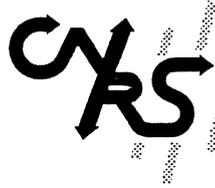


GRENOBLE  
PÔLE EUROPÉEN  
SCIENTIFIQUE ET  
UNIVERSITAIRE



CENTRE NATIONAL  
DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



*École d'été de Mathématiques*  
**GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS TORIQUES**

INSTITUT FOURIER - UMR 5582 du CNRS et de l'UJF  
Grenoble (France)

du 19 juin au 7 juillet 2000

Über unimodulare, kohärente Triangulierungen von  
Gitterpolytopen. Beispiele und Anwendungen

*Dimitrios I. DAIS (University of Ioannina, Greece)*

Avec le soutien de :

**l'I.E.S.A.-G. (Pôle Européen Universitaire et Scientifique Grenoblois)**  
**la Mission Scientifique et Technique du Ministère de l'Enseignement Supérieur**  
**l'Université Joseph Fourier**  
**la Ville de Grenoble**  
**et du Centre National de la Recherche Scientifique**

Organisateurs : Laurent BONAVERO et Michel BRION  
Responsable de l'École d'Été de Mathématiques : Jean-Pierre DEMAILLY

L'**Institut d'Études Scientifiques Avancées de Grenoble (I.E.S.A.-G)**, est une émanation des universités et organismes de recherche du site regroupés dans le cadre de *Grenoble Pôle Européen Universitaire et Scientifique (GPEUS)*.

Il suscite et coordonne des sessions de formation doctorale qu'il soutient ; il veille à la qualité de ces écoles, notamment sur le plan pédagogique, et sur leur large ouverture européenne, voire internationale.

Les formations à la recherche soutenues depuis 1992 concernent l'utilisation des grands instruments (réacteur à neutrons et synchrotron) pour la physique, la chimie et la biologie, les mathématiques, l'automatique, l'atmosphère et l'environnement, les géomatériaux, le magnétisme, la micro-électronique, l'informatique, l'optique, les sciences "sociales et humaines".

The Grenoble Institute of Advanced Scientific Studies (**Institut d'Études Scientifiques Avancées de Grenoble, I.E.S.A.-G**) was set up by the universities and research institutions through the European University and Scientific Pole in Grenoble (GPEUS), France.

Its mission is to promote, coordinate and monitor the training sessions that it supports, in particular their teaching content as well as their European and even international relevance.

The research training sessions that have been supported since 1992 cover the following fields: use of large experimental systems (neutron reactor and synchrotron), physics, chemistry, biology, mathematics, automation studies, the atmosphere and environment, geomaterials, magnetism, microelectronics, computer science, optics, "social and human" sciences.

# Über unimodulare, kohärente Triangulierungen von Gitterpolytopen. Beispiele und Anwendungen.

D. I. Dais

Notes (in german) based on a lecture I gave in February 1999 at the University of Konstanz.

## 1 Polytope

(a) Die *lineare*, die *positive*, die *affine*, die *ganzahlige affine* und die *konvexe Hülle* einer Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  werden folgendermaßen definiert:

$$\text{lin}(A) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in A \text{ und } \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{pos}(A) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in A \text{ und } \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\},$$

$$\text{aff}(A) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k \in \text{lin}(A) \mid \mu_1 + \cdots + \mu_k = 1\},$$

$$\text{aff}_{\mathbb{Z}}(A) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k \in \text{aff}(A) \mid \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{Z}\} \text{ und}$$

$$\text{conv}(A) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k \in \text{aff}(A) \mid \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Die *Dimension*  $\dim(A)$  von  $A$  ist per definitionem gleich der  $\dim(\text{aff}(A))$ . Ein *Polytop*  $P$  ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten von  $\mathbb{R}^d$  oder -äquivalent dazu- die beschränkte Menge der Lösungen eines endlichen Systems von Ungleichungen in  $\mathbb{R}^d$ . *k-Polytop* wird die Abkürzung für ein  $k$ -dimensionales Polytop sein. Das (*relative*) *Innere*  $\text{int}(P)$  eines Polytops  $P$  ist die Menge von allen Punkten  $\mathbf{x} \in P$ , für welche ein kleines  $\varepsilon > 0$  existiert, so daß der Durchschnitt  $\mathring{B}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \text{aff}(P)$  des offenen  $\varepsilon$ -Balles  $\mathring{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$  mit seiner affinen Hülle in  $P$  enthalten ist. Der (*relative*) *Rand*  $\partial P$  von  $P$  ist das Komplement  $P \setminus \text{int}(P)$ .

(b) Zwei Polytope  $P \subset \mathbb{R}^d$  und  $P' \subset \mathbb{R}^{d'}$  sind *affin äquivalent* zueinander, wenn es eine affine Abbildung  $\varpi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  gibt, so daß  $\varpi$  eine Bijektion von  $P$  auf  $P'$  induziert. ( $\varpi$  könnte weder injektiv noch surjektiv sein;  $\varpi|_{\text{aff}(P)} : \text{aff}(P) \rightarrow \text{aff}(P')$  muß aber bijektiv sein. Insbesondere wenn  $P$  und  $P'$  affin äquivalent sind, sind sie von der gleichen Dimension).

(c) Die konkave *Stützfunktion*  $\vartheta_P$ , die zu einem vorgegebenen Polytop  $P \subset \mathbb{R}^d$  assoziiert ist, wird durch

$$\vartheta_P : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad \vartheta_P(\mathbf{x}) := \min \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : \mathbf{y} \in P\} \quad (1.1)$$

definiert. Für ein  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  heißt die Hyperebene  $\mathcal{H}(P, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = -\vartheta_P(\mathbf{x})\}$  die *Stützhyperebene* von  $P$  mit *äußerem Normalenvektor*  $\mathbf{v}$ . Der Durchschnitt  $F = P \cap \mathcal{H}(P, \mathbf{v})$  für ein  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  wird eine *echte Seite* von  $P$  oder-noch präziser- eine *i-Seite* von  $P$  genannt, falls  $\dim(F) = i$ ,  $0 \leq i \leq \dim(P) - 1$ . ( $F$  selbst ist ebenfalls ein Polytop). Die *nicht echten* Seiten von  $P$  sind die leere Menge  $\emptyset$  und  $P$  selbst mit den Dimensionen  $-1$  bzw.  $\dim(P)$ . (Zur Notation:  $F \prec P$  bedeutet, daß  $F$  eine Seite von  $P$  bildet). Die echten Seiten eines  $d$ -Polytops  $P$ , die Dimension  $0, 1$  bzw.  $d - 1$  haben, heißen *Eckpunkte* (oder *Ecken*), *Kanten* bzw. *Facetten* von  $P$ . Mit  $\mathcal{F}_i(P)$  wird die Menge aller  $i$ -Seiten von  $P$  und mit  $f_i(P)$  deren Kardinalität bezeichnet. (Insbesondere setzt man  $\text{vert}(P) := \mathcal{F}_0(P)$  und  $f_{-1}(P) := 1$ ,  $f_d(P) := 1$ ).

(d) Eine Menge von  $k$  Punkten aus  $\mathbb{R}^d$  ( $k \leq d$ ) heißt *affin unabhängig*, wenn ihre affine Hülle die Dimension  $k - 1$  hat. Ein  $k$ -Polytop  $s$  in  $\mathbb{R}^d$  ist ein  $k$ -*Simplex*, wenn es sich als die konvexe Hülle von  $k + 1$  affin unabhängigen Punkten aus  $\mathbb{R}^d$  schreiben läßt. Für ein  $k$ -simplex  $s$  gilt

$$f_i(\mathbf{s}) = \binom{k+1}{i+1}, \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (1.2)$$

Ein Polytop heißt *simplizial*, wenn all seine Facetten Simplizes sind.

(e) Sei  $P$  ein  $d$ -Polytop und  $\mathbf{v} \in \text{vert}(P)$ . Die *Eckfigur*  $P/\mathbf{v} := P \cap \mathcal{H}$  von  $P$  in  $\mathbf{v}$  ist das  $(d - 1)$ -Polytop, das man erhält, indem man  $P$  mit einer Hyperebene  $\mathcal{H}$  schneidet, die  $\mathbf{v}$  auf dem einen Halbraum beläßt und all die restlichen Ecken von  $P$  auf dem anderen. ( $P/\mathbf{v}$  ist eindeutig bis auf kombinatorische Äquivalenz).  $P$  wird ein *einfaches* Polytop genannt, falls all die Eckfiguren  $\{P/\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \text{vert}(P)\}$  von  $P$   $(d - 1)$ -Simplizes sind oder -äquivalent dazu- falls jede Ecke  $\mathbf{v} \in \text{vert}(P)$  in genau  $d$  Facetten von  $P$  enthalten ist.

(f) Grundlegende Konstruktionen von Polytopen. Seien  $P \subset \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -Polytop und  $P' \subset \mathbb{R}^{d'}$  ein  $d'$ -Polytop.

(i) Das gewöhnliche *Produkt*  $P \times P' := \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^{d+d'} \mid \mathbf{x} \in P, \mathbf{x}' \in P'\}$  von  $P$  und  $P'$  hat Dimension  $d + d'$  und

$$f_i(P \times P') = \sum_{j=0}^i f_j(P) \cdot f_{i-j}(P') \quad (1.3)$$

Standard-Beispiel ist das *Prisma* über  $P$ ,  $\text{prism}_I(P) := P \times I$ , wobei  $I$  ein reelles Intervall in  $\mathbb{R}$  ist.

(ii) Der sog. *Join*  $P \star P'$  von  $P$  und  $P'$  ist die konvexe Hülle von  $P \cup P'$ , nachdem man derartige Einbettungen von  $P$  und  $P'$  in einem affinen Raum gewählt hat, daß  $\text{aff}(P)$  und  $\text{aff}(P')$  schief zueinander stehen ( $\iff \dim(P \cup P') = d + d' + 1$ ). Z.B.

$$P \star P' := \text{conv} \left( \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}^{d+d'+1} \mid \mathbf{x} \in P \right\} \cup \left\{ (\mathbf{0}, \mathbf{x}', 1) \in \mathbb{R}^{d+d'+1} \mid \mathbf{x}' \in P' \right\} \right) .$$

$P \star P'$  hat die Dimension  $d + d' + 1$  und seine  $i$ -Seiten sind die Joins der  $k$ -Seiten von  $P$  mit den  $(i - k - 1)$ -Seiten von  $P'$ . Aus diesem Grunde gilt:

$$f_i(P \star P') = \sum_{k=-1}^i f_k(P) \cdot f_{i-k-1}(P') \quad (1.4)$$

Insbesondere ist der Join  $\text{pyr}_{\mathbf{v}}(P) := P \star \{\mathbf{v}\}$  mit  $\mathbf{v} \notin \text{aff}(P)$  die  $(d + 1)$ -dimensionale *Pyramide* über  $P$  bzgl.  $\mathbf{v}$ .

(iii) Die *freie Summe* von  $P$  und  $P'$  ist das  $(d + d')$ -Polytop

$$P \oplus P' := \text{conv} \left( \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{d+d'} \mid \mathbf{x} \in P \right\} \cup \left\{ (\mathbf{0}, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^{d+d'} \mid \mathbf{x}' \in P' \right\} \right) .$$

$P \oplus P'$  ist somit die Projektion von dem Join  $P \star P'$ . Falls beide,  $P$  und  $P'$ , die entsprechenden Ursprünge in ihren Inneren (bis auf affine Äquivalenz) enthalten, gilt

$$f_i(P \oplus P') = \sum_{\substack{j+k=i-1, \\ \text{für } -1 \leq j \leq d-1, -1 \leq k \leq d'-1}} f_j(P) \cdot f_k(P') \quad (1.5)$$

Beispiel:  $\text{bipyr}_I(P) := P \oplus I$ , wobei  $I$  ein reelles Intervall ist, so daß  $\text{int}(I) \cap \text{int}(P)$  einelementig ist, heißt die  $(d + 1)$ -dimensionale *Bipyramide* über  $P$  bzgl.  $I$ .

(g) Nun nehmen wir an, daß bis auf affine Äquivalenz,  $P \subset \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -Polytop sei, das den Ursprung in seinem Inneren hat. Das *polare Polytop* von  $P$  ist das  $d$ -Polytop:

$$P^* := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq -1, \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{x} \in P \} .$$

Offensichtlich gilt  $(P^*)^* = P$ . Wenn  $\text{vert}(P) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ , dann wird das polare Polytop folgendermaßen geschrieben:

$$P^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle \geq -1, \text{ für alle } i, 1 \leq i \leq k\} .$$

Für jede echte Seite  $F$  von  $P$  definieren wir seine *duale Seite*

$$F^* := P^* \cap \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -1, \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \text{aff}(F)\} .$$

**Proposition 1.1** *Es gibt eine inklusionsumkehrende Abbildung*

$$\mathcal{F}_i(P) \ni F = (F^*)^* \xleftrightarrow{1:1} F^* \in \mathcal{F}_{d-i-1}(P^*) \quad (1.6)$$

Daraus folgt

$$f_i(P^*) = f_{d-i-1}(P), \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq d. \quad (1.7)$$

**Beispiel 1.2** (i) Für ein Polytop  $P$  mit  $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$  gilt

$$\text{pyr}_{\mathbf{0}}(P) = (\text{pyr}_{\mathbf{0}}(P^*))^* \quad \text{und} \quad \left(\text{prism}_{[-1,1]}(P)\right)^* = \text{bipy}_{[-1,1]}(P^*) .$$

(ii)  $P$  ist einfach genau dann, wenn  $P^*$  simplicial ist. Zum Beispiel ist  $\text{prism}_{[-1,1]}(P)$  einfach.

**Beispiel 1.3** Ist  $P \subset \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -Polytop und  $P' \subset \mathbb{R}^{d'}$  ein  $d'$ -Polytop mit  $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$ ,  $\mathbf{0} \in \text{int}(P')$ , so ist

$$(P \oplus P')^* = P^* \times P'^* \quad (1.8)$$

(Ein einfacher Beweis von (1.5) ergibt sich eigentlich aus der Kombination von (1.7) mit (1.8) und (1.3)).

## 2 Erinnerung an gewisse kombinatorische Zahlen

(a) Für  $d, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , definiert man den gewöhnlichen Binomialkoeffizienten

$$\binom{d}{k} = \frac{(d)_k}{k!}, \quad (d)_k := d(d-1) \cdots (d-k+1)$$

(mit  $\binom{d}{k} = 0$ , für  $k > d$ ).

(b) Die *Stirlingsche Zahl*  $\left[ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right]$  der ersten Art von  $d$  über  $k$  ist dadurch definierbar, daß  $(-1)^{d-k} \left[ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right]$  die Anzahl aller Permutationen von  $\{1, \dots, d\}$  mit genau  $k$  Zykeln abzählt. Die *Stirlingsche Zahl*  $\left\{ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  der zweiten Art von  $d$  über  $k$  ist die Anzahl der Partitionen von  $\{1, \dots, d\}$  in  $k$  nicht-leere Mengen. Sie ist gleich:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} \binom{k}{\lambda} \lambda^d = \frac{d!}{k!} \sum_{\{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k : \lambda_1 + \dots + \lambda_k = d\}} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k!} \quad (2.1)$$

Auf der anderen Seite erhält man durch eine Formel von Schlömilch (1852):

$$\begin{aligned} \left[ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right] &= \sum_{\mu=0}^{d-k} (-1)^\mu \binom{d+\mu-1}{k-1} \binom{2d-k}{d-k-\mu} \left\{ \begin{smallmatrix} d-k+\mu \\ \mu \end{smallmatrix} \right\} = \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \sum_{\mu=0}^{d-k} \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^j \binom{\mu}{j} \binom{d+\mu-1}{k-1} \binom{2d-k}{d-k-\mu} \frac{j^{d-k+\mu}}{\mu!} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Stirlingschen Zahlen (2.2), (2.1) können alternativ als die Koeffizienten der folgenden Summenentwicklungen charakterisiert werden:

$$(t)_d = t(t-1) \cdots (t-d+1) = \sum_{k=0}^d \left[ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right] t^k \quad \text{und} \quad t^d = \sum_{k=0}^d \left\{ \begin{smallmatrix} d \\ k \end{smallmatrix} \right\} (t)_k .$$

Eine nützliche Verallgemeinerung kommt mit der Einführung der sogenannten *nicht-zentralen Stirlingschen Zahlen* zustande, die folgendermaßen abzuleiten sind:

$$(t - \lambda)_d = \sum_{k=0}^d \left[ \begin{matrix} d \\ k \end{matrix} \middle| r \right] (t - \mu)^k \quad \text{und} \quad (t - \lambda)^d = \sum_{k=0}^d \left\{ \begin{matrix} d \\ k \end{matrix} \middle| r \right\} (t - \mu)_k ,$$

wobei  $r = \mu - \lambda$  ( $\mu, \lambda$  Konstanten). Sie können geschrieben werden als:

$$\left[ \begin{matrix} d \\ k \end{matrix} \middle| r \right] = \sum_{j=k}^d \begin{bmatrix} d \\ j \end{bmatrix} \binom{j}{k} r^{j-k} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{matrix} d \\ k \end{matrix} \middle| r \right\} = \sum_{j=k}^d \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \binom{d}{j} r^{d-j} \quad (2.3)$$

und erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen:

$$\sum_{j=k}^d \left[ \begin{matrix} d \\ j \end{matrix} \middle| r \right] \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \middle| -r \right\} = \sum_{j=k}^d \left\{ \begin{matrix} d \\ j \end{matrix} \middle| r \right\} \left[ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \middle| -r \right] = \delta_{d,k} \quad (2.4)$$

wobei  $\delta_{d,k}$  die Kronecker-Delta Funktion bezeichnet.

(c) Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{S}_d$  die symmetrische Gruppe der Permutationen einer total geordneten Menge, die aus  $d$  Elementen besteht. (Man kann ohne weiteres diese Menge mit  $\{1, 2, \dots, d\}$  identifizieren). Eine Permutation  $\theta \in \mathfrak{S}_d$  induziert einen *Anstieg* (bzw. einen *Sturz*) an der Stelle  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ , falls  $\theta(i) < \theta(i+1)$  (bzw.  $\theta(i) > \theta(i+1)$ ). Die *Eulersche Zahl*  $A(d, k)$  von  $d$  über  $k$  ist per definitionem die Anzahl der Permutationen aus  $\mathfrak{S}_d$ , die genau  $k-1$  Anstiege (oder genau  $k-1$  Stürze) besitzen, und ist gleich

$$A(d, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{d+1}{i} (k-i)^d = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} i! \binom{d-i}{k-i} \left\{ \begin{matrix} d \\ i \end{matrix} \right\} \quad (2.5)$$

Eine direkte Verallgemeinerung der  $A(d, k)$ 's sind die sogenannten *nicht-zentralen Eulersche Zahlen* oder *Dwyer Zahlen*

$$A(d, k | r) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{d+1}{i} (k-i+r)^d \quad (2.6)$$

(mit Translationsummanden  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ), die sich auch als Koeffizienten der Entwicklung

$$(t+r)^d = \sum_{k=0}^d A(d, k | r) \binom{t+d-k}{d}$$

darstellen lassen. Andere nützliche Zahlen sind die *nicht-zentralen Eulerschen Zahlen*  $B(d, k | l, r)$  der "generalized factorials" (wieder mit Translationsummanden  $r$ ). Sie tauchen in der Entwicklung

$$\binom{l \cdot t + r}{d} = \sum_{k=0}^d B(d, k | l, r) \binom{t+d-k}{d}$$

auf und genügen der Rekursionsrelation:

$$(d+1) B(d+1, k | l, r) = (lk - d + r) B(d, k | l, r) + (l(d-k+1) + d - r) B(d, k-1 | l, r)$$

mit Anfangsbedingungen  $B(0, 0 | l, r) = 1$  und  $B(d, 0 | l, r) = \binom{r}{d}$ . Es kann gezeigt werden, daß

$$B(d, k | l, r) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d+1}{j} \binom{l(k-j) + r}{d} \quad (2.7)$$

mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{d!}{l^d} \mathbf{B}(d, k \mid l, r) \right) = \mathbf{A} \left( d, k \mid \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{r}{l} \right) \right).$$

(d) Die in (c) definierten kombinatorischen Zahlen können mit Hilfe von rationalen erzeugenden Funktionen, deren Koeffizienten Polynome sind, abgeleitet werden. Das allgemeine Prinzip dieses Verfahrens wird durch die folgende Proposition beschrieben.

**Proposition 2.1** Sei  $d \in \mathbb{N}$  und  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit erzeugender Funktion  $\mathbf{GF}(\Phi; t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\nu) t^\nu$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $\mathbf{GF}(\Phi; t)$  ist gleich

$$\mathbf{GF}(\Phi; t) = \frac{\mathbf{Q}_\Phi(t)}{(1-t)^{d+1}}$$

wobei  $\mathbf{Q}_\Phi(t) \in \mathbb{Z}[t]$  und  $\deg(\mathbf{Q}_\Phi(t)) \leq d$ .

(ii) Für alle  $\nu \geq 0$  gilt

$$\sum_{i=0}^{d+1} (-1)^i \binom{d+1}{i} \Phi(\nu+i) = 0.$$

(iii)  $\Phi(\nu)$  ist eine polynomiale Funktion von  $\nu$  vom Grad  $\leq d$  (und  $\deg(\Phi(\nu)) = d \Leftrightarrow \mathbf{Q}_\Phi(1) \neq 0$ ).

**Definition 2.2** Sind die Bedingungen der Proposition 2.1 erfüllt und

$$\mathbf{Q}_\Phi(t) = (1-t)^{d+1} \mathbf{GF}(\Phi; t) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \mathbf{q}_2 t^2 + \dots + \mathbf{q}_d t^d,$$

so heißt  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{d-1}, \mathbf{q}_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$  der  $\Phi$ -Eulersche Vektor und dessen Koordinaten die  $\Phi$ -Eulerschen Zahlen. Schreibt man  $\Phi(\nu)$  explizit als Polynom

$$\Phi(\nu) = \gamma_0 + \gamma_1 \nu + \gamma_2 \nu^2 + \dots + \gamma_d \nu^d$$

so gibt es eine  $\Phi$ -Transfer-Matrix  $\mathcal{U}_d^\Phi$ , d.h. eine  $(d+1) \times (d+1)$ -Matrix, für welche gilt

$$(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{d-1}, \mathbf{q}_d) = \mathcal{U}_d^\Phi \cdot (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{d-1}, \gamma_d).$$

**Beispiel 2.3** Sind  $d, r$  nicht negative ganze Zahlen, so genügt  $\Phi(\nu) = (\nu+r)^d$  den Bedingungen von Prop. 2.1 und der  $\Phi$ -Eulersche Vektor

$$(\mathbf{A}(d, 0 \mid r), \mathbf{A}(d, 1 \mid r), \mathbf{A}(d, 2 \mid r), \dots, \mathbf{A}(d, d \mid r)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{d+1}$$

wird durch die Dwyer Zahlen (2.6) gegeben. Für  $r = 0$  erhält man die gewöhnlichen Eulerschen Zahlen.

**Proposition 2.4** Sind  $d, r, l$  nicht negative ganze Zahlen, so genügt

$$\Phi(\nu) = \binom{l \cdot \nu + r}{d}$$

den Bedingungen der Proposition 2.1 und der  $\Phi$ -Eulersche Vektor ist gleich

$$(\mathbf{B}(d, 0 \mid l, r), \mathbf{B}(d, 1 \mid l, r), \mathbf{B}(d, 2 \mid l, r), \dots, \mathbf{B}(d, d \mid l, r)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{d+1}$$

mit  $\mathbf{B}(d, k \mid l, r)$  wie in (2.7).

(f) Sei  $\mathcal{S}$  ein polyedrischer Komplex der reinen Dimension  $d$ . Mit  $\mathcal{F}_i(\mathcal{S})$  bezeichnet man die Menge seiner  $i$ -dimensionalen Seiten und mit  $f_i(\mathcal{S})$  die Kardinalität von  $\mathcal{F}_i(\mathcal{S})$ . Der  $\mathbf{f}$ -Vektor  $\mathbf{f}(\mathcal{S})$  von  $\mathcal{S}$  ist der Zeilenvektor  $\left( (f_i(\mathcal{S}))_{0 \leq i \leq d} \right) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{d+1}$ , und der *erweiterte*  $\mathbf{f}$ -Vektor von  $\mathcal{S}$  ist definiert durch  $\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathcal{S}) := (f_{-1}(\mathcal{S}), \mathbf{f}(\mathcal{S}))$ , wobei  $f_{-1}(\mathcal{S}) := 1$ . Insbesondere definiert man den  $\mathbf{f}$ -Vektor  $\mathbf{f}(P)$  eines  $d$ -Polytops  $P$  als

$$\mathbf{f}(P) := \mathbf{f}(\mathcal{S}_{\partial P}) = (f_0(P), f_1(P), \dots, f_{d-2}(P), f_{d-1}(P)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^d$$

wobei man mit  $\mathcal{S}_{\partial P}$  den  $(d-1)$ -dimensionalen Randkomplex von  $P$  bezeichnet, d.h. den polyedrischen  $(d-1)$ -Komplex, der aus den echten Seiten von  $P$  und  $\emptyset$  besteht and der dem Rande  $\partial P$  zugrundeliegt. ( $\partial P$  ist topologisch eine  $(d-1)$ -Sphäre).

Sei nun  $\mathcal{S}$  ein *simplicialer*  $d$ -Komplex mit Eckpunktmenge  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\varkappa\}$  und

$$\Phi_{\mathcal{S}}(\nu) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \nu = 0 \\ \sum_{i=0}^d \binom{\nu-1}{i} f_{i-1}(\mathcal{S}), & \text{falls } \nu > 0 \end{cases}$$

Der sogenannte *Stanley-Reisner Ring* (oder *Seitenring*)  $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$  von  $\mathcal{S}$  ist dadurch definierbar, daß man einen Körper  $\mathbf{k}$  wählt, jeder Ecke  $\mathbf{v}_i$  eine Variable  $\mathfrak{x}_i$  über  $\mathbf{k}$  zuordnet, und anschließend  $\mathbf{k}[\mathcal{S}] := \mathbf{k}[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_\varkappa] / \mathfrak{I}_{\mathcal{S}}$  setzt, wobei  $\mathfrak{I}_{\mathcal{S}}$  das Ideal von  $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$  ist, das von “quadratfreien Monomen” erzeugt wird:

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}} = \left\langle \mathfrak{x}_{i_1} \cdot \mathfrak{x}_{i_2} \cdots \mathfrak{x}_{i_r} \mid \begin{array}{l} \text{für alle } r\text{-Tupel } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq \varkappa, \\ \text{für welche es keine Seite von } \mathcal{S} \text{ gibt, die} \\ \{\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_r}\} \text{ als die Menge ihrer Ecken hat} \end{array} \right\rangle.$$

$\mathbf{k}[\mathcal{S}]$  ist mit der Standard-Graduierung versehen, indem man  $\deg(\mathfrak{x}_i) := 1, \forall i, 1 \leq i \leq \varkappa$ , setzt. Der  $\nu$ -te graduierte Anteil von  $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$  hat Dimension  $\dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathcal{S}]_{\nu}) = \Phi_{\mathcal{S}}(\nu)$  und die Hilbertsche Reihe von  $\mathbf{k}[\mathcal{S}] = \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathbf{k}[\mathcal{S}]_{\nu})$  kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathcal{S}]_{\nu}) t^{\nu} = \frac{h_0(\mathcal{S}) + h_1(\mathcal{S}) t + \cdots + h_d(\mathcal{S}) t^d + h_{d+1}(\mathcal{S}) t^{d+1}}{(1-t)^{d+1}} \quad (2.8)$$

Aus Koeffizientenvergleich und aus (2.8) ergibt sich dann:

**Proposition 2.5** (i) Der “ $\mathbf{h}$ -Vektor”

$$\mathbf{h}(\mathcal{S}) := (h_0(\mathcal{S}), h_1(\mathcal{S}), \dots, h_d(\mathcal{S}), h_{d+1}(\mathcal{S})) \in \mathbb{Z}^{d+2}$$

von  $\mathcal{S}$  ist durch den erweiterten  $\mathbf{f}$ -Vektor von  $\mathcal{S}$  zu bestimmen (und umgekehrt), weil

$$h_j(\mathcal{S}) = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{d+1-i}{d+1-j} f_{i-1}(\mathcal{S}) \quad \text{und} \quad f_{j-1}(\mathcal{S}) = \sum_{i=0}^j \binom{d+1-i}{d+1-j} h_i(\mathcal{S}) \quad (2.9)$$

für alle  $j, 0 \leq j \leq d+1$ . Insbesondere gilt  $h_0(\mathcal{S}) = 1, h_1(\mathcal{S}) = f_0(\mathcal{S}) - (d+1), \sum_{i=0}^{d+1} h_i(\mathcal{S}) = f_d(\mathcal{S})$ , und

$$h_{d+1}(\mathcal{S}) = (-1)^d (\chi(\mathcal{S}) - 1),$$

wobei  $\chi(\mathcal{S}) := \sum_{j=0}^d (-1)^j f_j(\mathcal{S})$  die Euler-Poincaré Charakteristik von  $\mathcal{S}$  bezeichnet.

(ii) In dem Fall, in dem  $\chi(\mathcal{S}) = 1$ , ist der “abgestumpfte  $\mathbf{h}$ -Vektor”  $\mathbf{h}^{\text{trun}}(\mathcal{S}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$  von  $\mathcal{S}$  (der nur die ersten  $d+1$  Koordinaten von  $\mathbf{h}(\mathcal{S})$  enthält) nichts anderes als der  $\Phi_{\mathcal{S}}$ -Eulersche Vektor bzgl.  $d$ .

**Beispiel 2.6** (i) Der  $\mathbf{h}$ -Vektor  $\mathbf{h}(P) := \mathbf{h}(\mathcal{S}_{\partial P})$  eines simplicialen  $d$ -Polytops  $P$  genügt den Dehn-Sommerville Gleichungen:

$$h_i(P) = h_{d-i}(P), \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq d. \quad (2.10)$$

(ii) Der Vektor  $\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathcal{T})$  einer Triangulation  $\mathcal{T}$  eines  $d$ -Polytops  $P$  bestimmt  $\mathbf{h}(\mathcal{T})$  durch (2.9), und  $\chi(\mathcal{T}) = 1$ , denn  $|\mathcal{T}| = P$  ist homöomorph zu dem  $d$ -ball. Deswegen ist  $\mathbf{h}^{\text{trun}}(\mathcal{T})$  nicht anderes als der  $\Phi_{\mathcal{T}}$ -Eulersche Vektor bzgl.  $d$ .

### 3 Gitterpolytope, Ehrhartsche Polynome und unimodulare Triangulierungen

(a) Wenn  $M \cong \mathbb{Z}^d$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang  $d$  ist, dann kann  $M$  als ein *Gitter* innerhalb seiner reellen skalaren Erweiterung  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  aufgefaßt werden ( $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^d$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum). Die *Determinante*  $\det(M)$  eines solchen Gitters  $M$  ist gleich dem  $d$ -Volumen des Parallelepipeds in  $M_{\mathbb{R}}$ , das von den Elementen einer beliebigen  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $M$  erzeugt wird. Für jede Teilmenge  $\Xi \subset M_{\mathbb{R}}$  bezeichnet man mit  $M_{\Xi}$  das affine Untergitter  $M \cap \text{aff}(\Xi)$  von  $M$ . Ein Gitterpolytop (bzgl.  $M$ ) ist ein Polytop  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  (mit  $\dim(P) \leq \dim(M_{\mathbb{R}})$ ) dessen Ecken in  $M$  enthalten sind. Das *relative Volumen* (bzw. das *normalisierte relative Volumen*) einer nicht leeren  $k$ -Seite  $F$  eines Gitterpolytops  $P \subset M_{\mathbb{R}}$ , mit  $k \leq \dim(P) \leq \dim(M_{\mathbb{R}})$ , ist definiert durch

$$\text{Vol}(F; M_F) := \frac{\text{Vol}(F)}{\det(M_F)}, \quad \text{bzw.} \quad \text{Vol}_{\text{nor}}(F; M_F) := (k!) \cdot \text{Vol}(F; M_F) .$$

(b) Seien  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  und  $P' \subset M'_{\mathbb{R}}$  zwei Gitterpolytope.  $P$  und  $P'$  heißen *gitter-äquivalent* zueinander (Bezeichnung  $P \stackrel{L}{\sim} P'$ ), wenn  $P$  affin äquivalent zu  $P'$  durch eine affine Abbildung  $\varpi : M_{\mathbb{R}} \rightarrow M'_{\mathbb{R}}$  (s. §1, (b)) sind, so daß die Bijektion  $\varpi|_{\text{aff}(P)} : \text{aff}(P) \rightarrow \text{aff}(P')$  das Polytop  $P$  auf  $P'$  und  $\text{aff}(P) \cap M$  auf  $\text{aff}(P') \cap M'$  abbildet.

(c) Nun kommen wir zu den Ehrhartschen Enumeratoren von Gitterpunkten.

**Definition 3.1** Sei  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $\Xi \subset M_{\mathbb{R}}$ . Wir bezeichnen mit  $\nu \Xi = \{\nu \mathbf{x} \in M_{\mathbb{R}} \mid \mathbf{x} \in \Xi\}$  das  $\nu$ -mal dilatierte  $\Xi$  (wobei  $\nu \in \mathbb{N}$ ) und mit  $\mathbf{Ehr}_M(\Xi, \nu)$  (bzw. mit  $\mathbf{Ehr}_M^{\circ}(\Xi, \nu)$ ) die abzählenden Funktionen

$$\mathbf{Ehr}_M(\Xi, \nu) := \#(\nu \Xi \cap M) , \quad \mathbf{Ehr}_M^{\circ}(\Xi, \nu) := \#(\text{int}(\nu \Xi) \cap M)$$

seiner Gitterpunkte (bzw. der Gitterpunkte aus seinem relativen topologischen Inneren).

**Lemma 3.2 (Inklusion-Exklusion)** Für jedes Paar  $\Xi_1, \Xi_2$  von Teilmengen von  $M_{\mathbb{R}}$  gilt

$$\mathbf{Ehr}_M(\Xi_1 \cup \Xi_2, \nu) = \mathbf{Ehr}_M(\Xi_1, \nu) + \mathbf{Ehr}_M(\Xi_2, \nu) - \mathbf{Ehr}_M(\Xi_1 \cap \Xi_2, \nu) \quad (3.1)$$

**Theorem 3.3** Sei  $P$  ein  $d$ -Gitterpolytop  $\subset M_{\mathbb{R}}$  (bzgl.  $M$  mit  $d \leq \text{rk}(M)$ ). Dann sind beide  $\mathbf{Ehr}_M(P, \nu)$  und  $\mathbf{Ehr}_M^{\circ}(P, \nu)$  als Polynome darstellbar:

$$\mathbf{Ehr}_M(P, \nu) = \mathbf{a}_0(P) + \mathbf{a}_1(P) \nu + \cdots + \mathbf{a}_{d-1}(P) \nu^{d-1} + \mathbf{a}_d(P) \nu^d \in \mathbb{Q}[\nu]$$

und

$$\mathbf{Ehr}_M^{\circ}(P, \nu) = \mathbf{a}_0^{\circ}(P) + \mathbf{a}_1^{\circ}(P) \nu + \cdots + \mathbf{a}_{d-1}^{\circ}(P) \nu^{d-1} + \mathbf{a}_d^{\circ}(P) \nu^d \in \mathbb{Q}[\nu] .$$

**Definition 3.4**  $\mathbf{Ehr}_M(P, \nu)$  heißt das *Ehrhartsche Polynom* von  $P$  und

$$\mathbf{a}(P) := (\mathbf{a}_0(P), \mathbf{a}_1(P), \dots, \mathbf{a}_{d-1}(P), \mathbf{a}_d(P)) \in \mathbb{Q}^{d+1}$$

der  $\mathbf{a}$ -Vektor von  $P$ . Alle  $\mathbf{a}_i(P)$ 's sind invariant unter L-Äquivalenz, aber im allgemeinen könnten gewisse  $\mathbf{a}_i(P)$ 's **weder** nicht negativ **noch** monoton (bzgl. der Inklusionsordnung von Gitterpolytopen) sein.

**Proposition 3.5 (Reziprozitätsregel)** Für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  erhält man:

$$\mathbf{Ehr}_M^{\circ}(P, \nu) = (-1)^d \mathbf{Ehr}_M(P, -\nu) , \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{a}_i^{\circ}(P) = (-1)^{d-i} \mathbf{a}_i(P), \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq d. \quad (3.2)$$

**Proposition 3.6 (Dilatationen und Produkte)** Seien  $M, M'$  zwei freie  $\mathbb{Z}$ -Moduln,  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  ein  $d$ -Gitterpolytop bzgl.  $M$ ,  $P' \subset M'_{\mathbb{R}}$  ein  $d'$ -Gitterpolytop bzgl.  $M'$ , und  $\lambda \in \mathbb{N}$ .

(i) Die Koeffizienten von  $\mathbf{Ehr}_M(\lambda P, \nu) = \sum_{i=0}^d \mathbf{a}_i(\lambda P) \nu^i$ , sind homogen, d.h.

$$\mathbf{a}_i(\lambda P) = \lambda^i \mathbf{a}_i(P), \quad \text{für alle } i, 0 \leq i \leq d. \quad (3.3)$$

(ii) Das Ehrhartsche Polynom des Produkts  $P \times P'$  ist gleich

$$\mathbf{Ehr}_{M \times M'}(P \times P', \nu) = \mathbf{Ehr}_M(P, \nu) \cdot \mathbf{Ehr}_{M'}(P', \nu). \quad (3.4)$$

**Beispiel 3.7** Für den Würfel

$$\begin{aligned} \text{Cub}_d &= \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1, \forall i, 1 \leq i \leq d \} = [-1, +1]^d \\ &= \text{conv}(\{ \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \dots + \varepsilon_{d-1} e_{d-1} + \varepsilon_d e_d \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{d-1}, \varepsilon_d \in \{-1, +1\} \}) \end{aligned}$$

hat man

$$\mathbf{Ehr}_{\mathbb{Z}^d}(\text{Cub}_d, \nu) = (2\nu + 1)^d \quad \text{und} \quad \mathbf{Ehr}_{\mathbb{Z}^d}^{\circ}(\text{Cub}_d, \nu) = (2\nu - 1)^d \quad (3.5)$$

**Definition 3.8** Ein Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  heißt *elementar*, wenn  $P \cap M = \text{vert}(P)$ . Ein Gittersimplex  $\mathbf{s} \subset M_{\mathbb{R}}$  heißt *unimodular*, wenn  $\text{Vol}_{\text{nor}}(\mathbf{s}; M_{\mathbf{s}}) = 1$  oder -äquivalent dazu- wenn  $\text{vert}(\mathbf{s})$  aus einem Anteil einer  $\mathbb{Z}$ -Basis des Gitters  $M$  besteht. Jedes unimodulare Simplex (beliebiger Dimension) ist elementar und jedes elementare Simplex der Dimension  $\leq 2$  ist unimodular, aber es gibt elementare nicht unimodulare Simplexe in jeder Dimension  $\geq 3$ .

**Beispiel 3.9** Das  $d$ -Gittersimplex

$$\mathbf{s} = \text{conv}(\{ \mathbf{0}, e_1, e_2, \dots, e_{d-2}, e_{d-1}, (1, 1, \dots, 1, 1, k)^{\top} \}) \subset \mathbb{R}^d, \quad d \geq 3, k \geq 2,$$

(bzgl.  $\mathbb{Z}^d$ ) ist ein elementares, nicht unimodulares Gittersimplex, weil  $\mathbf{s} \cap \mathbb{Z}^d = \text{vert}(\mathbf{s})$  und

$$\text{Vol}_{\text{norm}}(\mathbf{s}; \mathbb{Z}^d) = d! \text{Vol}(\mathbf{s}; \mathbb{Z}^d) = |\det(e_1, \dots, e_{d-1}, (1, 1, \dots, 1, 1, k)^{\top})| = k > 1.$$

**Lemma 3.10 (Das Ehrhartsche Polynom eines unimodularen Simplexes)** Seien  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $\mathbf{s} \subset M_{\mathbb{R}}$  ein unimodulares  $d$ -Simplex. Dann gilt

$$\mathbf{Ehr}_M^{\circ}(\mathbf{s}, \nu) = \binom{\nu - 1}{d}, \quad \forall \nu, \quad \nu \geq 1 \quad (3.6)$$

und

$$\mathbf{Ehr}_M(\mathbf{s}, \nu) = \binom{\nu + d}{d} = \binom{\nu + d}{\nu}, \quad \forall \nu, \quad \nu \geq 1. \quad (3.7)$$

**Bemerkung 3.11 (Picks' Erbe)** Der erste, der vorletzte und der letzte Koeffizient des Ehrhartschen Polynoms  $\mathbf{Ehr}_M(P, \nu)$  eines  $d$ -Gitterpolytops  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  sind gleich

$$\mathbf{a}_0(P) = 1, \quad \mathbf{a}_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \text{Vol}(F; M_F), \quad \mathbf{a}_d(P) = \text{Vol}(P; M_P).$$

Für  $d = 2$  erhält man das klassische *Picksche Theorem* (1899) für Gitterpolygone. Die Berechnung der restlichen Koeffizienten ist eigentlich sehr kompliziert und wurde erst zwischen 1993-1997 (in voller Allgemeinheit und durch verschiedene Methoden) erreicht.

(d) Sei  $P$  ein  $d$ -Gitterpolytop  $\subset M_{\mathbb{R}}$ . Da  $\mathbf{Ehr}_M(P, \nu)$  ein Polynom vom Grad  $d$  (vermöge des Theorems 3.3) ist, kann man durch Anwendung von 2.1 für  $\Phi = \mathbf{Ehr}_M(P, \cdot)$  die *Ehrhartsche Reihe*

$$\mathbf{ehr}_M(P; t) := \mathbf{GF}(\mathbf{Ehr}_M(P, \cdot), t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{Ehr}_M(P, \nu) t^{\nu} = \frac{\mathbf{Q}_P(t)}{(1-t)^{d+1}} \quad (3.8)$$

(unter der Konvention  $\mathbf{Ehr}_M(P, 0) := 1$ ), sowie die Reihe

$$\mathfrak{Ehr}_M^\circ(P; t) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{Ehr}_M^\circ(P, \nu) t^\nu \stackrel{(3.2)}{=} (-1)^{d+1} \mathfrak{Ehr}_M\left(P; \frac{1}{t}\right) = \frac{\mathbf{Q}_P^\circ(t)}{(1-t)^{d+1}} \quad (3.9)$$

definieren, wobei die entsprechenden  $\mathbf{Q}$ - und  $\mathbf{Q}^\circ$ -Polynome von  $P$  von der Gestalt sind:

$$\mathbf{Q}_P(t) := \mathbf{Q}_{\mathbf{Ehr}_M(P, \cdot)}(t) = \sum_{i=0}^d \psi_i(P) t^i, \quad \mathbf{Q}_P^\circ(t) = \sum_{i=1}^{d+1} \psi_{(d+1)-i}(P) t^i \quad (3.10)$$

Der somit gewonnene  $\mathbf{Ehr}_M(P, \cdot)$ -Eulersche Vektor  $\psi(P) := (\psi_0(P), \psi_1(P), \dots, \psi_{d-1}(P), \psi_d(P))$  wird der  $\psi$ -Vektor von  $P$  genannt.

**Bemerkung 3.12 (Der Trick mit dem ‘‘Stützkegel’’)** Wie wir schon erklärt haben, wird der  $\mathbf{h}$ -Vektor eines simplizialen Komplexes  $\mathcal{S}$  mittels der Hilbertschen Reihe des graduierten Seitenringes  $\mathbf{k}[\mathcal{S}]$  bestimmt (vgl. (2.8)). Nun sollte erwähnt werden, daß es ein Analogon zur algebraischen Charakterisierung auch für  $\mathfrak{Ehr}_M(P; t)$  und  $\psi(P)$  gibt. Sei  $P$  wie vorhin ein  $d$ -Gitterpolytop  $\subset M_{\mathbb{R}}$ ,

$$\tilde{P} := \{(1, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \oplus (M_P)_{\mathbb{R}} \mid \mathbf{x} \in P\}$$

die kanonische Einbettung von  $P$  in einem Vektorraum der Dimension  $d + 1$  und sei

$$\sigma_P := \{(\lambda, \lambda \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \oplus (M_P)_{\mathbb{R}} \mid \mathbf{x} \in P, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = \text{pos}(\tilde{P})$$

der  $(d + 1)$ -dimensionale rationale streng konvexe polyedrische Kegel, der das Polytop  $\tilde{P}$  innerhalb  $\mathbb{R} \oplus (M_P)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^{d+1}$  stützt. Wenn wir einen Referenzkörper  $\mathbf{k}$  gewählt haben, können wir die Ehrhartsche Reihe  $\mathfrak{Ehr}_M(P; t)$  als die Hilbertsche Reihe des graduierten normalen Halbgruppenringes

$$\mathbf{k}[\mathfrak{C}(P)] := \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathbf{k}[\mathfrak{C}(P)]_{\nu}) \quad (3.11)$$

interpretieren, wobei

$$\mathfrak{C}(P) := \sigma_P \cap (\mathbb{Z} \oplus M_P)$$

die Unterhalbgruppe von  $\mathbb{Z} \oplus M_P \cong \mathbb{Z}^{d+1}$ , die  $\sigma_P$  entspricht, bezeichnet. Wenn wir Gebrauch von der Standard-Identifikation von  $\mathbf{k}[\mathfrak{C}(P)]$  mit dem  $\mathbf{k}$ -Vektorraum

$$\mathbf{k}[\{\mathfrak{z}_0^\nu \cdot \mathfrak{z}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{z}_2^{m_2} \cdots \mathfrak{z}_d^{m_d} \mid (m_1, m_2, \dots, m_d) \in (\nu P \cap M), \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}] \subset \mathbf{k}[\mathbb{Z} \oplus M_P] \cong \mathbf{k}[\mathbb{Z}^{d+1}]$$

machen, dann wird die Graduierung auf  $\mathbf{k}[\mathfrak{C}(P)]$  durch

$$\deg(\mathfrak{z}_0^\nu \cdot \mathfrak{z}_1^{m_1} \cdot \mathfrak{z}_2^{m_2} \cdots \mathfrak{z}_d^{m_d}) := \nu.$$

gegeben. Daraus folgt, daß  $\mathbf{Ehr}_M(P, \nu) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\mathfrak{C}(P)]_{\nu})$ .

**Theorem 3.13 (Eigenschaften von  $\psi(P)$ )** Der  $\psi$ -Vektor von  $P$  hat folgende Eigenschaften:

(i)  $\psi_0(P) = 1$ ,  $\psi_1(P) = \mathbf{Ehr}_M(P, 1) - (d + 1)$ ,  $\psi_d(P) = \mathbf{Ehr}_M^\circ(P, \nu)$ , und

$$\psi_0(P) + \psi_1(P) + \cdots + \psi_{d-1}(P) + \psi_d(P) = \text{Vol}_{\text{nor}}(P; M_P)$$

(ii)  $\psi(P)$  ist monoton, d.h., für jedes  $M$ -Polytop  $P' \subset P$  gilt  $\psi(P') \leq \psi(P)$  (koordinatenweise).

(iii)  $\psi(P)$  ist ganzzahlig und nicht negativ, d.h.  $\psi(P) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{d+1}$ , aber seine Koordinaten im allgemeinen könnten nicht homogen sein (vgl. 3.6(i)).

**Proposition 3.14 (Der Transferprozess)** Die  $\mathbf{Ehr}_M(P, \cdot)$ -Transfer-Matrix (im Sinne von (2.2)) ist gleich

$$\mathcal{U}_d := \mathcal{U}_d^{\mathbf{Ehr}_M(P, \cdot)} = \left( \left( \sum_{\xi=0}^j (-1)^\xi \binom{d+1}{\xi} (j-\xi)^i \right)_{0 \leq i, j \leq d} \right) \in \mathrm{GL}(d+1, \mathbb{Q})$$

und hat als Inverses

$$(\mathcal{U}_d)^{-1} = \left( \left( \frac{1}{d!} \left[ \begin{array}{c|c} d & \\ \hline l & d-k \end{array} \right] \right)_{0 \leq k, l \leq d} \right)$$

**Korollar 3.15 (Zu den Dilatationen unimodularer Simplexes)** Sei  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul,  $\mathbf{s} \subset M_{\mathbb{R}}$  ein unimodulares Simplex der Dimension  $d$ , und  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Dann sind die Koordinaten des  $\mathbf{a}$ - und  $\psi$ -Vektors der Dilatation  $\lambda \cdot \mathbf{s}$  von  $\mathbf{s}$  durch die Formeln

$$\mathbf{a}_i(\lambda \cdot \mathbf{s}) = \frac{\lambda^i}{d!} \left[ \begin{array}{c|c} d & \\ \hline i & d \end{array} \right] \quad (3.12)$$

bzw.

$$\psi_i(\lambda \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{B}(d, i \mid \lambda, d) \quad (3.13)$$

gegeben, für alle  $i$ ,  $0 \leq i \leq d$ .

*Beweis.* Da  $\mathrm{Vol}_{\mathrm{nor}}(\mathbf{s}) = 1 = \sum_{i=0}^d \psi_i(\mathbf{s})$ ,  $\psi_0(\mathbf{s}) = 1$ , und alle  $\psi_i(\mathbf{s})$ 's nicht negative ganze Zahlen sind, erhält man notwendigerweise  $\psi_1(\mathbf{s}) = \dots = \psi_d(\mathbf{s}) = 0$ . Dies bedeutet, daß  $\mathbf{a}_i(\mathbf{s})$  gleich dem  $i$ -ten Eintrag der ersten Zeile von  $(\mathcal{U}_d)^{-1}$  ist. Daraus folgt

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{s}) = \frac{1}{d!} \left[ \begin{array}{c|c} d & \\ \hline i & d \end{array} \right] \stackrel{(3.3)}{\implies} \mathbf{a}_i(\lambda \cdot \mathbf{s}) = \frac{\lambda^i}{d!} \left[ \begin{array}{c|c} d & \\ \hline i & d \end{array} \right].$$

Auf der anderen Seite liefert Lemma 3.10:

$$\mathbf{Ehr}_M(\lambda \cdot \mathbf{s}, \nu) = \binom{\lambda \cdot \nu + d}{d},$$

Wende Proposition 2.4 für die Berechnung der  $\psi_i$ 's durch die nicht zentralen Eulerschen Zahlen der generalized factorials an.  $\square$

(e) Eine andere Annäherung zu dem Problem der Berechnung der Koeffizienten  $\mathbf{a}_i(P)$  des Ehrhartschen Polynoms eines Gitterpolytops  $P$  wird durch den Gebrauch von "unimodularen" Gittertriangulierungen von  $P$  erreicht.

**Definition 3.16** Seien  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  ein Gitterpolytop. Eine Triangulierung von  $P$  heißt *Gittertriangulierung*, falls  $\mathrm{vert}(P) \subset \mathrm{vert}(\mathcal{T}) \subset M$ . Die Menge aller Gittertriangulierungen eines Gitterpolytops  $P$  (bzgl.  $M$ ) wird mit  $\mathbf{LTR}_M(P)$  bezeichnet.

**Definition 3.17** Eine Gittertriangulierung  $\mathcal{T}$  eines Gitterpolytops  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  heißt *maximale Triangulierung*, wenn  $\mathrm{vert}(\mathcal{T}) = M \cap P$ . Eine Gittertriangulierung  $\mathcal{T}$  von  $P$  ist offensichtlich maximal genau dann, wenn jedes Simplex  $\mathbf{s} \in \mathcal{T}$  elementar ist. Eine Gittertriangulierung  $\mathcal{T}$  von  $P$  heißt *unimodular*, wenn  $\mathcal{T}$  ausschließlich aus unimodularen Simplexes besteht. Wir definieren:

$$\mathbf{LTR}_M^{\max}(P) := \{\mathcal{T} \in \mathbf{LTR}_M(P) \mid \mathcal{T} \text{ ist eine maximale Triangulierung von } P\},$$

$$\mathbf{LTR}_M^{\mathrm{basic}}(P) := \{\mathcal{T} \in \mathbf{LTR}_M^{\max}(P) \mid \mathcal{T} \text{ ist eine unimodulare Triangulierung von } P\}.$$

**Beispiel 3.18** Sind  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  zwei unimodulare Triangulierungen der Gitterpolytope  $P_1 \subset M_{\mathbb{R}}$  bzw.  $P_2 \subset M_{\mathbb{R}}$ , so daß  $\dim(P_1 \cup P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2)$ , dann ist die Join-Triangulierung

$$\mathcal{T}_1 \star \mathcal{T}_2 := \{\mathrm{conv}(\mathbf{s}_1 \cup \mathbf{s}_2) \mid \mathbf{s}_1 \in \mathcal{T}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

von  $P_1 \star P_2$  genau dann unimodular, wenn  $\mathrm{aff}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{vert}(\mathcal{T}_1) \cup \mathrm{vert}(\mathcal{T}_2)) = M \cap \mathrm{aff}(P_1 \cup P_2)$ .

**Definition 3.19** Für jedes  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  führen wir zwei Matrizen  $\tilde{\mathcal{U}}_d \in \text{GL}(d+1, \mathbb{Z})$  und  $\bar{\mathcal{U}}_d \in \text{GL}(d+1, \mathbb{Q})$  durch

$$\tilde{\mathcal{U}}_d := \left( \binom{d-i}{d-j} \right)_{0 \leq i, j \leq d}, \quad \bar{\mathcal{U}}_d := \left( \left( \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} i+1 \\ j+1 \end{bmatrix} \right) \right)_{0 \leq i, j \leq d}$$

ein. Beide  $\tilde{\mathcal{U}}_d$  und  $\bar{\mathcal{U}}_d$  hängen nur von  $d$  ab. Die erste ist offensichtlich eine obere Dreiecksmatrix und hat als Inverses:

$$(\tilde{\mathcal{U}}_d)^{-1} = \left( \left( (-1)^{l-k} \binom{d-k}{d-l} \right) \right)_{0 \leq k, l \leq d}.$$

Die zweite ist eine untere Dreiecksmatrix, hat Determinante  $(1! 2! \cdots d!)^{-1}$  und Inverses

$$(\bar{\mathcal{U}}_d)^{-1} = \left( \binom{k+1}{l+1} \right)_{0 \leq k, l \leq d}$$

(wie man aus (2.4) schließen kann).

**Theorem 3.20 (Der Übergang zu unimodularen Triangulierungen)** Seien  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul,  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  ein  $d$ -Gitterpolytop und  $\mathcal{T} \in \mathbf{LTR}_M(P)$ . Dann gilt:

(i) Für den abgestumpften  $\mathbf{h}$ -Vektor von  $\mathcal{T}$  und den  $\psi$ -Vektor von  $P$  hat man (koordinatenweise):

$$\mathbf{h}^{\text{trun}}(\mathcal{T}) \leq \psi(P) \quad (3.14)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\mathcal{T} \in \mathbf{LTR}_M^{\text{basic}}(P)$ .

(ii) Ist  $\mathcal{T}$  eine beliebige unimodulare Triangulierung von  $P$ , so sind alle Zeilenvektoren  $\mathbf{a}(P)$ ,  $\psi(P)$ ,  $\mathbf{f}(\mathcal{T})$  und  $\mathbf{h}(\mathcal{T})$  zu berechnen, wenn man nur eines davon als "bekannt" betrachtet, denn sie sind miteinander durch die folgende Tabelle verknüpft:

$\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathcal{T})$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{truncate}} \\ \xleftarrow{\text{extend}} \end{array}$	$\mathbf{f}(\mathcal{T})$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathcal{U}}_d} \\ \xleftarrow{(\bar{\mathcal{U}}_d)^{-1}} \end{array}$	$\mathbf{a}(P)$
$\tilde{\mathcal{U}}_{d+1} \uparrow \downarrow \cdot (\tilde{\mathcal{U}}_{d+1})^{-1}$		$\mathbf{h}(\mathcal{T})$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{truncate}} \\ \xleftarrow{\text{extend}} \end{array}$	$\mathbf{h}^{\text{trun}}(\mathcal{T}) = \psi(P)$

**Bemerkung 3.21 (Eine Methode zur Berechnung der  $\mathbf{a}_i(P)$ 's)** Die Hauptfolgerung des Theorems 3.20(ii) ist, daß die Koeffizienten des Ehrhartschen Polynoms von  $P$  *durchaus bestimmbar* sind, solange man ein  $\mathcal{T} \in \mathbf{LTR}_M^{\text{basic}}(P)$  mit bekanntem  $\mathbf{f}$ - (oder bekanntem  $\mathbf{h}$ -) Vektor betrachtet. Allerdings muß hierbei betont werden, daß *nicht alle* Gitterpolytope der Dimension  $d \geq 3$  unimodulare Triangulierungen besitzen. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, kann man das Haupttheorem (der semistabilen Reduktion) von Knudsen, Mumford und Waterman ([KKMS], Ch. III) anwenden, woraus folgt, daß es für *jedes* Gitterpolytop ein  $\lambda = \lambda_P \in \mathbb{N}$  (*groß genug*) gibt, für welches die Dilatation  $\lambda P$  unimodulare Triangulierungen  $\mathcal{T}$  besitzt. Für ein solches  $\mathcal{T}$  erhält man

$$\mathbf{a}_i(P) = \frac{1}{\lambda^i} \mathbf{a}_i(\lambda P) = \frac{1}{\lambda^i} \left( \sum_{j=i}^d \frac{f_j(\mathcal{T})}{j!} \begin{bmatrix} j+1 \\ i+1 \end{bmatrix} \right), \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq d.$$

**Beispiel 3.22** Der Gitterwürfel  $\text{Cub}_d$  (definiert in 3.7) besitzt unimodulare Triangulierungen. Ist  $\mathcal{T}$  eine derartige Triangulierung, so werden die Koordinaten von  $\mathbf{f}(\mathcal{T})$ ,  $\mathbf{a}(\text{Cub}_d)$ , und  $\psi(\text{Cub}_d) = \mathbf{h}(\mathcal{T})$  durch die folgenden Formeln gegeben,  $\forall i, 0 \leq i \leq d$ :

$$f_i(\mathcal{T}) = d! \left( \sum_{j=i}^d \frac{2^j}{(d-j)!} \begin{bmatrix} j+1 \\ i+1 \end{bmatrix} \right) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{a}_i(\text{Cub}_d) = 2^i \binom{d}{i} \quad (3.16)$$

$$\psi_i(\text{Cub}_d) = h_i(\mathcal{T}) = \sum_{j=0}^d \left( 2^j \binom{d}{j} \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{d+1}{k} (i-k)^j \right) \right) \quad (3.17)$$

**Beispiel 3.23** Das  $d$ -dimensionale Kreuzpolytop

$$\begin{aligned} \text{Cr}_d &:= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1 \right\} = \\ &= \text{conv}(\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d\}) = \underbrace{[-1, +1] \oplus [-1, +1] \oplus \dots \oplus [-1, +1]}_{d\text{-mal}}, \end{aligned}$$

das ein Gitterpolytop bzgl.  $\mathbb{Z}^d$  ist, ist das polare Polytop von  $\text{Cub}_d$  und besitzt ebenfalls unimodulare Triangulierungen. Ist  $\mathcal{T}$  eine derartige Triangulierung, so werden die Koordinaten von  $\mathbf{f}(\mathcal{T})$ ,  $\mathbf{a}(\text{Cr}_d)$ , und  $\psi(\text{Cr}_d) = \mathbf{h}(\mathcal{T})$  durch die folgenden Formeln gegeben,  $\forall i, 0 \leq i \leq d$ :

$$f_i(\mathcal{T}) = 2^i \binom{d}{i} + 2^{i+1} \binom{d}{i+1} = \sum_{k=0}^{i+1} \binom{d+1-k}{d-i} \binom{d}{k} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{a}_i(\text{Cr}_d) = \sum_{k=i}^d \frac{2^k}{k!} \binom{d}{k} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\psi_i(\text{Cr}_d) = h_i(\mathcal{T}) = \binom{d}{i} \quad (3.20)$$

## 4 Kohärente Triangulierungen von Polytopen

**Definition 4.1** Eine polyedrische Unterteilung (auch polytopale Unterteilung genannt)  $\mathcal{S}$  eines Polytops  $P \subset \mathbb{R}^k$  heißt *kohärent* (oder *regulär*), wenn  $P$  sich als das Bild  $\pi(Q) = P$  eines Polytops  $Q \subset \mathbb{R}^{k+1}$  unter der Projektionsabbildung

$$\mathbb{R}^{k+1} \ni (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \mapsto \pi(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \quad (4.1)$$

darstellen läßt, und zwar so, daß  $\mathcal{S} = \{\pi(F) : F \text{ ist eine niedrige Seite von } Q\}$ , wobei *die niedrigen Seiten von } Q* genau diejenigen sind, die äußere Normalenvektoren mit negativer  $(k+1)$ -Koordinate besitzen. (Die Menge aller niedrigen Seiten von  $Q$  wird manchmal die *niedrige oder untere Decke* von  $Q$  genannt).

**Lemma 4.2 (Kohärenz und streng konkave Stützfunktionen)** *Eine polytopale Unterteilung } S von } P ist kohärent genau dann, wenn es eine streng konkave } S-Stützfunktion } \psi : } S \rightarrow \mathbb{R} gibt, d.h. eine stückweise lineare reelle Funktion mit } S als Definitionsbereich, für welche gilt*

$$\psi(t \mathbf{x} + (1-t) \mathbf{y}) \geq t \psi(\mathbf{x}) + (1-t) \psi(\mathbf{y}), \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in } S, \text{ und } t \in [0, 1],$$

so daß ihre Linearitätsbereiche genau die Polytope von } S sind, die maximale Dimension besitzen.

*Beweis.* Ist } S kohärent, so gilt } S = \{\pi(F) : F \text{ ist eine niedrige Seite von } Q\}, wobei } \pi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k die Projektion (4.1) und } Q ein Polytop in } \mathbb{R}^{k+1} bezeichnen. Die Funktion } \psi : } S \rightarrow \mathbb{R}, die durch

$$\psi(\mathbf{x}) := \max \{t \in \mathbb{R} \mid (\mathbf{x}, -t) \in Q\}, \text{ für alle } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in } S = P,$$

definiert wird, ist streng konkav. Ist umgekehrt } \psi : } S \rightarrow \mathbb{R} eine derartige Funktion, dann ist } S kohärent im Sinne von 4.1, wenn man } Q als das Polytop } \text{conv}\{(\mathbf{x}, -\psi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \mathbf{x} \in P\} definiert.  $\square$

**Lemma 4.3 (Kohärenz und “Höhen”)** Sei  $\mathcal{V}$  eine endliche Menge von Punkten in  $\mathbb{R}^k$  und  $P = \text{conv}(\mathcal{V})$ . Eine Höhenfunktion auf  $\mathcal{V}$  ist eine Funktion  $\omega : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . (Die Werte  $\omega(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , heißen “Höhen”). Jede Höhenfunktion  $\omega$  auf  $\mathcal{V}$  induziert eine kohärente polytopale Unterteilung  $\mathcal{S}_\omega$  des Polytops  $P = \text{conv}(\mathcal{V})$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}_\omega) = \mathcal{V}$ ; und umgekehrt, jede kohärente polytopale Unterteilung  $\mathcal{S}$  von  $P = \text{conv}(\mathcal{V})$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}) = \mathcal{V}$  hat die Gestalt  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\omega$ , für eine Höhenfunktion  $\omega$ .

*Beweis.* Sei  $\omega$  eine Höhenfunktion auf  $\mathcal{V}$ . Durch die Höhen kann man die Punktconfiguration  $\mathcal{V}$  in eine Dimension höher “liften” und  $Q_\omega := \text{conv}(\{(\mathbf{v}, \omega(\mathbf{v})) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V}\})$  definieren. Die untere Decke des Polytops  $Q_\omega$  ist ein reiner polytopaler Komplex, dessen Dimension gleich  $\dim(P)$  ist. Sein Bild unter der Projektionsabbildung (4.1) bestimmt eine (notwendigerweise kohärente) polytopale Unterteilung  $\mathcal{S}_\omega$  von  $P$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}_\omega) = \mathcal{V}$ . Sind  $\{\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_\mu}\}$  die Ecken eines Polytops von  $\mathcal{S}_\omega$ , so ist  $\{(\mathbf{v}_{i_1}, \omega(\mathbf{v}_{i_1})), \dots, (\mathbf{v}_{i_\mu}, \omega(\mathbf{v}_{i_\mu}))\}$  die Eckpunktmenge einer Seite der unteren Decke von  $Q_\omega$ .

Sei nun umgekehrt  $\mathcal{S}$  eine beliebige kohärente polytopale Unterteilung  $\mathcal{S}$  von  $P$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}) = \mathcal{V}$ . Nach Lemma 4.2 existiert eine streng konkave Stützfunktion  $\psi : |\mathcal{S}| \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $\omega := (-\psi)|_{\mathcal{V}}$  erhält man  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\omega$ .  $\square$

**Bemerkung 4.4** Für  $\omega$ 's, die “allgemein genug” gewählt sind, bilden die kohärenten polytopalen Unterteilungen  $\mathcal{S}_\omega$  *Triangulierungen* von  $P$ .

**Beispiel 4.5** (i) Sind  $P \subset \mathbb{R}^d$  bzw.  $P' \subset \mathbb{R}^{d'}$  zwei Polytope der Dimension  $d$  bzw.  $d'$  und  $\mathcal{S} = \{P_i \mid i \in I\}$ ,  $\mathcal{S}' = \{P'_j \mid j \in J\}$  kohärente polytopale Unterteilungen von  $P$  bzw.  $P'$ , so ist  $\mathcal{S}_{P \times P'} := \{P_i \times P'_j \mid i \in I, j \in J\}$  eine kohärente polytopale Unterteilung von  $P \times P'$ .

(ii) Es gibt ein Analogon zu (i) für den Join  $P \star P'$  von  $P$  mit  $P'$ .

(iii) Die Dilatation  $\lambda \cdot \mathcal{S} = \{\lambda \cdot P_i \mid i \in I\}$  einer kohärenten polytopalen Unterteilung  $\mathcal{S} = \{P_i \mid i \in I\}$  eines Polytops  $P \subset \mathbb{R}^d$  ist ebenfalls eine kohärente polytopale Unterteilung der Dilatation  $\lambda \cdot P$  von  $P$ , für jedes  $\lambda \in \mathbb{N}$ .

**Definition 4.6 (Das “Pulling”-Verfahren für eine Ecke)** Sei  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^d$  eine Punktconfiguration. Sei  $\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \dots, P_\nu\}$  eine polytopale Unterteilung von  $\text{conv}(\mathcal{V})$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{V}$ . Man definiert für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  eine Verfeinerung  $\mathfrak{p}_{\mathbf{v}_i}(\mathcal{S})$  von  $\mathcal{S}$  (“pulling” von  $\mathbf{v}_i$  genannt) wie folgt:

(i)  $\mathfrak{p}_{\mathbf{v}_i}(\mathcal{S})$  enthält alle  $P_j$ 's, für welche  $\mathbf{v}_i \notin P_j$ , und

(ii) falls  $\mathbf{v}_i \in P_j$ , dann enthält  $\mathfrak{p}_{\mathbf{v}_i}(\mathcal{S})$  all die Polytope der Form  $\text{conv}(F \cup \mathbf{v}_i)$ , wobei  $F$  eine Seite von  $P_j$  bezeichnet, für welche  $\mathbf{v}_i \notin F$ .

**Lemma 4.7** Die Verfeinerungen von  $\mathcal{S}$ , die durch das “pulling” von **allen** Punkten von  $\mathcal{V}$  (in beliebiger Reihenfolge) konstruierbar sind, bilden *Triangulierungen* von  $\text{conv}(\mathcal{V})$ .

**Lemma 4.8 (Kohärenzerhaltung nach einem Pulling)** Sei  $\mathcal{V}$  eine Menge von endlich vielen Punkten in  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \dots, P_\nu\}$  eine beliebige kohärente polytopale Unterteilung von  $\text{conv}(\mathcal{V})$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{V}$ . Dann ist die Verfeinerung  $\mathfrak{p}_{\mathbf{v}_0}(\mathcal{S})$  von  $\mathcal{S}$ , für ein  $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{V}$ , kohärente polytopale Unterteilung von  $\text{conv}(\mathcal{V})$ .

**Theorem 4.9** Sei  $\mathcal{V}$  eine Menge von endlich vielen Punkten in  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathcal{S}$  eine kohärente polytopale Unterteilung von  $\text{conv}(\mathcal{V})$  mit  $\text{vert}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{V}$ . Dann besitzt  $\mathcal{S}$  immer eine Verfeinerung  $\mathcal{T}$  von  $\mathcal{S}$ , so daß  $\mathcal{T}$  eine kohärente *Triangulierung* von  $\text{conv}(\mathcal{V})$  mit  $\text{vert}(\mathcal{T}) = \mathcal{V}$  ist.

*Beweis.* Nach einem Hintereinanderpulling von *allen* Punkten von  $\mathcal{V}$  (in beliebiger Reihenfolge), kann man immer eine derartige kohärente *Triangulierung*  $\mathcal{T}$  von  $\text{conv}(\mathcal{V})$  konstruieren, indem man Lemmata 4.7 und 4.8 anwendet.  $\square$

## 5 Anwendungen auf gewisse algebraisch-geometrische Probleme

### (a) Nicht-diskrepante Auflösungen von torischen Gorensteinschen Singularitäten.

Seien  $N$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang  $d$ ,  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  sein dualer und  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  ein  $d$ -dimensionaler, rationaler, stark konvexer polyedrischer Kegel.  $\sigma$  läßt sich schreiben als

$$\sigma = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k, \quad k \geq d,$$

wobei  $\varrho_1, \dots, \varrho_k$  die zu seinen Erzeugenden  $n(\varrho_1), \dots, n(\varrho_k)$  assoziierten Strahlen sind. Die affine torische Varietät

$$U_{\sigma} = \text{Max-Spec}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M])$$

zu  $\sigma$  wird durch das Monoid  $\sigma^{\vee} \cap M$  bzgl. seines dualen Kegels

$$\sigma^{\vee} := \{\mathbf{y} \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \sigma\}$$

definiert; sie ist *glatt* genau dann, wenn  $\sigma$  simplizial ist (d.h.  $k = d$ ) und die Multiplizität  $\text{mult}(\sigma, N) = 1$  hat, wobei

$$\text{mult}(\sigma, N) := |N : \mathbb{Z}n(\varrho_1) + \cdots + \mathbb{Z}n(\varrho_d)| .$$

(In diesem Fall wird  $\sigma$  *unimodular* genannt).

• Weiterhin ist  $U_{\sigma}$  *Gorensteinsch* genau dann, wenn es primitives Element  $m_{\sigma} \in M \cap (\text{int}(\sigma^{\vee}))$  gibt, so daß

$$\{n(\varrho_1), \dots, n(\varrho_k)\} \subset \mathbf{H}, \quad \text{wobei } \mathbf{H} := \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_{\sigma}, \mathbf{x} \rangle = 1\} .$$

• Sei nun  $\Delta$  der Fächer, der aus allen Seiten von  $\sigma$  besteht. Bezeichne mit  $X(N, \Delta) = U_{\sigma}$  die entsprechende torische Varietät. Jede Unterteilung  $\widehat{\Delta}$  von  $\Delta$  in kleinere Kegel induziert einen eigentlichen, birationalen Morphismus zwischen torischen Varietäten:

$$f : X(N, \widehat{\Delta}) \longrightarrow X(N, \Delta) = U_{\sigma} .$$

Man kann  $\Delta$  immer so verfeinern, daß  $\widehat{\Delta}$  nur aus unimodularen Kegeln besteht, d.h. so, daß  $X(N, \widehat{\Delta})$  glatt wird.

• Wenn  $U_{\sigma}$  Gorensteinsch ist, dann sind alle partiellen, nicht diskrepanten Desingularisierungen von  $X(N, \Delta) = U_{\sigma}$  von der Form

$$f : X(N, \widehat{\Delta}(\mathcal{T})) \longrightarrow X(N, \Delta) = U_{\sigma},$$

wobei  $\mathcal{T}$  eine Gittertriangulierung des Gitterpolytops  $P := \sigma \cap \mathbf{H}$  ist, und

$$\widehat{\Delta}(\mathcal{T}) := \{\sigma_{\mathbf{s}} \mid \mathbf{s} \in \mathcal{T}\}, \quad \sigma_{\mathbf{s}} := \text{pos}(\mathbf{s}) .$$

(“Nicht diskrepant” bedeutet  $K_{X(N, \widehat{\Delta})} = f^*K_{X(N, \Delta)}$ ). Insbesondere gilt:

- (i)  $f_{\mathcal{T}}$  ist maximal bzgl. der gestatteten Diskrepanz  $\iff \mathcal{T}$  ist maximal.
- (ii)  $f_{\mathcal{T}}$  ist voll (d.h.,  $X(N, \widehat{\Delta}(\mathcal{T}))$  ist überall glatt)  $\iff \mathcal{T}$  ist unimodular.
- (iii)  $f_{\mathcal{T}}$  ist projektiv (d.h.,  $X(N, \widehat{\Delta}(\mathcal{T}))$  ist quasiprojektiv)  $\iff \mathcal{T}$  ist kohärent.

**Problem.** Unter welchen Voraussetzungen besitzt ein Gitterpolytop  $P$  unimodulare, kohärente Triangulierungen? [Genauer gesagt, wenn  $P$  als Repräsentant einer gewissen Gitter-Äquivalenzklasse betrachtet wird ?]

Wie wir schon gesehen haben (s. Thm. 4.9) ist es immer möglich, kohärente maximale Triangulierungen zu gewinnen. Im Gegensatz dazu ist das obige Problem im allgemeinen noch nicht gelöst. Wir wissen

natürlich, daß für manche  $P$ 's derartige Triangulierungen gar nicht existieren können. Auf der anderen Seite gibt es auch gewisse Familien, für welche die Existenz solcher Triangulierungen gewährleistet werden kann.

**(b) Familien von Gitterpolytopen, die unimodulare, kohärente Triangulierungen besitzen.**

(i) Fano-Polytope: Diese sind gitter-äquivalent zu simplizialen Gitterpolytopen  $P \subset N_{\mathbb{R}}$ , die einen einzigen Punkt  $n_0$  in ihrem relativen Inneren besitzen, so daß dieser Punkt zusammen mit den Ecken jeder Facette von  $P$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis des affinen Gitters  $N \cap \text{aff}(P)$  bilden. Für solche  $P$ 's ist die Triangulierung

$$\mathcal{T} = \{n_0 \star F \mid F \text{ Seite von } P\}$$

unimodular und kohärent. (Z.B. das Kreuzpolytop  $\text{Cr}_d$  in 3.23 ist ein Fano-Polytop).

(ii)  $\mathbb{H}_d$ -verträgliche Polytope: Sei  $\mathbb{H}_d$  das affine Hyperebenenarrangement in  $\mathbb{R}^d$ , das aus der Vereinigung der Hyperebenen

$$\{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_i = \kappa\}, 1 \leq i \leq d, \kappa \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_i - x_j = \lambda\}, 1 \leq i < j \leq d, \lambda \in \mathbb{Z}\}$$

besteht.  $\mathbb{H}_d$  unterteilt ganz  $\mathbb{R}^d$  in unimodulare Simplizes und induziert deswegen eine unimodulare Triangulierung  $\mathcal{T}_{\mathbb{H}_d}$ . Außerdem ist

$$|\mathcal{T}_{\mathbb{H}_d}| = \mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \longmapsto \psi(\mathbf{x}) = - \sum_{0 \leq i < j \leq d} \left[ \sum_{0 \leq k \leq x_j - x_i} H(x_j - x_i - k) + \sum_{x_i - x_j \leq k \leq 0} H(k - x_j + x_i) \right] \in \mathbb{R},$$

mit  $x_0 := 0$  und  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Heaviside Funktion

$$H(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine streng konkave Stützfunktion auf  $\mathbb{R}^d$ .  $\mathbb{H}_d$ -verträgliche Polytope sind diejenigen Polytope, die gitter-äquivalent zu Gitterpolytopen  $P$  bzgl.  $\mathbb{Z}^d$  sind, für welche die affinen Hüllen  $\text{aff}(F)$  aller Facetten  $F$  zu  $\mathbb{H}_d$  gehören. (Der Gitterwürfel  $\text{Cub}_d$  aus 3.7, 3.22, und im allgemeinen jeder Gitterquader bzgl.  $\mathbb{Z}^d$  ist  $\mathbb{H}_d$ -verträglich). Für solche  $P$ 's ist die Triangulierung  $\mathcal{T}|_{\mathbb{H}_d}$  offensichtlich unimodular und kohärent.

(iii) Nakajima Polytope: Sie werden induktiv konstruiert. Ein Gitterpolytop der Dimension 0 ist per definitionem ein Nakajima-Polytop. Als Repräsentanten in seiner Gitter-Äquivalenzklasse betrachtet man am besten  $Q = \{(1, 0, 0, \dots, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^d$  (für  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  beliebig groß gewählt). Ein Nakajima Polytop  $P$  der Dimension  $d - 1$  ist ein Gitterpolytop, das gitter-äquivalent zu

$$P \stackrel{L}{\sim} (\mathbf{Pr}_{\text{hl}}^{(d)}(Q)) \cap \left\{ \mathbf{x} = (1, x_2, \dots, x_d)^{\top} \in \bar{\mathbf{H}}^{(d)} \mid x_d \leq \sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j x_j \right\}$$

(bzgl.  $\mathbb{Z}^d$ ) ist, wobei

$$\bar{\mathbf{H}}^{(d)} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^{\top} \in \mathbb{R}^d \mid x_1 = 1\},$$

$Q \subset \bar{\mathbf{H}}^{(d-1)}$  ein Nakajima Polytop der Dimension  $d - 2$  eingebettet in  $\bar{\mathbf{H}}^{(d)}$  durch die Identifikation mit

$$Q \times \{0\} \subset \bar{\mathbf{H}}^{(d-1)} \times \{0\} \hookrightarrow \bar{\mathbf{H}}^{(d)}$$

und

$$\mathbf{Pr}_{\text{hl}}^{(d)}(Q) := Q \times \mathbb{R}_{\geq 0} = \{(\mathbf{x}, t) \in \bar{\mathbf{H}}^{(d)} \mid \mathbf{x} \in Q, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

das  $(d - 1)$ -dimensionale Halbgeradenprisma über  $Q$  sind. Dabei wird verlangt, daß  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, -1) \in (\mathbb{Z}^d)^{\vee}$  ein ganzzahliges Funktional bezeichnet, welches nicht negative Werte auf  $Q \times \{0\}$  annimmt. Der

Beweis der Existenz von unimodularen, kohärenten Triangulierungen wird ebenfalls induktiv durchgeführt. Zuerst nimmt man an,  $Q$  besitze eine unimodulare, kohärente Triangulierung  $\mathfrak{T}$ . Die polytopale Unterteilung

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{T}} := \bigcup_{\text{alle Simplizes } \mathbf{s} \in \mathfrak{T}} P_{\mathbf{s}}, \text{ mit } P_{\mathbf{s}} := (\mathbf{Pr}_{\text{hl}}^{(d)}(\mathbf{s})) \cap \left\{ \mathbf{x} = (1, x_2, \dots, x_d)^{\top} \in \bar{\mathbf{H}}^{(d)} \mid x_d \leq \sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j x_j \right\}$$

ist offensichtlich kohärent. Nachdem man das Pulling-Verfahren für alle Punkte von  $\mathcal{V} = |\mathcal{S}_{\mathfrak{T}}| \cap \mathbb{Z}^d$  durchgeführt hat (siehe Thm. 4.9), bildet man eine kohärente maximale Gittertriangulierung  $\mathcal{T}$  von  $P$  selbst. Durch diese Konstruktion werden die Einschränkungen  $\{\mathcal{T}|_{P_{\mathbf{s}}} : \mathbf{s} \text{ Simplizes von } \mathfrak{T}\}$  zu Untertriangulierungen von  $\mathcal{T}$ , so daß die Vereinigung ihrer zugrundeliegenden topologischen Räume gleich  $|\mathcal{T}| = P$  ist. Da jedes Simplex  $\mathbf{s}'$  jeder dieser Untertriangulierungen  $\mathcal{T}|_{P_{\mathbf{s}}}$  ein elementares Simplex ist mit Ecken, die in den Halbgeradenprismata über unimodularen Simplizes  $\mathbf{s}$  enthalten sind, muß es zwangsläufig selbst unimodular sein ( $\rightsquigarrow$  einfache Determinantenberechnung!). Somit sind  $\mathcal{T}|_{P_{\mathbf{s}}}$  (und deswegen auch  $\mathcal{T}$  selbst) unimodular!! Ende des Beweises.

**Bemerkung.** Die Nakajima Polytope umfassen die gesamte Klasse von Polytopen  $P$ , für welche die Gorensteinschen affinen Varietäten  $U_{\sigma_P}$ ,  $\sigma_P = \text{pos}(P)$ , sich als *lokale vollständige Durchschnitte* darstellen lassen.

**(c) Zur Berechnung der Kohomologiegruppen von aufgelösten Gorensteinschen torischen Singularitäten mittels nicht diskrepanter birationaler Morphismen.**

Ist  $U_{\sigma}$  Gorensteinsch und

$$f : X(N, \hat{\Delta}(\mathcal{T})) \longrightarrow X(N, \Delta) = U_{\sigma}$$

eine nicht diskrepante “volle” Desingularisierung ( $\iff \mathcal{T}$  unimodular) wie in (a), so verschwinden die ungeraden Kohomologiegruppen, während die Dimensionen der geraden Kohomologiegruppen nur durch die Kenntnis der Koeffizienten des Erhartschen Polytops von  $P$  (oder des  $\mathbf{f}$ - oder  $\mathbf{h}$ -Vektors von  $\mathcal{T}$ ) zu berechnen sind (vgl. 3.20), weil

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^{2i} \left( X(N, \hat{\Delta}(\mathcal{T})) \right) = \psi_i(P), \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq \dim(P)$$

**(d) Zur Berechnung der String-theoretischen Hodge Zahlen  $h_{\text{str}}^{p,q}(\overline{Z}_f)$  einer kompaktifizierten, nicht degenerierten Hyperfläche, die in einer kompakten torischen Fano Varietät  $Y(M, P)$  eingebettet ist.**

Sei  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul,  $N$  sein dualer und  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  ein  $d$ -Gitterpolytop bzgl.  $M$ . In 3.12 haben wir den graduierten normalen Halbgruppenring  $\mathbb{C}[\mathfrak{C}(P)]$  definiert. (Von nun an setzen wir  $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ ). Die kompakte, normale komplexe Varietät

$$Y(M, P) := \mathbf{Proj}(\mathbb{C}[\mathfrak{C}(P)])$$

heißt die zu  $P$  assoziierte torische Varietät. Es kann gezeigt werden, daß  $Y(M, P)$  analytisch isomorph zu  $X(N, \Delta_P)$  ist, wobei  $\Delta_P$  (wie üblich) den Normalenfächer von  $P$  bezeichnet.

**Satz 5.1 (Reflexivitätsbedingungen)** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Das polare Polytop  $P^* \subset N_{\mathbb{R}}$  von  $P$  ist ein Gitterpolytop bzgl.  $N$ .*
- (ii) *Der  $\psi$ -Vektor  $\psi(P)$  von  $P$  ist “symmetrisch”, d.h., er genügt dem Analogon der Dehn-Sommerville Gleichungen:*

$$\psi_i(P) = \psi_{d-i}(P), \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq d.$$

(iii)  $Y(M, P)$  ist eine Fano-Varietät mit höchstens Gorensteinschen Singularitäten und  $\omega_{Y(M, P)}^{\otimes -1} \cong \mathcal{O}_P(1)$  (wobei  $\mathcal{O}_P(1) := \mathbb{C}[\mathfrak{C}(P)](1)$  die ample invertierbare Garbe bezeichnet, die dem  $\mathbb{C}[\mathfrak{C}(P)]$ -graduierten getwisteten Modul  $\mathbb{C}[\mathfrak{C}(P)](1)$  entspricht, [s. Hartshorne, S. 117].)

**Definition 5.2** Gitterpolytope, die die obigen Eigenschaften (i)-(iii) haben, heißen *reflexiv*. (Fano-Polytope sind spezielle reflexive Polytope und zwar diejenigen, für welche  $Y(M, P)$  eine Fano Mannigfaltigkeit ist.)

• Durch den Isomorphismus  $M \cong \mathbb{Z}^d$  identifiziert man die Elemente  $(m_1, \dots, m_d) \in M$  mit den Exponenten der Laurent-Monome  $\mathfrak{z}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{z}_d^{m_d} \in \mathbf{L}$  (wobei  $\mathbf{L} := \mathbb{C}[\mathfrak{z}_1^{\pm 1}, \dots, \mathfrak{z}_d^{\pm 1}]$ ). Der Träger  $\text{supp}(\varphi)$  eines Laurent Polynoms

$$\varphi(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d) = \sum \lambda_{m_1, \dots, m_d} \mathfrak{z}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{z}_d^{m_d} \in \mathbf{L}$$

ist per definitionem  $\text{supp}(\varphi) := \{(m_1, \dots, m_d) \in M \mid \lambda_{m_1, \dots, m_d} \neq 0\}$ . Außerdem definieren wir das *Newtonsche Polytop*  $\text{Newt}(\varphi)$  von  $\varphi$ :

$$\text{Newt}(\varphi) := \{(m_1, \dots, m_d) \in M \mid (m_1, \dots, m_d) \in \overline{\text{supp}(\varphi)}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_P := \{\varphi \in \mathbf{L} \mid \text{Newt}(\varphi) = P\} .$$

Für jedes  $\varphi \in \mathcal{L}_P$  sei  $Z_\varphi = Z_{\varphi, P}$  die affine Hyperfläche

$$Z_\varphi := \{(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d) \in T_N (= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) = \text{Spec}(\mathbf{L})) \mid \varphi(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_d) = 0\} \subset T_N$$

und  $\overline{Z}_\varphi$  die abgeschlossene Hülle von  $Z_\varphi \subset T_N$  in  $Y(M, P)$ . Für jede Seite  $F \prec P$  setzen wir  $Z_{\varphi, F} := \overline{Z}_\varphi \cap \text{orb}(F, P)$ . Man erhält somit die Zerlegung

$$\overline{Z}_\varphi = \coprod_{F \prec P} Z_{\varphi, F} \tag{5.1}$$

von  $\overline{Z}_\varphi$  als disjunkte Vereinigung von *affinen Strata*  $Z_{\varphi, F}$ , die von den Seiten  $F$  von  $P$  herkommen.

**Definition 5.3** Die kompaktifizierte Hyperfläche  $\overline{Z}_\varphi$  heiße *nicht degeneriert*, wenn für alle  $F \prec P$ , die affinen Strata  $Z_{\varphi, F}$  entweder leer ( $\iff F$  eine Ecke von  $P$ ) oder glatte 1-kodimensionale Untervarietäten des algebraischen Torus  $T_F = \text{orb}(F, P)$  sind. Die Familie aller nicht degenerierten kompaktifizierten Hyperflächen wird mit  $\mathfrak{H}(M, P)$  bezeichnet. Durch den Bertinischen Satz kann man zeigen, daß  $\mathfrak{H}(M, P)$  eine offene, dichte Teilmenge von  $\mathcal{L}_P$  bzgl. der Zariski-Topologie bildet. Mit Hilfe des Lefschetz-Satzes beweist man außerdem:

**Theorem 5.4 (Danilov-Khovanskii Formeln)** Seien  $M$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang  $d$ ,  $P$  ein einfaches (bzw. absolut einfaches)  $d$ -Polytop in  $M_{\mathbb{R}}$  und  $\overline{Z}_\varphi \in \mathfrak{H}(M, P)$ . Dann werden die gewöhnlichen Hodge Zahlen einer quasiglatten (bzw. glatten) kompaktifizierten Hyperfläche  $\overline{Z}_\varphi$  durch die folgenden Formeln berechnet:

(i) Wenn  $p + q \neq d - 1$ , dann gilt

$$h^{p, q}(\overline{Z}_\varphi) = h^{d-1-p, d-1-q}(\overline{Z}_\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \neq q \\ (-1)^{p+1} \sum_{i=p+1}^d (-1)^i \binom{i}{p+1} f_i(P), & \text{falls } p = q \end{cases}$$

(ii) Wenn  $p + q = d - 1$ , dann gilt

$$h^{p, q}(\overline{Z}_\varphi) = \begin{cases} (-1)^{p+q+1} \sum_{i=p+1}^d \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} (-1)^i \psi_{p+1}(F), & \text{falls } p \neq q \\ (-1)^{p+1} \sum_{i=p+1}^d (-1)^i \binom{i}{p+1} f_i(P) - \sum_{i=p+1}^d \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} (-1)^i \psi_{p+1}(F), & \text{falls } p = q \end{cases}$$

**Bemerkung 5.5** Die (notwendigerweise Gorensteinschen) abelschen Quotientensingularitäten einer solchen kompaktifizierten Hyperfläche  $\overline{Z_\varphi}$  können durch die Seiten von  $P^*$  abgelesen werden. Wenn insbesondere  $\overline{Z_\varphi}$  glatt ist,  $\overline{Z_\varphi^*} \in \mathfrak{Y}(N, P^*)$  und dazu eine volle, nicht diskrepante Desingularisierung  $\widehat{Z_\varphi^*} \rightarrow \overline{Z_\varphi^*}$  von  $\overline{Z_\varphi^*}$  existiert, dann gilt die folgende kombinatorische “Spiegel”-symmetrische Identität:

$$\mathfrak{h}^{p,q}(\overline{Z_\varphi}) = \mathfrak{h}^{d-1-p,q}(\widehat{Z_\varphi^*}), \quad \forall p, q, \quad 0 \leq p, q \leq d-1$$

**Beispiel 5.6 (Der “Spiegel” einer glatten Hyperfläche vom Grad  $d+1$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$ )**

Sei  $M = \mathbb{Z}^d$ ,  $N = (\mathbb{Z}^d)^\vee$  und  $\mathfrak{s} \subset M_{\mathbb{R}}$  das reflexive Gittersimplex

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} &= \text{conv} \left( \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -d \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ -d \\ 1 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} 1 \\ -d \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -d \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \right\} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) - (d+1) \cdot \text{conv}(\{\mathbf{0}, e_1, e_2, \dots, e_{d-1}, e_d\}) \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{s}^* = \text{conv}(\{e_1, e_2, \dots, e_d, -e_1 - e_2 - \dots - e_d\})$$

sein polares Simplex. Jedes  $\overline{Z_\varphi} \in \mathfrak{Y}(M, \mathfrak{s})$  ist glatt und kann in globalen (homogenen) Koordinaten durch eine glatte Hyperfläche vom Grad  $d+1$  in  $Y(M, \mathfrak{s}) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$  repräsentiert werden. Jeder “Spiegel” von ihm kommt von einer vollen nicht diskrepanten Desingularisierung  $\widehat{Z_\varphi^*} \rightarrow \overline{Z_\varphi^*}$  von  $\overline{Z_\varphi^*} \in \mathfrak{Y}(N, \mathfrak{s}^*)$  her. In diesem Beispiel sind solche  $\widehat{Z_\varphi^*}$ ’s immer existent in *allen* Dimensionen. Außerdem gilt

$$\mathfrak{h}^{p,q}(\widehat{Z_\varphi^*}) = \mathfrak{h}^{d-1-p,q}(\overline{Z_\varphi}) = \begin{cases} \delta_{d-1-p,q}, & \text{falls } p \neq q \\ \mathbf{B}(d, p+1 \mid d, p) + \delta_{2p, d-1}, & \text{falls } p = q \end{cases}$$

*Zum Beweis:* Benutze die Formeln von Danilov und Khovanskii kombiniert mit der Formel (3.13) und mit der *nicht trivialen* kombinatorischen Identität:

$$\sum_{i=p+1}^d (-1)^{d+i} \binom{d+1}{i+1} \mathbf{B}(i, p+1 \mid d+1, i) = \mathbf{B}(d, p+1 \mid d, p) .$$

**Bemerkung 5.7** Auf ähnliche Weise arbeitet man mit den Berechnungen der sogenannten “Stringtheoretischen” Hodge Zahlen von beliebigen kompaktifizierten Hyperflächen  $\overline{Z_\varphi} \in \mathfrak{Y}(M, P)$ .

**Beispiel 5.8** G. Ewald hat gezeigt, daß jedes *zentral symmetrische* Fano Polytop  $P$   $L$ -äquivalent zur freien Summe

$$\text{Cr}_{d_0} \oplus \mathbf{DP}^{d_1} \oplus \mathbf{DP}^{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{DP}^{d_r}$$

ist, wobei  $d_0 + d_1 + \dots + d_r$  und

$$\mathbf{DP}^{d_i} = \text{conv} \left( \left\{ \pm e_1, \dots, \pm e_{d_i}, \pm \sum_{j=1}^{d_i} e_j, \right\} \right) \subset \mathbb{R}^{d_i}$$

das sog.  $d_i$ -dimensionale *Del Pezzo Polytop* ist. ( $Y(M, P)$  ist isomorph zu  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^{d_0+d_1+\dots+d_r}$  aufgeblasen in  $2(d_1 + \dots + d_r)$  Punkten). Das polare Polytop  $P^*$  von  $P$  ist deswegen  $L$ -äquivalent zu

$$\text{Cub}_{d_0} \times (\mathbf{DP}^{d_1})^* \times (\mathbf{DP}^{d_2})^* \times \dots \times (\mathbf{DP}^{d_r})^*$$

mit

$$(\mathbf{DP}^{d_i})^* = \left\{ (x_1, \dots, x_{d_i}) \in [-1, 1]^{d_i} \mid -1 \leq \sum_{j=1}^{d_i} x_j \leq 1 \right\}.$$

Man kann die string-theoretischen Hodge Zahlen  $\overline{Z}_{\varphi} \in \mathfrak{H}(M, P)$  mit Hilfe der DK-Formeln und der speziellen Bauart der  $\psi$ -Vektoren explizit berechnen!