Παν. Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών **Θεωρία Ομάδων (ΜΕΜ 224)**

Εξέταση Ιανουαρίου 2016 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΜΕΡΟΣ Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Lagrange*.

(ii) Να αποδειχθεί ότι για την $\mathfrak{A}_4$ δεν ισχύει το αντίστροφο τού θεωρήματος τού Lagrange.

ΘΕΜΑ 2ο Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$ όταν $n \geq 3$ και $n \neq 6$. (Εν προκειμένω, μπορεί να θεωρηθεί ως γνωστό ότι ένας $\vartheta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ είναι εσωτερικός αυτομορφισμός εάν και μόνον εάν η εικόνα οιασδήποτε αντιμεταθέσεως μέσω τού ϑ είναι μια αντιμετάθεση.)

ΘΕΜΑ 3ο Για δυο ομάδες G_1, G_2 να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathrm{Aut}(G_1)\times \mathrm{Aut}(G_2)$ είναι εμφυτεύσιμη εντός τής $\mathrm{Aut}(G_1 \times G_2)$.

(ii) Εάν οι G_1, G_2 είναι πεπερασμένες και μκδ$(|G_1|, |G_2|) = 1$, τότε $\mathrm{Aut}(G_1)\times \mathrm{Aut}(G_2) \cong \mathrm{Aut}(G_1 \times G_2)$.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα τού Sylow* και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* ενός εξ αυτών.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω G μια ομάδα και έστω $K \trianglelefteq G$. Εάν αμφότερες οι K και G/K είναι επιλύσιμες, να αποδειχθεί ότι και η ίδια η G είναι επιλύσιμη.

ΜΕΡΟΣ Β. ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Να αποδειχθεί ότι η $\mathbf{D}_\infty$ είναι ισόμορφη με την ομάδα

$$G := \left\{ \left(\begin{array}{cc} \varepsilon & \lambda \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, \varepsilon \in \{\pm 1\}, \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \sqsubset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι η προσθετική πηλικοομάδα $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ είναι ισόμορφη με την $(\mathcal{E}_\infty, \cdot)$, όπου

$$\mathcal{E}_\infty := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1, \ \text{για κάποιον } n \in \mathbb{N}\} \sqsubset \mathbb{C}\smallsetminus\{0\},$$

και ότι η πολλαπλασιαστική πηλικοομάδα $(\mathbb{S}^1/\mathcal{E}_\infty, \cdot)$ είναι ισόμορφη με την πηλικοομάδα $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}, +)$.

ΘΕΜΑ 7ο Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω $H \sqsubseteq \mathfrak{S}_p$ υποομάδα τάξεως $|H| = p$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\left|\mathrm{N}_{\mathfrak{S}_p}(H)\right| = p(p-1)$.

(ii) $\mathrm{N}_{\mathfrak{S}_p}(H)/\mathrm{C}_{\mathfrak{S}_p}(H) \cong \mathrm{Aut}(H)$.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εάν $X := \{1, ..., n\}$ και $G \times X \longrightarrow X, \ (g, j) \longmapsto g \star j$, είναι μια (εξ αριστερών) δράση μιας ομάδας G επί τού X, να αποδειχθεί ότι για οιοδήποτε μη κενό σύνολο Y η

$$G \times Y^n \longrightarrow Y^n, \ (g, (y_1, ..., y_n)) \longmapsto g \bullet (y_1, ..., y_n) := (y_{g^{-1}\star 1}, ..., y_{g^{-1}\star n}),$$

ορίζει μια (εξ αριστερών) δράση τής G επί τού Y^n. [*Υπόδειξη*: Κάθε στοιχείο τού Y^n μπορεί να θεωρηθεί ως μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ εάν η f «ταυτισθεί» με το $(f(1), ..., f(n))$.]

(ii) Εάν υποτεθεί ότι $X := \{1, 2, 3\}$ και ότι Y είναι ένα σύνολο έχον ως στοιχεία του q (σαφώς διακεκριμένα) χρώματα, να προσδιορισθεί το πλήθος των *ουσιωδώς διαφορετικών* τρόπων κατασκευής μιας «σημαίας συντιθέμενης από 3 διαδοχικές, κατακορύφως τοποθετούμενες στενόμακρες ισομήκεις λωρίδες[1]» κάνοντας χρήση των q διαθέσιμων χρωμάτων (για τον χρωματισμό των 3 λωρίδων), υπό την προϋπόθεση ότι δυο σημαίες (αυτού τού είδους) λογίζονται ως «ταυτιζόμενες» όταν η μία προκύπτει από την άλλη ύστερα από στροφή της κατά 180° (αντιωρολογιακώς γύρω από ένα νοερό κοντάρι στηρίξεώς της). [*Υπόδειξη*: Η ομάδα $G := \langle [1\ 3] \rangle \in \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_X$ δρα τόσον επί τού X όσον και επί τού Y^3. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί καταλλήλως ο τύπος καταμετρήσεως των τροχιών.]

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> Δίδονται τρεις πρώτοι αριθμοί p, q, r με $p < q < r$. Εάν G είναι μια ομάδα τάξεως $|G| = pqr$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η G διαθέτει μία και μόνον r-Sylow υποοομάδα (που είναι κατ' ανάγκην ορθόθετη).

(ii) $\exists L \lhd G : |G : L| = p$.

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Κάθε ομάδα τάξεως 12 είναι επιλύσιμη.

(ii) Κάθε ομάδα τάξεως 36 είναι επιλύσιμη.

- **Ζητείται να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες**.
- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες**.
- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**
- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

[1]Π.χ., η σημαία τής Ιταλίας συντίθεται από μία πράσινη, μία άσπρη και μία κοκκινη λωρίδα, η σημαία τής Γαλλίας από μία μπλε, μία άσπρη και μία κόκκινη λωρίδα, και η σημαία τού Βελγίου από μία μαύρη, μία κίτρινη και μία κόκκινη λωρίδα.