12.1 (ΥΠΟ)ΟΡΘΟΘΕΤΕΣ & ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

12.1.1 Ορισμός. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και έστω $H \sqsubseteq G$. Ας υποθέσουμε ότι υφίσταται μια πεπερασμένη ακολουθία υποομάδων $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ τής G, τέτοια ώστε

$$H = H_0 \sqsubseteq H_1 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq H_{n-1} \sqsubseteq H_n = G. \tag{12.1}$$

(i) Λέμε ότι η (12.1) είναι μια **σειρά από την** H **στην** G. Οι μετέχουσες υποομάδες $H_0, H_1,..., H_n$ καλούνται **όροι** τής σειράς (12.1). Η (12.1) ονομάζεται **γνήσια σειρά** (ή **σειρά χωρίς επαναλήψεις**) **μήκους** n **από την** H **στην** G όταν[1]

$$H = H_0 \sqsubset H_1 \sqsubset \cdots \sqsubset H_{n-1} \sqsubset H_n = G. \tag{12.2}$$

(ii) Όταν χρησιμοποιούμε τη φράση **σειρά τής** G (και αντιστοίχως, **γνήσια σειρά μήκους** n **τής** G) εννοούμε μια σειρά (12.1) (και αντιστοίχως, μια σειρά (12.2)) από την τετριμμένη υποομάδα $\{e_G\}$ στην G.

(iii) Η (12.1) καλείται **υποορθόθετη σειρά από την** H **στην** G και συμβολίζεται ως

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.3}$$

όταν $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ για κάθε $i \in \{1,..., n\}$. Οι $H_i/H_{i-1},\ i \in \{1,..., n\}$, καλούνται **πηλικοομάδες** τής σειράς (12.3). Η (12.3) καλείται **γνήσια υποορθόθετη σειρά (μήκους** n**) από την** H **στην** G, σημειούμενη ως

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G, \tag{12.4}$$

όταν είναι γνήσια σειρά από την H στην G υπό την έννοια τού (i). Επίσης, όταν χρησιμοποιούμε τη φράση **υποορθόθετη σειρά τής** G (και αντιστοίχως, **γνήσια υποορθόθετη σειρά (μήκους** n**) τής** G) εννοούμε μια υποορθόθετη σειρά (12.3) (και αντιστοίχως, μια γνήσια υποορθόθετη σειρά (12.4)) από την τετριμμένη υποομάδα $\{e_G\}$ στην G.

(iv) Μια υποορθόθετη σειρά (12.3) τής G καλείται **ορθόθετη**[2] **σειρά τής** G όταν $H_i \trianglelefteq G$ για κάθε $i \in \{0, 1,..., n\}$.

12.1.2 Παρατήρηση. Λόγω τού θεωρήματος 4.1.20 και τής προτάσεως 4.4.2 η τάξη μιας ομάδας G που διαθέτει μια υποορθόθετη σειρά

$$\{e_G\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$$

δίδεται από τον τύπο

$$|G| = \prod_{i=1}^{n} |H_i : H_{i-1}| = \prod_{i=1}^{n} |H_i/H_{i-1}|\,.$$

[1] *Σύμβαση*: Όταν η ίδια η G είναι τετριμμένη, δεν θα κάνουμε διάκριση μεταξύ των εννοιών *σειρά* και *γνήσια σειρά* τής G (καθόσον η μοναδική σειρά τής G είναι εκείνη που απαρτίζεται από την ίδια την G).

[2] Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς, αντί τού όρου **υποορθόθετη σειρά** (subnormal series), χρησιμοποιούν τον όρο **ορθόθετη σειρά** (normal series) και αντί τού όρου **ορθόθετη σειρά** τον όρο **αναλλοίωτη σειρά** (invariant series).

12.1.3 Ορισμός. Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα και έστω

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.5}$$

μια υποορθόθετη σειρά από την H στην G. Μια υποορθόθετη σειρά

$$H = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{m-1} \trianglelefteq K_m = G \tag{12.6}$$

από την H στην G καλείται **εκλέπτυνση τής** (12.5) όταν $n \leq m$ και όταν (ταυτοχρόνως)

$$\exists j_0, j_1, ... j_n \in \mathbb{N}_0 : j_0 < j_1 < \cdots < j_n \leq m \ \text{ με } \ H_i = K_{j_i}, \forall i \in \{0, 1, ..., n\},$$

ή, με άλλα λόγια, όταν αποκτούμε την (12.6) από την (12.5) ύστερα από παρεμβολή $m-n$ επιπρόσθετων όρων μεταξύ κάποιων εκ των όρων τής (12.5). Η (12.6) καλείται **γνήσια εκλέπτυνση τής** (12.5) όταν

$$\exists j \in \{1, ..., m\} : H_i \neq K_j, \ \forall i \in \{0, 1, ..., n\},$$

ήτοι όταν το πλήθος των όρων τής (12.6) υπερβαίνει το πλήθος των όρων τής (12.5).

12.1.4 Ορισμός. Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Μια γνήσια υποορθόθετη σειρά (και αντιστοίχως, μια γνήσια ορθόθετη σειρά)

$$\{e_G\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$$

τής G καλείται **συνθετική σειρά τής** G (και αντιστοίχως, **επικεφαλής σειρά** ή **κύρια σειρά τής** G) όταν δεν διαθέτει γνήσιες εκλεπτύνσεις.

12.1.5 Πρόταση. *Έστω* $(G,\cdot)$ *μια μη τετριμμένη ομάδα και έστω*

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.7}$$

μια υποορθόθετη σειρά τής G. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η* (12.7) *είναι συνθετική σειρά τής* G.

(ii) *Οι πηλικοομάδες* H_i/H_{i-1}, $i \in \{1, ..., n\}$, *τής* (12.7) *είναι απλές ομάδες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Υποθέτουμε ότι η (12.7) είναι συνθετική σειρά τής G. Η (12.7) είναι εξ ορισμού γνήσια σειρά (μήκους $n \geq 1$) τής G, οπότε οι πηλικοομάδες H_i/H_{i-1}, $i \in \{1, ..., n\}$, είναι μη τετριμμένες. Εάν υπήρχε κάποιος $i_0 \in \{1, ..., n\}$, τέτοιος ώστε η πηλικοομάδα H_{i_0}/H_{i_0-1} να είναι μη απλή, τότε θα υπήρχε κάποια γνήσια, μη τετριμμένη υποομάδα $L \sqsubseteq H_{i_0}/H_{i_0-1}$, η οποία, λόγω των πορισμάτων 4.4.15 και 4.5.20, θα έπρεπε να είναι τής μορφής $L = K/H_{i_0-1}$ για κάποια $K \sqsubset G$ με $H_{i_0-1} \triangleleft K \triangleleft H_{i_0}$, οπότε η

$$\{e_G\} = H_0 \triangleleft \cdots \triangleleft H_{i_0-1} \triangleleft K \triangleleft H_{i_0} \triangleleft H_{i_0+1} \triangleleft \cdots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$$

θα ήταν *γνήσια* εκλέπτυνση τής (12.7), κάτι που θα αντέφασκε προς τον ορισμό τής συνθετικής σειράς. Άρα οι πηλικοομάδες H_i/H_{i-1}, $i \in \{1, ..., n\}$, τής (12.7) είναι κατ' ανάγκην απλές ομάδες.

(ii)⇒(i) Έστω ότι οι πηλικοομάδες $H_i/H_{i-1},\ i \in \{1,...,n\}$, τής (12.7) είναι απλές ομάδες. Ας υποθέσουμε ότι η (12.7) δεν είναι συνθετική σειρά τής G. Τότε η σειρά (12.7) είναι *είτε* μη γνήσια *είτε* γνήσια έχουσα κάποια γνήσια εκλέπτυνση. Στην πρώτη περίπτωση κάποια πηλικοομάδα της είναι τετριμμένη και, ως εκ τούτου, μη απλή. Άτοπο! Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε μια γνήσια εκλέπτυνσή της

$$\{e_G\} = H_0 = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G. \tag{12.8}$$

Εάν ο l είναι ο μέγιστος θετικός ακέραιος για τον οποίον η K_l είναι διαφορετική από οιονδήποτε όρο τής (12.7), τότε $0 < l < m$ και $K_{l+1} = H_\varrho$ για κάποιον ακέραιο ϱ με $0 < \varrho \leq m$. Από τον τρόπο επιλογής τού l και από το γεγονός ότι η (12.8) είναι μια γνήσια εκλέπτυνση τής (12.7) έπεται ότι

$$H_{\varrho-1} \lhd K_l \lhd K_{l+1} = H_\varrho.$$

Επομένως, βάσει τού πορίσματος 4.5.20 η πηλικοομάδα $K_l/H_{\varrho-1}$ είναι μια γνήσια, μη τετριμμένη, ορθόθετη υποομάδα τής πηλικοομάδας $H_\varrho/H_{\varrho-1}$, οπότε η $H_\varrho/H_{\varrho-1}$ δεν είναι απλή. Άτοπο! Άρα τελικώς η (12.7) είναι όντως συνθετική σειρά τής ομάδας G. □

12.1.6 Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένη ομάδα διαθέτει (τουλάχιστον) μία συνθετική σειρά.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω G τυχούσα πεπερασμένη ομάδα. Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μορφή τής μαθηματικής επαγωγής ως προς την τάξη $|G|$ τής G. Εάν $|G| = 1$, τότε η G είναι τετριμμένη, οπότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Για $|G| \geq 2$ υποθέτουμε ότι είναι αληθής *για κάθε πεπερασμένη ομάδα έχουσα τάξη* $< |G|$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση πρώτη. Εάν η G είναι απλή, τότε (προφανώς) η $\{e_G\} \lhd G$ είναι μια συνθετική σειρά.

Περίπτωση δεύτερη. Εάν η G δεν είναι απλή, τότε περιέχει κάποια γνήσια, μη τετριμμένη, ορθόθετη υποομάδα, ας την πούμε H. Επειδή $1 < |H| < |G|$, η επαγωγική υπόθεση εγγυάται την ύπαρξη μιας συνθετικής σειράς

$$\{e_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = H$$

τής H μήκους $n \geq 1$. Σημειωτέον ότι (λόγω τής συνεπαγωγής (i)⇒(ii) τής προτάσεως 12.1.5) οι πηλικοομάδες $H_i/H_{i-1},\ i \in \{1,...,n\}$, είναι απλές ομάδες. Παρομοίως, επειδή $1 < |G/H| < |G|$, η επαγωγική υπόθεση εγγυάται την ύπαρξη μιας συνθετικής σειράς

$$\{e_{G/H}\} = H = L_0 \lhd L_1 \lhd \cdots \lhd L_{m-1} \lhd L_m = G/H$$

τής G/H μήκους $m \geq 1$. Κατά τα πορίσματα 4.4.15 και 4.5.20 κάθε L_j, $1 \leq j \leq m$, οφείλει να είναι μια πηλικοομάδα τής μορφής $L_j = K_j/H$, όπου

$$H \lhd K_j \ (K_m = G) \ \text{ και } \ K_{j-1} \lhd K_j,\ \forall j \in \{1,...,m\}.$$

Λόγω τής συνεπαγωγής (i)⇒(ii) τής προτάσεως 12.1.5 και τού 3ου θεωρήματος ισομορφισμών 4.5.21 οι πηλικοομάδες

$$L_j/L_{j-1} = (K_j/H)\,/\,(K_{j-1}/H) \cong K_j/K_{j-1},\ j \in \{1,...,m\},$$

είναι απλές ομάδες. Εν συνεχεία, θεωρούμε τη γνήσια υποορθόθετη σειρά

$$\{e_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = H \lhd K_1 \lhd K_2 \lhd \cdots \lhd K_{m-1} \lhd K_m = G$$

τής G (μήκους $m+n$). Αυτή (λόγω τής αντίστροφης συνεπαγωγής (ii)⇒(i) τής προτάσεως 12.1.5) είναι μια συνθετική σειρά τής G, διότι (βάσει των προαναφερθέντων) όλες οι πηλικοομάδες της είναι απλές ομάδες. □

12.1.7 Παράδειγμα. Βάσει των προαναφερθέντων στα εδάφια 4.1.43 και 4.2.18 οι μόνες υποορθόθετες (κατ' ανάγκην ορθόθετες) συνθετικές (κατ' ανάγκην επικεφαλής) σειρές τής ομάδας $\mathbf{Q}$ των τετρανίων είναι οι εξής:

$$\{\mathbf{I}_2\} \lhd \langle -\mathbf{I}_2 \rangle \lhd \langle \mathbf{i} \rangle \lhd \mathbf{Q},$$
$$\{\mathbf{I}_2\} \lhd \langle -\mathbf{I}_2 \rangle \lhd \langle \mathbf{j} \rangle \lhd \mathbf{Q},$$
$$\{\mathbf{I}_2\} \lhd \langle -\mathbf{I}_2 \rangle \lhd \langle \mathbf{k} \rangle \lhd \mathbf{Q}.$$

12.1.8 Σημείωση. Υπάρχουν άπειρες ομάδες, όπως η $(\mathbb{Z},+)$, οι οποίες δεν διαθέτουν καμία συνθετική σειρά.

► **Θεώρημα των C. Jordan και O. Hölder**. Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε το θεμελιώδες θεώρημα 12.1.14 που χαρακτηρίζει τις συνθετικές σειρές. Αυτό απεδείχθη μερικώς από τον C. Jordan (1838-1922) το έτος[3] 1869 και πλήρως από τον O. Hölder (1859-1937) το[4] 1895, αλλά μόνον για πεπερασμένες ομάδες. Μια απόδειξή του ισχύουσα για *οιεσδήποτε* ομάδες (έχουσες συνθετικές σειρές) δημοσιεύθηκε το[5] 1928 από τον O. Schreier (1901-1929) και χρησιμοποιεί το θεώρημα 12.1.11. Η απόδειξη τού θεωρήματος 12.1.11 τού Schreier έτυχε αισθητής απλουστεύσεως (το έτος[6] 1934) από τον H.J. Zassenhaus (1912-1991) μέσω τού ακόλουθου λήμματος:

12.1.9 Λήμμα. («Λήμμα τής πεταλούδας», H.J. Zassenhaus, 1934.) *Έστω ότι οι* A_1, A_2, B_1, B_2 *είναι υποομάδες μιας ομάδας* G, *τέτοιες ώστε* $A_1 \trianglelefteq A_2$ *και* $B_1 \trianglelefteq B_2$. *Εάν*

$$\boxed{L_{i,j} := A_i \cap B_j,\ i,j \in \{1,2\},}$$

τότε $A_1L_{2,1} \trianglelefteq A_1L_{2,2}$, $B_1L_{1,2} \trianglelefteq B_1L_{2,2}$ *και*

$$\boxed{A_1L_{2,2}/A_1L_{2,1} \cong B_1L_{2,2}/B_1L_{1,2}.}$$

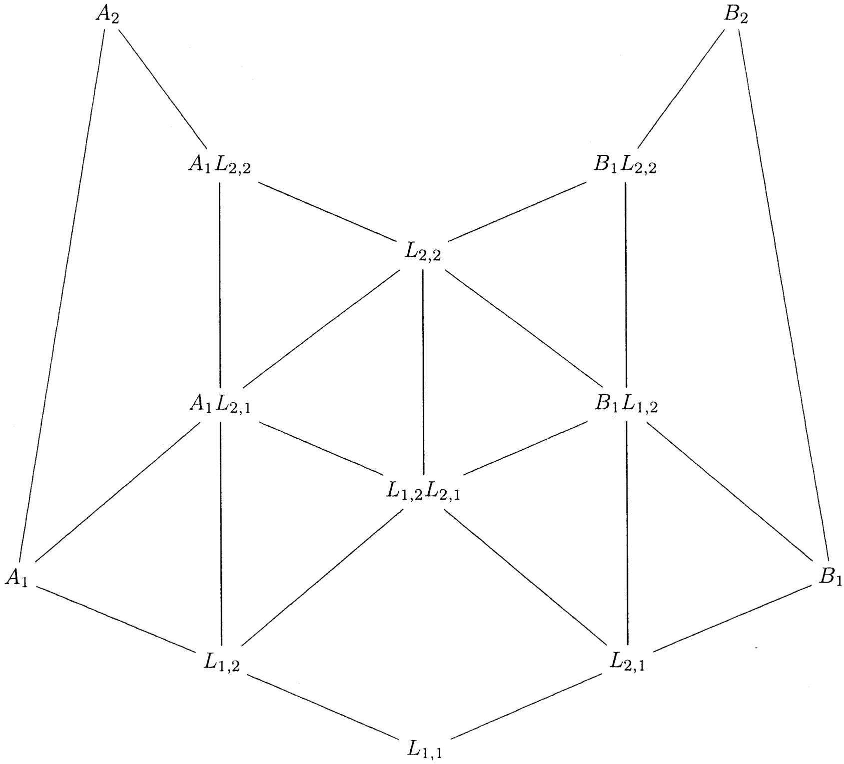
[3] C. Jordan: *Commentaire sur Galois*, Math. Ann. **1** (1869), 141-160.

[4] O. Hölder: *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen,* Math. Ann., Bd. **34** (1895), 321-422.

[5] O. Schreier: *Über den Jordan-Hölderschen Satz,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. **6** (1928), 300-302.

[6] H.J. Zassenhaus: *Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. **10** (1934), 106-108.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για ενορατική διευκόλυνσή μας χρησιμοποιούμε το διάγραμμα τού Hasse (που ομοιάζει με πεταλούδα) για τις ομάδες τις μετέχουσες στη διατύπωση τού λήμματος.



Επειδή $B_1 \trianglelefteq B_2$, έχουμε προφανώς

$$L_{2,1} := A_2 \cap B_1 \trianglelefteq A_2 \cap B_2 =: L_{2,2}.$$

Κι επειδή $A_1 \trianglelefteq A_2$, έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής τού πορίσματος 4.5.23 (με τις $A_1, A_2, L_{2,1}$ και $L_{2,2}$ στη θέση των εκεί παρατεθεισών ομάδων H, G, K_1 και K_2). Εξ αυτού συνάγουμε ότι $A_1L_{2,1} \trianglelefteq A_1L_{2,2}$, καθώς και την ύπαρξη ενός ισομορφισμού

$$A_1L_{2,2}/A_1L_{2,1} \cong L_{2,2}/(L_{2,1}(L_{2,2} \cap A_1)) = L_{2,2}/L_{2,1}L_{1,2}, \tag{12.9}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το ότι

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow L_{2,2} \cap A_1 = (A_2 \cap B_2) \cap A_1 = (A_2 \cap A_1) \cap B_2 = A_1 \cap B_2 =: L_{1,2}.$$

Κατ' αναλογίαν, επειδή $A_1 \trianglelefteq A_2$, έχουμε προφανώς

$$L_{1,2} := A_1 \cap B_2 \trianglelefteq A_2 \cap B_2 =: L_{2,2}.$$

Κι επειδή $B_1 \trianglelefteq B_2$, εφαρμόζοντας εκ νέου το πόρισμα 4.5.23 (με τις $B_1, B_2, L_{1,2}$ και $L_{2,2}$ στη θέση των εκεί παρατεθεισών ομάδων H, G, K_1 και K_2) λαμβάνουμε

$B_1L_{1,2} \trianglelefteq B_1L_{2,2}$ και

$$B_1L_{2,2}/B_1L_{1,2} \cong L_{2,2}/(L_{1,2}(L_{2,2} \cap B_1)) = L_{2,2}/L_{1,2}L_{2,1}, \tag{12.10}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το ότι

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow L_{2,2} \cap B_1 = (A_2 \cap B_2) \cap B_1 = A_2 \cap (B_2 \cap B_1) = A_2 \cap B_1 =: L_{2,1}.$$

Λαμβανομένου υπ' όψιν τού ότι $L_{2,1}L_{1,2} = L_{1,2}L_{2,1}$ (καθόσον αμφότερες οι $L_{1,2}$ και $L_{2,1}$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής $L_{2,2}$) οι (12.9) και (12.10) δίδουν έναν ισομορφισμό

$$A_1L_{2,2}/A_1L_{2,1} \cong B_1L_{2,2}/B_1L_{1,2}$$

(βλ. 2.4.21 (ii) και (iii)). □

12.1.10 Ορισμός. Λέμε ότι δυο υποορθόθετες σειρές

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

και

$$\{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{m-1} \trianglelefteq K_m = G$$

μιας ομάδας G είναι **ισόμορφες** («σε επίπεδο πηλικοομάδων») όταν $m = n$ και όταν (ταυτοχρόνως)

$$\boxed{\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : H_i/H_{i-1} \cong K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1}, \ \forall i \in \{1,...,n\}.}$$

(Είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι η σχέση ισομορφίας αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επί οιουδήποτε συνόλου απαρτιζομένου από υποορθόθετες σειρές τής G.)

12.1.11 Θεώρημα. (**O. Schreier**, 1928.) *Δυο υποορθόθετες (και αντιστοίχως, δυο ορθόθετες) σειρές μιας ομάδας G διαθέτουν πάντοτε ισόμορφες εκλεπτύνσεις.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.11}$$

και

$$\{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{m-1} \trianglelefteq K_m = G \tag{12.12}$$

είναι δυο υποορθόθετες σειρές μιας ομάδας G. Θα κατασκευάσουμε μια εκλέπτυνση τής (12.11) παρεμβάλλοντας $m-1$ ομάδες $H_{i,j}$, $j \in \{1,...,m-1\}$, μεταξύ των όρων H_{i-1} και H_i για κάθε $i \in \{1,...,n\}$. Κατ' αναλογίαν, θα κατασκευάσουμε μια εκλέπτυνση τής (12.12) παρεμβάλλοντας $n-1$ ομάδες $K_{i,j}$, $i \in \{1,...,m-1\}$, μεταξύ των όρων K_{j-1} και K_j για κάθε $j \in \{1,...,m\}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, καθεμιά εκ των δύο δημιουργούμενων εκλεπτύνσεων

$$\begin{aligned} \{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_{1,1} \trianglelefteq H_{1,2} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{1,m-1} \trianglelefteq H_1 \\ \trianglelefteq H_{2,1} \trianglelefteq H_{2,2} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{2,m-1} \trianglelefteq H_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \trianglelefteq H_{n,1} \trianglelefteq H_{n,2} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n,m-1} \trianglelefteq H_n = G \end{aligned} \tag{12.13}$$

και

$$\begin{aligned} \{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_{1,1} \trianglelefteq K_{2,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{n-1,1} \trianglelefteq K_1 \\ \trianglelefteq K_{1,2} \trianglelefteq K_{2,2} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{n-1,2} \trianglelefteq K_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \trianglelefteq K_{1,m} \trianglelefteq K_{2,m} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{n-1,m} \trianglelefteq K_m = G \end{aligned} \tag{12.14}$$

θα έχει mn όρους. Προς τούτο ορίζουμε για κάθε δείκτη $i \in \{1,...,n\}$ και κάθε δείκτη $j \in \{1,...,m\}$

$$\boxed{H_{i,j} := H_{i-1}\,(H_i \cap K_j)} \quad \text{και} \quad \boxed{K_{i,j} := K_{j-1}\,(K_j \cap H_i)}$$

και παρατηρούμε ότι $H_{i,j} \sqsubseteq G$ (καθόσον[7] $H_i \cap K_j \sqsubseteq H_i$ και $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$) και, κατ' αναλογίαν, ότι $K_{i,j} \sqsubseteq G$ (καθόσον $K_j \cap H_i \sqsubseteq K_j$ και $K_{j-1} \trianglelefteq K_j$). Επιπροσθέτως, για κάθε $i \in \{1,...,n\}$ και κάθε $j \in \{1,...,m\}$ έχουμε

$$H_{i-1} \sqsubseteq H_{i,1} \sqsubseteq H_{i,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq H_{i,m} = H_i$$

και

$$K_{j-1} \sqsubseteq K_{1,j} \sqsubseteq K_{2,j} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq K_{n,j} = H_j.$$

Τέλος, ως ομάδες αφετηρίας τής διπλής αριθμήσεως θεωρούμε τις

$$\boxed{H_{i,0} := H_{i-1} = H_{i-1}\,(H_i \cap K_0)} \quad \text{και} \quad \boxed{K_{0,j} := K_{j-1} = K_{j-1}\,(K_j \cap H_0)\,.}$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα τής πεταλούδας 12.1.9 (με τα H_{i-1}, H_i, K_{j-1} και K_j στη θέση των εκεί παρατεθεισών ομάδων A_1, A_2, B_1 και B_2) λαμβάνουμε

$$H_{i,j-1} \trianglelefteq H_{i,j},\ K_{i-1,j} \trianglelefteq K_{i,j} \ \text{ και } \ H_{i,j}/H_{i,j-1} \cong K_{i,j}/K_{i-1,j}. \tag{12.15}$$

Ως εκ τούτου, οι προηγηθέντες ορισμοί οδηγούν πράγματι στη δημιουργία δύο εκλεπτύνσεων (12.13) και (12.14) τής G (καθεμιά των οποίων έχει mn όρους). Λόγω τής υπάρξεως των ισομορφισμών (12.15) μεταξύ των πηλικοομάδων τους οι (12.13) και (12.14) είναι ισόμορφες υποορθόθετες σειρές τής G υπό την έννοια τού ορισμού 12.1.10. (Η ανωτέρω απόδειξη παραμένει εν ισχύ ακόμη και όταν οι (12.11) και (12.12) είναι δυο *ορθόθετες* σειρές τής G. Σε αυτήν την περίπτωση, αποδεικνύουμε μέσω των προτάσεων 4.2.8 και 4.2.24 ότι οι ορισθείσες ομάδες $H_{i,j}$ και $K_{i,j}$ είναι ορθόθετες υποομάδες τής G.) □

[7] Βλ. πρόταση 4.2.24.

12.1.12 Πρόταση. *Έστω G μια ομάδα και έστω*

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.16}$$

μια υποορθόθετη σειρά της. Εάν η (12.16) *είναι ισόμορφη με μια συνθετική σειρά τής G, τότε η* (12.16) *είναι αφ' εαυτής συνθετική σειρά τής G.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν η G είναι τετριμμένη, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανής. Εάν η G δεν είναι τετριμμένη και εάν η (12.16) είναι ισόμορφη με μια συνθετική σειρά

$$\{e_G\} = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \cdots \triangleleft K_{m-1} \triangleleft K_m = G \tag{12.17}$$

τής G, τότε $m = n \geq 1$ και (ταυτοχρόνως)

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : H_i/H_{i-1} \cong K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1},\ \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Επειδή η (12.17) είναι μια συνθετική σειρά τής G, καμία εκ των πηλικοομάδων $K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1}$ δεν θα είναι τετριμμένη. Άρα και η (12.16) οφείλει να είναι *γνήσια* υποορθόθετη σειρά τής ομάδας G. Λόγω τής συνεπαγωγής (i)⇒(ii) τής προτάσεως 12.1.5 οι πηλικοομάδες $K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1}$ είναι απλές ομάδες. Άρα και οι πηλικοομάδες H_i/H_{i-1} είναι απλές ομάδες. Αυτό σημαίνει ότι και η (12.16) είναι αφ' εαυτής συνθετική σειρά τής G (βάσει τής αντίστροφης συνεπαγωγής (ii)⇒(i) τής προτάσεως 12.1.5). □

12.1.13 Πρόταση. *Εάν μια ομάδα G διαθέτει συνθετικές σειρές, τότε κάθε γνήσια υποορθόθετη σειρά της έχει μια εκλέπτυνση η οποία είναι συνθετική σειρά αυτής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι η $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ είναι μια γνήσια υποορθόθετη σειρά τής G και η $(K_j)_{0\leq j\leq m}$ μια συνθετική σειρά τής G. Κατά το θεώρημα 12.1.11 τού Schreier υφίστανται εκλεπτύνσεις αυτών, ας τις πούμε (εν συντομία) $(\check{H}_i)_{0\leq i\leq l}$ και $(\check{K}_i)_{0\leq i\leq l}$, αντιστοίχως (όπου $l = mn$), οι οποίες είναι ισόμορφες (υπό την έννοια τού ορισμού 12.1.10). Εάν υπάρχουν επαναλαμβανόμενοι όροι σε αυτές, τότε, κατόπιν απαλοιφής (ήτοι κατόπιν αφαιρέσεως $\nu - 1$ όρων, εάν υπάρχουν όροι που επαναλαμβάνονται ν φορές για κάποιον $\nu \geq 2$) καταλήγουμε στον σχηματισμό δύο ισομόρφων *γνησίων* υποορθόθετων σειρών τής G, ας πούμε των $(\tilde{H}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ και $(\tilde{K}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$, αντιστοίχως. Επειδή οι $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ και $(K_j)_{0\leq j\leq m}$ είναι εξ υποθέσεως *γνήσιες* υποορθόθετες σειρές τής G, οι $(\tilde{H}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ και $(\tilde{K}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ αποτελούν *εκλεπτύνσεις* των $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ και $(K_j)_{0\leq j\leq m}$, αντιστοίχως. Επιπροσθέτως, επειδή η $(\tilde{K}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ είναι μια *γνήσια* υποορθόθετη σειρά τής G και η $(K_j)_{0\leq j\leq m}$ (ούσα συνθετική σειρά) δεν διαθέτει γνήσιες εκλεπτύνσεις, οι $(\tilde{K}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ και $(K_j)_{0\leq j\leq m}$ *οφείλουν να συμπίπτουν*! (Άρα $m = \kappa$ και $K_i = \tilde{K}_i$ για κάθε $i \in \{1,...,\kappa\}$.) Αυτό σημαίνει ότι η $(\tilde{H}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ είναι ισόμορφη με τη συνθετική σειρά $(K_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ τής G, οπότε (βάσει τής προτάσεως 12.1.12) η $(\tilde{H}_i)_{0\leq i\leq \kappa}$ είναι συνθετική σειρά τής G. □

12.1.14 Θεώρημα. (“**Θεώρημα των C. Jordan και O. Hölder**”.) *Εάν μια ομάδα G διαθέτει συνθετικές σειρές, τότε δύο οιεσδήποτε συνθετικές σειρές αυτής είναι ισόμορφες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν οι $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ και $(K_j)_{0\leq j\leq m}$ είναι δυο συνθετικές σειρές τής G, τότε κατά το θεώρημα 12.1.11 τού Schreier υφίστανται εκλεπτύνσεις αυτών που είναι μεταξύ τους ισόμορφες. Ωστόσο, επειδή (εξ ορισμού) οι $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ και $(K_j)_{0\leq j\leq m}$ δεν διαθέτουν γνήσιες εκλεπτύνσεις, θα πρέπει αυτές να είναι εξαρχής μεταξύ τους ισόμορφες. □

$\boxed{12.2}$ ΕΠΙΛΥΣΙΜΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

12.2.1 Ορισμός. Μια υποορθόθετη σειρά

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G$$

μιας ομάδας G καλείται **επιλύσιμη σειρά τής** G όταν *είτε* $n = 0$ *είτε* $n \geq 1$ και όλες οι πηλικοομάδες της H_i/H_{i-1}, $i \in \{1,...,n\}$, είναι αβελιανές ομάδες. Η ομάδα G καλείται **επιλύσιμη ομάδα** όταν διαθέτει (τουλάχιστον) μία επιλύσιμη σειρά. (Προφανώς, η τετριμμένη ομάδα είναι εξ ορισμού επιλύσιμη. Επίσης, κάθε αβελιανή μη τετριμμένη ομάδα G είναι επιλύσιμη, διότι η $\{e_G\} = H_0 \triangleleft H_1 = G$ είναι μια επιλύσιμη σειρά της.)

12.2.2 Παραδείγματα. (i) Η ομάδα $\mathbf{Q}$ των τετρανίων είναι επιλύσιμη. Εν προκειμένω, οιαδήποτε εκ των (τριών) επικεφαλής σειρών τής $\mathbf{Q}$ (βλ. 12.1.7) είναι επιλύσιμη. Π.χ. η

$$\{\mathbf{I}_2\} \triangleleft \langle -\mathbf{I}_2 \rangle \triangleleft \langle \mathbf{i} \rangle \triangleleft \mathbf{Q}$$

είναι επιλύσιμη, διότι $\langle -\mathbf{I}_2\rangle/\{\mathbf{I}_2\} \cong \langle \mathbf{i}\rangle/\langle -\mathbf{I}_2\rangle \cong \mathbf{Q}/\langle \mathbf{i}\rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, και έστω $\mathbf{D}_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ η n-οστή διεδρική ομάδα (βλ. εδάφιο 3.4.4). Η κυκλική ομάδα $\langle \beta \rangle$ έχει τάξη n, οπότε από το θεώρημα 4.1.22 τού Lagrange συνάγουμε ότι $|\mathbf{D}_n : \langle \beta \rangle| = 2$. Άρα $\langle \beta \rangle \triangleleft \mathbf{D}_n$ (βλ. πρόταση 4.2.13). Η (γνήσια) ορθόθετη σειρά

$$\{\mathrm{id}_{\mathcal{E}_n}\} \triangleleft \langle \beta \rangle \triangleleft \mathbf{D}_n$$

τής $\mathbf{D}_n$ είναι επιλύσιμη, διότι $\langle \beta \rangle \,/\, \{\mathrm{id}_{\mathcal{E}_n}\} \cong \mathbb{Z}_n$ και $\mathbf{D}_n/\, \langle \beta \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

(iii) Η άπειρη διεδρική ομάδα $\mathbf{D}_\infty = \langle S, T_{-1} \rangle$ (βλ. εδάφια 3.4.14 και 3.4.15) αποτελεί ένα παράδειγμα άπειρης επιλύσιμης ομάδας, διότι η

$$\{\mathrm{id}_\mathbb{R}\} \triangleleft \langle T_{-1} \rangle \triangleleft \mathbf{D}_\infty$$

είναι επιλύσιμη σειρά τής $\mathbf{D}_\infty$ (καθόσον $\langle T_{-1}\rangle/\{\mathrm{id}_\mathbb{R}\} \cong \mathbb{Z}$ και[8] $\mathbf{D}_\infty/\langle T_{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}_2$).

(iv) Κάθε μη αβελιανή απλή ομάδα G είναι *μη επιλύσιμη*, διότι η $\{e_G\} \triangleleft G$ είναι η μόνη υποορθόθετη (και, μάλιστα, η μόνη συνθετική) σειρά τής G. Π.χ., οι $\mathfrak{A}_n$, $n \geq 5$, και η $\mathfrak{A}_\infty$ είναι μη επιλύσιμες (βλ. 4.3.6 και 4.3.8).

[8] Σημειωτέον ότι $\mathbf{D}_\infty = \left\{ S^j \circ T_{-1}^k \,|\, j \in \{0,1\}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ και ότι το στοιχείο T_{-1} παράγει μια άπειρη κυκλική ομάδα. Ο δείκτης $|\mathbf{D}_\infty : \langle T_{-1}\rangle|$ τής $\langle T_{-1}\rangle$ εντός τής $\mathbf{D}_\infty$ ισούται με 2, καθότι $\mathbf{D}_\infty = \langle T_{-1}\rangle \coprod (S \circ \langle T_{-1}\rangle)$. Αυτό, λόγω τής προτάσεως 4.2.13, σημαίνει ότι $\langle T_{-1}\rangle \triangleleft \mathbf{D}_\infty$. Επιπροσθέτως, $|\mathbf{D}_\infty/\,\langle T_{-1}\rangle| = |\mathbf{D}_\infty : \langle T_{-1}\rangle| = 2$ (βλ. πρόταση 4.4.2), οπότε $\mathbf{D}_\infty/\langle T_{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ (βλ. 2.3.19 και 2.4.23 (ii)).

12.2.3 Πρόταση. *Μια υποορθόθετη σειρά μιας ομάδας G, η οποία είναι ισόμορφη με μια επιλύσιμη σειρά τής G, είναι αφ' εαυτής επιλύσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς 12.1.10 και 12.2.1. □

12.2.4 Πρόταση. *Κάθε εκλέπτυνση μιας επιλύσιμης σειράς μιας ομάδας G είναι επιλύσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.18}$$

μια επιλύσιμη σειρά μιας ομάδας G και έστω

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{i-1} \trianglelefteq K \trianglelefteq H_i \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.19}$$

μια εκλέπτυνση αυτής κατασκευαζόμενη μέσω παρεμβολής *μίας και μόνον υποομάδας* K. Η πηλικοομάδα K/H_{i-1} είναι υποομάδα τής H_i/H_{i-1} (βλ. 4.4.15). Επειδή η H_i/H_{i-1} είναι αβελιανή, η K/H_{i-1} είναι ωσαύτως αβελιανή. Επιπροσθέτως, λόγω τού 3ου θεωρήματος ισομορφισμών 4.5.21, *και* η πηλικοομάδα

$$H_i/K \cong (H_i/H_{i-1}) \,/\, (K/H_{i-1})$$

είναι κατ' ανάγκην αβελιανή. Άρα η (12.19) είναι επιλύσιμη. Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι *κάθε εκλέπτυνση*

$$\{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{m-1} \trianglelefteq K_m = G$$

τής (12.18), για την οποία $n \leq m$ και

$$\exists j_0, j_1, ... j_n \in \mathbb{N}_0 : j_0 < j_1 < \cdots < j_n \leq m \ \text{ με } \ H_i = K_{j_i}, \forall i \in \{0, 1, ..., n\},$$

μπορεί να ιδωθεί ως το αποτέλεσμα (πεπερασμένου πλήθους) *διαδοχικών εκλεπτύνσεων* τού "τύπου" (12.19) (ήτοι εκλεπτύνσεων, καθεμιά των οποίων προκύπτει από την αμέσως προηγούμενή της ύστερα από παρεμβολή *μίας και μόνον υποομάδας*). Διαδοχική χρήση τής ίδιας επιχειρηματολογίας (ή, ακριβέστερα, συνήθης μαθηματική επαγωγή ως προς το πλήθος των παρεμβαλλομένων υποομάδων) αποπερατώνει την απόδειξη τής προτάσεως. □

12.2.5 Πρόταση. *Κάθε υποομάδα μιας επιλύσιμης ομάδας είναι επιλύσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω G μια επιλύσιμη ομάδα και έστω $K \sqsubseteq G$. Εάν $K = G$, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανής. Εάν $K \sqsubset G$ και εάν η

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.20}$$

είναι μια επιλύσιμη σειρά τής ομάδας G (κατ' ανάγκην με $n \geq 1$), τότε θέτοντας $K_i := K \cap H_i$ για κάθε $i \in \{0, 1, ..., n\}$, παρατηρούμε ότι

$$H_{i-1} \trianglelefteq H_i,\ K_i \sqsubseteq H_i \underset{4.2.24}{\Longrightarrow} H_{i-1}K_i \sqsubseteq H_i,$$

για κάθε $i \in \{1,...,n\}$. Εφαρμόζοντας το λήμμα τής πεταλούδας 12.1.9 για τις ομάδες $\{e_G\}, K, H_{i-1}, H_i$ (στη θέση των εκεί παρατεθεισών ομάδων A_1, A_2, B_1 και B_2) λαμβάνουμε

$$K_{i-1} \trianglelefteq K_i,\ H_{i-1} \trianglelefteq H_{i-1}K_i \quad \text{και} \quad H_{i-1}K_i/H_{i-1} \cong K_i/K_{i-1},$$

για κάθε $i \in \{1,...,n\}$. Επομένως η

$$\{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{n-1} \trianglelefteq K_n = K \tag{12.21}$$

είναι μια υποορθόθετη σειρά τής K, οι πηλικοομάδες τής οποίας είναι ισόμορφες με τις πηλικοομάδες $H_{i-1}K_i/H_{i-1}$. Επειδή $H_{i-1} \trianglelefteq H_{i-1}K_i \sqsubseteq H_i$, η πηλικοομάδα $H_{i-1}K_i/H_{i-1}$ είναι μια υποομάδα τής πηλικοομάδας H_i/H_{i-1} (βλ. το (i) τού πορίσματος 4.4.15). Η H_i/H_{i-1}, ούσα πηλικοομάδα τής αρχικώς θεωρηθείσας επιλύσιμης σειράς (12.20) τής G, είναι αβελιανή. Κατά συνέπειαν, και η υποομάδα της $H_{i-1}K_i/H_{i-1}$ είναι αβελιανή (για κάθε $i \in \{1,...,n\}$). Ως εκ τούτου, όλες οι πηλικοομάδες τής (12.21) είναι αβελιανές. Τούτο σημαίνει ότι η (12.21) είναι μια επιλύσιμη σειρά τής H. $\square$

12.2.6 Πρόταση. *Έστω G μια επιλύσιμη ομάδα και έστω $K \trianglelefteq G$. Τότε η πηλικοομάδα G/K είναι επιλύσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $K = \{e_G\}$ ή $K = G$, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανής. Εάν $\{e_G\} \sqsubset K \sqsubset G$ και εάν η

$$\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G \tag{12.22}$$

είναι μια επιλύσιμη σειρά τής G (κατ' ανάγκην με $n \geq 1$), τότε θεωρούμε τη (γνήσια) ορθόθετη σειρά

$$\{e_G\} \triangleleft K \triangleleft G \tag{12.23}$$

τής G. Σύμφωνα με το θεώρημα 12.1.11 τού Schreier υφίστανται εκλεπτύνσεις των (12.22) και (12.23) που είναι μεταξύ τους ισόμορφες. Ας υποθέσουμε ότι η

$$\begin{aligned} \{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{m-2} \\ \trianglelefteq K_{m-1} \trianglelefteq K_m = K \trianglelefteq K_{m+1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{l-1} \trianglelefteq K_l = G \end{aligned} \tag{12.24}$$

είναι μια εκλέπτυνση τής (12.23) που είναι ισόμορφη με μια εκλέπτυνση τής (12.22), για κάποιους φυσικούς αριθμούς m, l με $m+1 \leq l$. Κάνοντας χρήση των προτάσεων 12.2.3 και 12.2.4 συνάγουμε ότι η (12.24) είναι μια επιλύσιμη σειρά τής G. Ιδιαιτέρως, οι πηλικοομάδες K_i/K_{i-1}, $i \in \{m+1,...,l\}$ είναι αβελιανές. Έστω $\pi_K : G \longrightarrow G/K$ ο φυσικός επιμορφισμός. Επειδή

$$K \sqsubseteq K_{i-1} \trianglelefteq K_i \Longrightarrow \pi_K(K_{i-1}) = K_{i-1}/K \trianglelefteq K_i/K = \pi_K(K_i)$$

(βλ. 4.4.15 και 4.5.20) για κάθε $i \in \{m+1,...,l\}$, έχουμε τη δυνατότητα σχηματισμού τής υποορθόθετης σειράς

$$\begin{aligned} \{e_{G/K}\} \cong \{e_K\} \cong K/K = K_m/K \trianglelefteq K_{m+1}/K \trianglelefteq \cdots \\ \cdots \trianglelefteq K_{l-2}/K \trianglelefteq K_{l-1}/K \trianglelefteq K_l/K = G/K \end{aligned} \tag{12.25}$$

τής πηλικοομάδας G/K. Λόγω τού 3ου θεωρήματος ισομορφισμών 4.5.21 οι πηλικοομάδες

$$(K_i/K)\,/\,(K_{i-1}/K) \cong K_i/K_{i-1},\ i \in \{m+1,...,l\},$$

είναι αβελιανές. Άρα η (12.25) είναι μια επιλύσιμη σειρά τής G/K. □

12.2.7 Θεώρημα. *Έστω G μια ομάδα και έστω $K \trianglelefteq G$. Τότε η G είναι επιλύσιμη εάν και μόνον εάν αμφότερες οι K και G/K είναι επιλύσιμες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν η G είναι επιλύσιμη, τότε, σύμφωνα με τις προτάσεις 12.2.5 και 12.2.6, αμφότερες οι K και G/K είναι επιλύσιμες. Αντιστρόφως τώρα· εάν υποθέσουμε ότι αμφότερες οι K και G/K είναι επιλύσιμες, τότε υφίστανται επιλύσιμες σειρές

$$\{e_G\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_{n-1} \trianglelefteq K_n = K$$

και

$$\{e_{G/K}\} = \{K\} = L_0 \trianglelefteq L_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq L_{m-1} \trianglelefteq L_m = G/K$$

αυτών των ομάδων. Ως εκ τούτου, οι πηλικοομάδες

$$K_i/K_{i-1}, i \in \{1,...,n\},\ \ L_j/L_{j-1}, j \in \{1,...,m\}$$

είναι αβελιανές. Κατά τα πορίσματα 4.4.15 και 4.5.20 κάθε L_j, $1 \leq j \leq m$, οφείλει να είναι μια πηλικοομάδα τής μορφής $L_j = H_j/K$, όπου

$$K \triangleleft H_j\ (H_m = G)\ \text{ και }\ H_{j-1} \triangleleft H_j,\ \forall j \in \{2,...,m\}.$$

Λόγω τού 3ου θεωρήματος ισομορφισμών 4.5.21 οι πηλικοομάδες

$$H_j/H_{j-1} \cong (H_j/K)\,/\,(H_{j-1}/K) = L_j/L_{j-1}$$

είναι αβελιανές για κάθε $j \in \{2,...,m\}$. Κατά συνέπειαν, η

$$\{e_G\} = K_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_n = K =: H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{m-1} \trianglelefteq H_m = G$$

είναι μια επιλύσιμη σειρά τής G. □

12.2.8 Εφαρμογή. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_n$ είναι επιλύσιμη όταν $n \leq 4$ και μη επιλύσιμη όταν $n \geq 5$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n \leq 2$ η $\mathfrak{S}_n$ είναι αβελιανή και, κατ' επέκταση, επιλύσιμη. Η $\mathfrak{S}_3$ είναι επιλύσιμη, διότι η $\{\mathrm{id}\} \triangleleft \mathfrak{A}_3 \triangleleft \mathfrak{S}_3$ είναι επιλύσιμη σειρά αυτής (καθόσον $\mathfrak{A}_3/\{\mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}_3$ και $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}_2$). Η $\mathfrak{S}_4$ είναι ωσαύτως επιλύσιμη, διότι η

$$\{\mathrm{id}\} \triangleleft \mathbf{V} \triangleleft \mathfrak{A}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$$

είναι επιλύσιμη σειρά αυτής (καθόσον οι πηλικοομάδες $\mathbf{V}/\{\mathrm{id}\} \cong \mathbf{V}$, $\mathfrak{A}_4/\mathbf{V} \cong \mathbb{Z}_3$ και $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4 \cong \mathbb{Z}_2$ είναι αβελιανές). Για $n \geq 5$, η $\mathfrak{A}_n$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\mathfrak{S}_n$. Παρότι η $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \cong \mathbb{Z}_2$ είναι επιλύσιμη (ως αβελιανή), η ίδια η $\mathfrak{A}_n$ δεν είναι επιλύσιμη (βλ. 12.2.2 (iv)), οπότε (βάσει τού θεωρήματος 12.2.7) η $\mathfrak{S}_n$ δεν είναι επιλύσιμη. □

12.2.9 Πόρισμα. *Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε κάθε πεπερασμένη p-ομάδα είναι επιλύσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω G μια πεπερασμένη p-ομάδα. Σύμφωνα με το πόρισμα 5.7.3 $\exists \nu \in \mathbb{N}_0 : |G| = p^{\nu}$. Όταν $\nu = 0$, η G είναι τετριμμένη και ο ισχυρισμός είναι αληθής. Όταν $\nu = 1$, η G είναι κυκλική (βλ. πόρισμα 4.1.33) και, ως εκ τούτου, επιλύσιμη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μορφή τής μαθηματικής επαγωγής ως προς τον ν. Για $\nu \geq 2$ υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής *για κάθε πεπερασμένη p-ομάδα τάξεως p^{ξ}, όπου $\xi \in \mathbb{N}_0$ και $\xi < \nu$*. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση πρώτη. Εάν η G είναι *αβελιανή*, τότε αυτή είναι προδήλως επιλύσιμη.

Περίπτωση δεύτερη. Εάν η G είναι *μη αβελιανή*, τότε

$$Z(G) \lhd G \text{ και } 1 < |Z(G)| < |G| = p^{\nu},$$

και το κέντρο της $Z(G)$ είναι μια πεπερασμένη p-ομάδα τάξεως p^{λ}, όπου $\lambda \in \mathbb{N}$ και $\lambda < \nu$ (βλ. 5.4.2, 5.6.3 και 5.6.4). Επομένως,

$$1 < |G/Z(G)| = p^{\nu-\lambda} < |G| = p^{\nu}.$$

Κατά την επαγωγική μας υπόθεση αμφότερες οι ομάδες $Z(G)$ και $G/Z(G)$ είναι επιλύσιμες. Βάσει τού θεωρήματος 12.2.7 η G είναι ωσαύτως επιλύσιμη. □

12.2.10 Πρόταση. *Μια πεπερασμένη μη τετριμμένη ομάδα είναι επιλύσιμη εάν και μόνον εάν διαθέτει (τουλάχιστον) μία συνθετική σειρά, όλες οι πηλικοομάδες τής οποίας είναι κυκλικές ομάδες έχουσες ως τάξεις τους κάποιους πρώτους αριθμούς.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή κάθε πεπερασμένη ομάδα έχει συνθετικές σειρές (βλ. θεώρημα 12.1.6), κάθε επιλύσιμη σειρά μιας πεπερασμένης επιλύσιμης ομάδας μπορεί να εκλεπτυνθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να προκύψει μια συνθετική σειρά, η οποία θα είναι κατ' ανάγκην επιλύσιμη (βλ. πρόταση 12.2.4). Όταν η ομάδα αναφοράς είναι μη τετριμμένη, οι πηλικοομάδες αυτής τής συνθετικής σειράς θα είναι ταυτοχρόνως αβελιανές και απλές (βλ. πρόταση 12.1.5). Όμως κάθε αβελιανή απλή ομάδα είναι κυκλική και έχει ως τάξη της έναν πρώτο αριθμό (βλ. πρόταση 4.3.2). Το αντίστροφο έπεται άμεσα από τον ορισμό 12.2.1. □

12.2.11 Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξεως < 60 είναι επιλύσιμη.*

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με τη διατύπωση των δύο πλέον περιώνυμων θεωρημάτων τού κλάδου τής Θεωρίας Πεπερασμένων Ομάδων που αφορά στην επιλυσιμότητα, ήτοι των θεωρημάτων τού W. Burnside (1852-1927), W. Feit (1930-2004) και J.G. Thomson[9] (γεν. 1932):

12.2.12 Θεώρημα. **(“p-q-Θεώρημα τού Burnside”, 1904.)**
Κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξεως $p^{\nu}q^{\xi}$, όπου p, q δυο πρώτοι αριθμοί και $\nu, \xi \in \mathbb{N}_0$, είναι επιλύσιμη.

[9] Fields Medalist, 1970.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. G. James, M. Liebeck: *Representations and Characters of Groups*, Second Ed., Cambridge University Press, 2001, σελ. 363-365. □

12.2.13 Θεώρημα. (W. Feit και J.G. Thomson, 1963.) *Κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξεως είναι επιλύσιμη. (Ως εκ τούτου, κάθε πεπερασμένη μη αβελιανή απλή ομάδα έχει ως τάξη της έναν άρτιο αριθμό.)*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. W. Feit, J.G. Thomson: *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. of Math. **13** (1963), 775-1029. □