. \tag{2}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $x_1, \ldots, x_k \in X$, τέτοια ώστε $X = \coprod_{i=1}^k Gx_i$, με $k = |X\,/\,G|$. Από το (β) τού λήμματος (2.13) έπεται ότι

$$\sum_{x\in X}|G_x| = \sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in Gx_i}|G_x| = \sum_{i=1}^{k}|Gx_i|\cdot|G_{x_i}| = k\ |G|\,, \tag{3}$$

διότι $G/G_{x_i} \cong Gx_i$, οπότε $|Gx_i|\cdot|G_{x_i}| = \ |G|$. Ο τύπος (1) έπεται άμεσα από τους (2) και (3). □

3 Υπενθυμίσεις ορισμένων γεωμετρικών ιδιοτήτων τής ομάδας $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$

(3.1) Παρατήρηση. Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό, ότι για αυθαίρετο $n \geq 2$, κάθε (μη μοναδιαίος) πίνακας από την $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ γράφεται ως γινόμενο (το πολύ n) κατοπτρισμών. Ένας **κατοπτρισμός** προσδιορίζεται μέσω ενός πίνακα τής μορφής $S_{\mathbf{a}},\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, όπου

$$S_{\mathbf{a}} := \mathrm{Id} - 2\,\frac{\mathbf{a}\,\mathbf{a}^t}{\langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle}.$$

Η επαγομένη γραμμική απεικόνιση

$$\mathbf{x} \longmapsto S_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\,\frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle}\,\mathbf{a}$$

πληροί τη σχέση

$$S_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}\mathbf{a},$$

ενώ ο $S_{\mathbf{a}}$ μπορεί να ιδωθεί ως ο κατοπτρισμός *σχετικώς προς το υπερεπίπεδο*

$$H_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a},\mathbf{x}\rangle = 0\},$$

το οποίο είναι κάθετο προς το (διάνυσμα) $\mathbf{a}$, διότι $S_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in H_{\mathbf{a}}$. Εάν τα $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το γινόμενο $S_{\mathbf{a}}S_{\mathbf{b}}$ των κατοπτρισμών $S_{\mathbf{a}}$ και $S_{\mathbf{b}}$ εκφράζει μια **(περι)στροφή** εντός τού $\mathbb{R}\mathbf{a} \oplus \mathbb{R}\mathbf{b}$ κατά γωνία ω, όπου

$$\cos(\omega) = 2\left(\frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,(S_{\mathbf{a}}S_{\mathbf{b}}) - n + 2\right),$$

η οποία, εφαρμοζόμενη στον $\mathbb{R}^n$, αφήνει τον γραμμικό υπόχωρο $H_{\mathbf{a}} \cap H_{\mathbf{b}} = (\mathbb{R}\mathbf{a} \oplus \mathbb{R}\mathbf{b})^{\perp}$ σταθερό.

(3.2) Παρατήρηση. Το $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ γράφεται ως αποσυνδετή ένωση[9]:

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}^+(n,\mathbb{R}) \cup \mathrm{O}^-(n,\mathbb{R}),$$

όπου $\mathrm{O}^+(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}),\ \mathrm{O}^-(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = -1\}$.

(3.3) Παρατήρηση. Η *ομάδα ισομετριών* τής σφαίρας $\mathbb{S}^n$ (εντός τού $\mathbb{R}^{n+1}$) είναι ισόμορφη με την $\mathrm{O}(n+1,\mathbb{R})$.

[9] Για κάθε $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, $AA^t = \mathrm{Id} \Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) \in \{\pm 1\}$.

4 Ταξινόμηση των πεπερασμένων υποομάδων των ομάδων $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$, $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$

Για $n = 2$ έχουμε

$$\mathrm{O}^{+}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{array} \right) \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{η μεταθετική υποομάδα} \\ \text{τής } \mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \\ \text{η αποτελούμενη από} \\ \text{στροφές (περί το } \mathbf{0}\text{)} \\ \text{κατά γωνίες } \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

και[10]

$$\mathrm{O}^{-}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{array} \right) \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{η υποομάδα τής } \mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \\ \text{η αποτελούμενη} \\ \text{από κατοπτρισμούς} \end{array} \right\}$$

(4.1) Λήμμα. *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής* $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ *είναι κυκλική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω G μια πεπερασμένη μη τετριμμένη υποομάδα τής $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$. Κατ' αρχάς εισάγουμε τη συντομογραφία

$$A_\theta = \left(\begin{array}{cc} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array} \right)$$

για τον πίνακα, ο οποίος εκφράζει τη στροφή κατά γωνία θ περί την απαρχή των αξόνων (με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού) και $0 \leq \theta < 2\pi$. Θεωρούμε τον πίνακα $A_\phi \in G$ με την ϕ να είναι θετική και να αποτελεί την *ελάχιστη* γωνία με αυτήν την ιδιότητα. Τότε για κάθε $A_\theta \in G$ μπορούμε να διαιρέσουμε την θ με την ϕ και να τη γράψουμε ως

$$\theta = k\phi + \psi, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}, \ 0 \leq \psi < \phi,$$

οπότε

$$A_\theta = A_{k\phi+\psi} = (A_\phi)^k A_\psi \Longrightarrow A_\psi = (A_\phi)^{-k} A_\theta \in G,$$

[10]Επειδή

$$\left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

οι γενικοί αυτοί κατοπτρισμοί συντίθενται από μια περιστροφή και από τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των x_1 (των τετμημένων).

πράγμα που σημαίνει ότι $\psi = 0$, διότι αλλιώς θα οδηγούμασταν σε άτοπο λόγω τής επιλογής τής ϕ. Επομένως η G παράγεται από τον πίνακα A_θ και είναι κυκλική. $\square$

(4.2) Πρόταση. *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής* $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ *είναι ή κυκλική ή διεδρική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βάσει τού προηγουμένου λήμματος μπορούμε να περιοριστούμε στη μελέτη πεπερασμένων μη τετριμμένων υποομάδων τής $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, οι οποίες δεν ανήκουν αποκλειστικώς στην $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$. Έστω G μια τέτοια ομάδα και $H = G \cap \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$. Η H είναι μια υποομάδα τής G με δείκτη $[G : H] = 2$ και είναι κυκλική (βάσει τού (4.1)). Έστω A ένας γεννήτορας τής H και B ένα στοιχείο τής διαφοράς $G \smallsetminus H$. Επειδή ο $B \in \mathrm{O}^-(2,\mathbb{R})$ εκφράζει έναν κατοπτρισμό, έχουμε $B^2 = \mathrm{Id}$. Εάν λοιπόν $A = \mathrm{Id}$, τότε η $G = \{\mathrm{Id}, B\}$ είναι κυκλική τάξης 2. Εάν $A \neq \mathrm{Id}$ και έχει τάξη $n \geq 2$, τότε

$$G = \{\mathrm{Id}, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, B, AB, \ldots, A^{n-1}B\},$$

όπου $A^n = Id, B^2 = Id, BA = A^{-1}B$. Επομένως η G είναι ισόμορφη με τη διεδρική ομάδα D_n. $\square$

5 Ταξινόμηση των πεπερασμένων υποομάδων των ομάδων SO$(3,\mathbb{R})$, O$(3,\mathbb{R})$

Για $n = 3$ έχουμε[11]

$$\mathrm{O}^+(3,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}) \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \mid \ \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1,\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 0\}$$

και

$$\mathrm{O}^-(3,\mathbb{R}) = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \mid \ \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1,\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 0\}.$$

(5.1) Ορισμός. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τους πίνακες

[11] Ένας $n \times n$ πίνακας είναι ορθογώνιος εάν και μόνον εάν τα διανύσματα των στηλών του αποτελούν μια ορθότακτη (ή, κατ' άλλους, «ορθοκανονική») βάση. Ιδιαιτέρως, για $n = 3$, εάν τα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^t$ συγκροτούν μια ορθότακτη βάση, τότε $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ή $\mathbf{c} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, όπου

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

είναι το σύνηθες **εξωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

$$T_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$T_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$T_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η απεικόνιση $x \longmapsto T_i(\theta)\, x$ εκφράζει μια **στροφή** περί τον i-οστό άξονα συντεταγμένων κατά γωνία θ.

(5.2) Πρόταση. (Euler) *Όλοι οι πίνακες τής* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *γράφονται υπό την μορφή*

$$T_1(\alpha)\cdot T_2(\beta)\cdot T_2(\gamma)\,,\ \textit{για κάποια}\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

(5.3) Παρατήρηση. Η ταξινόμηση των πεπερασμένων υποομάδων τής $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ πρωτοεμφανίζεται στη βιβλιογραφία με το σύγγραμμα τού Felix Klein "Vorlesungen über das Ikosaeder" (1884), αν και στην αρθρογραφία ήταν ήδη γνωστή από τις εργασίες των M. L. Frankenheim (1826), J. F. Hessel (1830) και A. Bravais (1849), οι οποίοι είχαν ασχοληθεί με τη συστηματική μελέτη των κλάσεων ορισμένων κρυστάλλων (ήτοι με τις κρυσταλλογραφικές σημειακές ομάδες).

(5.4) Θεώρημα. (Ταξινόμηση πεπερασμένων υποομάδων τής SO$(3,\mathbb{R})$) *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής ομάδας* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *οφείλει να είναι ή κυκλική ή διεδρική ή ισόμορφη με μία εκ των περιστροφικών ομάδων των Πλατωνικών Στερεών (κανονικού τετραέδρου, οκταέδρου ή εικοσαέδρου*[12]*). Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει τους συνήθεις συμβολισμούς των εν λόγω ομάδων, τις τάξεις τους, καθώς και τα στοιχεία ενός συστήματος γεννητόρων τους.*

[12] Ο κανονικός κύβος , όντας δυϊκός τού οκταέδρου, διαθέτει ομάδα περιστροφών ισόμορφη με εκείνην τού οκταέδρου. Το ίδιο συμβαίνει και με το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο.

Α/Α	**Ομάδες** G	$\lvert G\rvert$	Στοιχεία ενός συστήματος γεννητόρων των ομάδων G
1.	Κυκλικές ομάδες C_m	m	$\mathsf{a}_{(\mathsf{C}_m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \end{pmatrix}$
2.	Διεδρικές ομάδες $\mathsf{D}_{n-2},\ n \geq 4$	$2\,(n-2)$	$\mathsf{a}_{(\mathsf{D}_{n-2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathsf{b}_{(\mathsf{D}_{n-2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n-2}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n-2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{n-2}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n-2}\right) \end{pmatrix}$
3.	Περιστροφική ομάδα τού τετραέδρου $\mathsf{T} \cong \mathfrak{A}_4$	12	$\mathsf{a}_{(\mathsf{T})}$, $\mathsf{b}_{(\mathsf{T})}$
4.	Περιστροφική ομάδα τού οκταέδρου $\mathsf{O} \cong \mathfrak{S}_4$	24	$\mathsf{a}_{(\mathsf{O})}$, $\mathsf{b}_{(\mathsf{O})}$
5.	Περιστροφική ομάδα τού εικοσαέδρου $\mathsf{I} \cong \mathfrak{A}_5$	60	$\mathsf{a}_{(\mathsf{I})}$, $\mathsf{b}_{(\mathsf{I})}$

Εδώ με $\mathsf{a}_{(\mathsf{T})}$, (κι αντιστοίχως, με $\mathsf{a}_{(\mathsf{O})}$ και $\mathsf{a}_{(\mathsf{I})}$) συμβολίζουμε τον πίνακα, ο οποίος περιγράφει την κατά $\frac{2\pi}{3}$ στροφή γύρω από τον άξονα τον διερχόμενο από το κέντρο μιας (οιασδήποτε) έδρας τού (κανονικού) τετραέδρου (κι αντιστοίχως, τού οκταέδρου & τού εικοσαέδρου, τού εγγεγραμμένου στη μοναδιαία σφαίρα) και με $\mathsf{b}_{(\mathsf{T})}$, (κι αντιστοίχως, με $\mathsf{b}_{(\mathsf{O})}$ & $\mathsf{b}_{(\mathsf{I})}$) τον πίνακα, ο οποίος περιγράφει την στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ (και αντιστοίχως, κατά $\frac{2\pi}{4}$ & $\frac{2\pi}{5}$) γύρω από μια κορυφή τής ιδίας έδρας.

Α/Α	**Ομάδες** G	Σχέσεις μεταξύ των ως άνω γεννητόρων των ομάδων G
1.	Κυκλικές ομάδες C_m	$\left(\mathsf{a}_{(\mathsf{C}_m)}\right)^m = \mathrm{Id}$
2.	Διεδρικές ομάδες D_{n-2}, $n \geq 4$	$\mathsf{a}^2_{(\mathsf{D}_{n-2})} = \mathsf{b}^{n-2}_{(\mathsf{D}_{n-2})} = \mathrm{Id}$ $\mathsf{a}_{(\mathsf{D}_{n-2})}\mathsf{b}_{(\mathsf{D}_{n-2})} = \mathsf{b}^{-1}_{(\mathsf{D}_{n-2})}\mathsf{a}_{(\mathsf{D}_{n-2})}$
3.	Περιστροφική ομάδα τού τετραέδρου $\mathsf{T} \cong \mathfrak{A}_4$	$\mathsf{a}^3_{(\mathsf{T})} = \mathsf{b}^3_{(\mathsf{T})} = \left(\mathsf{a}_{(\mathsf{T})}\mathsf{b}_{(\mathsf{T})}\right)^2 = \mathrm{Id}$
4.	Περιστροφική ομάδα τού οκταέδρου $\mathsf{O} \cong \mathfrak{S}_4$	$\mathsf{a}^3_{(\mathsf{O})} = \mathsf{b}^4_{(\mathsf{O})} = \left(\mathsf{a}_{(\mathsf{O})}\mathsf{b}_{(\mathsf{O})}\right)^2 = \mathrm{Id}$
5.	Περιστροφική ομάδα εικοσαέδρου $\mathsf{I} \cong \mathfrak{A}_5$	$\mathsf{a}^3_{(\mathsf{I})} = \mathsf{b}^5_{(\mathsf{I})} = \left(\mathsf{a}_{(\mathsf{I})}\mathsf{b}_{(\mathsf{I})}\right)^2 = \mathrm{Id}$

Σκιαγραφημα της Αποδειξης. Η ισχύς των σχέσεων τού δεύτερου καταλόγου μπορεί να ελεγχθεί πολύ εύκολα. Επίσης είναι εύκολο να δείξει κανείς «ως προς ισομορφισμό» τα όσα διατείνεται ο πρώτος κατάλογος, υπό τον όρο ότι θα αντιμετωπίσει τις εν λόγω ομάδες ως αφηρημένες πεπερασμένως παριστώμενες ομάδες, οι οποίες διαθέτουν τις ως άνω τρισδιάστατες πραγματικές γραμμικές αναπαραστάσεις. Το σχετικώς δύσκολο μέρος τής αποδεικτικής πορείας συνίσταται στο πώς κανείς διαπιστώνει ότι, πέραν αυτών, δεν υπάρχουν άλλες πεπερασμένες υποομάδες τής $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Αφετηρία τού όλου σκεπτικού θα σταθεί η δράση

$$\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad (A, \mathbf{x}) \longmapsto A\,\mathbf{x}$$

τής $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ επί τής δισδιάστατης σφαίρας $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (πρβλ. (2.11)). Για κάθε $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, $A \neq \mathrm{Id}$, το σύνολο των σταθερών σημείων

$$\mathbf{Fix}_A\left(\mathbb{S}^2\right) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 \mid A\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$$

αποτελείται από την τομή τού άξονα περιστροφής $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ με την $\mathbb{S}^2$. Προφανώς αυτή η τομή

$$\mathbf{Fix}_A\left(\mathbb{S}^2\right) = D \cap \mathbb{S}^2 = \{-\mathbf{p}, \mathbf{p}\}$$

συνίσταται από δύο σημεία, τους λεγομένους **πόλους** τής περιστροφής A. Κατά το λήμμα (2.13) (α), εάν ο $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2$ είναι ένας πόλος μιας περιστροφής $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, $A \neq \mathrm{Id}$, και $B \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, τότε η τροχιά $B\mathbf{p}$ είναι ένας πόλος τής (με την A συζυγούς) περιστροφής BAB^{-1}.

Πρώτο Βήμα. Έστω G μια πεπερασμένη, μη τετριμμένη υποομάδα τής $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathfrak{U} := \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2 \mid \exists A \in G \setminus \{\mathrm{Id}\} : A\mathbf{p} = \mathbf{p}\right\}.$$

Κατά το λήμμα (2.13) (α), το $\mathfrak{U}$ είναι ένα G-*αναλλοίωτο* σύνολο, δηλαδή για κάθε $A \in G$ και κάθε $\mathbf{p} \in \mathfrak{U}$, έχουμε $A\mathbf{p} \in \mathfrak{U}$. (Εάν $\mathbf{p} \in \mathfrak{U}$, υπάρχει ένα $B \in G \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}$, τέτοιο ώστε $B\mathbf{p} = \mathbf{p}$, κι έτσι για κάθε $A \in G$ έχουμε $ABA^{-1} \in G \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}$ και ο $A\mathbf{p}$ είναι ένας πόλος τού ABA^{-1}). Επομένως η δράση $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ επάγει μια δράση

$$G \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

τής πεπερασμένης ομάδας G επί τού πεπερασμένου συνόλου $\mathfrak{U}$. Εξάλλου, εξ ορισμού κάθε σημείο $\mathbf{p} \in \mathfrak{U}$ έχει μια μη τετριμμένη ομάδα ισοτροπίας

$$G_{\mathbf{p}} = \{A \in G \mid A\mathbf{p} = \mathbf{p}\}.$$

Όλα τα στοιχεία τής $G_{\mathbf{p}}$ έχουν έναν κοινό άξονα περιστροφής, ήτοι τον $D = \mathbb{R}\mathbf{p}$. Έτσι, οι ομάδες ισοτροπίας $\{G_{\mathbf{p}} \mid \mathbf{p} \in \mathfrak{U}\}$ είναι ισόμορφες με υποομάδες τής $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, οπότε είναι κυκλικές (σύμφωνα με το λήμμα (4.1)).

Δεύτερο Βήμα. Έστω $k = |\mathfrak{U} / G|$ το πλήθος των G-τροχιών επί τού συνόλου των πόλων $\mathfrak{U}$. Ας υποθέσουμε ότι το $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k\} \subset \mathfrak{U}$ είναι ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων τής (τροχιακής) σχέσης ισοδυναμίας, ήτοι

$$\mathfrak{U} / G = \{G\mathbf{p}_1, \ldots, G\mathbf{p}_k\}, \ \ |\mathfrak{U}| = \sum_{i=1}^{k} |G\mathbf{p}_i| \, .$$

Επειδή

$$\mathbf{Fix}_A(\mathfrak{U}) = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{όταν } A = \mathrm{Id} \\ \{\pm \mathbf{p}_A\}, & \text{όταν } A \neq \mathrm{Id} \text{ και } \mathbf{p}_A \text{ πόλος τού } A, \end{cases}$$

ο τύπος καταμέτρησης των τροχιών (2.14) δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{A \in G} |\mathbf{Fix}_A(\mathfrak{U})| &= |\mathfrak{U}| + 2(|G| - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} |G\mathbf{p}_i| + 2(|G| - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{|G_{\mathbf{p}_i}|} + 2(|G| - 1), \end{aligned}$$

οπότε

$$k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|G_{\mathbf{p}_i}|} + \frac{1}{|G|} 2(|G| - 1) \Longrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{|G_{\mathbf{p}_i}|}\right). \qquad (4)$$

Κι επειδή $|G| \geq 2$, έχουμε

$$1 \leq 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) < 2 \qquad (5)$$

Από την άλλη μεριά, $|G_{\mathbf{p}_i}| \geq 2$, που σημαίνει ότι

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|G_{\mathbf{p}_i}|} < 1 \tag{6}$$

Από τις (4), (5) και (6) συνάγουμε ότι

$$\boxed{k \in \{2, 3\}}$$

Τρίτο Βήμα. Αυτό περιλαμβάνει διαχωρισμό περιπτώσεων.

• $k = 2$. Σε αυτήν την περίπτωση ο τύπος (4) δίνει

$$|G_{\mathbf{p}_1}| + |G_{\mathbf{p}_2}| = 2.$$

Επομένως υπάρχουν μόνον δύο πόλοι (ο ένας αντίθετος τού άλλου, ήτοι $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$), οι οποίοι καθορίζουν έναν άξονα, τέτοιον ώστε κάθε στοιχείο τής G (πλην τού ταυτοτικού) να αποτελεί μια περιστροφή γύρω από αυτόν. Το επίπεδο το διερχόμενο από την απαρχή των αξόνων, το οποίο είναι κάθετο προς αυτόν τον άξονα, περιστρέφεται μέσω τής G, απεικονιζόμενο όμως στον εαυτό του. Άρα η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, οπότε οφείλει να είναι *κυκλική* (σύμφωνα με το λήμμα (4.1)).

• $k = 3$. Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτοντας (δίχως βλάβη τής γενικότητας) ότι

$$2 \leq |G_{\mathbf{p}_1}| \leq |G_{\mathbf{p}_2}| \leq |G_{\mathbf{p}_3}|,$$

ο τύπος (4) μάς παρέχει τις εξής δυνατές τιμές:

Α/Α	$\|G\|$	$\|G_{\mathbf{p}_1}\|$	$\|G_{\mathbf{p}_2}\|$	$\|G_{\mathbf{p}_3}\|$
(α)	4	2	2	2
(β)	$2n,\ n \geq 3$	2	2	n
(γ)	12	2	3	3
(δ)	24	2	3	4
(ε)	60	2	3	5

(α) Επειδή η G έχει τάξη 4 και κάθε στοιχείο της (διαφορετικό τού ουδετέρου) έχει τάξη 2, η G οφείλει να είναι ισόμορφη με την ομάδα των τεσσάρων στοιχείων τού Klein (δηλαδή την D_2). Εάν ο A είναι ένας γεννήτορας τής $G_{\mathbf{p}_3}$, οι πόλοι $\mathbf{p}_1$ και $A(\mathbf{p}_1)$ (καθώς και οι πόλοι $\mathbf{p}_2$ και $A(\mathbf{p}_2)$) ισαπέχουν από το $\mathbf{p}_3$. (Το A διατηρεί την απόσταση). Κι επειδή $G\mathbf{p}_3 = \{\pm\mathbf{p}_3\}$, έχουμε $A(\mathbf{p}_1) = -\mathbf{p}_1$ και $A(\mathbf{p}_2) = -\mathbf{p}_2$. Άρα οι άξονες οι διερχόμενοι από τα $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2$ είναι ανα δύο κάθετοι μεταξύ τους, ενώ οι G-τροχιές είναι οι $\{\pm\mathbf{p}_1\}, \{\pm\mathbf{p}_2\}, \{\pm\mathbf{p}_3\}$.

(β) Όπως προαναφέραμε, οι ομάδες ισοτροπίας των πόλων είναι κυκλικές. Συνεπώς η $G_{\mathbf{p}_3}$ είναι κυκλική τάξης n. Έστω A ο γεννήτορας τής $G_{\mathbf{p}_3}$ με την ελάχιστη δυνατή (θετική) γωνία στροφής. Τότε τα σημεία $\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_1, \ldots, A^{n-1}\mathbf{p}_1$ είναι σαφώς διακεκριμένα, διότι εάν ίσχυε $A^r\mathbf{p}_1 = A^s\mathbf{p}_1$ για κάποια r, s, με $0 \leq r < s < n$, τότε θα είχαμε $0 < s - r < n$ και

$$A^{s-r}\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 \Longrightarrow A^{s-r} \neq \mathrm{Id}, \text{ και } A^{s-r} \in G_{\mathbf{p}_1}.$$

Επομένως η A^{s-r} (και κατά συνέπειαν και η A) θα ήταν μια στροφή περι τον άξονα $\mathbb{R}\mathbf{p}_1$, πράγμα αδύνατο διότι η τάξη τού A είναι $n > 2 = |G_{\mathbf{p}_1}|$. Επειδή λοιπόν $\frac{|G|}{|G_{\mathbf{p}_1}|} = n$, έχουμε

$$G\mathbf{p}_1 = \{\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_1, \ldots, A^{n-1}\mathbf{p}_1\}$$

και κατ' αναλογίαν

$$G\mathbf{p}_2 = \{\mathbf{p}_2, A\mathbf{p}_2, \ldots, A^{n-1}\mathbf{p}_2\}.$$

Επιπροσθέτως, $A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3$, $A(-\mathbf{p}_3) = -\mathbf{p}_3$, οπότε $-\mathbf{p}_3 \notin G\mathbf{p}_1 \cup G\mathbf{p}_2$, που σημαίνει ότι

$$G\mathbf{p}_3 = \{\pm\mathbf{p}_3\}.$$

Επειδή το A διατηρεί την απόσταση, παίρνουμε τελικώς

$$\|\mathbf{p}_1 - A\mathbf{p}_1\| = \left\|A\mathbf{p}_1 - A^2\mathbf{p}_1\right\| = \cdots = \left\|A^{n-1}\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1\right\|,$$

κι έτσι τα $\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_1, \ldots, A^{n-1}\mathbf{p}_1$ αποτελούν κορυφές ενός κανονικού n-γώνου. Επειδή η G συνίσταται από $2n$ περιστροφές, που απεικονίζουν το εν λόγω n-γωνο στον εαυτό του, η G θα πρέπει να είναι ομάδα περιστροφικών συμμετριών αυτού τού n-γώνου. Κατά συνέπειαν η G είναι διεδρική.

(γ) Η G-τροχιά τού $\mathbf{p}_3$ αποτελείται από τέσσερα σημεία. Επιλέγουμε ένα εξ αυτών, ας το πούμε $\mathbf{q}$, τέτοιο ώστε $0 < \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{q}\| < 2$. Επίσης επιλέγουμε έναν γεννήτορα A τής $G_{\mathbf{p}_3}$. Τότε τα $\mathbf{q}$, $A(\mathbf{q})$, $A^2(\mathbf{q})$ είναι σαφώς διακεκριμένα. Επειδή το A (ως ισομετρία) διατηρεί την απόσταση, αυτά ισαπέχουν από το $\mathbf{p}_3$ και αποτελούν τις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Επομένως το

$$\mathrm{conv}\left\{\mathbf{p}_3, \mathbf{q}, A(\mathbf{q}), A^2(\mathbf{q})\right\}$$

είναι ένα κανονικό τετράεδρο, το οποίο απεικονίζεται στον εαυτό του μέσω όλων των περιστροφών τής G. Κι επειδή $|G| = 12$, η G οφείλει να είναι η περιστροφική ομάδα τού εν λόγω τετραέδρου. Κανείς μπορεί να πραγματευτεί τις υπόλοιπες περιπτώσεις (δ) και (ε) κατ' ανάλογο τρόπο. (Τούτο το αφήνουμε ως άσκηση. Εάν υπάρξουν δυσκολίες, συμβουλευθείτε το κεφάλαιο 19 τού βιβλίου τού M. A. Armstrong: *Groups and Symmetry*, UTM, Springer-Verlag, 1988). □

(5.5) Θεώρημα. (Ταξινόμηση πεπερασμένων υποομάδων τής O$(3,\mathbb{R})$) *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής ομάδας* $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ *οφείλει να ανήκει σε μία εκ των ακολούθων κλάσεων υποομάδων:*

(α) *πεπερασμένες υποομάδες τής* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$,

(β) *υποομάδες παραγόμενες από μία υποομάδα τής* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *και τον κεντρικό κατοπτρισμό*

$$\sigma_0 := -\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(γ) *κυκλικές ή διεδρικές (εντός τής* $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$*),*

(δ) *υποομάδες ισόμορφες με την* $\mathfrak{S}_4$.

Σκιαγραφημα της Αποδειξης. Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα τής $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$, η οποία δεν ανήκει στην κλάση (α). Τότε η G περιέχει αναγκαστικώς στοιχεία με ορίζουσα ίση με -1 και ο ομομορφισμός

$$G \longrightarrow \{\pm\mathrm{Id}\} \cong \mathbb{Z}_2$$

είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα μια υποομάδα H τής $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Η υποομάδα H είναι ορθόθετη με δείκτη 2 εντός τής G, οπότε

$$G = H \cup \sigma H, \text{ όπου } \sigma \in G \smallsetminus H.$$

Εάν $\sigma_0 \in G$, τότε μπορούμε να γράψουμε την G ως $G = H \cup \sigma_0 H$. Επειδή ο κεντρικός κατοπτρισμός σ_0 μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$, παίρνουμε έναν ισομορφισμό

$$G \cong H \times \{\mathrm{Id},\sigma_0\} \cong H \times \mathbb{Z}_2.$$

Δι' αυτού τού τρόπου προσλαμβάνουμε τις υποομάδες τής κλάσης (β). Εάν $\sigma_0 \notin G$, τότε γράφουμε την G ως $G = H \cup \sigma H$ (όπως παραπάνω) και σχηματίζουμε την ομάδα $G^* = H \cup \sigma_0\sigma H$, η οποία είναι μια πεπερασμένη υποομάδα τής $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Σημειωτέον ότι η απεικόνιση $G \to G^*$ που ορίζεται μέσω των

$$h \longmapsto h, \;\; \sigma h \longmapsto \sigma_0\sigma h, \;\; \forall h \in H$$

είναι ένας ισομορφισμός. Απλοί ομαδοθεωρητικοί συλλογισμοί μάς οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η G^* αδυνατεί να είναι ισόμορφη με μία των T ή I. Επομένως η $G \cong G^*$ (κατά το θεώρημα (5.4)) θα είναι ή κυκλική ή διεδρική ή περιστροφική οκταεδρική (και η H ή κυκλική ή διεδρική ή περιστροφική τετραεδρική). Έτσι καλύπτονται οι κλάσεις υποομάδων (γ) και (δ). $\square$

(5.6) Παρατήρηση. (Πλήρεις ομάδες συμμετρίας των Πλατωνικών Στερεών) Βάσει τού θεωρήματος (5.5) οι πλήρεις ομάδες συμμετρίας των Πλατωνικών Στερεών (ήτοι οι ομάδες των «αυτομορφισμών» τους, σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη διάλεξη) είναι, μέχρις ισομορφισμού, οι εξής ομάδες:

Α/Α	**Στερεά**	**Περιστροφικές Ομάδες**	**Πλήρεις Ομάδες Συμμετρίας**
1.	Κανονικό Τετράεδρο	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{S}_4$
2.	Κανονικό Οκτάεδρο	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$
3.	Κανονικό Εικοσάεδρο	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$

6 Ταξινόμηση των πεπερασμένων υποομάδων των ομάδων $\mathbf{SU}(2,\mathbb{C})$ και $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$

Ο Felix Klein περιγράφει (στο δεύτερο κεφάλαιο τού προαναφερθέντος συγγράμματός του) και μια μέθοδο μετάβασης από τις πεπερασμένες υποομάδες τής $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ σε εκείνες τής

$$\mathrm{SU}\,(2,\mathbb{C}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{array} \right) \middle| \; a,b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Έστω $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ η **μιγαδική προβολική ευθεία** (ως μονοσημειακή συμπαγοποίηση τού $\mathbb{C}$). Η ομάδα $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ δρα επί τής $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ μέσω των **κλασματικών γραμμικών μετασχηματισμών**

$$\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ni \left(g = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), z \right) \mapsto g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \quad \text{όπου} \quad g \cdot \infty := \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Ταυτίζοντας το $\mathbb{C}$ με το επίπεδο τού $\mathbb{R}^3$, που είναι κάθετο προς το $(0,0,1)$, μέσω τής απεικόνισης

$$\mathbb{C} \ni x_1 + \sqrt{-1}\, x_2 \longmapsto (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

μπορούμε να ταυτίσουμε τη μιγαδική προβολική ευθεία $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ με τη δισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ μέσω τής **στερεογραφικής προβολής** φ (τού $\mathbb{S}^2 \smallsetminus \{(0,0,1)\}$ από το $(0,0,1)$ επί τού $\mathbb{C}$):

$$\mathbb{S}^2 \ni (x_1,x_2,x_3) \mapsto \varphi\,(x_1,x_2,x_3) := \begin{cases} \frac{x_1 + \sqrt{-1}\, x_2}{1 - x_3} & , \text{ εάν } (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,1) \\ \infty & , \text{ εάν } (x_1,x_2,x_3) = (0,0,1), \end{cases}$$

Σημειωτέον ότι η $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ είναι αμφιρριπτική (ήτοι 1-1 και επί), με αντίστροφό της την

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ni z \longmapsto \varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{\left(2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2-1\right)}{1+|z|^2} & , \quad \text{εάν } z \in \mathbb{C} \\ \infty & , \quad \text{εάν } z = \infty. \end{cases}$$

Ορίζοντας τη «σφαιρική» μετρική:

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ni \left(z, z'\right) \mapsto \mathbf{d}\left(z, z'\right) := \begin{cases} |z - z'| \cdot \left(1 + |z|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |z'|^2\right)^{-\frac{1}{2}}, & \text{εάν} \quad (z, z') \in \mathbb{C}^2 \\ \left(1 + |z|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad , & \text{εάν} \quad z \in \mathbb{C}, z' = \infty \\ 0 \quad , & \text{εάν} \quad z = z' = \infty \end{cases}$$

παίρνουμε

$$\mathbf{d}\left(\varphi(\mathbf{x}), \varphi\left(\mathbf{x}'\right)\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sum_{i=1}^{3} x_i\, x_i'), \ \text{ για όλα τα } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\,, \ \mathbf{x}' = \left(x_1', x_2', x_3'\right) \in \mathbb{S}^2. \quad (7)$$

(6.1) Λήμμα. (i) *Εάν η* $t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ *είναι μια αμφιρριπτική απεικόνιση, τέτοια ώστε*

$$\langle t(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}') \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle\,, \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{S}^2,$$

τότε η t *μπορεί να επεκταθεί σε ένα στοιχείο τού* $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$.
(ii) *Όλα τα στοιχεία τής* $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ *«διατηρούν» τη μετρική* $\mathbf{d}$, *ήτοι*

$$\mathbf{d}\left(gz, gz'\right) = \mathbf{d}\left(z, z'\right), \ \ \forall g \in \mathrm{SU}\left(2, \mathbb{C}\right) \text{ και } \forall z, \ z' \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

(iii) *Εάν η* $\theta : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *είναι μια αμφιρριπτική απεικόνιση, τέτοια ώστε*

$$\mathbf{d}\left(\theta(z), \theta(z')\right) = \mathbf{d}\left(z, z'\right), \ \ \forall z, \ z' \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

τότε υπάρχει ένα μονοσημάντως ορισμένο στοιχείο $g \in \mathrm{PSU}\left(2, \mathbb{C}\right) = \mathrm{SU}\left(2, \mathbb{C}\right) \ / \ \{\pm \mathrm{Id}\}$ *για το οποίο ισχύει: ή* $\theta(z) = gz$ *ή* $\theta(z) = g\overline{z}$ (*χρησιμοποιώντας τη σύμβαση* $\overline{\infty} = \infty$).

Απόδειξη. (i) Η επέκταση τής t στο $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ δίνεται από τον τύπο

$$\widetilde{t}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \cdot t\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) & , \quad \text{εάν } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , \quad \text{εάν } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Πράγματι· κανείς ελέγχει εύκολα ότι

$$\left\langle \widetilde{t}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \widetilde{t}(\mathbf{x}) - \widetilde{t}(\mathbf{y})\,, \, \widetilde{t}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \widetilde{t}(\mathbf{x}) - \widetilde{t}(\mathbf{y}) \right\rangle = 0,$$

οπότε $\widetilde{t} \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R})$.

(ii) Για κάθε $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ και $z, z' \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ έχουμε

$$|gz|^2 + 1 = \left(\frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}}\right)\overline{\left(\frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}}\right)} + 1 = \frac{1+|z|^2}{\left|-\overline{b}z+\overline{a}\right|^2}$$

και $|gz - gz'|^2 = \left|-\overline{b}z+\overline{a}\right|^{-2}\left|-\overline{b}z'+\overline{a}\right|^{-2}|z-z'|^2$, απ' όπου έπεται ο ισχυρισμός.

(iii) Έστω $\theta : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ μια αμφιρριπτική απεικόνιση με την ως άνω ιδιότητα. Κανείς διαπιστώνει εύκολα ότι υπάρχει ένα $u \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$, τέτοιο ώστε $u(0) = \theta(0)$. Αντικαθιστώντας, εν ανάγκη, τη θ με την $\frac{1}{u}\theta$, μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας να υποθέσουμε ότι $\theta(0) = 0$. Έτσι παίρνουμε

$$\mathbf{d}(\theta(z), 0) = \mathbf{d}(z, 0) \Longrightarrow |\theta(z)|^2 = |z|^2,$$

οπότε για $z,\ z' \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$|\theta(z) - \theta(z')|^2 = |z - z'|^2 \Longrightarrow \theta(z)\overline{\theta(z')} + \overline{\theta(z)}\theta(z') = z\,\overline{z}' + \overline{z}\,z'.$$

Επιλέγοντας ένα z' τέτοιο ώστε να ισχύει $\theta(z') = 1$ (τη μια φορά) και $\theta(z') = \sqrt{-1}$ (την άλλη φορά), καταλήγουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων, το οποίο και λύνουμε ως προς $\theta(z)$. Μετά από πράξεις διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, ούτως ώστε $\theta(z) = \lambda z + \mu\overline{z}$. Όμως η $|\theta(z)|^2 = |z|^2$ είναι αληθής μόνον όταν $\lambda = 0$ ή $\mu = 0$. Εξ αυτού προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

(6.2) Θεώρημα. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων*[13]

$$\rho : \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{PSU}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \ / \ \{\pm\mathrm{Id}\} \tag{8}$$

για τον οποίο ισχύει

$$\varphi(t \cdot \mathbf{x}) = \rho(t) \cdot \varphi(\mathbf{x}),\ \ \forall t \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 \tag{9}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ θέτουμε $\theta_t(z) := \varphi(t \cdot \varphi^{-1}(z)), \forall z,\ z \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Η θ_t είναι αμφιρριπτική και διατηρεί τη σφαιρική μετρική (λόγω τής ισότητας (7)). Έτσι, σύμφωνα με το λήμμα (6.1) (iii) υπάρχει ένα μονοσημάντως ορισμένο στοιχείο $g_t \in \mathrm{PSU}(2,\mathbb{C})$, για το οποίο ή $\theta_t(z) = g_t z$ ή $\theta_t(z) = g_t\overline{z}$. (Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\theta_t^2 \in$

[13] Σε μια κάπως «πιο αλγεβρική» γλώσσα θα λέγαμε πως υπάρχει μια **ακριβής ακολουθία** ομάδων

$$\{\mathrm{Id}\} \hookrightarrow \{\pm\mathrm{Id}\} \hookrightarrow \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho^{-1}} \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \{\mathrm{Id}\}$$

$\mathrm{PSU}(2,\mathbb{C})$). Όμως το t είναι πάντοτε το τετράγωνο ενός καταλλήλως δομημένου πίνακα, πράγμα που σημαίνει ότι κατ' ανάγκην έχουμε $\theta_t(z) = g_t z$. Επομένως η απεικόνιση $t \mapsto \rho(t) := g_t$ αποτελεί έναν ισομορφισμό. Τέλος, η ισότητα (9) αποδεικνύεται εύκολα. $\square$

(6.3) Παρατήρηση. Υπάρχει και μια δεύτερη, εναλλακτική απόδειξη τού ισομορφισμού (8), η οποία βασίζεται στις ιδιότητες τής άλγεβρας των *τετρανίων*. Παρότι είναι αρκετά ενδιαφέρουσα, δεν θα υπεισέλθουμε σε αυτήν, κυρίως για λόγους συντομίας.

(6.4) Παρατήρηση. Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ είναι *συζυγής* με μια υποομάδα τής $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$. Πράγματι· για κάθε πεπερασμένη υποομάδα G τής $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ υπάρχει ένα G-αναλλοίωτο *ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο*[14] επί τού $\mathbb{C}^n$, οριζόμενο (μέσω τού συνήθους) ως εξής:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g\mathbf{x}, g\mathbf{y} \rangle .$$

Τότε υπάρχει ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, ούτως ώστε να ισχύει[15]:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_G = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle .$$

Τότε όμως $TGT^{-1} \in \mathrm{U}(n)$. (Εάν βεβαίως η G ανήκει στην $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, τότε $\det(T) = 1$, και $TGT^{-1} \in \mathrm{SU}(n)$.)

(6.5) Πόρισμα. (Ταξινόμηση πεπερασμένων υποομάδων των $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ και $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$) *Έστω*

$$\varpi : \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PSU}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \;/\; \{\pm \mathrm{Id}\}$$

*ο φυσικός επιμορφισμός ομάδων (ήτοι η φυσική 2:1 απεικόνιση προβολής). Τότε το σύνολο των πεπερασμένων υποομάδων τής $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ (κι αντιστοίχως, των πεπερασμένων υποομάδων τής $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$) αποτελείται «ως προς ισομορφισμό» (κι αντιστοίχως, «ως προς συζυγία») από τις επονομαζόμενες «**δυαδικές ομάδες**»*

$$\left\{ \varpi^{-1}(\rho(\Gamma)) \mid \Gamma \text{ πεπερασμένη υποομάδα τής } \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \right\},$$

μαζί με τις κυκλικές ομάδες περιττής τάξης, που δίνονται στον ακόλουθο κατάλογο:

[14] Εάν ο V είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος τότε μια απεικόνιση $s : V \times V \to \mathbb{C}$ λέγεται **ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο** όταν είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, ημιγραμμική ως προς τη δεύτερη, ήτοι $s(v, w + w') = s(v, w) + s(v, w')$, $s(v, \lambda w) = \overline{\lambda} s(v, w)$, και όταν ταυτοχρόνως ισχύει $s(v, w) = \overline{s(w, v)}$. Το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο**

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \overline{w}_1 + \cdots + v_n \overline{w}_n$$

επί τού $\mathbb{C}^n$ είναι προφανώς ερμιτιανό.

[15] Αυτός ο T μεταφέρει μια ορθότακτη βάση (ως προς το ένα ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο) σε μια άλλη ορθότακτη βάση (ως προς το άλλο ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο).

Α/Α	**Ομάδες** G	Συμβολισμός κατά Dynkin	$\|G\|$	πλήθος κλάσεων συζυγίας των G	γεννήτορες των G
1.	Κυκλικές ομάδες $\mathbf{C}_n$ τάξης n	A_{n-1}	n	n	ψ_n
2.	Δυαδικές διεδρικές ομάδες $\mathbb{D}_{n-2} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{D}_{n-2}))$, όπου $n \geq 4$	D_n	$4(n-2)$	$n+1$	$\psi_{2(n-2)}, \tau$
3.	Δυαδική περιστροφική ομάδα τού τετραέδρου $\mathbb{T} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{T}))$	E_6	24	7	ψ_4, τ, η
4.	Δυαδική περιστροφική ομάδα τού οκταέδρου $\mathbb{O} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{O}))$	E_7	48	8	ψ_8, τ, η
5.	Δυαδική περιστροφική ομάδα τού εικοσαέδρου $\mathbb{I} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{I}))$	E_8	120	9	u, v, w

Εδώ έχουμε ορίσει ως

$$\psi_k = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{k}} \end{pmatrix}, \ k \geq 2, \ \text{ και } \ \tau = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{4}} & e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{4}} \\ e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{4}} & e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} -e^{\frac{6\pi\sqrt{-1}}{5}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{5}} \end{pmatrix},$$

$$w = \frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{5}} - e^{\frac{-4\pi\sqrt{-1}}{5}}} \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}} + e^{\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{5}} & 1 \\ 1 & -\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}} + e^{\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{5}}\right) \end{pmatrix}.$$

Οι σχέσεις μεταξύ των ως άνω γεννητόρων δίνονται από τον εξής κατάλογο:

Α/Α	**Ομάδες** G	Σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων των G
1.	Κυκλικές ομάδες $\mathbf{C}_n$ τάξης $n \geq 2$	$(\psi_n)^n = \mathrm{Id}$
2.	Δυαδικές διεδρικές ομάδες $\mathbb{D}_{n-2} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{D}_{n-2}))$, όπου $n \geq 4$	$\left(\psi_{2(n-2)}\right)^{(n-2)} = \mathrm{Id},\ \tau^2 = -\mathrm{Id}$
3.	Δυαδική περιστροφική ομάδα τού τετραέδρου $\mathbb{T} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{T}))$	$\psi_4^2 = \tau^2 = \eta^3 = -\mathrm{Id},\ \eta\tau = \psi_4\eta,$ $\tau\psi_4\tau^{-1} = \psi_4^{-1},\ \psi_4\eta\psi_4^{-1} = \tau\eta$
4.	Δυαδική περιστροφική ομάδα τού οκταέδρου $\mathbb{O} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{O}))$	$\psi_8^2 = \psi_4,\ \tau^2 = \eta^3 = -\mathrm{Id},\ \tau\psi_8\tau^{-1} = \psi_8^{-1},$ $(\psi_8\eta)^2 = -(\psi_8)^2\tau,\ \eta\tau = (\psi_8)^2\eta$
5.	Δυαδική περιστροφική ομάδα τού εικοσαέδρου $\mathbb{I} = \varpi^{-1}(\rho(\mathsf{I}))$	$v^5 = u^2 = w^2 = -\mathrm{Id},\ uvu^{-1} = v^{-1}, uwu^{-1} = -w,$ $wvw = vwuv, wu^2w = v^{-2}wv^{-2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς σημειώνουμε ότι εάν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ και έχει τάξη 2, τότε $A = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, δηλαδή $a = d = \pm 1$ και $b = c = 0 \Longrightarrow A = -\mathrm{Id}$. Έστω τώρα G μια πεπερασμένη υποομάδα τής $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$. Εάν η G ανήκει στην κλάση των «δυαδικών»

$$\left\{\varpi^{-1}(\rho(\Gamma)) \mid \Gamma \text{ πεπερασμένη υποομάδα τής } \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})\right\},$$

τότε η G θα έχει τάξη διπλάσια τής αντίστοιχης Γ. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι η G δεν είναι δυαδική. Επειδή $-\mathrm{Id} \notin G$, η $\rho^{-1}(\varpi(G))$ είναι *ισόμορφη* με μια πεπερασμένη υποομάδα τής $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Σύμφωνα με όσα προείπαμε, τόσο η G όσο και η $\rho^{-1}(\varpi(G))$ δεν περιέχουν στοιχεία τάξης 2. Επομένως, κατά το θεώρημα (5.4) τής ταξινομήσεως των πεπερασμένων υποομάδων τής $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, η $\rho^{-1}(\varpi(G))$ (και συνεπώς και η ίδια η G) είναι κυκλικές περιττής τάξης. Το ότι οι γεννήτορες τού ως άνω καταλόγου είναι όντως γεννήτορες των εν λόγω υποομάδων, και το ότι οι δοθείσες σχέσεις είναι αληθείς, αφήνεται ως άσκηση. Τέλος, είναι προφανές ότι η προκύπτουσα ταξινόμηση καλύπτει «ως προς συζυγία» και όλες τις πεπερασμένες υποομάδες τού $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ λόγω των όσων προαναφέραμε στην (6.4). $\square$