ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΥΠΡΟΥ

ΜΑΣ 225 - ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

23 Νοεμβρίου 2002

(Χειμερινό εξάμηνο 2002-2003)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	
ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΣ

Τα θέματα που δίνονται είναι εν συνόλω **16** και υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες: σε *θεωρητικά θέματα* και σε *θέματα σχετιζόμενα με τις εφαρμογές*. Οι φοιτητές/φοιτήτριες καλούνται να απαντήσουν το πολύ σε **7** θέματα, *υπό τον όρο ότι τα προς απάντησιν επιλεγόμενα θέματα τα οποία ανήκουν αποκλειστικώς σε μία εκ των δύο κατηγοριών δεν υπερβαίνουν τα* **4**. Κάθε ορθώς απαντημένο θέμα (με ολοκληρωμένη αποδεικτική επιχειρηματολογία) βαθμολογείται με **5** μονάδες και η λήψη τού βαθμού «άριστα» (στην προκειμένη τελική εξέταση) επιτυγχάνεται με τη συγκέντρωση **35** μονάδων.

Υποσημειώσεις: (α) Όπως έχει ήδη διευκρινισθεί από τις πρώτες παραδόσεις τού μαθήματος, ο βαθμός τής ενδιαμέσου εξετάσεως αντιστοιχεί στο 35% τού τελικού (συνολικού) βαθμού ενός εκάστου εξεταζομένου.
(β) Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
(γ) Η χρήση *πολύ* δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
(δ) Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί (λεπτομερώς) ο «γενικευμένος προσεταιριστικός νόμος» ο οποίος ισχύει για ημιομάδες.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Lagrange*.

(ii) Να αποδειχθεί (με πλήρη θεωρητική αιτιολόγηση) ότι το αντίστροφό του δεν είναι εν γένει αληθές.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Poincaré* (περί τής αριθμητικής συμπεριφοράς τού δείκτη υποομάδων εντός μιας δεδομένης ομάδας).

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> (i) Να ορισθεί η *απεικόνιση προσημάνσεως*

$$\mathrm{sgn} : (\mathfrak{S}_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot), \quad n \in \mathbb{N},$$

μέσω «παραβατικών ζευγών» και να δοθεί και αποδειχθεί ο «κλειστός» τύπος για τον υπολογισμό της. Κατόπιν τούτου, κάνοντας χρήση τού εν λόγω τύπου να αποδειχθεί ότι είναι η sgn αποτελεί επιμορφισμό μεταξύ των ως άνω αναγραφομένων ομάδων.

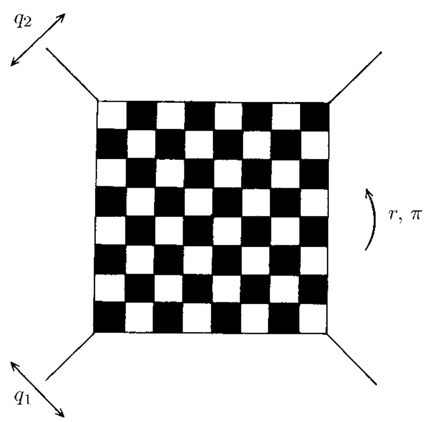
(ii) Να αποδειχθεί (κατόπιν χρήσεως τού (i) και λοιπής θεωρητικής αιτιολογήσεως) ότι η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_n$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathfrak{S}_n$.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Cayley.*

(ii) Να εφαρμοσθεί το εν λόγω θεώρημα προκειμένου να αποδειχθεί ότι η ομάδα

$$G_{\sigma\varkappa} = \{e, r, q_1, q_2\}$$

των επιπέδων συμμετριών μιας σκακιέρας



(η απαρτιζόμενη από την ταυτοτική απεικόνιση e, τη στροφή r περί το κέντρο της κατά π και τους κατοπτρισμούς q_1 και q_2 ως προς τις δύο διαγωνίους της) είναι ισόμορφη τής ομάδας

$$V = \{\mathrm{Id}, [1\ 2] \circ [3\ 4], [1\ 3] \circ [2\ 4], [1\ 4] \circ [2\ 3]\} \sqsubset \mathfrak{S}_4$$

των τεσσάρων στοιχείων τού Klein.

<u>ΘΕΜΑ 6ο</u> (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων*.

(ii) Να δοθούν τουλάχιστον δύο παραδείγματα εφαρμογής του.

ΘΕΜΑ 7ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα αντιστοιχίσεως*.

ΘΕΜΑ 8ο Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και μκδ$(m,n) = 1$, να αποδειχθεί ο ισομορφισμός

$$\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 9ο Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την εσωτερική πράξη "$\circledast$", όπου

$$x \circledast y := xy + x + y, \ \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(i) Διαθέτει το ομαδοειδές $(\mathbb{R}, \circledast)$ ουδέτερο στοιχείο; Και αν ναι, τότε ποια $x \in \mathbb{R}$ επιδέχονται συμμετρικά στοιχεία ως προς την "$\circledast$";

(ii) Ποιες θα είναι οι απαντήσεις στα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση κατά την οποία, αντί τού ομαδοειδούς $(\mathbb{R}, \circledast)$, θεωρήσουμε το $(\mathbb{Z}, \circledast|_{\mathbb{Z}})$;

ΘΕΜΑ 10ο Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e. Υποθέτοντας ότι

(a) $(ab)^2 = (ba)^2, \forall\, (a,b) \in G \times G$, και

(b) $(\forall a \in G)\, \big(a^2 = e \Longrightarrow a = e\big)$

να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $x^2 = yx^2y^{-1}, \ \forall\, (x,y) \in G \times G$,

(ii) $yxy^{-1} = y^{-1}xy, \ \forall\, (x,y) \in G \times G$,

(iii) η $(G, \cdot)$ είναι αβελιανή.

ΘΕΜΑ 11ο (i) Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή (πολλαπλασιαστική) ομάδα με ουδέτερό της στοιχείο το e, a, b δυο στοιχεία τής G,και $r, s, t \in \mathbb{N}$, για τους οποίους ισχύει

$$\text{μκδ}\,(r,s) = \text{μκδ}\,(s,t) = \text{μκδ}\,(t,r) = 1,$$

να αποδειχθεί η συνεπαγωγή

$$\Big[a^r = b^s = (ab)^t = e\Big] \Longrightarrow a = b = e.$$

(ii) Παραμένει αυτό το συμπέρασμα εν ισχύ ακόμη και όταν η G είναι μη αβελιανή;

ΘΕΜΑ 12ο (i) Εάν ο n είναι ένας φυσικός αριθμός, να αποδειχθεί ότι ισχύει η ισότητα

$$n = \sum_{d \,|\, n} \varphi\,(d)$$

όπου φ η συνάρτηση τού Euler και το άθροισμα είναι ειλημμένο υπεράνω όλων των (διακεκριμένων) διαιρετών d τού n $(1 \leq d \leq n)$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι μια ομάδα G τάξεως $n \in \mathbb{N}$ είναι κυκλική εάν και μόνον εάν για κάθε διαιρέτη d τού n υπάρχει το πολύ μία κυκλική υποομάδα τής G τάξεως d.

ΘΕΜΑ 13ο (i) Να ορισθεί η *ομάδα των τετρανίων* Q ως υποομάδα τής $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ και να καταγραφούν επακριβώς όλα τα στοιχεία της.

(ii) Να προσδιορισθεί η τάξη καθενός των στοιχείων τής Q.

(iii) Να προσδιορισθούν όλες οι υποομάδες τής Q και να αποδειχθεί το ότι όλες τους είναι ορθόθετες.

ΘΕΜΑ 14ο (i) Δίνονται οι μετατάξεις

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_9$$

και

$$\tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{3n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Να εκφρασθούν οι σ και τ ως σύνθεση επαλλήλων -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- κύκλων. Εν συνεχεία, να εξετασθεί το εάν οι σ και τ είναι άρτιες ή περιττές.

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, γραφόμενη ως πεπερασμένη ακολουθία

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s$$

s συντιθέμενων -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- κύκλων $\tau_1, \dots, \tau_s$ με μήκη $k_1, \dots, k_s \geq 2$, αντιστοίχως, έχει τάξη

$$\mathrm{ord}\,(\sigma) = \text{εκπ}(k_1, \dots, k_s).$$

(iii) Να προσδιορισθεί η

$$\sigma^{1000} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{1000 \text{ φορές}}$$

όταν

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_9.$$

ΘΕΜΑ 15ο (i) Εάν ορίσουμε τη *διεδρική ομάδα* $D_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ως την υποομάδα

$$D_n = \langle a, b \rangle \sqsubset \mathfrak{S}_n$$

τής συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ την παραγόμενη από τις μετατάξεις

$$a := [1\,2\,\dots\,n]\,, \quad b := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

να αποδειχθεί ότι

$$a^n = b^2 = (ab)^2 = \mathrm{Id},\ \ a^k \neq \mathrm{Id},\ \forall k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

(ii) Μέσω των σχέσεων (i) να αποδειχθεί ότι

$$D_n = \left\{ a^i b^j \;\middle|\; 0 \leq i \leq n-1,\ \ 0 \leq j \leq 1 \right\}$$

με τάξη $|D_n| = 2n$.

(iii) Να υπολογισθεί το κέντρο $Z\,(D_n)$ τής D_n.

ΘΕΜΑ 16ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η ομάδα πηλίκων $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι περιοδική.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση

$$f_n : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad f_n(x + \mathbb{Z}) := nx + \mathbb{Z}, \ \ \forall x \in \mathbb{Q},$$

είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα

$$\operatorname{Ker}(f_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n.$$

(iii) Εάν η H είναι οιαδήποτε υποομάδα τής $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ τάξεως n, τότε

$$H \cong \operatorname{Ker}(f_n).$$