Παράρτημα D

Πίνακες

Λίαν χρήσιμες (πολλαπλασιαστικές) ομάδες πινάκων προκύπτουν ως (ειδικής φύσεως) υποομάδες τής ομάδας των αντιστρεψίμων στοιχείων τού δακτυλίου $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ των τετραγωνικών πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από έναν μη τετριμμένο δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο.

D.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω $(R,+,\cdot)$ τυχών δακτύλιος. Για οιοδήποτε ζεύγος $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ των $(m\times n)$-πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R (βλ. 1.3.6). Κάθε πίνακας

$$\boxed{\mathbf{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)} \tag{D.1}$$

διαθέτει m **γραμμές**[1]

$$\Gamma\varrho_i(\mathbf{A}):=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{i\,n-1}\ a_{i\,n})\in\mathrm{Mat}_{1\times n}(R),\ \ i\in\{1,\ldots,m\},$$

και n **στήλες**

$$\Sigma\tau_j(\mathbf{A}):=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{m\,j}\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R),\ \ j\in\{1,\ldots,n\}.$$

(Η $\Gamma\varrho_i(\mathbf{A})$ καλείται i**-οστή γραμμή** και η $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ j**-οστή στήλη τού** $\mathbf{A}$.) Προφανώς,

$$\mathbf{A}=(\Sigma\tau_1(\mathbf{A})\ \cdots\ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}))=\begin{pmatrix}\Gamma\varrho_1(\mathbf{A})\\ \vdots\\ \Gamma\varrho_m(\mathbf{A})\end{pmatrix}. \tag{D.2}$$

[1] Συχνά χρησιμοποιείται η ταύτιση τού $\mathrm{Mat}_{1\times n}(R)$ με το R^n (οπότε οι γραμμές αποτελούνται από διατεταγμένες n-άδες στοιχείων τού R).

• Για οιουσδήποτε πίνακες

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R), \;\; \mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \qquad \text{(D.3)}$$

ισχύει (προφανώς) η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \; \forall\, (i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}.$$

• Εάν $r \in R$, τότε για οιονδήποτε πίνακα (D.1) θέτουμε

$$\boxed{r\mathbf{A} := (ra_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}.}$$

• Το $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ καθίσταται αβελιανή ομάδα με μέσω τής προσθετικής πράξεως[2]

$$\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}} \qquad \text{(D.4)}$$

για οιουσδήποτε πίνακες (D.3) (Πρβλ. 1.3.6).

• Κάθε πίνακας (D.1) έχων το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών (ήτοι $m = n$) καλείται **τετραγωνικός πίνακας**. Το υποσύνολο εγγραφών $\{a_{ii} | i \in \{1,\ldots,n\}\}$ ενός πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ καλείται **κυρία διαγώνιος** και το $\{a_{i,n+1-i} | i \in \{1,\ldots,n\}\}$ **δευτερεύουσα διαγώνιος** τού $\mathbf{A}$.

D.1.1 Ορισμός. (Ανάστροφος πίνακα) Ο **ανάστροφος** ενός $(m \times n)$-πίνακα (D.1) είναι ο $(n \times m)$-πίνακας

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = (a'_{st})_{\substack{1\leq s\leq n\\ 1\leq t\leq m}} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(R),$$

όπου $a'_{st} := a_{ts}$ για κάθε ζεύγος $(s,t) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$. Σημειωτέον ότι[3]

$$\Gamma\varrho_s(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \Sigma\tau_s(\mathbf{A})^{\mathsf{T}}, \Sigma\tau_t(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \Gamma\varrho_t(\mathbf{A})^{\mathsf{T}}, \forall\,(s,t) \in \{1,..,n\} \times \{1,..,m\}. \quad \text{(D.5)}$$

D.1.2 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ *και* $r \in R$, *τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$.

(ii) $(r\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = r\,(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.

(iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Τούτο έπεται άμεσα από τις ισότητες (D.5).

(ii)-(iii) Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ και

$$c_{ij} := ra_{ij}, \; d_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \; \forall\,(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\},$$

τότε $(r\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = (c'_{st})_{\substack{1\leq s\leq n\\ 1\leq t\leq m}}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = (d'_{st})_{\substack{1\leq s\leq n\\ 1\leq t\leq m}}$, με

$$c'_{st} = c_{ts} = ra_{ts}, \; d'_{st} = d_{ts} = a_{ts} + b_{ts}, \; \forall\,(s,t) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}.$$

Επομένως, $(r\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = r\,(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ και $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$. □

[2] Το ουδέτερο στοιχείο $0_{\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)}$ αυτής τής ομάδας είναι ο $(m \times n)$-πίνακας, όλες οι εγγραφές τού οποίου είναι ίσες με το 0_R (και είθισται να σημειώνεται εν συντομία ως $\mathbf{0}_{m\times n}$).

[3] Στην ειδική περίπτωση όπου $m = n$, οι εγγραφές τού $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ αποκτώνται ύστερα από *κατοπτρισμό* των εγγραφών τού $\mathbf{A}$ ως προς την κυρία διαγώνιό του.

D.1.3 Ορισμός. Στην ειδική περίπτωση όπου $m = n$, το σύνολο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ (ήτοι το σύνολο των *τετραγωνικών πινάκων*) καθίσταται *δακτύλιος* μέσω τής προσθετικής πράξεως (D.4) και τής πολλαπλασιαστικής πράξεως

$$\boxed{\mathbf{AB} := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j}\right)_{1\leq i,j\leq n},}$$

για οιουσδήποτε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ και $\mathbf{B} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Εάν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε και ο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ έχει μοναδιαίο στοιχείο. Αυτό είναι ο λεγόμενος **μοναδιαίος πίνακας**

$$\mathbf{I}_n := \begin{pmatrix} 1_R & 0_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_R & 0_R & \cdots & 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix}$$

με όλες τις εγγραφές τις ανήκουσες στην κυρία διαγώνιό του ίσες με το 1_R και με τις λοιπές εγγραφές του ίσες με το 0_R. Προφανώς,

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n},\ \text{όπου}\ \delta_{ij} := \begin{cases} 1_R, & \text{όταν}\ i = j, \\ 0_R, & \text{όταν}\ i \neq j, \end{cases}$$

είναι το λεγόμενο **σύμβολο τού Kronecker**.

D.1.4 Σημείωση. (i) Εάν υποθέσουμε ότι ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο και εάν για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \{1,..., n\} \times \{1,..., n\}$ ορίσουμε τον πίνακα

$$\boxed{\mathbf{E}_{ij} := (\delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{1\leq \mu,\nu\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R),}$$

ήτοι τον πίνακα τον έχοντα ως εγγραφή του στην i-οστή γραμμή και στην j-οστή στήλη το 1_R και ως λοιπές εγγραφές του το 0_R, τότε παρατηρούμε ότι *κάθε* τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}.$$

(ii) Εάν ο R είναι μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε *για κάθε* $n > 1$ ο δακτύλιος $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ *δεν είναι* μεταθετικός, ακόμη και όταν ο ίδιος ο R είναι. (Βλ. D.2.19.)

D.1.5 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε πίνακες* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ *ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφήνεται ως άσκηση. □

D.1.6 Παραδείγματα. (Ειδικοί τετραγωνικοί πίνακες) Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

(i) Ένας πίνακας

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(R) \tag{D.6}$$

καλείται **διαγώνιος πίνακας** όταν υπάρχει κάποια n-άδα $(a_1,..., a_n) \in R^n$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$a_{ij} = \delta_{ij} a_i = \begin{cases} a_i, & \text{όταν } i = j, \\ 0_R, & \text{όταν } i \neq j. \end{cases}$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει, σημειώνουμε τον $\mathbf{A}$ εν συντομία ως $\mathrm{diag}(a_1,..., a_n)$.) Προφανώς, $\mathbf{I}_n = \mathrm{diag}(1_R, 1_R,..., 1_R, 1_R)$. Το σύνολο των διαγωνίων πινάκων το συμβολίζουμε ως

$$\mathrm{Diag}_n(R) := \{ \mathrm{diag}(a_1,..., a_n) \mid (a_1,..., a_n) \in R^n \}.$$

(ii) Ένας πίνακας (D.6) καλείται **άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **κάτω τριγωνικός**) όταν ισχύει $a_{ij} = 0_R$ για $i > j$ (και αντιστοίχως, για $i < j$), ήτοι όταν είναι τής μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0_R & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2\,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0_R & \cdots & \cdots & 0_R & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0_R & \cdots & \cdots & 0_R \\ a_{21} & a_{22} & 0_R & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_R \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

αντιστοίχως, και **αυστηρώς άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **αυστηρώς κάτω τριγωνικός**) όταν $a_{ij} = 0_R$ για $i \geq j$ (και αντιστοίχως, για $i \leq j$), ήτοι όταν είναι τής μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_R & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0_R & 0_R & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2\,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0_R & \cdots & \cdots & 0_R & 0_R \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_R & 0_R & \cdots & \cdots & 0_R \\ a_{21} & 0_R & 0_R & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_R \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & 0_R \end{pmatrix},$$

αντιστοίχως. Τα σύνολα των άνω, κάτω, αυστηρώς άνω και αυστηρώς κάτω πινάκων τα συμβολίζουμε ως

$$\mathrm{UT}_n(R),\ \mathrm{LT}_n(R),\ \mathrm{SUT}_n(R) \text{ και } \mathrm{SLT}_n(R),$$

αντιστοίχως[4].

[4]Οι βραχυγραφίες Diag, UT, LT, SUT και SLT επελέγησαν κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να θυμίζουν τα αρχικά των όρων **diag**onal, **u**pper **t**riangular, **l**ower **t**riangular, **s**trictly **u**pper **t**riangular, **s**trictly **l**ower **t**riangular.

(iii) Ένας πίνακας (D.6) καλείται **μοναδιαίως άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **μοναδιαίως κάτω τριγωνικός**) όταν είναι τής μορφής

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1_R & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0_R & 1_R & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2\,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0_R & \cdots & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1_R & 0_R & \cdots & \cdots & 0_R \\ a_{21} & 1_R & 0_R & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_R \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & 1_R \end{pmatrix},$$

αντιστοίχως. Τα σύνολα αυτών των πινάκων τα συμβολίζουμε ως $\mathrm{UT}_n^{[1]}(R)$ και $\mathrm{LT}_n^{[1]}(R)$, αντιστοίχως.

D.1.7 Σημείωση. (i) Τα $Diag_n(R)$, $\mathrm{UT}_n(R)$, $\mathrm{LT}_n(R)$, $\mathrm{SUT}_n(R)$ και $\mathrm{SLT}_n(R)$ αποτελούν υποδακτυλίους τού δακτυλίου $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Οι $\mathrm{Diag}_n(R)$, $\mathrm{UT}_n(R)$ και $\mathrm{LT}_n(R)$ έχουν τον $\mathbf{I}_n$ ως μοναδιαίο τους στοιχείο. (Αντιθέτως, οι $\mathrm{SUT}_n(R)$ και $\mathrm{SLT}_n(R)$ είναι δακτύλιοι χωρίς μοναδιαίο στοιχείο.)

(ii) Το $\mathrm{SUT}_n(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού δακτυλίου $\mathrm{UT}_n(R)$.

(iii) Το $\mathrm{SLT}_n(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού δακτυλίου $\mathrm{LT}_n(R)$.

(iv) Το $\mathrm{Diag}_n(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού δακτυλίου $\mathrm{UT}_n(R)\cap\mathrm{LT}_n(R)$.

(v) Οι κάτωθι αμφίπλευρες συνεπαγωγές είναι προφανείς:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{A}\in\mathrm{UT}_n(R)\Leftrightarrow\mathbf{A}^{\intercal}\in\mathrm{LT}_n(R), \\ \mathbf{A}\in\mathrm{SUT}_n(R)\Leftrightarrow\mathbf{A}^{\intercal}\in\mathrm{SLT}_n(R), \\ \mathbf{A}\in\mathrm{UT}_n^{[1]}(R)\Leftrightarrow\mathbf{A}^{\intercal}\in\mathrm{LT}_n^{[1]}(R). \end{array}\right\}$$

D.2 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω R ένας *μη τετριμμένος μεταθετικός* δακτύλιος *με μοναδιαίο στοιχείο* και έστω $n\in\mathbb{N}$. Η ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων (*αντιστρεψίμων πινάκων*) τού δακτυλίου $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ (που καλείται, ιδιαιτέρως, *γενική γραμμική ομάδα* βαθμού n υπεράνω τού R και συμβολίζεται ως $\mathrm{GL}_n(R)$) μπορεί να περιγραφεί (μέσω τού θεωρήματος D.2.18) με τη βοήθεια των *οριζουσών* των πινάκων των ανηκόντων σε αυτόν. Γι' αυτόν τον λόγο είναι απαραίτητη η παράθεση των *κύριων ιδιοτήτων* των οριζουσών. Επιπρόσθετες σημαντικές *ομάδες πινάκων* προκύπτουν ως υποομάδες τής προαναφερθείσας ομάδας.

D.2.1 Ορισμός. Έστω τυχών πίνακας $\mathbf{A}=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Το στοιχείο

$$\boxed{\det(\mathbf{A}):=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i\,\sigma(i)}\right)}$$

τού R καλείται **ορίζουσα** τού $\mathbf{A}$ (όπου $\mathfrak{S}_n$ η συμμετρική ομάδα και $\operatorname{sgn}(\sigma)$ η εικόνα οιασδήποτε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ μέσω τής απεικονίσεως προσημάνσεως sgn: $\mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$, βλ. 3.1.1 και 3.3.1).

D.2.2 Παραδείγματα. Για $n = 2$ λαμβάνουμε $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ και για $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

D.2.3 Πρόταση. *Για κάθε* $\mathbf{A} \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(R)$ *ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}^{\intercal}) = \det(\mathbf{A}),} \tag{D.7}$$

δηλαδή η ορίζουσα οιουδήποτε τετραγωνικού πίνακα ισούται με την ορίζουσα τού αναστρόφου του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, τότε $\mathbf{A}^{\intercal} = (a'_{rs})_{1\le r,s\le n}$, όπου

$$a'_{rs} := a_{sr},\ \forall (r,s) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^{\intercal}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} a'_{i\,\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma^{-1}(j)}\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \left(\prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma^{-1}(j)}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma(j)}\right) = \det(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα έπεται από το ότι $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$ για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (βλ. 3.3.5 (ii)) και η πέμπτη από το ότι η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιρριπτική. □

D.2.4 Σημείωση. Λόγω τής (D.7) η ορίζουσα τού $\mathbf{A}$ μπορεί να γραφεί και υπό τη μορφή

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}\right). \tag{D.8}$$

D.2.5 Πρόταση. *Εάν όλες οι εγγραφές κάποιας γραμμής (και αντιστοίχως, κάποιας στήλης) ενός πίνακα* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(R)$ *είναι ίσες με* 0_R, *τότε* $\det(\mathbf{A}) = 0_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\exists k \in \{1,\ldots,n\}$: $\Gamma\varrho_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{1\times n}$ $(:= 0_{\mathrm{Mat}_{1\times n}(R)})$, τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\left(\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}\smallsetminus\{k\}} a_{i\,\sigma(i)}\right)\underbrace{a_{k\,\sigma(k)}}_{=0_R}\right) = 0_R.$$

Εάν $\exists k \in \{1,\ldots,n\}$: $\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{n\times 1}$, τότε $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\intercal) = 0_R$ λόγω τής προτάσεως D.2.3, τής ισότητας $\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) = \Gamma\varrho_k(\mathbf{A}^\intercal)$ και τής προηγηθείσας επιχειρηματολογίας. □

D.2.6 Πόρισμα. $\det(\mathbf{0}_{n\times n}) = 0_R$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση D.2.5. □

D.2.7 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ $(n \geq 2)$ *με* $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ (*και αντιστοίχως, με* $\Gamma\varrho_i(\mathbf{A}) = \Gamma\varrho_j(\mathbf{A})$) *για κάποιους* $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i<j$, *τότε* $\det(\mathbf{A}) = 0_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ για κάποιους $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i<j$, τότε θέτοντας $\tau := [i\;j]$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \coprod (\mathfrak{A}_n \circ \tau)$$

(βλ. απόδειξη τής προτάσεως 3.3.9), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)}\right)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\left(\prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)}\right) - \sum_{\rho\in\mathfrak{A}_n\circ\tau}\left(\prod_{i=1}^n a_{i\,\rho(i)}\right)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\left(\prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)}\right) - \sum_{\sigma\in\mathfrak{A}_n}\left(\prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(\tau(i))}\right).\end{aligned}$$

Επειδή $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ και $\tau(k) = k$, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}\smallsetminus\{i,j\}$, έχουμε για κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{A}_n$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(\tau(i))} &= a_{i\,\sigma(\tau(i))}a_{j\,\sigma(\tau(j))} \prod_{k\in\{1,\ldots,n\}\smallsetminus\{i,j\}} a_{k\;\sigma(\tau(k))}\\ &= a_{i\,\sigma(j)}a_{j\,\sigma(i)} \prod_{k\in\{1,\ldots,n\}\smallsetminus\{i,j\}} a_{k\;\sigma(k)}\\ &= a_{i\,\sigma(i)}a_{j\,\sigma(j)} \prod_{k\in\{1,\ldots,n\}\smallsetminus\{i,j\}} a_{k\;\sigma(k)} = \prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)}\end{aligned}$$

(με την προτελευταία ισότητα οφειλόμενη στο ότι $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A})$), οπότε $\det(\mathbf{A}) = 0_R$. Εάν $\Gamma\varrho_i(\mathbf{A}) = \Gamma\varrho_j(\mathbf{A})$ για κάποιους $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i<j$, τότε $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}^\intercal) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A}^\intercal)$, οπότε βάσει τής προηγηθείσας επιχειρηματολογίας (αλλά με τον $\mathbf{A}^\intercal$ στη θέση τού $\mathbf{A}$) λαμβάνουμε $\det(\mathbf{A}^\intercal) = 0_R$ και, κατ' επέκταση, $\det(\mathbf{A}) = 0_R$ (μέσω τής (D.7)). □

D.2.8 Λήμμα. *Εάν* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n) \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(R)$, *και* $r, r' \in R$, *τότε*

$$\det\begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ r\Gamma\varrho_k(\mathbf{A}) + r'\mathbf{b} \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = r\det(\mathbf{A}) + r'\det\begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{b} \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} &\det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_{k-1}(\mathbf{A})\,(r\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) + r'\mathbf{b}^{\mathsf{T}})\,\Sigma\tau_{k+1}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_n(\mathbf{A})\right) \\ &= r\det(\mathbf{A}) + r'\det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_{k-1}(\mathbf{A})\,\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\,\Sigma\tau_{k+1}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_n(\mathbf{A})\right) \end{aligned}$$

για κάθε[5] $k \in \{1,\dots,n\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για οιονδήποτε $k \in \{1,\dots,n\}$ η ορίζουσα τού πίνακα

$$(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ r\Gamma\varrho_k(\mathbf{A}) + r'\mathbf{b} \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$$

γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} c_{i\,\sigma(i)}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i\in\{1,\dots,n\}\smallsetminus\{k\}} a_{i\,\sigma(i)}\right)(ra_{k\,\sigma(k)} + r'b_{\sigma(k)}) \\ &= r\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right)\right) + r'\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i\in\{1,\dots,n\}\smallsetminus\{k\}} a_{i\,\sigma(i)}\right) b_{\sigma(k)}\right), \end{aligned}$$

οπότε η πρώτη ισότητα είναι αληθής. Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρομοίως. □

D.2.9 Πρόταση. *Για κάθε* $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ *ισχύουν τα εξής:*

[5] Όταν $k = 1$(και αντιστοίχως, όταν $k = n$), η ειδικής φύσεως γραμμή (στήλη) τοποθετείται στην πρώτη (και αντιστοίχως, στην n-οστή) θέση και οι γραμμές (στήλες) με δείκτες 1 έως $k-1$ (και αντιστοίχως, με δείκτες $k+1$έως n) παραλείπονται.

(i) (a) *Εάν* $n \geq 2$ *και* $k, l \in \{1, ..., n\}$ *με* $k \neq l$, *τότε για κάθε* $r \in R$ *έχουμε*

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_k(\mathbf{A}) + r\Gamma\varrho_l(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}).$$

(b) *Εάν* $k \in \{1, ..., n\}$ *και* $r \in R$, *τότε*

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ r\Gamma\varrho_k(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = r\det(\mathbf{A}).$$

(ii) (a) *Εάν* $n \geq 2$ *και* $k, l \in \{1, ..., n\}$ *με* $k \neq l$, *τότε για κάθε* $r \in R$ *έχουμε*

$$\det\left(\boldsymbol{\Sigma\tau}_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \boldsymbol{\Sigma\tau}_{k-1}(\mathbf{A}) \, (\boldsymbol{\Sigma\tau}_k(\mathbf{A}) + r\boldsymbol{\Sigma\tau}_l(\mathbf{A})) \, \boldsymbol{\Sigma\tau}_{k+1}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \boldsymbol{\Sigma\tau}_n(\mathbf{A})\right) = \det(\mathbf{A}).$$

(b) *Εάν* $k \in \{1, ..., n\}$ *και* $r \in R$, *τότε*

$$\det\left(\boldsymbol{\Sigma\tau}_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \boldsymbol{\Sigma\tau}_{k-1}(\mathbf{A}) \, (r\boldsymbol{\Sigma\tau}_k(\mathbf{A})) \, \boldsymbol{\Sigma\tau}_{k+1}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \boldsymbol{\Sigma\tau}_n(\mathbf{A})\right) = r\det(\mathbf{A}).$$

(iii) *Για κάθε* $r \in R$ *ισχύει η ισότητα*

$$\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A}).$$

(iv) *Για κάθε* $\tau \in \mathfrak{S}_n$ *ισχύουν οι ισότητες*

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_{\tau(1)}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{\tau(n)}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det\left(\boldsymbol{\Sigma\tau}_{\tau(1)}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \boldsymbol{\Sigma\tau}_{\tau(n)}(\mathbf{A})\right) = \operatorname{sgn}(\tau)\det(\mathbf{A}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) (a) Προφανώς,

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_k(\mathbf{A}) + r\Gamma\varrho_l(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) + r\det \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{k-1}(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_l(\mathbf{A}) \\ \Gamma\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}),$$

με την πρώτη ισότητα συναγόμενη από το λήμμα D.2.8 και τη δεύτερη από το ότι η $\Gamma\varrho_l(\mathbf{A})$ εμφανίζεται (στον δεύτερο προσθετέο) τόσον στη θέση k όσον και στη θέση l (βλ. πρόταση D.2.7).

(b) Έπεται κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος D.2.8 (για $r' = 0_R$).

(ii) Τα (a) και (b) προκύπτουν άμεσα από τα (a) και (b) τού (i) (λαμβάνοντας υπ' όψιν την πρόταση D.2.3).

(iii) Αρκεί να εφαρμοσθεί n φορές το (i) (b) (για τις n γραμμές τού $r\mathbf{A}$).

(iv) Έστω τυχούσα μετάταξη $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιρριπτική (έχουσα την $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \tau^{-1} \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$ ως αντίστροφό της). Επίσης, για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ έχουμε

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)^2 \mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau^2 \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\tau \circ \sigma). \tag{D.9}$$

(Βλ. 3.3.5 (i).) Η ορίζουσα τού πίνακα

$$(b_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \mathbf{B} := \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_{\tau(1)}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{\tau(n)}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$$

(με $b_{ij} = a_{\tau(i)\,j}, \forall\,(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\}$) γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}) &\underset{(\text{D.8})}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)\,i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{\tau(\sigma(i))\,i}\right) \\
&\underset{(\text{D.9})}{=} \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\tau\circ\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{(\tau\circ\sigma)(i)\,i}\right) \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\rho)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i)\,i}\right) \underset{(\text{D.8})}{=} \mathrm{sgn}(\tau)\det(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα (που αφορά στις στήλες) αποδεικνύεται παρομοίως. □

D.2.10 Πρόταση. (Ορίζουσα άνω/κάτω τριγωνικού πίνακα) *Η ορίζουσα οιουδήποτε* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{UT}_n(R) \cup \mathrm{LT}_n(R)$ *ισούται με το γινόμενο των εγγραφών τής κυρίας διαγωνίου του:*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.} \tag{D.10}$$

Ιδιαιτέρως, $\det(\mathrm{diag}(a_1,...,a_n)) = \prod_{i=1}^{n} a_i, \forall (a_1,...,a_n) \in R^n$, *και* $\det(\mathbf{I}_n) = 1_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{UT}_n(R)$, τότε $a_{ij} = 0_R$ για όλους τους δείκτες $i,j \in \{1,...,n\}$ με $i > j$. Για $n = 1$ η (D.10) είναι προφανής. Για $n \ge 2$ και για κάθε $\sigma \neq \mathrm{id}$ υπάρχει κατ' ανάγκην κάποιος $k \in \{1,...,n\}$ με $k > \sigma(k)$, οπότε

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\smallsetminus\{\mathrm{id}\}} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(\left(\prod_{i\in\{1,...,n\}\smallsetminus\{k\}} a_{i\,\sigma(i)}\right)\underbrace{a_{k\,\sigma(k)}}_{=0_K}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Άρα η (D.10) είναι αληθής και για $n \geq 2$. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{LT}_n\,(R)$, τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\intercal}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

λόγω τής προτάσεως D.2.3 και τού ότι $\mathbf{A}^{\intercal} \in \mathrm{UT}_n\,(R)$. □

D.2.11 Θεώρημα. (Τύπος γινομένου) *Η ορίζουσα τού γινομένου δύο πινάκων* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}\,(R)$ *ισούται με το γινόμενο των οριζουσών τους, ήτοι*

$$\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})\,.} \tag{D.11}$$

Ως εκ τούτου, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$.

Αποδειξη. Εάν $n = 1$, τότε η (D.11) είναι προφανής. Εάν $n \geq 2$, τότε θέτοντας $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$, όπου $\mathbf{B} := (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$ ισχύει η ισότητα

$$\Sigma\tau_j\,(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \Sigma\tau_k\,(\mathbf{A})\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{C}) = \det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{C})\,\Sigma\tau_2(\mathbf{C})\,\cdots\,\Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right)\\
&= \det\left(\left(\sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1}\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\right)\Sigma\tau_2(\mathbf{C})\,\cdots\,\Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right)\\
&\underset{\text{D.2.8}}{=} \sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1}\det\left(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_2(\mathbf{C})\,\cdots\,\Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right)\\
&= \sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1}\det\left(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\left(\sum_{k_2=1}^{n} b_{k_2 2}\Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A})\right)\Sigma\tau_3(\mathbf{C})\,\cdots\,\Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right)\\
&= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} b_{k_1 1}b_{k_2 2}\det\left(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_3(\mathbf{C})\,\cdots\,\Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right)\\
&= \cdots = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} b_{k_j j}\right)\det\left(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A})\,\cdots\,\Sigma\tau_{k_n}(\mathbf{A})\right).
\end{aligned}$$

Το ανωτέρω πολλαπλό άθροισμα περιέχει n^n προσθετέους! Εντούτοις, πολλοί εξ αυτών μηδενίζονται. Πράγματι· *κάθε* προσθετέος αντιστοιχεί στην επιλογή μίας (και μόνον) διατεταγμένης n-άδας

$$(k_1, ..., k_n) \in \underbrace{\{1, ..., n\} \times \cdots \times \{1, ..., n\}}_{n \text{ φορές}}\,. \tag{D.12}$$

Για τους προσθετέους που αντιστοιχούν σε n-άδες (D.12) με $k_\mu = k_\nu$ για κάποιους $\mu, \nu \in \{1, .., n\}$, $\mu < \nu$, έχουμε $\det\left(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A})\,\cdots\,\Sigma\tau_{k_n}(\mathbf{A})\right) = 0_R$. (Βλ. πρόταση D.2.7.) Επομένως, υπολείπονται μόνον οι προσθετέοι που αντιστοιχούν σε n-άδες (D.12) για τις οποίες (για οιοδήποτε $(\mu, \nu) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$) ισχύει η συνεπαγωγή $\mu \neq \nu \Longrightarrow k_\mu \neq k_\nu$. Τούτη ισοδυναμεί με την ενριπτικότητα τής απεικονίσεως

$$\{1,...,n\} \ni \nu \longmapsto k_\nu \in \{1,...,n\}.$$

Επειδή κάθε ενριπτική απεικόνιση από ένα πεπερασμένο σύνολο στον εαυτό του είναι κατ' ανάγκην αμφιρριπτική και οι αμφιρριπτικές απεικονίσεις από το $\{1,...,n\}$ επί τού $\{1,...,n\}$ είναι (εξ ορισμού) τα στοιχεία τής $\mathfrak{S}_n$, αρκεί (για τον προσδιορισμό τής ορίζουσας $\det(\mathbf{C}) \in R$) να αντικαταστήσουμε το ανωτέρω πολλαπλό άθροισμα με ένα άθροισμα που να περιλαμβάνει μόνον εκείνες τις n-άδες $(k_1,...,k_n)$ για τις οποίες $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : k_\nu = \sigma(\nu)\,,\ \forall \nu \in \{1,...,n\}$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{C}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)\, j} \right) \det \left(\boldsymbol{\Sigma\tau}_{\sigma(1)}(\mathbf{A})\ \boldsymbol{\Sigma\tau}_{\sigma(2)}(\mathbf{A})\ \cdots\ \boldsymbol{\Sigma\tau}_{\sigma(n)}(\mathbf{A}) \right) \\
&\underset{\text{D.2.9 (iv)}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)\, j} \right) \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)\, j} \right) \det(\mathbf{A}) \\
&\underset{\text{(D.8)}}{=} \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}),
\end{aligned}$$

και η (D.11) είναι αληθής. □

D.2.12 Ορισμός. Έστω τυχών πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(R)$ $(n \geq 2)$. Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\}$, συμβολίζουμε ως

$$\boxed{\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,j]} \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(R)}$$

τον υποπίνακα τού $\mathbf{A}$ τον προκύπτοντα ύστερα από *διαγραφή* τής i-οστής γραμμής $\Gamma\varrho_i(\mathbf{A})$ και τής j-οστής στήλης $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$:

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{pmatrix},$$

ήτοι τον $\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,j]} := (a^{\sharp}_{st})_{1 \leq s,t \leq n-1}$, όπου

$$a^{\sharp}_{st} := \begin{cases} a_{st}, & \text{όταν } 1 \leq s \leq i-1 \text{ και } 1 \leq t \leq j-1, \\ a_{s+1,t}, & \text{όταν } i \leq s \leq n-1 \text{ και } 1 \leq t \leq j-1, \\ a_{s,t+1}, & \text{όταν } 1 \leq s \leq i-1 \text{ και } j \leq t \leq n-1, \\ a_{s+1,t+1}, & \text{όταν } i \leq s \leq n-1 \text{ και } j \leq t \leq n-1. \end{cases}$$

Το στοιχείο

$$\boxed{\mathrm{cof}_{ij}(\mathbf{A}) := (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,j]}) \in R}$$

τού δακτυλίου αναφοράς ονομάζεται **συμπαράγοντας** (ή **αλγεβρικό συμπλήρωμα**) **τού A ως προς το ζεύγος δεικτών** i, j, και ο

$$\boxed{\mathbf{adj}\,(\mathbf{A}) := ((\mathrm{cof}_{ij}(\mathbf{A}))_{1\leq i,j\leq n})^{\intercal} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\,(R)}$$

ο πίνακας ο προσαρτημένος στον A.

D.2.13 Λήμμα. *Έστω* $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})_{1\leq \mu,\nu\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ $(n \geq 2)$. *Για οιουσδήποτε* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[a_{kj} = 0_R,\ \forall k \in \{1, .., n\}\smallsetminus\{i\}] \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,j]}) = a_{ij}\mathrm{cof}_{ij}(\mathbf{A}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, για την οποία ισχύει $\sigma\,(n) = n$, η

$$\overline{\sigma} : \{1, ..., n-1\} \longrightarrow \{1, ..., n-1\},\ \overline{\sigma}(k) := \sigma(k),\ \forall k \in \{1, ..., n-1\},$$

είναι μια μετάταξη ανήκουσα στην $\mathfrak{S}_{n-1}$ με $\mathrm{sgn}(\overline{\sigma}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ και η απεικόνιση

$$\{\,\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma\,(n) = n\} \longrightarrow \mathfrak{S}_{n-1},\ \sigma \longmapsto \overline{\sigma},$$

ισομορφισμός ομάδων. Θέτοντας

$$\rho := \begin{bmatrix} 1 & ... & j-1 & j & j+1 & ... & n-1 & n \\ 1 & ... & j-1 & j+1 & j+2 & ... & n & j \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_n,$$

παρατηρούμε ότι $\rho = [j\; n]\circ[j\; n-1]\circ\cdots\circ[j\; j+2]\circ[j\; j+1]$, οπότε $\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{n-j}$. (Βλ. 3.3.3 και 3.3.5 (i).) Ο πίνακας

$$\mathbf{B} := \left(\Sigma\tau_{\rho(1)}\,(\mathbf{A})\ \Sigma\tau_{\rho(2)}\,(\mathbf{A})\ \cdots\ \Sigma\tau_{\rho(n)}\,(\mathbf{A})\right)$$

έχει ως ορίζουσά του την $\det(\mathbf{B}) \underset{\text{D.2.9 (iv)}}{=} \mathrm{sgn}(\rho)\det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-j}\det(\mathbf{A})$. Θέτοντας, κατ' αναλογίαν,

$$\tau := \begin{bmatrix} 1 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & n-1 & n \\ 1 & ... & i-1 & i+1 & i+2 & ... & n & i \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_n,$$

παρατηρούμε ότι $\tau = [i\; n]\circ[i\; n-1]\circ\cdots\circ[i\; i+2]\circ[i\; i+1]$, οπότε $\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{n-i}$. Ο πίνακας

$$(c_{st})_{1\leq s,t\leq n} = \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \Gamma\varrho_{\tau(1)}(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma\varrho_{\tau(n)}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

έχει ως ορίζουσά του την $\det(\mathbf{C}) \underset{\text{D.2.9 (iv)}}{=} \mathrm{sgn}(\tau)\det(\mathbf{B}) = (-1)^{n-i}\,(-1)^{n-j}\det(\mathbf{A})$, οπότε

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{C}). \tag{D.13}$$

Επειδή

$$[a_{kj} = 0_R, \ \forall k \in \{1,...,n\} \smallsetminus \{i\}] \Rightarrow [c_{kn} = 0_R, \ \forall k \in \{1,...,n-1\}],$$

έχουμε

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n} c_{i\,\sigma(i)} \right) = \sum_{\{\,\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(n) = n\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_{i\,\sigma(i)} \right) c_{nn}$$

$$= c_{nn} \left(\sum_{\overline{\sigma} \in \mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn}(\overline{\sigma}) \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_{i\,\overline{\sigma}(i)} \right) \right) = c_{nn} \det(\mathbf{C}^{\sharp}_{[n,n]}).$$

Αρκεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί η (D.13) σε συνδυασμό με τις ισότητες $c_{nn} = a_{ij}$ και $\mathbf{C}^{\sharp}_{[n,n]} = \mathbf{A}^{\sharp}_{[i,j]}$. □

D.2.14 Πρόταση. *Έστω τυχών* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(R)$ $(n \geq 2)$.
(i) *Εάν* $j \in \{1,...,n\}$, *τότε*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof}_{kj}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[k,j]}).} \tag{D.14}$$

(Ανάπτυγμα τής $\det(\mathbf{A})$ **ως προς τις εγγραφές τής στήλης** $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$.**)**

(ii) *Εάν* $i \in \{1,...,n\}$, *τότε*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{cof}_{ik}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,k]}).} \tag{D.15}$$

(Ανάπτυγμα τής $\det(\mathbf{A})$ **ως προς τις εγγραφές τής γραμμής** $\Gamma\varrho_i(\mathbf{A})$.**)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Θεωρούμε τα n στοιχεία

$$\mathbf{e}_k := (0_R,...,0_R, \underbrace{1_R}_{k\text{-οστή συντεταγμένη}}, 0_R,...,0_R) \in R^n, \ k \in \{1,...,n\},$$

και εκφράζουμε μέσω αυτών την j-οστή στήλη τού $\mathbf{A}$ ως ακολούθως:

$$\Sigma\tau_j(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathbf{e}_k^{\intercal}.$$

Προφανώς,

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A}) \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathbf{e}_k^{\intercal} \right) \Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \right)$$

$$\underset{\text{D.2.8}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A})\, \mathbf{e}_k^{\intercal}\, \Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \right)$$

$$\underset{\text{D.2.13}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left((-1)^{k+j} \cdot 1_R \cdot \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[k,j]}) \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[k,j]}).$$

(ii) Επειδή $\mathbf{A}^{\intercal} = (a'_{rs})_{1\leq r,s\leq n}$, όπου $a'_{rs} := a_{sr}$, $\forall (r,s) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\}$, έχουμε (κατόπιν αναπτύξεως τής $\det(\mathbf{A}^{\intercal})$ ως προς τις εγγραφές τής $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}^{\intercal})$)

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &\underset{(\mathrm{D.7})}{=} \det(\mathbf{A}^{\intercal}) \underset{(\mathrm{i})}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i}\, a'_{ki} \det((\mathbf{A}^{\intercal})^{\sharp}_{[k,i]}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \det((\mathbf{A}^{\intercal})^{\sharp}_{[k,i]}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \det((\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,k]})^{\intercal}) \\
&\underset{(\mathrm{D.7})}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \det((\mathbf{A}^{\sharp}_{[i,k]})).
\end{aligned}$$

Άρα αμφότερες οι (D.14) και (D.15) είναι αληθείς. □

D.2.15 Θεώρημα. *Για κάθε* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ $(n \geq 2)$ *ισχύουν οι ισότητες*

$$\boxed{\mathbf{adj}\,(\mathbf{A})\;\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\;\mathbf{I}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{adj}\,(\mathbf{A}).} \tag{D.16}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για οιουσδήποτε $i,j \in \{1,...,n\}$ η εγγραφή τού πίνακα $\mathbf{adj}\,(\mathbf{A})\;\mathbf{A}$ η ευρισκόμενη στην i-στή του γραμμή και στην j-οστή του στήλη είναι η

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{kj} \det(\mathbf{A}^{\sharp}_{[k,i]}) \\
&\underset{(*)}{=} \begin{cases} \det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{i-1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_j(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{i+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_j(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})\right), \\ \text{όταν } i \leq j \text{ και} \\ \det\left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_j(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{i-1}(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_j(\mathbf{A})\,\Sigma\tau_{i+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})\right), \\ \text{όταν } j \leq i, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \det(\mathbf{A}), & \text{όταν } i = j, \\ 0_R, & \text{όταν } i \neq j \text{ (βλ. πρόταση D.2.7).} \end{cases}
\end{aligned}$$

(Η ορίζουσα τού δεξιού μέλους στην $(*)$ έχει το άθροισμα τού αριστερού μέλους ως ανάπτυγμα ως προς την i-οστή στήλη.) Άρα $\mathbf{adj}\,(\mathbf{A})\;\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\;\mathbf{I}_n$. Η ισότητα $\mathbf{A}\,\mathbf{adj}\,(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\;\mathbf{I}_n$ αποδεικνύεται παρομοίως (κάνοντας χρήση τού (ii) τής προτάσεως D.2.14). □

D.2.16 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $n \in \mathbb{N}$. Μέσω τού μονοειδούς $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(R), \cdot)$ ορίζεται η (πολλαπλασιαστική) ομάδα των αντιστρεψίμων πινάκων

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(R) := (\mathrm{Mat}_{n\times n}(R))^{\times}}$$

με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R, η οποία καλείται, ιδιαιτέρως, **γενική γραμμική ομάδα (βαθμού** n **υπεράνω τού** R).

D.2.17 Πρόταση. *Για κάθε* $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(R)$ *(όπου* R *τυχών μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο) έχουμε* $\mathbf{A}^{\intercal} \in \mathrm{GL}_n(R)$ *και*

$$\boxed{(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ και (προφανώς) $(\mathbf{I}_n)^{\intercal} = \mathbf{I}_n$, από την πρόταση D.1.5 προκύπτει ότι

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}\,\mathbf{A}^{\intercal} = \left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal} = \mathbf{I}_n = \left(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\right)^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal}\,(\mathbf{A}^{-1})^{\intercal},$$

οπότε ο $\mathbf{A}^{\intercal}$ είναι αντιστρέψιμος και $(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}$. □

D.2.18 Θεώρημα. *Για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\mathrm{GL}_n\,(R) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R) \mid \det(\mathbf{A}) \in R^{\times}\}\,.} \tag{D.17}$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n\,(R)$,

$$\boxed{\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}} \tag{D.18}$$

και για $n \geq 2$,

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{adj}\,(\mathbf{A})\,.} \tag{D.19}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n = 1$ οι ισότητες (D.17) και (D.18) είναι προφανείς. Ας υποθέσουμε ότι $n \geq 2$. Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ και $\det(\mathbf{A}) \in R^{\times}$, τότε θέτοντας $\mathbf{B} := \det(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{adj}\,(\mathbf{A})$ συνάγουμε μέσω τής (D.16) ότι

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA} \Rightarrow \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n\,(R)\,.$$

Και αντιστρόφως· εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n\,(R)$, τότε υπάρχει αντίστροφο στοιχείο $\mathbf{A}^{-1}$ τού $\mathbf{A}$. Κατά το θεώρημα D.2.11 και την πρόταση D.2.10,

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} \Rightarrow \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1_R = \det(\mathbf{A}^{-1})\cdot\det(\mathbf{A}),$$

οπότε $\det(\mathbf{A}) \in R^{\times}$ και $\det(\mathbf{A})^{-1} = \det(\mathbf{A}^{-1})$. (Η ισότητα (D.19) έπεται άμεσα από την (D.16).) □

D.2.19 Σημείωση. Η γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}_n(R)$ *δεν* είναι αβελιανή στην περίπτωση όπου $n \geq 2$. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τούς αντιστρέψιμους πίνακες

$$\mathbf{A} := \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,1},\ \ \mathbf{B} := \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,2}$$

(όπου $\mathbf{E}_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ όπως ορίσθηκαν στο D.1.4 (i)), διαπιστώνουμε ότι

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,1} + \mathbf{E}_{2,2} \neq \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,1} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}.$$

D.2.20 Παραδείγματα. (i) $\mathrm{GL}_n\,(F) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(F) \mid \det(\mathbf{A}) \neq 0_F\}$ για κάθε σώμα F (διότι $F^{\times} = F\smallsetminus\{0_F\}$).

(ii) Επειδή $\mathrm{card}(\mathrm{GL}_n\,(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}) = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} > \aleph_0$, η $\mathrm{GL}_n\,(\mathbb{R})$ είναι ομάδα άπειρη (και μάλιστα *υπεραριθμήσιμη*).

(iii) $\mathrm{GL}_n\,(\mathbb{Z}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z}) \mid \det(\mathbf{A}) \in \{\pm 1\}\}\,.$

D.2.21 Πόρισμα. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε οι ομάδες των αντιστρεψίμων στοιχείων των υποδακτυλίων* $\mathrm{UT}_n(R)$ *και* $\mathrm{LT}_n(R)$ *τού* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ *(βλ.* D.1.6 (ii) *και* D.1.7 (i)) *είναι οι*

$$\mathrm{UT}_n(R)^{\times} = \left\{\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{UT}_n(R) \;\middle|\; a_{ii} \in R^{\times},\forall i \in \{1,...,n\}\right\}$$

και

$$\mathrm{LT}_n(R)^{\times} = \left\{\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{LT}_n(R) \;\middle|\; a_{ii} \in R^{\times},\forall i \in \{1,...,n\}\right\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\mathrm{UT}_n(R)^{\times} \subseteq \mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{UT}_n(R)$ (βλ. D.1.7 (i) και C.1.13 (v)), για κάθε αντιστρέψιμο άνω τριγωνικό πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ισχύει

$$\det(\mathbf{A}) \underset{\text{(D.10)}}{=} \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \in R^{\times} \underset{\text{C.1.13 (iv)}}{\Longrightarrow} [a_{ii} \in R^{\times},\forall i \in \{1,...,n\}].$$

Επομένως, $\mathrm{UT}_n(R)^{\times} \subseteq \{\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{UT}_n(R) \mid a_{ii} \in R^{\times},\forall i \in \{1,...,n\}\}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός “$\supseteq$” είναι προφανής. Η δεύτερη ισότητα (που αφορά στους αντιστρέψιμους κάτω τριγωνικούς πίνακες) αποδεικνύεται παρομοίως. □

D.2.22 Πρόταση. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε το σύνολο*

$$\boxed{\mathrm{SL}_n(R) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \det(\mathbf{A}) = 1_R\}}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathrm{GL}_n(R)$ *(τη λεγόμενη* ***ειδική γραμμική ομάδα*** *βαθμού n υπεράνω τού R) που είναι γνήσια όταν $1_R \neq -1_R$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, $\mathbf{I}_n \in \mathrm{SL}_n(R)$ και για οιουσδήποτε πίνακες $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathrm{SL}_n(R)$ έχουμε

$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{B}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})^{-1} = 1_R$$

(δυνάμει των (D.11) και (D.18)), οπότε $\mathrm{SL}_n(R) \sqsubseteq \mathrm{GL}_n(R)$ (βλ. πρόταση 2.1.16). Εξάλλου, όταν $1_R \neq -1_R$, έχουμε[6]

$$\begin{pmatrix} -1_R & 0_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_R & 0_R & \cdots & 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(R) \smallsetminus \mathrm{SL}_n(R),$$

απ’ όπου έπεται ότι $\mathrm{SL}_n(R) \sqsubset \mathrm{GL}_n(R)$. □

D.2.23 Πρόταση. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε το σύνολο* $\mathrm{UT}_n^{[1]}(R)$ *(και αντιστοίχως, το* $\mathrm{LT}_n^{[1]}(R)$, *βλ.* D.1.6 (iii)), *εφοδιαζόμενο με τον πολλαπλασιασμό τετραγωνικών πινάκων, αποτελεί μια υποομάδα τής* $\mathrm{SL}_n(R)$ *(τη λεγόμενη* ***ομάδα των μοναδιαίως άνω,*** *και αντιστοίχως,* ***των μοναδιαίως κάτω τριγωνικών*** $(n\times n)$***-πινάκων*** *υπεράνω τού R).*

[6] Αντιθέτως, για το σώμα $\mathbb{Z}_2$ χαρακτηριστικής 2 λαμβάνουμε $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να χρησιμοποιηθεί εκ νέου η πρόταση D.2.10. □

D.2.24 Παράδειγμα. Για οιονδήποτε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο η ομάδα των μοναδιαίως άνω τριγωνικών (3×3)-πινάκων

$$\mathbf{Heis}(R) := \mathrm{UT}_3^{[1]}(R) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1_R & a & c \\ 0_R & 1_R & b \\ 0_R & 0_R & 1_R \end{pmatrix} \right| a, b, c \in R \right\}$$

καλείται (κλασική) **ομάδα τού Heisenberg** υπεράνω τού R.

D.2.25 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ένας πίνακας $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ καλείται **μετατακτικός πίνακας** όταν ακριβώς μία εκ των εγγραφών οιασδήποτε στήλης του και οιασδήποτε γραμμής του ισούται με το 1_R, ενώ οι λοιπές εγγραφές της είναι ίσες με το 0_R. Το σύνολο των $(n \times n)$-μετατακτικών πινάκων σημειώνεται με το σύμβολο $\mathrm{PMat}_{n\times n}(R)$.

D.2.26 Παρατήρηση. Προφανώς, $\mathrm{card}(\mathrm{PMat}_{n\times n}(R)) = n!$. Επιπροσθέτως, για κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{P}_\sigma := (\delta_{i\,\sigma(i)})_{1\le i,j\le n} = (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{e}_{\sigma(2)}^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{e}_{\sigma(n)}^{\mathsf{T}}) \in \mathrm{PMat}_{n\times n}(R),$$

όπου $\mathbf{e}_k := (0_R,\ldots,0_R, \underbrace{1_R}_{k\text{-οστή συντεταγμένη}}, 0_R,\ldots,0_R) \in R^n$, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$. Κατά το (iv) τής προτάσεως D.2.9,

$$\det(\mathbf{P}_\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)\det(\mathbf{I}_n) \in \{\pm 1_R\} \subseteq R^\times \underset{\text{(D.17)}}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_\sigma \in \mathrm{GL}_n(R).$$

D.2.27 Πρόταση. *Το σύνολο* $\mathrm{PMat}_{n\times n}(R)$ *των μετατακτικών πινάκων αποτελεί μια υποομάδα τής γενικής γραμμικής ομάδας* $(\mathrm{GL}_n(R), \cdot)$ *και η απεικόνιση*

$$\boxed{\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma \in \mathrm{PMat}_{n\times n}(R)} \tag{D.20}$$

έναν ισομορφισμό ομάδων. Ως εκ τούτου, η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_n$ *είναι εμφυτεύσιμη στη γενική γραμμική ομάδα* $(\mathrm{GL}_n(R), \cdot)$. (Βλ. 2.4.14 και 2.4.17.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma \in \mathrm{GL}_n(R)$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Πράγματι· για οιεσδήποτε μετατάξεις $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\sigma\circ\tau} &= (\mathbf{e}_{\sigma(\tau(1))}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{e}_{\sigma(\tau(2))}^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{e}_{\sigma(\tau(n))}^{\mathsf{T}}) \\ &= (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{e}_{\sigma(2)}^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{e}_{\sigma(n)}^{\mathsf{T}})(\mathbf{e}_{\tau(1)}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{e}_{\tau(2)}^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{e}_{\tau(n)}^{\mathsf{T}}) = \mathbf{P}_\sigma \cdot \mathbf{P}_\tau \end{aligned}$$

και $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n |\, \mathbf{P}_\sigma = \mathbf{I}_n\} = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n |\, (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{e}_{\sigma(n)}^{\mathsf{T}}) = (\mathbf{e}_1^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{e}_n^{\mathsf{T}})\right\} = \{\mathrm{id}\}$. Άρα η απεικόνιση $\sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma$ καθορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής $\mathfrak{S}_n$ και τής εικόνας της. Η εικόνα της περιέχεται στο $\mathrm{PMat}_{n\times n}(R)$ και έχει τάξη $n!$, οπότε *ισούται* κατ' ανάγκην με το $\mathrm{PMat}_{n\times n}(R)$. Είναι προφανές ότι $\mathrm{PMat}_{n\times n}(R) \sqsubseteq \mathrm{GL}_n(R)$ (βλ. το (i) τής προτάσεως 2.4.6) και ότι η (D.20) είναι ισομορφισμός ομάδων. □

D.2.28 Σημείωση. (i) Η εμφύτευση $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(R)$ χρησιμοποιείται (πρακτικώς) ως επί το πλείστον στην περίπτωση όπου είτε $R = \mathbb{Z}$ είτε ο R είναι *σώμα*.

(ii) Ο περιορισμός τής $\sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma$ επί τής εναλλάσσουσας ομάδας $\mathfrak{A}_n$ δίδει μια εμφύτευση $\mathfrak{A}_n \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(R)$, καθώς έχουμε

$$\{\mathbf{P}_\sigma | \sigma \in \mathfrak{A}_n\} = \mathrm{PMat}_{n\times n}(R) \cap \mathrm{SL}_n(R).$$

D.2.29 Ορισμός. Μέσω των προτάσεων D.1.5, D.2.17 και 2.1.16 είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{O}_n(F) := \left\{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(F) \;\middle|\; \mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}^{-1}\right\}}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathrm{GL}_n(F), \cdot)$ για οιοδήποτε σώμα F. Αυτή η υποομάδα καλείται, ιδιαιτέρως, **ορθογώνια ομάδα** βαθμού n (και τα στοιχεία της **ορθογώνιοι πίνακες**) υπεράνω τού F, ενώ η ομάδα

$$\boxed{\mathrm{SO}_n(F) := \mathrm{O}_n(F) \cap \mathrm{SL}_n(F)}$$

καλείται **ειδική ορθογώνια ομάδα** βαθμού n υπεράνω τού F.

D.2.30 Ορισμός. Για οιοδήποτε σώμα F ορίζουμε τον $(2n \times 2n)$-πίνακα

$$\widehat{\mathbf{I}}_n := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_n \\ \hline -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n\times n} \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{2n}(F).$$

Το σύνολο[7]

$$\boxed{\mathrm{Sp}_n(F) := \left\{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_{2n}(F) \;\middle|\; \mathbf{A}^\intercal \cdot \widehat{\mathbf{I}}_n = \widehat{\mathbf{I}}_n \cdot \mathbf{A}^{-1}\right\}}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathrm{GL}_{2n}(F), \cdot)$, τη λεγόμενη **συμπλεκτική ομάδα** βαθμού n υπεράνω τού F. (Τα στοιχεία τής $\mathrm{Sp}_n(F)$ καλούνται **συμπλεκτικοί πίνακες** υπεράνω τού F.)

D.2.31 Παρατήρηση. (i) $\mathbf{A} \in \mathrm{Sp}_n(F) \Longleftrightarrow \mathbf{A}^\intercal \in \mathrm{Sp}_n(F)$ (διότι $\widehat{\mathbf{I}}_n^{-1} = -\widehat{\mathbf{I}}_n$).

(ii) Εάν $n = 1$, τότε $\mathrm{Sp}_1(F) = \mathrm{SL}_2(F)$. Πράγματι· για κάθε $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(F)$ έχουμε αφ' ενός μεν

$$\mathbf{A}^\intercal \cdot \widehat{\mathbf{I}}_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_F & 1_F \\ -1_F & 0_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix},$$

αφ' ετέρου δε

$$\widehat{\mathbf{I}}_1 \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0_F & 1_F \\ -1_F & 0_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, $\mathbf{A}^\intercal \cdot \widehat{\mathbf{I}}_1 = \widehat{\mathbf{I}}_1 \cdot \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow (ad - bc)^{-1} = 1_F \Leftrightarrow ad - bc = 1_F$.

[7] Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν το σύμβολο $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ *αντί τού* $\mathrm{Sp}_n(F)$.

D.2.32 Ορισμός. Εάν ως $\overline{z}$ συμβολίσουμε τον *συζυγή* οιουδήποτε μιγαδικού αριθμού z και $\mathbf{A} = (z_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, τότε λέμε ότι ο πίνακας $\overline{\mathbf{A}} := (\overline{z_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$ είναι ο **συζυγής** και ο πίνακας $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$ ο **αναστροφοσυζυγής** τού $\mathbf{A}$.

D.2.33 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *και* $z \in \mathbb{C}$, *τότε ισχύουν τα κάτωθι:*
(i) $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$, $\overline{z\mathbf{A}} = \overline{z}\,\overline{\mathbf{A}}$ *και* $\overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}$.
(ii) $\overline{\mathbf{A}^{\mathsf{T}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.
(iii) *Εάν* $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, *τότε* $\overline{\mathbf{A}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *και* $(\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{-1}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφήνεται ως άσκηση. □

D.2.34 Ορισμός. Μέσω των προτάσεων D.1.5, D.2.17, D.2.33 και 2.1.16 είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1} \right\}}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$. Αυτή η υποομάδα καλείται, ιδιαιτέρως, **μοναδιακή ομάδα** βαθμού n (και τα στοιχεία της **μοναδιακοί πίνακες**) υπεράνω τού $\mathbb{C}$, ενώ η ομάδα

$$\boxed{\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) := \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}$$

καλείται **ειδική μοναδιακή ομάδα** βαθμού n υπεράνω τού $\mathbb{C}$.

D.2.35 Παρατήρηση. Εάν χρησιμοποιήσουμε τη συνήθη «ταύτιση» των $\mathbb{C}^n$ και $\mathbb{R}^{2n}$ μέσω τής αμφιρρίψεως

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, ..., z_n) \longmapsto (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

όπου $z_j := x_j + iy_j$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε την $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ με μια υποομάδα τής $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ και να συμπεράνουμε ότι

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).$$