# 10.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ

**10.1.1 Ορισμός.** Έστω $(G,*)$ μια ομάδα και έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο. Μια **εξ αριστερών δράση τής** $G$ **επί τού** $X$ καθορίζεται από μια απεικόνιση

$$f : G \times X \longrightarrow X,\ (g,x) \longmapsto f(g,x), \tag{10.1}$$

(ήτοι από μια -εν γένει- *εξωτερική πράξη* επί τού $X$) με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $f(g_1 * g_2, x) = f(g_1, f(g_2,x)),\ \forall\,(g_1,g_2) \in G \times G$ και $\forall x \in X$, και
(ii) $f(e_G, x) = x,\ \forall x \in X$.

Κατ' αναλογίαν, μια **εκ δεξιών δράση τής** $G$ **επί τού** $X$ καθορίζεται από μια απεικόνιση

$$\mathfrak{f} : X \times G \longrightarrow X,\ (x,g) \longmapsto \mathfrak{f}(x,g), \tag{10.2}$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i)$'$ $\mathfrak{f}(x, g_1 * g_2) = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(x,g_1), g_2),\ \forall\,(g_1,g_2) \in G \times G$ και $\forall x \in X$, και
(ii)$'$ $\mathfrak{f}(x, e_G) = x,\ \forall x \in X$.

Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι το $X$ είναι ένα **εξ αριστερών** (και αντιστοίχως, ένα **εκ δεξιών**) $G$-**σύνολο** ως προς την (10.1) (και αντιστοίχως, ως προς την (10.2)). Εάν $f(g,x) = x$ (και αντιστοίχως, εάν $\mathfrak{f}(x,g) = x$) *για κάθε* ζεύγος $(g,x) \in G \times X$, τότε λέμε ότι η θεωρούμενη δράση τής $G$ επί τού $X$ είναι **τετριμμένη**.

**10.1.2 Παρατήρηση.** Εάν η $(G,*)$ δρα εξ αριστερών (και αντιστοίχως, εκ δεξιών) επί τού $X$ μέσω τής (10.1) (και αντιστοίχως, μέσω τής (10.2)), τότε κάθε $g \in G$ δίδει το έναυσμα για τον ορισμό μιας απεικονίσεως

$$\varphi_g(f) : X \longrightarrow X,\ x \longmapsto \varphi_g(f)(x) := f(g,x)$$
$$(\text{και αντ., } \varphi_g(\mathfrak{f}) : X \longrightarrow X,\ x \longmapsto \varphi_g(\mathfrak{f})(x) := \mathfrak{f}(x, g^{-1}))$$

Προφανώς, η $\varphi_g(f)$ (και αντιστοίχως, η $\varphi_g(\mathfrak{f})$) αποτελεί μια αμφίρριψη, ήτοι $\varphi_g(f) \in \mathfrak{S}_X$ (και αντιστοίχως, $\varphi_g(\mathfrak{f}) \in \mathfrak{S}_X$), διότι

$$\varphi_{g^{-1}}(f) \circ \varphi_g(f) = \mathrm{id}_X = \varphi_g(f) \circ \varphi_{g^{-1}}(f)\ \ (\text{με } \varphi_g(f)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}(f))$$

και, αντιστοίχως,

$$\varphi_{g^{-1}}(\mathfrak{f}) \circ \varphi_g(\mathfrak{f}) = \mathrm{id}_X = \varphi_g(\mathfrak{f}) \circ \varphi_{g^{-1}}(\mathfrak{f})\ \ (\text{με } \varphi_g(\mathfrak{f})^{-1} = \varphi_{g^{-1}}(\mathfrak{f})).$$

Επιπροσθέτως, $\varphi_{e_G}(f) = \varphi_{e_G}(\mathfrak{f}) = \mathrm{id}_X$ και

$$\varphi_{g_1}(f) \circ \varphi_{g_2}(f) = \varphi_{g_1 * g_2}(f),\ \ \varphi_{g_1}(\mathfrak{f}) \circ \varphi_{g_2}(\mathfrak{f}) = \varphi_{g_1 * g_2}(\mathfrak{f})$$

για κάθε ζεύγος $(g_1,g_2) \in G \times G$, διότι

$$\varphi_{g_1 * g_2}(f)(x) = f(g_1 * g_2, x) = f(g_1, f(g_2,x)) = f(g_1, \varphi_{g_2}(f)(x))$$
$$= \varphi_{g_1}(f)(\varphi_{g_2}(f)(x)) = (\varphi_{g_1}(f) \circ \varphi_{g_2}(f))(x)$$

και, αντιστοίχως,

$$\begin{aligned}\varphi_{g_1 * g_2}(\mathfrak{f})(x) &= \mathfrak{f}(x,(g_1 * g_2)^{-1}) = \mathfrak{f}(x, g_2^{-1} * g_1^{-1}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(x, g_2^{-1}), g_1^{-1}) \\ &= \varphi_{g_1}(\mathfrak{f})(\mathfrak{f}(x, g_2^{-1})) = \varphi_{g_1}(f)(\varphi_{g_2}(f)(x)) = (\varphi_{g_1}(f) \circ \varphi_{g_2}(f))(x)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$. Επομένως ορίζονται ομομορφισμοί ομάδων

$$\varphi(f) : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X,\ g \longmapsto \varphi_g(f),\ \text{ και }\ \varphi(\mathfrak{f}) : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X,\ g \longmapsto \varphi_g(\mathfrak{f}).$$

(Είθισται να λέμε ότι ο $\varphi(f)$ (και αντιστοίχως, ο $\varphi(\mathfrak{f})$) είναι η **μετατακτική αναπαράσταση** τής $G$ ως προς τη θεωρούμενη δράση.) Και αντιστρόφως· για οιονδήποτε ομομορφισμό $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X)$ ορίζονται απεικονίσεις

$$f(\varphi) : G \times X \longrightarrow X,\ (g, x) \longmapsto f(\varphi)(g, x) := \varphi(g)(x),$$

και

$$\mathfrak{f}(\varphi) : X \times G \longrightarrow X,\ (x, g) \longmapsto \mathfrak{f}(\varphi)(x, g) := \varphi(g^{-1})(x).$$

Θέτοντας

$$\Delta\mathrm{P}^{\text{αρ.}}(G, X) := \left\{ \begin{array}{c} \text{απεικονίσεις (10.1)} \\ \text{με τις ιδιότητες (i), (ii)} \end{array} \right\}$$

και

$$\Delta\mathrm{P}^{\text{δεξ.}}(G, X) := \left\{ \begin{array}{c} \text{απεικονίσεις (10.2)} \\ \text{με τις ιδιότητες (i)}', \text{(ii)}' \end{array} \right\}$$

καταλήγουμε στην ακόλουθη:

**10.1.3 Πρόταση.** *Η απεικόνιση*

$$\Delta\mathrm{P}^{\text{αρ.}}(G, X) \ni f \longmapsto \varphi(f) \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X) \tag{10.3}$$

*είναι αμφιρριπτική, έχουσα την*

$$\mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X) \ni \varphi \longmapsto f(\varphi) \in \Delta\mathrm{P}^{\text{αρ.}}(G, X) \tag{10.4}$$

*ως αντίστροφό της. Κατ' αναλογίαν, η απεικόνιση*

$$\Delta\mathrm{P}^{\text{δεξ.}}(G, X) \ni \mathfrak{f} \longmapsto \varphi(\mathfrak{f}) \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X) \tag{10.5}$$

*είναι αμφιρριπτική, έχουσα την*

$$\mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X) \ni \varphi \longmapsto \mathfrak{f}(\varphi) \in \Delta\mathrm{P}^{\text{δεξ.}}(G, X) \tag{10.6}$$

*ως αντίστροφό της*[1].

[1] Λόγω των κανονιστικών αμφιρρίψεων (10.4) και (10.6) αρκετοί συγγραφείς ορίζουν ως *δράση μιας ομάδας $G$ επί ενός μη κενού συνόλου $X$* έναν ομομορφισμό $\varphi(f) \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βάσει των προηγηθέντων σχολίων οι (10.3) και (10.5) είναι καλώς ορισμένες απεικονίσεις. Εξάλλου, για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X)$ η $f(\varphi)$ έχει τις ιδιότητες 10.1.1 (i) και (ii), διότι για κάθε $x \in X$ και κάθε ζεύγος $(g_1, g_2) \in G \times G$ έχουμε αφ' ενός μεν $f(\varphi)(e_G, x) = \varphi(e_G)(x) = \mathrm{id}_G(x) = x$, αφ' ετέρου δε

$$\begin{aligned} &f(\varphi)(g_1 * g_2, x) = \varphi(g_1 * g_2)(x) = \varphi(g_1 * g_2)(x) = (\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(x) \\ &= \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(x)) = \varphi(g_1)(f(\varphi)(g_2, x)) = f(\varphi)(g_1, f(\varphi)(g_2, x)). \end{aligned}$$

Άρα $f(\varphi) \in \Delta\mathrm{P}^{\alpha\varrho\cdot}(G, X)$ (και παρομοίως, $\mathfrak{f}(\varphi) \in \Delta\mathrm{P}^{\delta\epsilon\xi\cdot}(G, X)$). Αυτό σημαίνει ότι οι (10.4) και (10.6) είναι ωσαύτως καλώς ορισμένες απεικονίσεις. Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι

$$f(\varphi(f))(g, x) = f(\varphi(f))(g, x) = \varphi(f)(g)(x) = \varphi(f)_g(x) = f(g, x),$$

$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X), \forall f \in \Delta\mathrm{P}^{\alpha\varrho\cdot}(G, X)$ και $\forall (g, x) \in G \times X$, ήτοι ότι $f(\varphi(f)) = f$. (Παρομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathfrak{f}(\varphi(\mathfrak{f})) = \mathfrak{f}$ για κάθε $\mathfrak{f} \in \Delta\mathrm{P}^{\delta\epsilon\xi\cdot}(G, X)$.) Από την άλλη μεριά, διαπιστώνουμε ότι

$$\varphi(f(\varphi))(g)(x) = \varphi(f(\varphi))_g(x) = f(\varphi)(g, x) = \varphi(g)(x),$$

$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{S}_X), \forall f \in \Delta\mathrm{P}^{\alpha\varrho\cdot}(G, X)$ και $\forall (g, x) \in G \times X$, ήτοι ότι $\varphi(f(\varphi)) = \varphi$. (Παρομοίως αποδεικνύεται ότι $\varphi(\mathfrak{f}(\varphi)) = \varphi$ για κάθε $\mathfrak{f} \in \Delta\mathrm{P}^{\delta\epsilon\xi\cdot}(G, X)$.) Επομένως η απεικόνιση (10.3) συντιθέμενη με την (10.4) δίδει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{\Delta\mathrm{P}^{\alpha\varrho\cdot}(G,X)}$ (και αντιστοίχως, η (10.5) συντιθέμενη με την (10.6) δίδει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{\Delta\mathrm{P}^{\delta\epsilon\xi\cdot}(G,X)}$). Από την άλλη μεριά, η (10.4) συντιθέμενη με την (10.3) (και αντιστοίχως, η (10.6) συντιθέμενη με την (10.5)) δίδει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(G,\mathfrak{S}_X)}$. Ως εκ τούτου, αμφότερες οι (10.3) και (10.4) (και αντιστοίχως, αμφότερες οι (10.5) και (10.6)) είναι αμφιρριπτικές (και η μία αντίστροφος τής άλλης). □

**10.1.4 Σημείωση.** Σύμφωνα με την πρόταση 10.1.3, σε κάθε εξ αριστερών δράση τής $G$ επί τού $X$ καθοριζόμενης από μια απεικόνιση $f$ (βλ. (10.1)) αντιστοιχίζεται η εκ δεξιών δράση η καθοριζόμενη από την

$$\mathfrak{f}(\varphi(f)) : X \times G \longrightarrow X,\ (x, g) \longmapsto \mathfrak{f}(\varphi(f))(x, g) = f(g^{-1}, x),$$

Και αντιστρόφως· σε κάθε εκ δεξιών δράση τής $G$ επί τού $X$ καθοριζόμενης από μια απεικόνιση $\mathfrak{f}$ (βλ. (10.2)) αντιστοιχίζεται η εξ αριστερών δράση η καθοριζόμενη από την

$$f(\varphi(\mathfrak{f})) : G \times X \longrightarrow X,\ (g, x) \longmapsto f(\varphi(\mathfrak{f}))(g, x) = \mathfrak{f}(x, g^{-1}).$$

**10.1.5 Παραδείγματα.** Έστω $(G, \cdot)$ τυχούσα (πολλαπλασιαστική) ομάδα.

(i) Εάν $H \sqsubseteq G$, τότε η $G$ δρα εξ αριστερών επί τού συνόλου $G/_H\mathcal{R}$ των αριστερών πλευρικών κλάσεων τής $H$ εντός τής $G$ ως εξής:

$$G \times (G/_H\mathcal{R}) \longrightarrow G/_H\mathcal{R},\ (g_1, g_2H) \longmapsto (g_1g_2)H. \tag{10.7}$$

(Βλ. 4.1.7 και (4.7).) Η αντιστοιχιζόμενη εκ δεξιών δράση είναι η

$$(G/_H\mathcal{R}) \times G \longrightarrow G/_H\mathcal{R},\ (g_1H, g_2) \longmapsto (g_2^{-1}g_1)H.$$

Κατ' αναλογίαν, η $G$ δρα εκ δεξιών επί τού συνόλου $G/\mathcal{R}_H$ των δεξιών πλευρικών κλάσεων τής $H$ εντός τής $G$ ως εξής:

$$(G/\mathcal{R}_H) \times G \longrightarrow G/\mathcal{R}_H,\ (Hg_1, g_2) \longmapsto H(g_1g_2).$$

Η αντίστοιχη εξ αριστερών δράση είναι η

$$G \times (G/\mathcal{R}_H) \longrightarrow G/\mathcal{R}_H,\ (g_1, Hg_2) \longmapsto H\left(g_2g_1^{-1}\right).$$

(ii) Η $G$ δρα εξ αριστερών επί τού εαυτού της

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g_1, g_2) \longmapsto g_1g_2 = L_{g_1}(g_2), \tag{10.8}$$

έχουσα ως μετατακτική αναπαράστασή της την $G \ni g \longmapsto L_g \in \mathfrak{S}_G$ (ήτοι την *εξ αριστερών μεταφορά μέσω τού* $g$). Η αντίστοιχη εκ δεξιών δράση είναι η

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g_1, g_2) \longmapsto g_2^{-1}g_1 = L_{g_2^{-1}}(g_1) = R_{g_1}(g_2^{-1}).$$

Κατ' αναλογίαν, η $G$ δρα εκ δεξιών επί τού εαυτού της και ως ακολούθως:

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g_1, g_2) \longmapsto g_1g_2 = R_{g_2}(g_1),$$

έχουσα ως μετατακτική αναπαράστασή της την $G \ni g \longmapsto R_{g^{-1}} \in \mathfrak{S}_G$ (ήτοι την *εκ δεξιών μεταφορά μέσω τού* $g^{-1}$). Η αντίστοιχη εξ αριστερών δράση είναι η

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g_1, g_2) \longmapsto g_2g_1^{-1} = L_{g_2}(g_1^{-1}) = R_{g_1^{-1}}(g_2).$$

(iii) Εάν $K \sqsubseteq G$, τότε η $K$ δρα εξ αριστερών επί τής $G$ (ύστερα από περιορισμό τής (10.8)) ως εξής:

$$K \times G \longrightarrow G,\ (k, g) \longmapsto kg = L_k(g).$$

(Παρομοίως μετατρέπει κανείς και τις λοιπές δράσεις τού (ii) σε δράσεις τής $K$ επί τής $G$.) Γενικότερα, εάν $H \trianglelefteq G$, τότε ορίζεται η εξ αριστερών δράση

$$K \times (G/H) \longrightarrow G/H,\ (k, gH) \longmapsto (kg)H. \tag{10.9}$$

τής $K$ επί τής πηλικοομάδας $G/H$.

(iv) Μέσω *συζυγίας* δημιουργείται άλλη μία εξ αριστερών δράση τής $G$ επί τού εαυτού της:

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \longmapsto gxg^{-1} = \boldsymbol{\gamma}_g(x). \tag{10.10}$$

Αυτή έχει ως μετατακτική αναπαράστασή της την

$$G \ni g \longmapsto \boldsymbol{\gamma}_g \in \mathrm{Inn}(G) \sqsubseteq \mathfrak{S}_G.$$

(Βλ. 5.4.21 και 5.4.23.) Η αντίστοιχη εκ δεξιών δράση είναι η

$$G \times G \longrightarrow G,\ (x, g) \longmapsto g^{-1}xg = \boldsymbol{\gamma}_{g^{-1}}(x).$$

(v) Η $G$ δρα *μέσω συζυγίας* εξ αριστερών τόσον επί τού $\mathbf{Subg}(G)$:

$$G \times \mathbf{Subg}(G) \longrightarrow \mathbf{Subg}(G),\ (g, H) \longmapsto gHg^{-1}, \tag{10.11}$$

όσον και επί τού $\mathfrak{P}(G) \smallsetminus \{\varnothing\}$:

$$G \times (\mathfrak{P}(G) \smallsetminus \{\varnothing\}) \longrightarrow \mathfrak{P}(G) \smallsetminus \{\varnothing\},\ (g, X) \longmapsto gXg^{-1}. \tag{10.12}$$

(Βλ. §5.1.)

(vi) Εάν $H \trianglelefteq G$, τότε *η* $G$ δρα *μέσω συζυγίας* εξ αριστερών *επί τής* $H$:

$$G \times H \longrightarrow H,\ (g, h) \longmapsto ghg^{-1} = \boldsymbol{\gamma}_g(h). \tag{10.13}$$

(vii) Η ομάδα αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(G)$ τής $G$ δρα εξ αριστερών επί τής $G$ μέσω *αποτιμήσεως*:

$$\mathrm{Aut}(G) \times G \longrightarrow G,\ (\vartheta, g) \longmapsto \vartheta(g). \tag{10.14}$$

**10.1.6 Συμβολισμός.** Έχοντας εξηγήσει τον τρόπο συσχετισμού εξ αριστερών και εκ δεξιών δράσεων, και έχοντας παραθέσει κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα, προτιθέμεθα να προβούμε σε *απλούστευση* τού χρησιμοποιούμενου συμβολισμού και τής ορολογίας σε ό,τι θα ακολουθήσει. Ομιλώντας περί «δράσεως τής $G$ επί τού $X$» θα εννοούμε (χωρίς ουσιαστική βλάβη τής γενικότητας) *δράση εξ αριστερών* και θα γράφουμε $g \bullet x$ (με παχεία βούλα -bullet- ενδιαμέσως) αντί τού $f(g, x)$. Επίσης, θα αναφέρουμε τη μετατακτική αναπαράσταση τής $G$ ως $\varphi$ και την τιμή της σε ένα $g \in G$ ως $\varphi_g$ (αντί να γράφουμε $\varphi(f)$ και $\varphi_g(f)$, αντιστοίχως). Εάν για την εσωτερική πράξη τής ομάδα αναφοράς διατηρήσουμε τον συνήθη *πολλαπλασιαστικό συμβολισμό*, οι ιδιότητες (i) και (ii) τού ορισμού 10.1.1 γράφονται απλούστερα ως εξής:

(i) $(g_1g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$, $\forall\, (g_1, g_2) \in G \times G$ και $\forall x \in X$, και

(ii) $e_G \bullet x = x,\ \forall x \in X$.

**10.1.7 Παραδείγματα.** (i) Δύο διαφορετικές δράσεις τής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$ επί τού συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι οι

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (n, x) \longmapsto n \bullet x := x + n \tag{10.15}$$

και

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (n, x) \longmapsto n \bullet x := (-1)^n x. \tag{10.16}$$

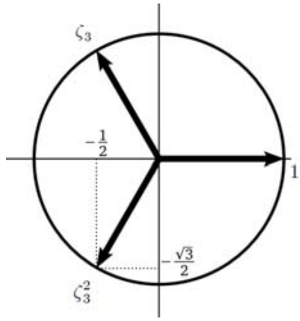
(ii) Η διεδρική ομάδα $\mathbf{D}_3 = \langle \alpha, \beta \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_{\mathcal{E}_3}$ με

$$\alpha(z) := \overline{z},\ \ \beta(z) := \zeta_3 z,\ \ \forall z \in \mathcal{E}_3,$$

δρα επί τού συνόλου $\mathcal{E}_3 = \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}$ των κορυφών τού κανονικού τριγώνου (όπου $\zeta_3 := \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$) ως ακολούθως:

$$\mathbf{D}_3 \times \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathcal{E}_3,\ (\alpha^i \circ \beta^j, \zeta_3^k) \longmapsto \left(\alpha^i \circ \beta^j\right) \bullet \zeta_3^k := \alpha^i(\beta^j(\zeta_3^k)), \tag{10.17}$$

$\forall (i,j,k) \in \{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$.




(Παρομοίως ορίζεται η αντίστοιχη δράση τού $\mathbf{D}_n$ επί τού συνόλου $\mathcal{E}_n$ των κορυφών τού κανονικού $n$-γώνου και για κάθε $n \geq 4$.)

(iii) Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $H \sqsubseteq \mathfrak{S}_n$, τότε η $H$ δρα επί τού συνόλου $\{1, ..., n\}$ μέσω *αποτιμήσεως*:

$$H \times \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\},\ (\sigma, j) \longmapsto \sigma \bullet j := \sigma(j),\ \forall j \in \{1, ..., n\}. \tag{10.18}$$

(iv) Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $F$ τυχόν σώμα, τότε κάθε $H \sqsubseteq \mathrm{GL}_n(F)$ δρα (κατά τρόπο φυσικό) επί τού $F^n$:

$$H \times F^n \longrightarrow F^n,\ (\mathbf{A}, (x_1, ..., x_n)^\intercal) \longmapsto \mathbf{A}(x_1, ..., x_n)^\intercal.$$

(v) Εάν $n \in \mathbb{N}$, $F$ τυχόν σώμα και $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(F)$ κάποιος παγιωμένος πίνακας, τότε η $(\mathbb{Z}, +)$ δρα επί τού $F^n$ ως ακολούθως:

$$\mathbb{Z} \times F^n \longrightarrow F^n,\ (n, (x_1, ..., x_n)^\intercal) \longmapsto n \bullet (x_1, ..., x_n)^\intercal := \mathbf{A}^n(x_1, ..., x_n)^\intercal.$$

## 10.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΡΟΧΙΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΩΝ

**10.2.1 Ορισμός.** Ας υποθέσουμε ότι η $G \times X \ni (g, x) \longmapsto g \bullet x \in X$ καθορίζει μια δράση μιας ομάδας $(G, \cdot)$ επί ενός μη κενού συνόλου $X$. Επί τού $X$ ορίζουμε μια διμελή σχέση $\asymp_G \subseteq X \times X$ ως ακολούθως:

$$\boxed{x_1 \asymp_G x_2 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [\exists g \in G : g \bullet x_1 = x_2].}$$

**10.2.2 Πρόταση.** *Η "$\asymp_G$" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού $X$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η "$\asymp_G$" είναι *αυτοπαθής*, διότι $e_G \bullet x = x$ για κάθε $x \in X$, *συμμετρική*, διότι για οιαδήποτε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \asymp_G x_2$,

$$\exists g \in G : g \bullet x_1 = x_2 \Rightarrow g^{-1} \bullet x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 \asymp_G x_1,$$

και, τέλος, *μεταβατική*, διότι για $x_1, x_2, x_3 \in X$ με $x_1 \asymp_G x_2$ και $x_2 \asymp_G x_3$,

$$\left.\begin{array}{l} \exists g_1 \in G : g_1 \bullet x_1 = x_2 \\ \exists g_2 \in G : g_2 \bullet x_2 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow (g_2 g_1) \bullet x_1 = g_2 \bullet (g_1 \bullet x_1) = g_2 \bullet x_2 = x_3,$$

οπότε $x_1 \asymp_G x_3$. $\square$

**10.2.3 Ορισμός.** Ας υποθέσουμε ότι η

$$G \times X \ni (g, x) \longmapsto g \bullet x \in X \tag{10.19}$$

καθορίζει μια δράση μιας ομάδας $(G, \cdot)$ επί ενός μη κενού συνόλου $X$.

(i) Η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $x \in X$ ως προς την "$\asymp_G$" καλείται **τροχιά τού** $x$ **ως προς την** (10.19) ή απλώς $G$-**τροχιά τού** $x$ και συμβολίζεται ως εξής[2]:

$$\boxed{\mathrm{Orb}_G(x) := \{y \in X \,|y \asymp_G x\} = \{g \bullet x \mid g \in G\}.}$$

(ii) Το σύνολο

$$\boxed{X/\asymp_G = \{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}}$$

καλείται **σύνολο τροχιών** ή **τροχιακός χώρος** τού $X$ ως προς τη δρώσα ομάδα $G$.

(iii) Έστω $x \in X$. Λέμε ότι **το** $x$ **παραμένει σταθερό** (ή ότι **σταθεροποιείται**) **υπό τη δράση ενός στοιχείου** $g \in G$ ή ότι **το** $g$ **σταθεροποιεί το** $x$ δρώντας επ' αυτού όταν $g \bullet x = x$. Το σύνολο[3]

$$\boxed{\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid g \bullet x = x\}}$$

όλων των στοιχείων τής $G$ που σταθεροποιούν το $x$ καλείται **σταθεροποιητής τού** $x$. Επειδή $e_G \in \mathrm{Stab}_G(x)$ και για οιαδήποτε $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)$ ισχύει[4]

$$g_1 \bullet x = x,\ g_2 \bullet x = x \ (\Rightarrow g_2^{-1} \bullet x = x),$$

έχουμε

$$\left(g_1 g_2^{-1}\right) \bullet x = g_1 \bullet \left(g_2^{-1} \bullet x\right) = g_1 \bullet x = x \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(x),$$

[2]Το πρόθεμα "Orb" προέρχεται από τα πρώτα τρία γράμματα τής λέξεως orbit (= τροχιά). Ορισμένοι συγγραφείς προτιμούν να συμβολίζουν την τροχιά τού $x$ ως $G \bullet x$.

[3]Το πρόθεμα "Stab" προέρχεται από τα πρώτα τέσσερα γράμματα τής λέξεως stabilizer (= σταθεροποιητής). Στη βιβλιογραφία, αντί τού $\mathrm{Stab}_G(x)$ χρησιμοποιείται συχνά και το σύμβολο $G_x$.

[4]Προφανώς, $g_2^{-1} \bullet x = g_2^{-1} \bullet (g_2 \bullet x) = \left(g_2 g_2^{-1}\right) \bullet x = e_G \bullet x = x$.

οπότε $\mathrm{Stab}_G(x) \sqsubseteq G$. (Βλ. 2.1.16 (iii).) Γι' αυτόν τον λόγο, αντί τού όρου «σταθεροποιητής» χρησιμοποιείται ενίοτε και ο όρος **σταθεροποιούσα υποομάδα τού** $x$ (ή **ομάδα ισοτροπίας τού** $x$).

(iv) Λέμε ότι το $X$ είναι ένα **ελεύθερο** $G$**-σύνολο** ή ότι η ομάδα $G$ **δρα ελευθέρως επί τού** $X$ (μέσω τής (10.19)) όταν

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{e_G\},\ \forall x \in X\ \ (\Leftrightarrow [g \bullet x = x \Rightarrow x = e_G]\,,\ \forall x \in X).$$

(v) Έστω $x \in X$. Λέμε ότι **το** $x$ **παραμένει σταθερό** (ή ότι **σταθεροποιείται**) **υπό τη δράση** (ολόκληρης) **τής** $G$ όταν $\mathrm{Orb}_G(x) = \{x\}$. Το σύνολο των στοιχείων τού $X$ που παραμένουν σταθερά υπό τη δράση τής $G$ συμβολίζεται ως $\mathbf{Fix}_G(X)$. Σημειωτέον ότι

$$\boxed{\mathrm{Fix}_G(X) = \bigcap_{g\in G} \mathrm{Fix}_g(X) = \{x \in X \mid \mathrm{Stab}_G(x) = G\},}$$

όπου για κάθε $g \in G$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό[5]

$$\boxed{\mathrm{Fix}_g(X) := \{x \in X \mid g \bullet x = x\}.}$$

Προφανώς, $x \in \mathrm{Fix}_G(X) \Leftrightarrow \mathrm{Stab}_G(x) = G \Leftrightarrow \mathrm{Orb}_G(x) = \{x\}$.

**10.2.4 Παραδείγματα.** (i) Για τη δράση (10.7) τής $G$ επί τού συνόλου $G/_H\mathcal{R}$ των αριστερών πλευρικών κλάσεων μιας $H \sqsubseteq G$ εντός τής $G$ έχουμε[6]

$$\mathrm{Orb}_G(gH) = \{(g'g)H \,|g' \in G\},\ \mathrm{Stab}_G(gH) = gHg^{-1},\ \forall g \in G,$$

και $\mathrm{Fix}_G(G/_H\mathcal{R}) = \{gH \in G/_H\mathcal{R}\,\big|gHg^{-1} = G\}$.

(ii) Για τη δράση (10.8) τής $G$ επί τού εαυτού της έχουμε

$$\mathrm{Orb}_G(g) = G,\ \mathrm{Stab}_G(g) = \{e_G\},\ \forall g \in G,$$

και

$$\mathrm{Fix}_G(G) = \begin{cases} \varnothing, & \text{όταν η } G \text{ είναι μη τετριμμένη,} \\ G, & \text{όταν η } G \text{ είναι τετριμμένη.} \end{cases}$$

(iii) Για τη δράση (10.9) τής $K \sqsubseteq G$ επί τής πηλικοομάδας $G/H$ έχουμε

$$\mathrm{Orb}_K(gH) = \{(kg)H \mid k \in K\},\ \mathrm{Stab}_K(gH) = (gHg^{-1}) \cap K,\ \forall g \in G,$$

και $\mathrm{Fix}_K(G/H) = \varnothing$ όταν $H \neq G$.

(iv) Για τη δράση (10.10) τής $G$ επί τού εαυτού της (μέσω συζυγίας) έχουμε

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \text{ΚΛΣ}_G(x),\ \mathrm{Stab}_G(x) = \mathrm{C}_G(x),\ \forall x \in G,$$

[5] Αντί τού $\mathbf{Fix}_g(X)$ χρησιμοποιείται ενίοτε το σύμβολο $X^g$.

[6] Επειδή $\mathrm{Stab}_G(gH) = \{a \in G \mid (ag)H = gH\}$, για κάθε $a \in \mathrm{Stab}_G(gH)$ υπάρχουν $h, h' \in H$, τέτοια ώστε $agh = gh'$, οπότε $a = g(h'h^{-1})g^{-1} \in gHg^{-1}$. Και αντιστρόφως· για κάθε $a \in gHg^{-1}$ υπάρχει κάποιο $h \in H$, τέτοιο ώστε $a = ghg^{-1} \Rightarrow ag = gh$, οπότε $(ag)H = (gh)H = gH \Rightarrow a \in \mathrm{Stab}_G(gH)$.

και $[\mathrm{Fix}_g(G) = \mathrm{C}_G(g), \forall g \in G] \Rightarrow \mathrm{Fix}_G(G) = Z(G)$. (Βλ. 5.1.5, 5.2.7 (ii) και 5.1.1.)
(v) Για τη δράση (10.11) τής $G$ επί τού συνόλου $\mathbf{Subg}(G)$ (μέσω συζυγίας) έχουμε

$$\mathrm{Orb}_G(H) = \mathrm{K\Lambda\Sigma}_G(H),\ \mathrm{Stab}_G(H) = \mathrm{N}_G(H),\ \forall H \in \mathbf{Subg}(G),$$

και $\mathrm{Fix}_G(\mathbf{Subg}(G)) = \{H \in \mathbf{Subg}(G) \mid \mathrm{N}_G(H) = G\} \underset{5.2.4\,(\mathrm{iii})}{=} \mathbf{NSubg}(G)$. (Βλ. εδάφια 5.1.4, 5.2.3 και 4.2.25.) Κατ' αναλογίαν, για τη δράση (10.12) τής $G$ επί τού $\mathfrak{P}(G) \diagdown \{\varnothing\}$ (μέσω συζυγίας) λαμβάνουμε

$$\mathrm{Orb}_G(X) = \{gXg^{-1} \mid g \in G\},\ \mathrm{Stab}_G(X) = \mathrm{N}_G(X),\ \forall X \in \mathfrak{P}(G) \diagdown \{\varnothing\},$$

και $\mathrm{Fix}_G(\mathfrak{P}(G) \diagdown \{\varnothing\}) = \{$ορθόθετα υποσύνολα τού $G\}$.
(vi) Για τη δράση (10.13) τής $G$ επί μιας $H \trianglelefteq G$ (μέσω συζυγίας) έχουμε

$$\mathrm{Orb}_G(h) = \mathrm{K\Lambda\Sigma}_G(h),\ \mathrm{Stab}_G(h) = \mathrm{C}_G(h),\ \forall h \in H,$$

και $\mathrm{Fix}_G(H) = \{h \in H : \mathrm{C}_G(h) = G\}$.
(vii) Για τη δράση (10.14) τής $\mathrm{Aut}(G)$ επί τής $G$ (μέσω αποτιμήσεως) έχουμε

$$\mathrm{Orb}_{\mathrm{Aut}(G)}(g) = \{\vartheta(g) \mid \vartheta \in \mathrm{Aut}(G)\},\ \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(G)}(g) = \{\vartheta \in \mathrm{Aut}(G) : \vartheta(g) = g\},$$

για κάθε $g \in G$ και $\mathrm{Fix}_\vartheta(G) = \{g \in G \mid \vartheta(g) = g\}$ για κάθε $\vartheta \in \mathrm{Aut}(G)$.
(viii) Για τη δράση (10.15) τής $(\mathbb{Z}, +)$ επί τού $\mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathrm{Orb}_{\mathbb{Z}}(x) = \{x + n \mid n \in \mathbb{Z}\},\ \mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x) = \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

και $\mathrm{Fix}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) = \varnothing$, διότι

$$\mathrm{Fix}_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \varnothing, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \diagdown \{0\}, \\ \mathbb{R}, & \text{όταν } n = 0, \end{cases}$$

ενώ για τη δράση (10.16) λαμβάνουμε

$$\mathrm{Orb}_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} \{x, -x\}, & \text{όταν } x \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}, \\ \{0\}, & \text{όταν } x = 0, \end{cases},\ \mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 2\mathbb{Z}, & \text{όταν } x \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}, \\ \mathbb{Z}, & \text{όταν } x = 0, \end{cases}$$

και $\mathrm{Fix}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) = \{0\}$, καθόσον

$$\mathrm{Fix}_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \diagdown 2\mathbb{Z}, \\ \mathbb{R}, & \text{όταν } n \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(ix) Για τη δράση (10.17) τής $\mathbf{D}_3 = \langle \alpha, \beta \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_{\mathcal{E}_3}$ επί τού $\mathcal{E}_3 = \{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}$ έχουμε $\mathrm{Fix}_{\mathbf{D}_3}(\mathcal{E}_3) = \varnothing$, διότι

$$\begin{aligned} &\mathrm{Orb}_{\mathbf{D}_3}(\zeta_3^k) = \mathcal{E}_3, \forall k \in \{0,1,2\}, && \mathrm{Stab}_{\mathbf{D}_3}(1) = \{\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3}, \alpha\}, \\ &\mathrm{Stab}_{\mathbf{D}_3}(\zeta_3) = \{\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3}, \alpha \circ \beta\}, && \mathrm{Stab}_{\mathbf{D}_3}(\zeta_3^2) = \{\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3}, \alpha \circ \beta^2\}. \end{aligned}$$

(x) Για τη δράση (10.18) μιας $H \sqsubseteq \mathfrak{S}_n$ επί τού $\{1, ..., n\}$ (μέσω αποτιμήσεως) έχουμε

$$\mathrm{Orb}_H(j) = \{\sigma(j) \mid j \in H\},\ \mathrm{Stab}_H(j) = \{\sigma \in H : \sigma(j) = j\},$$

για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$ και $\mathrm{Fix}_H(\{1, ..., n\}) = \{j \in \{1, ..., n\} : \sigma(j) = j, \forall \sigma \in H\}$.

**10.2.5 Θεώρημα. («Θεώρημα τροχιών και σταθεροποιητών»)**
*Εάν μια ομάδα $(G,\cdot)$ δρα επί ενός συνόλου $X \neq \varnothing$, τότε*

$$\boxed{\text{card}\,(\text{Orb}_G(x)) = |G : \text{Stab}_G(x)|\,,\ \forall x \in X.} \tag{10.20}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν $x \in X$. Ορίζουμε την

$$f_x : G/_{\text{Stab}_G(x)}\mathcal{R} = \{\, g\ \text{Stab}_G(x) \mid g \in G\} \longrightarrow \text{Orb}_G(x),$$

από το σύνολο των αριστερών πλευρικών κλάσεων τού σταθεροποιητή $\text{Stab}_G(x)$ τού $x$ εντός τής $G$ στην τροχιά τού $x$ μέσω τού τύπου

$$f_x(g\ \text{Stab}_G(x)) := g \bullet x,\ \forall g \in G.$$

Προφανώς, για οιαδήποτε $g_1, g_2 \in G$ ισχύουν οι αμφίπλευρες συνεπαγωγές

$$g_1\ \text{Stab}_G(x) = g_2\ \text{Stab}_G(x) \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in \text{Stab}_G(x)$$
$$\Leftrightarrow x = \left(g_1^{-1}g_2\right) \bullet x = g_1^{-1} \bullet (g_2 \bullet x) \Leftrightarrow g_1 \bullet x = g_2 \bullet x.$$

Ακολουθώντας αυτές προς τη (δεξιά) κατεύθυνση "$\Rightarrow$" διαπιστώνουμε ότι η θεωρηθείσα $f_x$ είναι μια καλώς ορισμένη απεικόνιση. Ακολουθώντας τες προς την (αριστερή) κατεύθυνση "$\Leftarrow$" συμπεραίνουμε ότι η $f_x$ είναι ενριπτική απεικόνιση. Επειδή για κάθε στοιχείο $y \in \text{Orb}_G(x)$ υπάρχει κάποιο στοιχείο $g \in G$ με $y = g \bullet x$ και $f_x(g\ \text{Stab}_G(x)) = y$, η $f_x$ είναι επιρριπτική και, κατ' επέκταση, αμφιρριπτική. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\text{card}\big(G/_{\text{Stab}_G(x)}\mathcal{R}\big) = |G : \text{Stab}_G(x)|$ (βλ. 4.1.17), συμπεραίνουμε ότι $\text{card}(\text{Orb}_G(x)) = |G : \text{Stab}_G(x)|\,.$ □

**10.2.6 Παραδείγματα.** Εφαρμόζοντας την (10.20) για τις δράσεις (10.12), (10.11) και (10.10) λαμβάνουμε (μέσω των προαναφερθέντων στα (v) και (iv) τού εδ. 10.2 .4) τις ισότητες τις αποδειχθείσες στην πρόταση 5.2.8 και στα πορίσματα 5.2.9 και 5.2.10, αντιστοίχως.

**10.2.7 Θεώρημα.** *Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα και έστω $X$ ένα πεπερασμένο $G$-σύνολο. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν $\mathbf{Fix}_G(X) \subsetneqq X$ και το $\{x_1,\ldots,x_m\} \subseteq X$ είναι ένα πλήρες σύστημα εκπροσώπων τού $X \smallsetminus \mathbf{Fix}_G(X)$ ως προς τον περιορισμό τής σχέσεως ισοδυναμίας $\asymp_G$ επί τού $X \smallsetminus \mathbf{Fix}_G(X)$, τότε*

$$\boxed{\text{card}(X) = \text{card}(\text{Fix}_G(X)) + \sum_{j=1}^{m} \text{card}\,(\text{Orb}_G(x_j))\,.} \tag{10.21}$$

(ii) *Εάν το $X$ είναι ένα ελεύθερο $G$-σύνολο και η $G$ μη τετριμμένη, τότε η $G$ είναι πεπερασμένη και*

$$\boxed{\text{card}(X) = \text{card}(X/\asymp_G)\,|G|\,.} \tag{10.22}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Επειδή $\mathrm{Orb}_G(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in \mathrm{Fix}_G(X)$, έχουμε

$$X = \mathrm{Fix}_G(X) \coprod \left( \coprod_{j=1}^{m} \mathrm{Orb}_G(x_j) \right)$$

(βλ. A.1.12), οπότε η (10.21) είναι προφανής.

(ii) Εάν η $G$ δρα ελευθέρως επί τού $X$ και δεν είναι η τετριμμένη ομάδα, τότε $\mathbf{Fix}_G(X) = \varnothing$ και για οιοδήποτε $x \in X$ η απεικόνιση

$$G \longrightarrow \mathrm{Orb}_G(x), \quad g \longmapsto g \bullet x$$

είναι αμφιρριπτική, διότι είναι προφανώς επιρριπτική και για κάθε $(g_1, g_2) \in G \times G$ ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$g_1 \bullet x = g_2 \bullet x \Longrightarrow \left(g_2^{-1} g_1\right) \bullet x = x \Longrightarrow g_2^{-1} g_1 = e_G \Longrightarrow g_1 = g_2.$$

Επομένως, $|G| = \mathrm{card}(\mathrm{Orb}_G(x)) < \mathrm{card}(X)$ για κάθε $x \in X$, οπότε $|G| < \infty$ και

$$\mathrm{card}(X) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{card}(\mathrm{Orb}_G(x_j)) = m \ |G| \, ,$$

όπου $m = \mathrm{card}(X/ \asymp_G)$ είναι το πλήθος των $G$-τροχιών εντός τού $X$. □

**10.2.8 Παράδειγμα.** Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη μη τετριμμένη ομάδα και έστω $H \in \mathbf{Subg}(G)$. Αφήνοντας την $H$ να δράσει επί τής $G$ κατά τον πλέον φυσικό τρόπο:

$$H \times G \longrightarrow G, \ (h, g) \longmapsto h \bullet g := hg,$$

παρατηρούμε ότι για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$\begin{aligned} &\mathrm{Orb}_H(g) = Hg = \{hg \mid h \in H\}\,, \\ &\mathrm{Stab}_H(g) = \{h \in H \mid hg = g\} = \{e_G\} = \{e_H\}. \end{aligned}$$

Επειδή λοιπόν η $G$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα *ελεύθερο* $H$-σύνολο, από την (10.22) (με την $G$ στη θέση τού $X$ και την $H$ στη θέση τής $G$) *επανακτούμε το κλασικό θεώρημα*[7] 4.1.22 *τού Lagrange*!

**10.2.9 Παράδειγμα.** Έστω $(G, \cdot)$ μια μη αβελιανή πεπερασμένη ομάδα. Εφαρμόζοντας την (10.21) για τη δράση (10.10) αυτής επί τού εαυτού της (μέσω συζυγίας) καταλήγουμε (λαμβάνοντας υπ' όψιν τα προαναφερθέντα στο εδάφιο 10.2.4 (iv) και στο θεώρημα 10.2.5) στη γνωστή μας *εξίσωση κλάσεων συζυγίας* (5.64).

**10.2.10 Πόρισμα.** *Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα τάξεως $|G| = p^\kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}_0$ και $p$ ένας πρώτος αριθμός. Εάν $X$ είναι ένα πεπερασμένο $G$-σύνολο, τότε*

$$\boxed{\mathrm{card}(X) \equiv \mathrm{card}(\mathrm{Fix}_G(X))(\mathrm{mod}\, p).} \tag{10.23}$$

[7] Στην περίπτωση όπου η $G$ είναι *τετριμμένη*, το θεώρημα τού Lagrange είναι προφανές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $X = \mathrm{Fix}_G(X)$ (όπως, π.χ., στην περίπτωση όπου $\kappa = 0$), τότε η (10.23) είναι προφανής. Εάν $\kappa \geq 1$, $\mathbf{Fix}_G(X) \subsetneqq X$ και το $\{x_1,...,x_m\} \subseteq X$ είναι ένα πλήρες σύστημα εκπροσώπων τού $X \smallsetminus \mathbf{Fix}_G(X)$ ως προς τον περιορισμό τής σχέσεως ισοδυναμίας $\asymp_G$ επί τού $X \smallsetminus \mathbf{Fix}_G(X)$, τότε η (10.21) γράφεται ως

$$\mathrm{card}(X) - \mathrm{card}(\mathrm{Fix}_G(X)) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{card}\left(\mathrm{Orb}_G(x_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} \left|G : \mathrm{Stab}_G(x_j)\right|,$$

όπου $|G : \mathrm{Stab}_G(x_j)| \geq 2$ και $|G : \mathrm{Stab}_G(x_j)| \mid |G| = p^{\kappa}$ για κάθε $j \in \{1,...,m\}$. Επομένως,

$$\exists \xi_j \in \{1,...,\kappa\} : |G : \mathrm{Stab}_G(x_j)| = p^{\xi_j},\ \forall j \in \{1,...,m\},$$

απ' όπου έπεται η (10.23), διότι $\mathrm{card}(X) -$ $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}_G(X)) = p\left(\sum_{j=1}^{m} p^{\xi_j - 1}\right)$. □