# 10.4 ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗ ΤΡΟΧΙΩΝ

**10.4.1 Λήμμα.** *Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και $X$ ένα $G$-σύνολο, τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) *Για κάθε ζεύγος $(g, h) \in G \times G$,*

$$\boxed{h \bullet \mathrm{Fix}_g(X) = \mathrm{Fix}_{hgh^{-1}}(X),}$$

*όπου $h \bullet \mathrm{Fix}_g(X) := \{\, h \bullet x \mid x \in \mathrm{Fix}_g(X)\}$.*
(ii) *Επίσης, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $g \in G$ ισχύει*

$$\boxed{\mathrm{Stab}_G(g \bullet x) = g\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1},}$$

*ήτοι οι σταθεροποιητές $\mathrm{Stab}_G(g \bullet x)$ όλων των σημείων τής τροχιάς $\mathrm{Orb}_G(x)$ τού $x$ είναι συζυγείς.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν $x \in \mathrm{Fix}_g(X)$, τότε $g \bullet x = x$ και

$$\begin{aligned}&\left(hgh^{-1}\right) \bullet (h \bullet x) = \left(hgh^{-1}h\right) \bullet x = (hg) \bullet x\\ &= h \bullet (g \bullet x) = h \bullet x \Rightarrow h \bullet x \in \mathrm{Fix}_{hgh^{-1}}(X),\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $h \bullet \mathrm{Fix}_g(X) \subseteq \mathrm{Fix}_{hgh^{-1}}(X)$. Και αντιστρόφως· εάν θεωρήσουμε τυχόν στοιχείο $x \in \mathrm{Fix}_{hgh^{-1}}(X)$, τότε $\left(hgh^{-1}\right) \bullet x = x$ και

$$\begin{aligned}&g \bullet (h^{-1} \bullet x) = (h^{-1}hg) \bullet (h^{-1} \bullet x) = \left((h^{-1}hg) \bullet h^{-1}\right) \bullet x\\ &= (h^{-1}(hgh^{-1})) \bullet x = h^{-1} \bullet ((hgh^{-1}) \bullet x) = h^{-1} \bullet x \Rightarrow h^{-1} \bullet x \in \mathrm{Fix}_g(X)\\ &\Rightarrow x = e_G \bullet x = \left(hh^{-1}\right) \bullet x = h \bullet \left(h^{-1} \bullet x\right) \in h \bullet \mathrm{Fix}_g(X),\end{aligned}$$

οπότε ισχύει και η αντίστροφη εγκλειστική σχέση $\mathrm{Fix}_{hgh^{-1}}(X) \subseteq h \bullet \mathrm{Fix}_g(X)$.
(ii) Επειδή

$$\begin{aligned}&h \in \mathrm{Stab}_G(g \bullet x) \Leftrightarrow h \bullet (g \bullet x) = g \bullet x \Leftrightarrow (hg) \bullet x = g \bullet x\\ &\Leftrightarrow g^{-1} \bullet ((hg) \bullet x) = x \Leftrightarrow (g^{-1}hg) \bullet x = x\\ &\Leftrightarrow g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}_G(x) \Leftrightarrow h \in g\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1},\end{aligned}$$

ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

**10.4.2 Θεώρημα. («Τύπος καταμετρήσεως των τροχιών»)** *Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα και $X$ ένα πεπερασμένο $G$-σύνολο, τότε*

$$\boxed{\mathrm{card}(X/\asymp_G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}_g(X)),} \tag{10.24}$$

*ήτοι το πλήθος των $G$-τροχιών ισούται με τον αριθμητικό μέσο των πληθικών αριθμών των συνόλων των σταθερών σημείων $\mathrm{Fix}_g(X)$, $g \in G$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $M := \{(x,g) \in X \times G \;|g \bullet x = x\}$. Εάν υποθέσουμε ότι οι

$$\mathrm{pr}_1 : X \times G \longrightarrow X,\ (x,g) \longmapsto x, \quad \mathrm{pr}_2 : X \times G \longrightarrow G,\ (x,g) \longmapsto g,$$

είναι οι φυσικές προβολές, τότε για κάθε ζεύγος $(x,g) \in X \times G$ έχουμε

$$(\mathrm{pr}_1|_M)^{-1}(x) = \mathrm{Stab}_G(x), \quad (\mathrm{pr}_2|_M)^{-1}(g) = \mathrm{Fix}_g\,(X)\,,$$

οπότε

$$\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \mathrm{card}(M) = \sum_{g \in G} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}_g\,(X)). \tag{10.25}$$

Επιλέγουμε ένα πλήρες σύστημα εκπροσώπων $\{x_1, ..., x_k\}$ τού $X$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\asymp_G$ . Προφανώς, $X = \coprod_{i=1}^k \mathrm{Orb}_G(x_i)$, με $k = \mathrm{card}(X/ \asymp_G)$. Από το (ii) τού λήμματος 10.4.1 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \mathrm{Orb}_G(x_i)} |\mathrm{Stab}_G(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{card}(\mathrm{Orb}_G(x_i))\, |\mathrm{Stab}_G(x_i)| = k\ |G|\,, \end{aligned} \tag{10.26}$$

διότι $\mathrm{card}(\mathrm{Orb}_G(x_i))\, |\mathrm{Stab}_G(x_i)| = |G|\,, \forall i \in \{1, ..., k\}$. (Βλ. θεώρημα 10.2.5.) Ο τύπος (10.24) έπεται άμεσα από τις (10.25) και (10.26). □

**10.4.3 Εφαρμογή.** *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προμηθευθεί τρεις άσπρες και τρεις μαύρες χάντρες και ότι αυτές κείνται επί ενός επιπέδου σχηματίζοντας κορυφές κανονικού εξαγώνου $P$. Έστω* $\mathrm{Περ\Sigma υμμ}(P) \cong \mathbb{Z}_6$ *η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών τού $P$ και έστω* $\mathrm{\Sigma υμμ}(P) \cong \mathbf{D}_6$ *η πλήρης ομάδα συμμετριών τού $P$. Εάν ως $X$ συμβολίσουμε το σύνολο* όλων των δυνατών σχηματισμών *κανονικών εξαγώνων αυτού τού είδους (ήτοι με τρεις άσπρες και τρεις μαύρες χάντρες ως κορυφές τους), τότε το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός τού πλήθους των* ουσιωδώς διαφορετικών *τρόπων κατασκευής ενός «συμμετρικού περιδέραιου» κάνοντας χρήση των* 6 *διαθέσιμων χαντρών, υπό την προϋπόθεση ότι δυο κανονικά εξάγωνα $P, P'$ ανήκοντα στο $X$ λογίζονται ως «ταυτιζόμενα» όταν υπάρχει $g \in G$ που απεικονίζει το $P$ επί τού $P'$, στις ακόλουθες περιπτώσεις:* (i) $G = \mathrm{Περ\Sigma υμμ}(P)$ *και* (ii) $G = \mathrm{\Sigma υμμ}(P)$.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛΗΘΟΥΣ. Οι δοθείσες χάντρες κείνται επί ενός επιπέδου σχηματίζοντας κορυφές κανονικού εξαγώνου. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό έχει ως κορυφές του τα στοιχεία τού

$$\mathcal{E}_6 := \{1, \zeta_6, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5\}, \text{ όπου } \zeta_6 := \exp\left(\tfrac{2\pi i}{6}\right).$$

Έστω $X$ το σύνολο όλων των δυνατών σχηματισμών κανονικών εξαγώνων αυτού τού είδους. Για να προσδιορίσουμε τα στοιχεία τού $X$ μπορούμε νοερά να φαντασθούμε ότι διαθέτουμε 6 άσπρες χάντρες και ότι καταγράφουμε όλους τους δυνατούς τρόπους «μαυρίσματος» τριών εξ αυτών. Επομένως, ο πληθικός αριθμός τού

$X$ ισούται με τον συνδυασμό $\mathrm{card}(X) = \binom{6}{3} = 20$ των 6 κορυφών ανά 3. Η «οπτικοποίηση» των κορυφών των 20 κανονικών εξαγώνων στο χαρτί μας με άσπρες και μαύρες μπαλίτσες (όπως στο Σχήμα 1) είναι αρκούντως βοηθητική. Θέτοντας

$$\alpha(z) := \overline{z},\ \ \beta\,(z) := \zeta_6 z,\ \ \forall z \in \mathcal{E}_6,$$

γνωρίζουμε ότι $\text{ΠερΣυμμ}(P) \cong \langle \beta \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ και ότι $\text{Συμμ}(P) \cong \mathbf{D}_6 = \langle \alpha, \beta \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_{\mathcal{E}_6}$. Για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να εφαρμόσουμε τον τύπο καταμετρήσεως των τροχιών των φυσικών δράσεων

$$\langle \beta \rangle \times \mathcal{E}_6 \longrightarrow \mathcal{E}_6,\ \ (\beta^j, \zeta_6^k) \longmapsto \beta^j \bullet \zeta_6^k := \beta^j(\zeta_6^k),\ \forall (j,k) \in \{0,1,..,5\}^2,$$

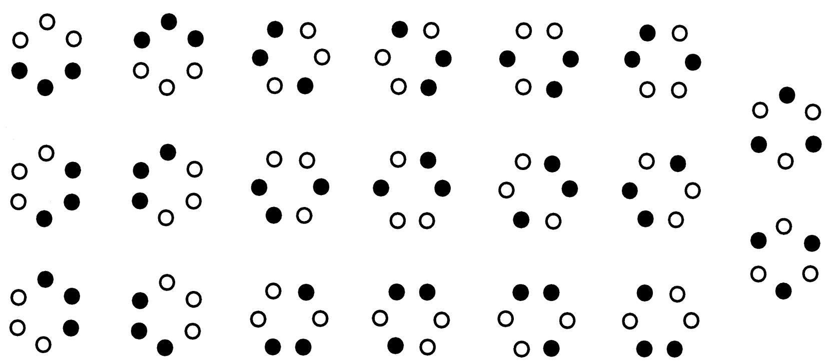
και

$$\mathbf{D}_6 \times \mathcal{E}_6 \longrightarrow \mathcal{E}_6,\ \ (\beta^j, \zeta_6^k) \longmapsto (\alpha^i \circ \beta^j) \bullet \zeta_6^k := (\alpha^i \circ \beta^j)(\zeta_6^k),$$

$\forall (i,j,k) \in \{0,1\} \times \{0,1,..,5\} \times \{0,1,..,5\}$, στις περιπτώσεις (i) και (ii), αντιστοίχως. Κατά το θεώρημα 10.4.2,

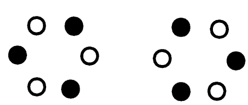
$$\mathrm{card}(\{\text{τροχιές τής δράσεως}\}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}_G(g)),$$

όπου $G \in \{\langle \beta \rangle, \mathbf{D}_6\}$.



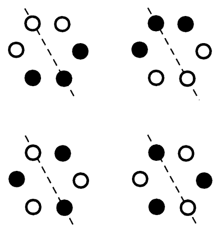
Σχήμα 1

Προφανώς, η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{\mathcal{E}_6}$ αφήνει όλα τα στοιχεία τού $\mathcal{E}_6$ (και, κατ' επέκταση, και τού $X$) σταθερά (= αναλλοίωτα). Το σχήμα 2 δείχνει τις κορυφές των μόνων εξαγώνων τού $X$ που μένουν σταθερά κατόπιν εφαρμογής τής στροφής $\beta^2$ (κατά $120°$) ή τής στροφής $\beta^4$ (κατά $240°$).



Σχήμα 2

Το σχήμα 3 δείχνει τις κορυφές των τεσσάρων εξαγώνων τού $X$ που μένουν σταθερά κατόπιν εφαρμογής ενός κατοπτρισμού $\alpha \circ \beta^j$, $j \in \{0, 2, 4\}$, ως προς μια διαγώνιο.



Σχήμα 3

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι τα λοιπά στοιχεία τής δρώσας ομάδας δεν αφήνουν *κανένα* εξάγωνο τού $X$ σταθερό. Ως εκ τούτου, έχουμε τη δυνατότητα καταρτίσεως των καταλόγων

| Στοιχεία δρώσας ομάδας | Πλήθος των εξαγώνων τού $X$ που παραμένουν σταθερά |
|---|---|
| $\mathrm{id}_{\mathcal{E}_6}$ | 20 |
| $\beta$ | 0 |
| $\beta^2$ | 2 |
| $\beta^3$ | 0 |
| $\beta^4$ | 2 |
| $\beta^5$ | 0 |

και

| Στοιχεία δρώσας ομάδας | Πλήθος των εξαγώνων τού $X$ που παραμένουν σταθερά |
|---|---|
| $\alpha$ | 4 |
| $\alpha \circ \beta$ | 0 |
| $\alpha \circ \beta^2$ | 4 |
| $\alpha \circ \beta^3$ | 0 |
| $\alpha \circ \beta^4$ | 4 |
| $\alpha \circ \beta^5$ | 0 |

Κατά συνέπειαν, στην περίπτωση (i) έχουμε

$$\tfrac{1}{6}\sum_{j=0}^{5} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}(\beta^j)) = \tfrac{1}{6}\,(1 \cdot 20 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0) = \tfrac{24}{6} = \boxed{4}$$

και στην περίπτωση (ii)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12} \sum_{(i,j)\in\{0,1\}\times\{0,1,..,5\}} \mathrm{card}(\mathrm{Fix}(\alpha^i \circ \beta^j)) \\ = \;& \frac{1}{12}\,(1 \cdot 20 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 0) = \frac{36}{12} = \boxed{3} \end{aligned}$$

*ουσιωδώς διαφορετικούς* τρόπους κατασκευής ενός «συμμετρικού περιδέραιου» κάνοντας χρήση των 6 διαθέσιμων χαντρών. □