ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 226 – ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΑ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

24 Μαΐου 2003

(Εαρινό εξάμηνο 2003)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **16** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **6** θέματα, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **3**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **10** μονάδες και η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη τελική εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **60** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής τελικής εξετάσεως αντιστοιχεί στο 60% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Εάν $\langle m \rangle$ και $\langle n \rangle$ είναι δυο ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$, όπου $m, n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle \text{εκπ}(m,n) \rangle$,

(ii) $\langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle \text{μκδ}(m,n) \rangle$,

(iii) $\langle m \rangle \langle n \rangle = \langle mn \rangle$,

(iv) $\langle m \rangle : \langle n \rangle = \left\langle \frac{m}{\text{μκδ}(m,n)} \right\rangle$.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> (i) Να διατυπωθεί το 2ο *θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων*. Εν συνεχεία, να αποδειχθεί ότι εάν τα I, J είναι δυο ιδεώδη ενός δακτυλίου R και ισχύει η ισότητα $R = I + J$, τότε

$$R/\left(I \cap J\right) \cong \left(R/I\right) \times \left(R/J\right).$$

(ii) Έστω R ένας 1-δακτύλιος. Εάν τα $I_1, I_2, \ldots, I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, είναι ανά δύο συμμεγιστοτικά ιδεώδη τού R, ήτοι τέτοια ώστε

$$I_j + I_k = R,\ \forall\, (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq j, k \leq n,\ \ j \neq k,$$

να αποδειχθεί ότι

$$R = I_j + \bigcap_{1 \leq k \leq n,\ k \neq j} I_k,\ \ \forall j \in \mathbb{N},\ \ 1 \leq j \leq n.$$

(iii) Έστω R ένας 1-δακτύλιος. Εάν τα $I_1, I_2, \ldots, I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, είναι ανά δύο συμμεγιστοτικά ιδεώδη τού R, να αποδειχθεί ότι

$$R/\bigcap_{j=1}^{n} I_j \cong \prod_{j=1}^{n} \left(R/I_j\right).$$

(iv) Έστω n ένας φυσικός αριθμός και έστω

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

η αποσύνθεση τού n ως γινομένου διακεκριμένων πρώτων αριθμών $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{Z}/\left(n\mathbb{Z}\right) \cong \prod_{j=1}^{k} \mathbb{Z}/\left(p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z}\right).$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Εάν

$$R_{-19} := \left\{ a + b\left(\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C},$$

να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ο δακτύλιος R_{-19} είναι Π.Κ.Ι.

(ii) Ο R_{-19} δεν είναι ευκλείδεια περιοχή.

ΘΕΜΑ 4ο (i) Να διατυπωθεί το *θεώρημα τού Wilson* και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι για κάθε πρώτο αριθμό p τής μορφής $p = 4m+1$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(\exists x \in \mathbb{Z}) : x^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p).$$

(ii) Έστω p πρώτος αριθμός. Κάνοντας χρήση τού (i) να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(α) $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$

(β) Το p είναι ανάγωγο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ τού Gauss.

(γ) Το p γράφεται ως $p = a^2 + b^2$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$.

(iii) Τι μορφής είναι τα ανάγωγα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ τού Gauss; (Δεν απαιτείται απόδειξη).

(iv) Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο ακεραίων, καθένας εκ των οποίων ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων, είναι αφ' εαυτού το άθροισμα των τετραγώνων δύο ακεραίων.

(v) Να αποδειχθεί λεπτομερώς [με τη βοήθεια των (ii), (iii) και (iv)] ότι ένας φυσικός αριθμός n γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών *εάν και μόνον εάν* οι πρώτοι παράγοντές του (στην ανάλυση τού n ως γινομένου πρώτων αριθμών), οι οποίοι είναι ισότιμοι τού $3 (\mathrm{mod}\ 4)$, εμφανίζονται υψωμένοι σε μια *άρτια* δύναμη.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω K ένα σώμα χαρακτηριστικής 0.

(i) Να γραφεί ο λεγόμενος *τύπος τού Taylor*, ο οποίος ισχύει για τα πολυώνυμα τα ανήκοντα στον $K[t]$, και να δοθεί μια απόδειξη αυτού.

(ii) Να αποδειχθεί (βάσει τού (i)) ότι το $a \in K$ αποτελεί μια θέση μηδενισμού τού $f(t) \in K[t]$ με πολλαπλότητα ίση με $m \in \mathbb{N}$ εάν και μόνον εάν

$$f(a) = 0,\ \ D^{(j)}(f(a)) = 0,\ \forall j,\ 1 \leq j \leq m-1,\ \ D^{(m)}(f(a)) \neq 0.$$

ΘΕΜΑ 6ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *κριτήριο αναγωγιμότητας τού Eisenstein*.

(ii) Κάνοντας χρήση τού ανωτέρω κριτηρίου να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$t_1^2 - t_2 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]\ \ (\cong (\mathbb{R}[t_1])[t_2])$$

είναι ανάγωγο (εντός τού $\mathbb{R}[t_1, t_2]$).

ΘΕΜΑ 7ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα βάσεως τού Hilbert*.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι ένας $a \in \mathbb{R}$ είναι ΚΔ-*κατασκευάσιμος* εάν και μόνον εάν ανήκει στην οροφή κάποιου πύργου τετραγωνικών ριζών υπεράνω τού $\mathbb{Q}$.

(ii) Εάν ο $a \in \mathbb{R}$ είναι ΚΔ-κατασκευάσιμος, να αποδειχθεί ότι

$$[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2^m,\ \text{για κάποιον } m \in \mathbb{N}.$$

ΘΕΜΑ 9ο Εάν υποτεθεί ότι ένα κανονικό n-γωνο, $n \geq 3$, είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη, να αποδειχθεί ότι ο n είναι τής μορφής $n = 2^k$ ή τής μορφής

$$n = 2^r p_1 \cdots p_s,$$

όπου $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$, και $p_1, \ldots, p_s$ διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί Fermat.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 10ο</u> Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b\sqrt{5} \\ -b\sqrt{5} & a \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

αποτελεί έναν μεταθετικό υποδακτύλιο τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με μοναδιαίο και ότι το

$$I = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & (3y+x)\sqrt{5} \\ -(3y+x)\sqrt{5} & x \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

είναι ένα ιδεώδες τού R. Εν συνεχεία, διαπιστώνοντας ότι

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right) \in I,$$

να αποδειχθεί ότι το I δεν είναι κύριο ιδεώδες.

<u>ΘΕΜΑ 11ο</u> Στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{Z}[t]$ ορίζουμε τα ιδεώδη $I := \langle t \rangle$ και $J := \langle 2, t \rangle$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το I είναι πρώτο ιδεώδες και το J είναι ένα μη κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[t]$.

(ii) Υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων

$$\mathbb{Z}[t] \,/\, J \cong \mathbb{Z}_2.$$

(iii) Το J είναι ένα μεγιστοτικό και το I ένα μη μεγιστοτικό ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[t]$.

<u>ΘΕΜΑ 12ο</u> Έστω ότι το K είναι σώμα χαρακτηριστικής 0 και ότι τα $f(t), g(t) \in K[t]$ είναι δυο (μη σταθερά) πολυώνυμα μιας μεταβλητής t. Υποτιθεμένου ότι το $g(t)$ είναι ανάγωγο (εντός τού $K[t]$) να αποδειχθεί η ισοδυναμία

$$(g(t))^2 \mid f(t) \Longleftrightarrow [g(t) \mid f(t) \text{ και } g(t) \mid D\left(f(t)\right)],$$

όπου $D\left(f(t)\right)$ είναι η επίτυπη παράγωγος τού $f(t)$.

<u>ΘΕΜΑ 13ο</u> (i) Να προσδιορισθούν όλα τα πολυώνυμα $f(t) \in \mathbb{Z}_2[t]$ τα οποία είναι ανάγωγα υπεράνω τού $\mathbb{Z}_2$.

(ii) Να εξετασθεί το κατά πόσον το πολυώνυμο $g(t) = t^4 + t^2 + [1]_2 \in \mathbb{Z}_2[t]$ είναι ή δεν είναι ανάγωγο υπεράνω τού $\mathbb{Z}_2$.

<u>ΘΕΜΑ 14ο</u> (i) Εάν το πολυώνυμο $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$ δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον ρητό αριθμό $\frac{\lambda}{\mu}$, όπου μκδ$(\lambda, \mu) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$\lambda \mid a_0 \quad \text{και} \quad \mu \mid a_n.$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$g(t) = t^3 - t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$$

είναι ανάγωγο υπεράνω τού $\mathbb{Q}$.

(iii) Εάν το $a \in \mathbb{C}$ είναι μια θέση μηδενισμού τού ως άνω πολυωνύμου $g(t)$, να προσδιορισθεί το αντίστροφο στοιχείο τού $1 - 2a + 3a^2$ εντός τής επεκτάσεως $\mathbb{Q}(a)$ τού $\mathbb{Q}$.

ΘΕΜΑ 15ο (i) Εάν τα K και L είναι δυο σώματα, με $K \subseteq L$, και $a, b \in L$, και εάν υποτεθεί ότι μκδ$(m, n) = 1$, όπου

$$m := [K(a) : K], \quad n := [K(b) : K],$$

να αποδειχθούν οι ισότητες

$$[K(a, b) : K] = mn, \qquad K(a) \cap K(b) = K.$$

(ii) Να προσδιορισθεί στοιχείο $u \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}\right)$$

και να υπολογισθεί ο βαθμός $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}\right) : \mathbb{Q}\right]$.

ΘΕΜΑ 16ο (i) Έστω ότι ο όγκος δοθέντος κύβου είναι 8 cm^3. Είναι δυνατή η κατασκευή τής ακμής κύβου πενταπλασίου όγκου κάνοντας χρήση κανόνα και διαβήτη;

(ii) Εάν υποτεθεί ότι ο n είναι τής μορφής $n = 2^r p_1 \cdots p_s$, όπου $r \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$, και $p_1, \ldots, p_s$ διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί Fermat, και εάν -επιπροσθέτως- ισχύει μκδ$(n, 3) = 1$, να αποδειχθεί ότι είναι δυνατή η τριχοτόμηση τής γωνίας $\frac{2\pi}{n}$ κάνοντας χρήση κανόνα και διαβήτη.