D.I. Dais

Die Sätze von de Rham und Dolbeault

(Aufzeichnungen aus der Vorlesung “Algebraische Geometrie II”, Mathematische Fakultät, Universität Tübingen, SS 1998)

1 Tensorprodukt, äußeres Produkt und direkter Limes

• Wir werden hauptsächlich innerhalb der Kategorie Mod_R der R-Moduln arbeiten. Der Einfachheit halber werden wir von nun an voraussetzen, daß R stets ein *kommutativer Ring mit* 1 ist.

Definition 1.1 (Universelle Bedingung) Seien L, M und N drei R-Moduln und $\Phi : L \times M \longrightarrow N$ eine R-bilineare Abbildung. Das Paar (N, Φ) genügt der *universellen Bedingung*, wenn es für jedes Paar (P, τ) bestehend aus einem R-Modul P und einer R-bilinearen Abbildung $\tau : L \times M \longrightarrow P$ einen eindeutig bestimmten R-Homomorphismus (R-lineare Abbildung) $\overline{\tau} : N \longrightarrow P$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\boxed{\begin{tikzcd} L \times M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\tau"'] & N \arrow[d, "\overline{\tau}"] \\ & P \end{tikzcd}}$$

(Mit anderen Worten: (N, Φ) “linearisiert” alle R-bilinearen Abbildungen $\tau : L \times M \longrightarrow P$).

Proposition 1.2 (Konstruktion des Tensorprodukts) *Seien L, M zwei R-Moduln. Dann gibt es immer einen R-Modul N und eine R-bilineare Abbildung $\Phi : L \times M \longrightarrow N$, so daß das Paar (N, Φ) der universellen Bedingung genügt. Außerdem ist dieses Paar bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt. (Das heißt, daß es für jedes weitere Paar (N', Φ'), das der universellen Bedingung genügt, einen Modulisomorphismus $u : N \longrightarrow N'$ gibt mit $u \circ \Phi = \Phi'$).* N wird das *Tensorprodukt* von L und M genannt und wird mit $N = L \otimes_R M$ bezeichnet. $(l \otimes_R m := \Phi(l, m))$.

Beweisidee. Sei $\mathrm{FR}(L \times M) = \bigoplus_{(l,m) \in L \times M} R_{(l,m)}$, $(R_{(l,m)} \cong R)$, der von $L \times M$ erzeugte freie R-Modul und Q der Untermodul von $\mathrm{FR}(L \times M)$, der von allen Elementen von $\mathrm{FR}(L \times M)$ erzeugt wird, die die Form

$$\begin{cases} (l, m + m') - (l, m) - (l, m') \quad \text{oder} \quad (l, rm) - r\,(l, m)\,, \ r \in R \quad \text{oder} \\[2ex] (l + l', m) - (l, m) - (l', m) \quad \text{oder} \quad (rl, m) - r\,(l, m)\,, \ r \in R \quad \text{haben.} \end{cases}$$

Definiere $N := \mathrm{FR}(L \times M)/Q$ und als $\Phi : L \times M \longrightarrow \mathrm{FR}(L \times M)/Q$ die kanonische Projektion. Die universelle Bedingung und die Eindeutigkeit für das Paar (N, Φ) sind dann leicht nachzuweisen. □

Proposition 1.3 (Wichtige Eigenschaften des Tensorproduktes) *Man hat folgende Modulisomorphismen*:

(i) $M \otimes_R R \cong M$, $M \otimes_R M' \cong M' \otimes_R M$,

(ii) $(M \otimes_R M') \otimes_R M'' \cong M \otimes_R (M' \otimes_R M'')$,

(iii) $(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 1.4 (Tensorprodukt von Homomorphismen) *Sind $f : M \longrightarrow M'$ und $g : N \longrightarrow N'$ Modulhomomorphismen, so wird durch*

$$M \times N \ni (m, n) \longmapsto f(m) \otimes_R g(n) \in M' \otimes_R N'$$

eine bilineare Abbildung definiert, die einen Modulhomomorphismus induziert:

$$f \otimes_R g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N' \ .$$

(Er wird das *Tensorprodukt von f und g* genannt).

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 1.5 (Tensoralgebra) Sei R ein nicht trivialer Ring und M ein freier R-Modul. Sei

$$Ten^p(M) := Ten^p(M;R) := \begin{cases} R, & \text{falls } p = 0 \\ \underbrace{M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M \otimes_R M}_{p\text{-mal}}, & \text{falls } p \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$$

Die direkte Summe

$$Ten^*(M) := \bigoplus_{p \geq 0} Ten^p(M)$$

ist mittels einer geeigneten Multiplikation

$$Ten^p(M) \times Ten^q(M) \ni (x,y) \longmapsto (x \otimes y) \in Ten^{p+q}(M)$$

eine R-Algebra, die sog. *Tensoralgebra* von M.

Definition 1.6 (Äußeres Produkt und äußere Algebra) Seien R ein nicht trivialer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Definiere den Untermodul $Q^p(M) \subset Ten^p(M)$,

$$Q^p(M) := \left\{ \begin{array}{c} \text{Modul erzeugt von allen Tensoren der Form } \bigotimes_{i=1}^{p} x_i \in Ten^p(M), \\ \text{für welche gilt: } \ x_i = x_j, \ \text{für gewisse } i,j \in \{1,\dots,p\}, i \neq j \end{array} \right\},$$

und $\bigwedge^p M := Ten^p(M)/Q^p(M)$. Ist $\varpi_p : Ten^p(M) \twoheadrightarrow \bigwedge^p M$ die Restklassenabbildung, so bezeichnet man das Bild von $\bigotimes_{i=1}^{p} x_i$ unter ϖ_p mit

$$\boxed{\bigwedge_{i=1}^{p} x_i := \varpi_p\left(\bigotimes_{i=1}^{p} x_i\right)}$$

Es gilt $\mathrm{Rang}_R\left(\bigwedge^p M\right) = \binom{\mathrm{Rang}_R(M)}{p}$, und

$$\boxed{\bigwedge^* M := \bigoplus_{p \geq 0} \bigwedge^p M}$$

ist eine R-Unteralgebra von $Ten^*(M)$, die sog. *äußere Algebra* oder *Grassmannsche Algebra* von M.

Proposition 1.7 (Eigenschaften des äußeren Produktes) *Seien R ein nicht trivialer Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, $p \geq 1$, und $(m_1,\dots,m_p) \in M^p$. Dann gilt folgendes:*

(i) Für $i \in \{1,\dots,p\}, r \in R, m_i' \in M$,

$$m_1 \bigwedge \cdots \bigwedge (m_i + r m_i') \bigwedge \cdots \bigwedge m_p = \ m_1 \bigwedge \cdots \bigwedge m_i \bigwedge \cdots \bigwedge m_p \ + r\,(m_1 \bigwedge \cdots \bigwedge m_i' \bigwedge \cdots \bigwedge m_p).$$

(ii) $\bigwedge_{i=1}^{p} m_i = 0$, falls $m_i = m_j$, für gewisse $i,j \in \{1,\dots,p\}, i \neq j$.

(iii) $\bigwedge_{i=1}^{p} m_{\mathfrak{s}(i)} = \mathrm{sign}(\mathfrak{s}) \cdot \bigwedge_{i=1}^{p} m_i$, wobei $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_p$.

(iv) $\bigwedge_{i=1}^{p} m_i = m_1 \bigwedge \cdots \bigwedge \left(m_i + \sum_{j \neq i} r_j m_j\right) \bigwedge \cdots \bigwedge m_p$, falls r_j's $\in R$.

(v) $\bigwedge_{i=1}^{p} m_i = 0$, falls $m_k = \sum_{i \neq k} r_i m_i$ und r_i's $\in R$.

Definition 1.8 (Gerichtete Mengen) Eine Menge A heißt *teilweise geordnet*, wenn für gewisse Paare (α, β) ihrer Elemente eine Beziehung $\alpha \leq \beta$ erklärt ist, so daß gilt:

(i) Für alle $\alpha \in A$ ist $\alpha \leq \alpha$.

(ii) Aus $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \gamma$ folgt $\alpha \leq \gamma$.

Eine teilweise geordnete Menge A heißt *gerichtet*, wenn zu je zwei Elemente $\alpha, \beta \in A$ ein $\gamma \in A$ existiert mit $\alpha \leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$.

Definition 1.9 (Direktes System) Ein *direktes System* $\left\{G_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\}$ *von abelschen Gruppen* über einer gerichteten Menge A besteht aus einer Familie $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ von abelschen Gruppen und aus einer Funktion $\alpha \longmapsto G_\alpha$, die jedem α eine abelsche Gruppe G_α und jedem Paar (α, β) von Elementen aus A mit $\alpha \leq \beta$ einen Homomorphismus $\varrho_\alpha^\beta : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ zuordnet, so daß gilt:

(i) $\varrho_\alpha^\alpha = \mathrm{Id}_{G_\alpha}$ für jedes $\alpha \in A$.

(ii) Für $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ist $\varrho_\beta^\gamma \circ \varrho_\alpha^\beta = \varrho_\alpha^\gamma$.

In ähnlicher Weise definiert man direkte Systeme $\left\{R_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\}$ von *Ringen*, $\left\{M_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\}$ von R_α-*Moduln* etc.

Definition 1.10 (Direkter Limes) Sei $\left\{G_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\}$ ein direktes System von abelschen Gruppen. In der Vereinigung $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ erklären wir eine Äquivalenzrelation "$\sim$": $G_\alpha \ni g_\alpha \sim g_\beta \in G_\beta$ genau dann, wenn es ein $\gamma \in A$ gibt mit $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$, und $\varrho_\alpha^\gamma(g_\alpha) = \varrho_\beta^\gamma(g_\beta)$. Ist $g_\alpha \in G_\alpha$, so bezeichne $[g_\alpha]$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Sind $[g_\alpha]$, $[g_\beta]$ zwei Äquivalenzklassen, so gibt es ein $\gamma \in A$ mit $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$. Durch

$$[g_\alpha] + [g_\beta] := \left[\varrho_\alpha^\gamma(g_\alpha) + \varrho_\beta^\gamma(g_\beta)\right], \quad -[g_\alpha] := [-g_\alpha],$$

erhält

$$\boxed{G := \varinjlim G_\alpha := \left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\right) \Big/ \sim} \tag{1.1}$$

die Struktur einer abelschen Gruppe. (Das Nullelement 0_G wird durch das Nullelement 0_α einer jeden abelschen Gruppe G_α repräsentiert). G heißt *der direkte Limes des direkten Systems* $\left\{G_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\}$. Ordnet man für ein festes $\alpha \in A$ jedem $g_\alpha \in G_\alpha$ die Äquivalenzklasse $[g_\alpha] \in G$ zu, so erhält man einen Homomorphismus

$$\boxed{G_\alpha \ni g_\alpha \overset{\varrho_\alpha}{\longmapsto} [g_\alpha] \in G} \tag{1.2}$$

Für $\alpha \leq \beta$ gilt offensichtlich $\varrho_\beta \circ \varrho_\alpha^\beta = \varrho_\alpha$.

• Ist $\left\{M_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\}$ das direkte System von R_α-Moduln, so kann man $M := \varinjlim M_\alpha$ in entsprechender Weise mit der Struktur eines R-Moduls versehen, wobei $R := \varinjlim R_\alpha$.

• *Morphismen* $\Upsilon : \left\{M_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\} \longrightarrow \left\{N_\alpha, r_\alpha^\beta\right\}$ zwischen direkten Systemen von R_α-Moduln über einer gerichteten Menge A sind kanonisch definierbar: Sie bestehen aus Familien $(\Upsilon_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Modulhomomorphismen, für welche die folgenden Diagramme (mit $\alpha \leq \beta$) kommutativ sind.

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\Upsilon_\alpha} & N_\alpha \\ \varrho_\alpha^\beta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow r_\alpha^\beta \\ M_\beta & \xrightarrow{\Upsilon_\beta} & N_\beta \end{array}$$

Proposition 1.11 *Seien* $\{M_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\}, \{N_\alpha, r_\alpha^\beta\}$ *zwei direkte Systeme von* R_α*-Moduln über einer gerichteten Menge* A. *Dann gibt es Isomorphismen*

$$\varinjlim (M_\alpha \oplus N_\alpha) \cong \left(\varinjlim M_\alpha\right) \oplus \left(\varinjlim N_\alpha\right)$$

und

$$\varinjlim (M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha) \cong \left(\varinjlim M_\alpha\right) \otimes_{\varinjlim R_\alpha} \left(\varinjlim N_\alpha\right)$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

2 Grundbegriffe aus der homologischen Algebra

Definition 2.1 Eine Sequenz von R-Moduln und Modulhomomorphismen

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

heißt *exakt*, wenn Bild(f_i) = Kern(f_{i+1}), für alle i. Insbesondere gilt dann $f_{i+1} \circ f_i = 0$. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz.* (Offensichtlich ist dann f injektiv und g surjektiv).

Beispiel. Ist $f : M \to N$ ein Modulhomomorphismus, so liefert

$$0 \longrightarrow \text{ Kern}\,(f) \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N \twoheadrightarrow \text{ Kokern}\,(f) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz.

Proposition 2.2 *Es sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz. Für jeden Modul* N *ist dann folgende Sequenz exakt*:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}\,(M'', N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}\,(M, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}\,(M', N)$$

(Für $\alpha \in$ Hom(M, N), ist $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$).

Beweis. Übungsaufgabe. □

Warnung. Betrachte die exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln $0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}$. Dann ist

$$i^* : \text{ Hom}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{ Hom}\,(2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})\,, \quad i^*(\alpha) = \alpha\,|_{2\mathbb{Z}}\,,$$

nicht surjektiv, denn für $\alpha \in$ Hom$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ist $\alpha(2)$ immer gerade. Hom$(2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ enthält aber z.B. den durch $\alpha(2) = 1$ definierten Homomorphismus. Also Hom$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow$ Hom$(2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$ ist nicht exakt!

Proposition 2.3 *Es sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *eine exakte Sequenz. Für jeden Modul* N *ist dann folgende Sequenz exakt*:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}\,(N, M') \xrightarrow{f_*} \text{Hom}\,(N, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}\,(N, M'')$$

(Für $\alpha \in$ Hom(N, M'), ist $f_*(\alpha) := f \circ \alpha$).

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 2.4 *Es sei* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz. Für jeden* R*-Modul* N *ist dann folgende Sequenz exakt*:

$$M' \otimes_R N \overset{f \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M \otimes_R N \overset{g \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 2.5 *Es sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz. Für jeden freien Modul* N *ist dann auch die ganze Sequenz* $0 \longrightarrow M' \otimes_R N \overset{f \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M \otimes_R N \overset{g \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$ *exakt.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 2.6 *Sind* $\left\{M_\alpha, \varrho_\alpha^\beta\right\} \xrightarrow{\Upsilon} \left\{N_\alpha, r_\alpha^\beta\right\} \xrightarrow{\Psi} \left\{Q_\alpha, \theta_\alpha^\beta\right\}$ *Morphismen von direkten Systemen von* R_α*-Moduln über einer gerichteten Menge* A *derart, daß*

$$0 \longrightarrow M_\alpha \overset{\Upsilon_\alpha}{\longrightarrow} N_\alpha \overset{\Psi_\alpha}{\longrightarrow} Q_\alpha \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz für alle $\alpha \in A$ *ist, so ist*

$$0 \longrightarrow \varinjlim M_\alpha \overset{\tilde{\Upsilon}}{\longrightarrow} \varinjlim N_\alpha \overset{\tilde{\Psi}}{\longrightarrow} \varinjlim Q_\alpha \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 2.7 Sei M ein R-Modul, wobei R einen nullteilerfreien Hauptidealring bezeichnet. Eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

heißt *freie Auflösung von* M, wenn F ein freier R-Modul ist.

Definition 2.8 (Torsionsprodukt) Zu jedem solchen R-Modul M existieren immer freie Auflösungen (2.1). (Betrachte z.B. als $F = \{\varphi : M \to R \mid \varphi(m) \neq 0$, nur für endlich viele $m \in M\}$ den freien, von M erzeugten Modul über R, und $p(\varphi) = \sum_m \varphi(m)\, m$, $N = \mathrm{Kern}(p)$). Zu einer freien Auflösung (2.1) und zu einem weiteren M' betrachte die exakte Sequenz

$$N \otimes_R M' \overset{i \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} F \otimes_R M' \overset{p \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M \otimes_R M' \longrightarrow 0$$

Man definiert das *Torsionsprodukt von* M *und* M' als den Kern

$$\boxed{\mathrm{Tor}\,(M, M') := \mathrm{Kern}\,(i \otimes \mathrm{Id} : N \otimes_R M' \longrightarrow F \otimes_R M')}$$

Es kann gezeigt werden, daß bis auf Modulisomorphismus diese Definition nicht von einer bestimmten Wahl von (2.1) abhängt.

Beispiele. (i) Ist M ein freier R-Modul, so gilt $\mathrm{Tor}(M, M') = 0$ nach Prop. 2.5. (Das gleiche gilt wenn M *torsionsfrei* ist).

(ii) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(n,m)}$. (Betrachte $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$, $i(x) = nx$).

(iii) $\mathrm{Tor}(M \oplus Q, M') \cong \mathrm{Tor}(M, M') \oplus \mathrm{Tor}(Q, M')$.

• Nun werden gewisse Standard-Tricks der homologischen Algebra erwähnt, die mit exakten Sequenzen zu tun haben, und die mit Hilfe von "Diagramm-Jagden" zu realisieren sind.

Proposition 2.9 *In folgendem kommutativen Diagramm seien die beiden Zeilen exakt. Es seien zwei der senkrechten Pfeile Isomorphismen. Dann gilt das auch für den dritten.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 2.10 (Fünfer Lemma) *Das folgende Diagramm von R-Moduln und Modulhomomorphismen sei kommutativ, und die beiden Zeilen seien exakt.*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_4"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

(i) *Ist f_1 surjektiv und sind f_2 und f_4 injektiv, so ist f_3 injektiv.*

(ii) *Ist f_5 injektiv und sind f_2 und f_4 injektiv, so ist f_3 surjektiv.*

(iii) *Sind f_1, f_2, f_4, f_5 Isomorphismen, so ist auch f_3 ein Isomorphismus.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 2.11 (Schlangenlemma) *Das folgende Diagramm von R-Moduln und Modulhomomorphismen sei kommutativ, und die beiden Zeilen seien exakt.*

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"'] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] & C_3 &
\end{tikzcd}$$

Es sei $A_i := \mathrm{Kern}(\alpha_i)$ *und* $D_i = \mathrm{Kokern}(\alpha_i) = C_i/\mathrm{Bild}(\alpha_i)$, $i = 1, 2$. *Dann existiert ein kanonischer Homomorphismus*

$$\delta : A_3 \longrightarrow D_1,$$

so daß folgende Sequenz

$$A_1 \underset{\beta_1|A_1}{\longrightarrow} A_2 \underset{\beta_2|A_2}{\longrightarrow} A_3 \underset{\delta}{\longrightarrow} D_1 \underset{\widehat{\gamma_1}}{\longrightarrow} D_2 \underset{\widehat{\gamma_2}}{\longrightarrow} D_3$$

exakt ist. (Hierbei wird $\widehat{\gamma_i}$ durch γ_i induziert).

Beweis. Wir haben also folgende Situation

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A_1 \arrow[d, hook] & A_2 \arrow[d, hook] & A_3 \arrow[d, hook] \arrow[ddd, rounded corners, to path={-- ([xshift=8ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-8ex]\tikztotarget.south) \tikztonodes}, "\delta"] & \\
 & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\pi_1"] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\pi_2"] & C_3 \arrow[d, "\pi_3"] & \\
 & D_1 \arrow[r, "\widehat{\gamma_1}"] \arrow[d] & D_2 \arrow[r, "\widehat{\gamma_2}"] \arrow[d] & D_3 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

wobei der Homomorphismus δ noch zu konstruieren ist. Wir erledigen zunächst die einfachen Teile des Beweises. Für $x \in A_1$ gilt $\alpha_2(\beta_1(x)) = \gamma_1(\alpha_1(x)) = 0$, also $\beta_1(x) \in A_2$. Folglich ist $\beta_1|_{A_1} : A_1 \longrightarrow A_2$ definiert. In der selben Weise sieht man, daß $\beta_2|_{A_2} : A_2 \longrightarrow A_3$ definiert ist. Offensichtlich ist

$$A_1 \underset{\beta_1|_{A_1}}{\longrightarrow} A_2 \underset{\beta_2|_{A_2}}{\longrightarrow} A_3$$

ein Komplex. Wir müssen die Exaktheit an der Stelle A_2 zeigen. Es sei $x \in A_2$ und $\beta_2(x) = 0$. Dann gibt es ein $y \in B_1$ mit $\beta_1(y) = x$, d.h.,

$$\gamma_1(\alpha_1(y)) = \alpha_2(\beta_1(y)) = \alpha_2(x) = 0 \qquad (\text{wegen } x \in A_2 = \text{ Kern}(\alpha_2))$$

$$\Longrightarrow \alpha_1(y) = 0, \text{ da } \gamma_1 \text{ injektiv} \Longrightarrow y \in A_1,$$

womit die Exaktheit gezeigt ist. Nun in dem Kern der zusammengesetzten Abbildung

$$C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_2 \xrightarrow{\pi_2} D_2$$

liegt $\alpha_1(B_1)$. Also induziert diese Abbildung einen Homomorphismus $\widehat{\gamma_1} : D_1 \longrightarrow D_2$. Analog erhält man $\widehat{\gamma_2} : D_2 \longrightarrow D_3$. Aus $\gamma_2 \circ \gamma_1 = 0$ folgt unmittelbar $\widehat{\gamma_2} \circ \widehat{\gamma_1} = 0$, also Bild$(\widehat{\gamma_1}) \subset$ Kern$(\widehat{\gamma_2})$.
Wir zeigen jetzt die Exaktheit an der Stelle D_2. Sei $x \in D_2$ und $\widehat{\gamma_2}(x) = 0$. Sei $y \in C_2$ mit $\pi_2(y) = x$. Dann ist

$$\pi_3(\gamma_2(y)) = \widehat{\gamma_2}(\pi_2(y)) = \widehat{\gamma_2}(x) = 0 \Longrightarrow \exists\, z \in B_3 : \alpha_3(z) = \gamma_2(y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists\, u \in B_2 : \beta_2(u) = z \quad (\text{da } \beta_2 \text{ surjektiv}) \Longrightarrow \gamma_2(\alpha_2(u)) = \alpha_3(\beta_2(u)) = \alpha_3(z) = \gamma_2(y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ Für } v := y - \alpha_2(u) \text{ gilt } \pi_2(v) = \pi_2(y) = x \text{ und } \gamma_2(v) = 0 \Longrightarrow \exists\, w \in C_1 : \gamma_1(w) = v \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \widehat{\gamma_1}(\pi_1(w)) = \pi_2(\gamma_1(w)) = \pi_2(v) = \pi_2(y) = x \Longrightarrow x \in \text{ Bild}(\widehat{\gamma_1}), \text{ d.h., daß}$$

$$D_1 \xrightarrow{\widehat{\gamma_1}} D_2 \xrightarrow{\widehat{\gamma_2}} D_3$$

in der Tat exakt ist.

Konstruktion des Verbindungshomomorphismus δ. Wir konstruieren nun δ. Sei $x \in A_3$. Dann gibt es ein

$$y \in B_2 \text{ mit } \beta_2(y) = x \; (\text{da } \beta_2 \text{ surjektiv}) \Longrightarrow \gamma_2(\alpha_2(y)) = \alpha_3(\beta_2(y)) = \alpha_3(x) = 0 \; (\text{da } x \in A_3) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ es gibt genau ein } z \in C_1 \text{ mit } \gamma_1(z) = \alpha_2(y), \text{ da Kern}(\gamma_2) = \text{ Bild}(\gamma_1) \text{ und } \gamma_1 \text{ injektiv.}$$

Definiere

$$\boxed{\delta(x) := \pi_1(z)}$$

Wir müssen zeigen, daß diese Definition vernünftig, d.h. unabhängig von der Wahl von y ist: y kann durch ein beliebiges Element der Form $y + \beta_1(u), u \in B_1$, ersetzt werden. Dann wird z durch $z + \alpha_1(u)$ ersetzt, und

$$\pi_1(z + \alpha_1(u)) = \pi_1(z) = \delta(x)$$

bleibt unverändert. Die Abbildung δ ist ein Homomorphismus: Wählt man zu $x, x' \in A_3$, $r \in R$, Elemente y, y' wie oben, so kann man zu $x + x'$ bzw. rx die Elemente $y + y'$ bzw. ry und $z + z'$ bzw. rz wählen, also gilt

$$\delta(x + x') = \pi_1(z + z') = \pi_1(z) + \pi_1(z') = \delta(x) + \delta(x'), \quad \delta(rx) = \pi_1(rz) = r\pi_1(z) = r\delta(x).$$

Die zusammengesetzte Abbildung $A_2 \longrightarrow A_3 \xrightarrow{\delta} D_1$ ist die Nullabbildung, denn berechnet man $\delta(x)$ für $x = \beta_2(u)$, $u \in A_2$, so kann man $y = u$ wählen und hat $\alpha_2(u) = 0$, also $z = 0$. Sei jetzt $\delta(x) = 0$ für ein $x \in A_3$. Dann ist

$$\pi_1(z) = 0 \Longrightarrow \exists\, u \in B_1 : \alpha_1(u) = z \Longrightarrow \gamma_1(z) = \gamma_1(\alpha_1(u)) = \alpha_2(\beta_1(u)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ Für } y' := y - \beta_1(u) \quad \text{gilt } \beta_2(y') = x, \quad \alpha_2(y') = 0 \Longrightarrow \quad y' \in A_2 \quad \text{und } \beta_2(y') = x.$$

Damit ist die Exaktheit an der Stelle A_3 bewiesen. Es bleibt die Exaktheit an der Stelle D_1 zu zeigen. Zunächst ist Bild$(\delta) \subset$ Kern$(\widehat{\gamma_1})$, denn für jedes $x \in A_3$ gilt

$$\widehat{\gamma_1}(\delta(x)) = \widehat{\gamma_1}(\pi_1(z)) = \pi_2(\gamma_1(z)) = \pi_2(\alpha_2(y)) = 0.$$

Sei nun $w \in C_1$ mit $\widehat{\gamma_1}(\pi_1(w)) = \pi_2(\gamma_1(w)) = 0$. Dann gibt es ein $v \in B_2$ mit $\alpha_2(v) = \gamma_1(w)$. Sei $x := \beta_2(v)$. Dann ist

$$\alpha_3(x) = \gamma_2(\alpha_2(v)) = \gamma_2(\gamma_1(w)) = 0 \Longrightarrow x \in A_3.$$

Zu x kann man $y = v$ und $z = w$ wählen und erhält $\delta(x) = \pi_1(w)$, also Kern$(\widehat{\gamma_1}) \subset$ Bild(δ). Somit ist der Beweis beendet. $\square$

Definition 2.12 (Ketten- und Kokettenkomplexe) Eine nach links bzw. nach rechts Mod$_R$-Sequenz

$$\mathcal{M}_\bullet = \{M_i, f_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \ \cdots \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} \cdots$$

bzw.

$$\mathcal{M}^\bullet = \left\{M^i, f^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}} : \ \cdots \xrightarrow{f^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} M^i \xrightarrow{f^i} M^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} M^{i+2} \xrightarrow{f^{i+2}} \cdots$$

heißt *Links-R-Komplex* (oder *Kettenkomplex über R*) bzw. *Rechts-R-Komplex* (oder *Kokettenkomplex über R*), wenn für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f_i \circ f_{i+1} = 0 \quad (\Longleftrightarrow \text{Bild}(f_{i+1}) \subset \text{Kern}(f_i)) \quad \text{bzw. } f^i \circ f^{i-1} = 0 \quad \left(\Longleftrightarrow \text{Bild}\left(f^{i-1}\right) \subset \text{Kern}\left(f^i\right)\right).$$

(Jedes Element von M_i bzw. von M^i heißt eine *i-Kette* bzw. eine *i-Kokette*. Die f_i's bzw. f^i's nennet man *Randoperatoren* bzw. *Korandoperatoren*.)

Ein *Morphismus* $\Phi_\bullet : \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet$ von Kettenkomplexen (bzw. ein *Morphismus* $\Phi^\bullet : \mathcal{M}^\bullet \longrightarrow \mathcal{M}'^\bullet$ von Kokettenkomplexen) besteht aus einer Familie von R-Modulhomomorphismen $\Phi_i : M_i \longrightarrow M'_i$ (bzw. $\Phi^i : M^i \longrightarrow M'^i$), für welche gilt:

$$f'_i \circ \Phi_i = \Phi_{i-1} \circ f_i \qquad (\text{bzw. } \Phi^{i+1} \circ f^i = f'^i \circ \Phi^i).$$

Analog definiert man das Bild, den Kern, den Kokern von solchen Morphismen sowie exakte Sequenzen von Komplexen.

Definition 2.13 (Homologie bzw. Kohomologiemoduln) Ist $\mathcal{M}_\bullet$ ein Kettenkomplex (bzw. $\mathcal{M}^\bullet$ ein Kokettenkomplex) über R, so nennt man

$$\boxed{H_i(\mathcal{M}_\bullet) := H_i(\mathcal{M}_\bullet; R) := \text{Kern}(f_i) \ / \, \text{Bild}(f_{i+1})}$$

bzw.

$$\boxed{H^i(\mathcal{M}^\bullet) := H^i(\mathcal{M}^\bullet; R) := \mathrm{Kern}\left(f^i\right) \;/\, \mathrm{Bild}\left(f^{i-1}\right)}$$

den *i-ten Homologiemodul von $\mathcal{M}_\bullet$* bzw. den *i-ten Kohomologiemodul von $\mathcal{M}^\bullet$* (mit Koeffizienten aus R). Offensichtlich induzieren Morphismen $\Phi_\bullet : \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet$ von Kettenkomplexen (bzw. Morphismen $\Phi : \mathcal{M}^\bullet \longrightarrow \mathcal{M}'^\bullet$ von Kokettenkomplexen) R-Modulhomomorphismen

$$\Phi_{*,i} : H_i(\mathcal{M}_\bullet) \longrightarrow H_i(\mathcal{M}'_\bullet) \qquad \text{bzw.} \qquad \Phi^{*,i} : H^i(\mathcal{M}^\bullet) \longrightarrow H^i(\mathcal{M}'^\bullet)\,.$$

Theorem 2.14 (Lange Homologiesequenz) *Zu jedem $i \in \mathbb{Z}$ und zu jedem kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet \xrightarrow{\Phi_\bullet} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\Psi_\bullet} \mathcal{M}''_\bullet \longrightarrow 0$$

gibt es einen R-Homomorphismus (Verbindungshomomorphismus)

$$\partial_{*,i} : H_i(\mathcal{M}''_\bullet) \longrightarrow H_i(\mathcal{M}'_\bullet)\,,$$

so daß die folgende "lange" Sequenz

$$\boxed{\cdots \longrightarrow H_i(\mathcal{M}'_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{*,i}} H_i(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\Psi_{*,i}} H_i(\mathcal{M}''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{*,i}} H_{i-1}(\mathcal{M}'_\bullet) \longrightarrow \cdots} \tag{2.2}$$

exakt ist.

Beweis. Seien $\mathcal{M}_\bullet = \{M_i, f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathcal{M}'_\bullet = \{M'_i, f'_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{M}''_\bullet = \{M''_i, f''_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ die gegebenen Kettenkomplexe. Man kann die obige kurze exakte Sequenz folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Kern}(f'_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Kern}(f_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Kern}(f''_\bullet) & & \\
 & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_\bullet & \xrightarrow{\Phi_\bullet} & \mathcal{M}_\bullet & \xrightarrow{\Psi_\bullet} & \mathcal{M}''_\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow_{f'_\bullet} & & \downarrow_{f_\bullet} & & \downarrow_{f''_\bullet} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_\bullet & \xrightarrow{\Phi_\bullet} & \mathcal{M}_\bullet & \xrightarrow{\Psi_\bullet} & \mathcal{M}''_\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Kokern}(f'_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Kokern}(f_\bullet) & \longrightarrow & \mathrm{Kokern}(f''_\bullet) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Nach der Definition von $\Phi_\bullet$, $\Psi_\bullet$, und dem Schlangenlemma 2.11 ist dieses Diagramm kommutativ und hat exakte Zeilen und Spalten. Die Abbildungen f_i (und genauso die f'_i's und f''_i's) induzieren Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & M_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & M_i & & \xrightarrow{f_i} & & M_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} \; \cdots \\
 & & & \downarrow_{\mathrm{Proj.}} & & & & \cup & \\
0 \longrightarrow & H_i(\mathcal{M}_\bullet) & \longrightarrow & M_i/\,\mathrm{Bild}(f_{i+1}) & \twoheadrightarrow & M_i/\,\mathrm{Kern}(f_i) \cong \mathrm{Bild}(f_i) & \hookrightarrow & \mathrm{Kern}(f_{i-1}) &
\end{array}$$

weil $\mathrm{Bild}(f_{i+1}) \subset \mathrm{Kern}(f_i)$ und $\mathrm{Bild}(f_i) \subset \mathrm{Kern}(f_{i-1})$. Daraus ergibt sich das kommmutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& H_i(\mathcal{M}'_\bullet) \arrow[r, "\Phi_{*,i}"] \arrow[d] & H_i(\mathcal{M}_\bullet) \arrow[r, "\Psi_{*,i}"] \arrow[d] & H_i(\mathcal{M}''_\bullet) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\partial_{*,i}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Kokern}\left(f'_{i+1}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Kokern}\left(f_{i+1}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Kokern}\left(f''_{i+1}\right) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Kern}\left(f'_{i-1}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Proj.}"] & \mathrm{Kern}\left(f_{i-1}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Proj.}"] & \mathrm{Kern}\left(f''_{i-1}\right) \arrow[d, "\mathrm{Proj.}"] & \\
& H_{i-1}(\mathcal{M}'_\bullet) \arrow[r, "\Phi_{*,i-1}"] \arrow[d] & H_{i-1}(\mathcal{M}_\bullet) \arrow[r, "\Psi_{*,i-1}"] \arrow[d] & H_{i-1}(\mathcal{M}''_\bullet) \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

mit exakten Zeilen und Spalten. $\partial_{*,i}$ wird durch die erneute Anwendung des Schlangenlemmas 2.11 gewonnen. $\square$

Analog kann man folgendes nachweisen.

Theorem 2.15 (Lange Kohomologiesequenz) *Zu jedem $i \in \mathbb{Z}$ und zu jedem kurzen exakten Sequenz von Kokettenkomplexen*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'^\bullet \xrightarrow{\Phi^\bullet} \mathcal{M}^\bullet \xrightarrow{\Psi^\bullet} \mathcal{M}''^\bullet \longrightarrow 0$$

gibt es einen R-Homomorphismus (Verbindungshomomorphismus)

$$\partial^{*,i} : H^i\left(\mathcal{M}''_\bullet\right) \longrightarrow H^i\left(\mathcal{M}'_\bullet\right),$$

so daß die folgende "lange" Sequenz

$$\boxed{\cdots \longrightarrow H^i\left(\mathcal{M}'^\bullet\right) \xrightarrow{\Phi^{*,i}} H^i\left(\mathcal{M}^\bullet\right) \xrightarrow{\Psi^{*,i}} H^i\left(\mathcal{M}''^\bullet\right) \xrightarrow{\partial^{*,i}} H^{i+1}\left(\mathcal{M}'_\bullet\right) \longrightarrow \cdots} \tag{2.3}$$

exakt ist.

Bemerkung. Von einem Kettenkomplex $\mathcal{M}_\bullet = \{M_i, f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ ausgehend kann man direkt einen natürlichen Kokettenkomplex $\mathcal{Q}^\bullet$ folgendermaßen konstruieren:

$$\mathcal{Q}^\bullet = \left\{\Xi^i, \theta^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}}, \text{ wobei } \Xi^i := \mathrm{Hom}_R\left(M_i, R\right), \quad \theta^i := \left(f_i\right)^* : \Xi^i \longrightarrow \Xi^{i+1}, \text{ (vgl. 2.2).}$$

(Aus Verträglichkeitsgründen benutzt man manchmal $(-1)^i\,\theta^i$ statt θ^i).

3 Die singulären (Ko-) Homologiemoduln

• Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit $a, b \in A$ auch die Strecke $\{(1-t)\,a + tb \mid t \in [0,1]\}$ in A enthalten ist. Die *konvexe Hülle* $\mathrm{conv}(B)$ einer Teilmenge B des $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die B enthält.

- Das *Standard-q-Simplex* Δ_q, $q \geq 0$, ist die Teilmenge des $\mathbb{R}^{q+1}$

$$\Delta_q := \left\{ (t_0, t_1, \ldots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; t_0, t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } \sum_{i=0}^{q} t_i = 1 \right\}.$$

Es gilt: $\Delta_q = \operatorname{conv}(\{e_0, e_1, \ldots, e_q\})$, wobei $e_0 = (1, 0, \ldots, 0), e_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_q = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Die Punkte $e_0, e_1, \ldots, e_q$ sind die *Ecken* von Δ_q. Für $i \in \{0, 1, \ldots, q\}$ heißt

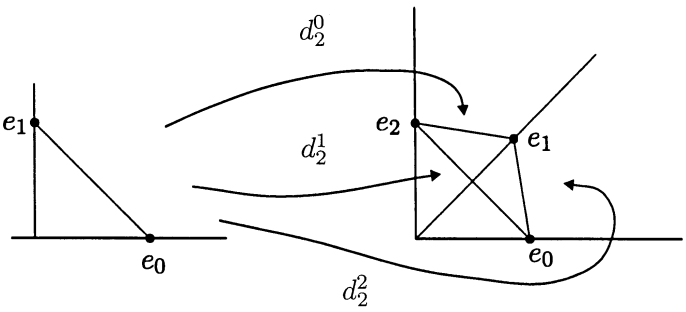
$$\Delta_q^i := \{(t_0, t_1, \ldots, t_q) \in \Delta_q \;|\; t_i = 0\} = \operatorname{conv}(\{e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_q\}) \subset \Delta_q$$

die i-te *Facette* oder *Seite* von Δ_q. (Δ_q^i liegt der Ecke e_i gegenüber). Für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, q\}$, $q \geq 1$, wird eine *Seitenabbildung* definiert:

$$d_q^i : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q, \qquad d_q^i\left((t_0, t_1, \ldots, t_{q-1})\right) := (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{q-1})$$

(Dies ist so zu verstehen, daß im Falle $q = 1$ gelten soll: $d_1^0(t_0) = (0, t_0), d_1^1(t_0) = (t_0, 0)$). Δ_q^i ist selbst ein $(q-1)$-Simplex. d_q^i ist also eine Abbildung, durch die man Δ_{q-1} *bijektiv* auf $\Delta_q^i \subset \Delta_q$ abbilden kann. Außerdem ist d_q^i die Beschränkung der linearen Abbildung $\mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$ auf Δ_{q-1}, die bestimmt ist durch die folgende Zuordnung derkanonischen Basisvektoren:

$$d_q^i := \begin{cases} e_j, & \text{für } j < i, \\ e_{j+1}, & \text{für } j \geq i. \end{cases}$$



Lemma 3.1 *Für alle $i, j \in \{0, 1, \ldots, q\}$ mit $j < i$ ist*

$$\boxed{d_q^i \circ d_{q-1}^j = d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}}$$

Beweis. Es genügt, diese Gleichheit auf den Basisvektoren $e_0, e_1, \ldots, e_{q-2}$ nachzurechnen, da die Abbildungen Einschränkungen linearer Abbildungen sind.

(i) Für $\nu < j$ ist $d_q^i \circ d_{q-1}^j(e_\nu) = d_q^i(e_\nu) = e_\nu$, und wegen $i - 1 \geq j$ ist auch $d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}(e_\nu) = d_q^j(e_\nu) = e_\nu$.

(ii) Für $j \leq \nu \leq i-2$ ist $d_q^i \circ d_{q-1}^j(e_\nu) = d_q^i(e_{\nu+1}) = e_{\nu+1}$, und wegen $i - 1 > \nu$ ist auch $d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}(e_\nu) = d_q^j(e_\nu) = e_{\nu+1}$.

(iii) Für $\nu > i - 2$ ist $\nu \geq i - 1 \geq j$ und daher $d_q^i \circ d_{q-1}^j(e_\nu) = d_q^i(e_{\nu+1}) = e_{\nu+2}$ und $d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}(e_\nu) = d_q^j(e_{\nu+1}) = e_{\nu+2}$. □

Definition 3.2 ("Singuläre" Simplizes) Sei X ein topologischer Raum. Für alle $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist ein *singuläres q-Simplex in X* eine stetige Abbildung $\sigma = \sigma_q : \Delta_q \longrightarrow X$. ("Singulär" in dem Sinne, daß ein solches σ keine Einbettung sein muß, wenn z.B. X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist). Definiere

$$S_q(X) := \operatorname{FA}(\{\sigma \;|\; \sigma : \Delta_q \longrightarrow X\})$$

die freie abelsche Gruppe ($\mathbb{Z}$-Modul), die von allen singulären Simplizes in X erzeugt wird. Weiterhin definiere den Operator

$$\boxed{\partial = \partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X), \qquad \partial\sigma := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \left(\sigma \circ d_q^i\right)}$$

falls $q \geq 1$, und setze $\partial_q = 0$ für $q \leq 0$. (Es genügt ihn nur für die Erzeugenden von $S_q(X)$ zu definieren).

Proposition 3.3 (Singulärer Kettenkomplex von X) *Das System $S_\bullet(X) := \left(S_q(X), \{\partial_q\}_{q\in\mathbb{Z}}\right)$ bildet einen Kettenkomplex über $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Ist $q \leq 0$, so ist die Aussage trivial. Es sei also $q \geq 1$. Dann genügt es, die Behauptung auf den Erzeugenden nachzurechnen. Es sei also $\sigma = \sigma_{q+1}$ ein singuläres $(q+1)$-Simplex in X. Dann ist

$$\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) = \partial_q\left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \left(\sigma \circ d_{q+1}^i\right)\right) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \left(\sigma \circ d_{q+1}^i\right)\right) \circ d_q^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{j+i} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right) = \sum_{i=0}^{q+1} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right) =$$

$$= \sum_{0\leq j<i\leq q+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right) + \sum_{0\leq i\leq j\leq q} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right) =$$

$$= \sum_{0\leq j<i\leq q+1} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^j \circ d_q^{i-1}\right) + \sum_{0\leq i\leq j\leq q} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right) =$$

$$= -\left[\sum_{0\leq i\leq j\leq q} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right)\right] + \sum_{0\leq i\leq j\leq q} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j\right) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. (Beim Übergang vom drittletzten zum voletzten Ausdruck in dieser Reihe von Gleichungen wurde in der ersten Summe j in i und $i-1$ durch j ersetzt). $\square$

Definition 3.4 (Singuläre Homologiemoduln von X) $\boxed{H_q^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) := H_q(S_\bullet(X);\mathbb{Z})}$ heißt die *q-te singuläre Homologiegruppe* oder *der q-te singuläre Homologie-$\mathbb{Z}$-Modul* von X.

Beispiele. Falls $X=\{x\}$ ein einpunktiger Raum ist, hat man $H_0^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) = 0$ für $q \neq 0$. Ist X ein wegweise zusammenhängender Raum, so gilt $H_0^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Im allgemeinen, wenn $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ die Familie der Wegzusammenhangskomponenten von X ist, dann gilt

$$H_0^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} \mathbb{Z}\,.$$

Beispiele. In der folgenden Liste tragen wir die nicht-trivialen singulären Homologiegruppen weiterer Beispiele ein. Beweise findet man in den Büchern der algebraischen Topologie.

Nr.	Raum X	Nicht triviale Homologiegruppen $H_q^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})\,,\ q \geq 1$
1.	$\mathbb{R}^n$	$\left(H_\bullet^{\text{sing}} = 0\right)$
2.	$\mathbb{B}^n$	$\left(H_\bullet^{\text{sing}} = 0\right)$
3.	$\mathbb{S}^n$	$H_n^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z}$
4.	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{2n}$	$H_{2n}^{\text{sing}} = 0,\ H_{2k+1}^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z}_2,\ 0 \leq k \leq n-1$
5.	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{2n+1}$	$H_{2k+1}^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z}_2,\ 0 \leq k \leq n-1$
6.	$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n}$	$H_{2k}^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq n$
7.	$\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^{n}$ ($\mathbb{H} \rightsquigarrow$ Quaternionen)	$H_{4k}^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq n$
8.	Kleinsche Flasche	$H_1^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2,\ H_2^{\text{sing}} = 0$
9.	Orientierbare g-Flächen	$H_1^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z}^{2g},\ \ H_2^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z}$
10.	Nicht or. g-Flächen	$H_1^{\text{sing}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2,\ \ H_2^{\text{sing}} = 0$

Bemerkungen. (i) In der algebraischen Topologie definiert man zu jedem topologischen Raum X, der *triangulierbar* ist, d.h. der zu dem zugrundeliegenden Raum eines *Simplizialkomplexes* homöomorph ist, die sogenannten *simplizialen Homologiegruppen* $H_q^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z})$. Man zeigt dann, daß für triangulierbare topologische Räume gilt $H_q^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z}) \cong H_q^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$, für alle $q \in \mathbb{Z}$. Siehe z.B. R.Stöcker, H.Zieschang: *Algebraische Topologie*, Teubner, 2te Aufl. 1994, §9.7., S. 241-245.

(ii) Ist X triangulierbar, so ist $\text{Rang}\left(H_q^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})\right) =: b_q(X)$ eine nicht negative ganze Zahl. Sie heißt insbesondere die *q-te Betti-Zahl* von X. Die alternierende Summe $\chi(X) := \sum_{q \geq 0} (-1)^q\, b_q(X)$ ist die sog. *Euler-Poincaré Charakteristik* von X.

(iii) Ist $A \subset X$ ein topologischer Teilraum von X, so lassen sich die sog. *relativen Homologiegruppen* von X bezüglich A durch

$$H_q^{\text{sing}}(X, A;\mathbb{Z}) := H_q\left(S_\bullet(X)/S_\bullet(A);\mathbb{Z}\right)$$

definieren. Zu jedem Raumpaar $A \hookrightarrow X = (X, \varnothing) \overset{\text{kanon.}}{\longrightarrow} (X, A)$ existiert nach (2.2) eine lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q^{\text{sing}}(A;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_q^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_q^{\text{sing}}(X, A;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{q-1}^{\text{sing}}(A;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

(iv) Sei $\pi_1(X, x_0)$ die *Fundamentalgruppe* eines wegweise zusammenhängenden topologischen Raumes X. Dann gilt

$$H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, x_0)\ /\ [\pi_1(X, x_0)\,,\ \pi_1(X, x_0)]\,,$$

wobei wir mit $[.,.]$ den Kommutator zweier Gruppen bezeichnen. In dem Seminar wurde schon angedeutet, daß wenn X eine orientierbare Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ ist, dann ist

$$\pi_1(X) \cong \left\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \ \middle|\ \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$$

$\left([a_i, b_i] := a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}\right)$, wobei diese $2g$ Gruppenerzeugenden durch die entsprechenden zu X assoziierten "Polygone" beschrieben werden können.

Definition 3.5 (Singuläre Homologiemoduln von X über R) Die Homologiemoduln von X *über* R werden durch

$$\boxed{H_q^{\text{sing}}(X;R) := H_q\left(S_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R;R\right)}$$

definiert.

Definition 3.6 (Singuläre Kohomologiemoduln von X über R) Die Kohomologiemoduln von X *über* R werden durch

$$\boxed{H^q_{\text{sing}}(X;R) := H^q(S^\bullet(X;R)), \quad S^\bullet(X;R) := \operatorname{Hom}(S_\bullet(X)\otimes_{\mathbb{Z}} R, R)}$$

definiert. (Vgl. mit der Bemerkung am Ende des vorigen Abschnittes).

Definition 3.7 Definiere eine Abbildung

$$\text{“}\smile\text{”} : S^p(X;R)\times S^q(X;R) \longrightarrow S^{p+q}(X;R)$$

wie folgt: Jedem singulären $(p+q)$-Simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \longrightarrow X$ und Koketten c^p und c^q ordne

$$\boxed{c^p\smile c^q(\sigma) =: \langle c^p\smile c^q,\sigma\rangle = (-1)^{pq}\left\langle c^p, \sigma\circ d^{p+1}_{p+q}\circ d^{p+1}_{p+q-1}\circ\cdots\circ d^{p+1}_{p+1}\right\rangle\cdot\left\langle c^p,\sigma\circ d^{p-1}_{p+q}\circ d^{p-2}_{p+q-1}\circ\cdots\circ d^{0}_{q+1}\right\rangle}$$

zu. Dies ist das sog. *cup-Produkt.*

Proposition 3.8 *Das cup-Produkt hat folgende Eigenschaften*:

(i) Distributivität: $(a+a')\smile b = a\smile b + a'\smile b, \quad a\smile(b+b') = a\smile b + a\smile b'$,

(ii) Homogenität: $(ra)\smile b = r(a\smile b) = a\smile(rb)$,

(iii) $\pm$-Kommutativität: $a\smile b = (-1)^{pq}\, b\smile a$,

(iv) Neutrales Element: $\mathbf{1}_X\smile a = a\smile \mathbf{1}_X = a$.

(v) Korandformel: $\mathfrak{d}(c^p\smile c^q) = \mathfrak{d}c^p\smile c^q + (-1)^p\, c^p\smile(\mathfrak{d}c^q)$.

Proposition 3.9 (Kohomologiering von X) *Das cup-Produkt induziert die Struktur eines graduierten Ringes auf*

$$H^*_{\text{sing}}(X;R) = \oplus_{p\geq 0} H^q_{\text{sing}}(X;R)$$

durch: $(a_0+a_1+a_2+\cdots)(b_0+b_1+b_2+\cdots) = a_0\smile b_0 + (a_0\smile b_1 + a_1\smile b_0)+\cdots$

Theorem 3.10 (Künnethsches Theorem) *Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring.*
Zu den R-Kohomologiemoduln des Kreuzproduktes $X\times Y$ zweier Räume X und Y existiert eine kurze exakte Sequenz:

$$0\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X;R)\otimes_R H^q(Y;R)\longrightarrow H^n(X\times Y;R)\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1}\operatorname{Tor}(H^p(X;R),H^q(Y;R))\longrightarrow 0$$

Wenn insbesondere R ein Körper ist, erhält man einen Isomorphismus

$$H^n(X\times Y;R)\cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X;R)\otimes_R H^q(Y;R)$$

Proposition 3.11 *Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und sei X eine kompakte, zusammenhängende, R-orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen “Dualitätshomomorphismus”*

$$D_X : H^q(X;R)\longrightarrow H_{n-q}(X;R)$$

derart, daß

$$\langle b, D_X(a)\rangle = \langle a\smile b,[X]\rangle\in R,$$

wobei $[X]$ die entsprehende “Grundklasse” von X bzgl. der R-Orientierung bezeichnet.

Theorem 3.12 (Poincaré Dualitätssatz) *Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und sei X eine kompakte, zusammenhängende, R-orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist*

$$\boxed{D_X : H^q(X;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)}$$

ein Modulisomorphismus für alle q, $q \in \mathbb{Z}$.

Zum Beweis siehe z.B. M.J.Greenberg, J.R.Harper: *Algebraic Topology. A First Course*, Benjamin Pub. Co., (1981), Kapitel 26, S. 215-229. □

Corollary 3.13 *Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und sei X eine kompakte, zusammenhängende, R-orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gilt für die Betti-Zahlen $b_q(X) = \mathrm{Rang}_R(H_q(X;R))$ von X:*

$$\boxed{b_q(X) = b_{n-q}(X), \quad \forall q, \quad 0 \le q \le n}$$

Außerdem ist der Torsionsuntermodul von $H_q(X;R)$ isomorph zu dem Torsionsuntermodul des Moduls $H_{n-q-1}(X;R)$.

Corollary 3.14 (Perfekte Paarung) *Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring und sei X eine kompakte, zusammenhängende, R-orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die durch das cup-Produkt induzierte Paarung*

$$\boxed{I^q : H^q(X;R) \times H^{n-q}(X;R) \ni (a,b) \longmapsto \langle a \smile b, [X] \rangle = \langle b, D_X(a) \rangle \in R}$$

ist perfekt *in dem Sinne, daß wenn $I^q(a,b) = 0$ für alle $a \in H^q(X;R)$, dann ist b eine Torsionsklasse; und umgekehrt, wenn $I^q(a,b) = 0$ für alle $b \in H^{n-q}(X;R)$, dann ist a eine Torsionsklasse.*

4 Vektorbündel über differenzierbaren bzw. komplexen Mannigfaltigkeiten.

In diesem Abschnitt betrachten wir nur differenzierbare und komplexe Mannigfaltigkeiten X; die Definitionen sind wie üblich mit Hilfe von Karten, Übergangsfunktionen und maximalen Atlanten zu verstehen. Die Übergangsabbildungen sowie ihre Umkehrungen sind in dem ersten Fall C^∞-*differenzierbar*; in dem zweiten Fall *holomorph*. Zur Erinnerung: Ist $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ eine Abbildung von n komplexen Variablen

$$z_1 = x_1 + \sqrt{-1}\, y_1, \ldots, z_n = x_n + \sqrt{-1}\, y_n,$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

die üblichen Wirtinger-Operatoren mit

$$dz_j = dx_j + \sqrt{-1}\, dy_j, \quad d\overline{z}_j = dx_j - \sqrt{-1}\, dy$$

und

$$df = \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j}_{\partial f} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\, d\overline{z}_j}_{\overline{\partial} f},$$

so ist $f = u + \sqrt{-1}\,v$ *holomorph*, wenn eine (und somit alle) der folgenden äquivalenten Bedingunen erfüllt sind:

(i) Cauchy-Riemannsche Bedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial y_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial u}{\partial x_j} \ .$$

(ii) $\overline{\partial} f = 0$ auf ganz U.

(iii) f läßt sich als eine absolut konvergente Potenzreihe (bzgl. $z_1, \ldots, z_n$) in einer Umgebung jedes Punktes von U entwickeln.

Definition 4.1 (Vektorbündel) Sei X eine differenzierbare (bzw. komplexe) $\mathbb{K}$-Mannigfaltigkeit ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) der Dimension $n = \dim_{\mathbb{K}}(X)$. Das Paar $\left(E = \bigcup_{x \in X} E_x,\ \pi : E \longrightarrow X\right)$ heißt ein differenzierbares (bzw. komplexes) $\mathbb{K}$-*Vektorbündel* mit Rang r über X, wenn

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & X \\ \cup & & \cup \\ E_x = \pi^{-1}(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

eine C^∞-differenzierbare (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. holomorphe (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Abbildung ist, jedes $E_x = \pi^{-1}(x)$ mit der Struktur eines r-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes versehen ist, und zwar so, daß gilt:

Axiom der lokalen Trivialität: Es existiert eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X mit diffeomorphen (bzw. biholomorphen), fasertreuen und faserweise $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{K}^r \\ \downarrow & & \downarrow \text{Proj.} \\ U_i & = & U_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} E_x & \longmapsto & \pi(E_x) & \subset & \{x\} \times \mathbb{K}^r \\ \updownarrow \cong_{\text{VR}} & & & & \downarrow \text{Proj.} \\ \mathbb{K}^r & & = & & \mathbb{K}^r \end{array}$$

Durch

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r$$

wird eine nirgends verschwindende diffeomorphe (bzw. biholomorphe) Abbildung

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, t) := (x, g_{ij}(x) \cdot t)$$

definiert, wobei

$$U_i \cap U_j \ni x \longmapsto g_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|_{\{x\} \times \mathbb{K}^r} \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{r^2}. \tag{4.1}$$

(Wenn man die vorgegebene extra Struktur vergißt von den φ_i's nur Homöomorphismen zu sein verlangt, dann spricht man von einem *topologischen* Bündel über X). Die Übergangsfunktionen erfüllen die "Kozykelbedingungen":

$$g_{ii} = \mathrm{Id}, \qquad g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki} = \mathrm{Id} \ . \tag{4.2}$$

Sind umgekehrt nur X und Funktionen (4.1) vorgegeben, die den Bedingungen (4.2) genügen, so läßt sich $\pi : E \longrightarrow X$ durch das Verkleben

$$E = \left(\dot{\bigcup_{i \in I}} U_i \times \mathbb{K}^r \right) \Big/ \sim, \quad \text{mit} \quad (x, t) \sim (x', t') \Longleftrightarrow [x' = x \ \text{ und } t' = g_{ij}(x) \cdot t]$$

zurückgewinnen.

Definition 4.2 (Teilbündel) Ist $\left(E = \bigcup_{x\in X} E_x,\ \pi : E \longrightarrow X\right)$ ein r-Bündel und E' eine derartige Teilmenge von E, daß $(E',\ \pi|_{E'} : E' \longrightarrow X)$ in kanonischer Weise ein k-Bündel ist, $k \le r$, so nennt man es ein *k-Teilündel* des ursprünglichen.

Beispiele. (i) Ist (E, g_{ij}) ein Bündel, so heißt $\left(E^\vee, \left(g_{ij}^{-1}\right)^\intercal\right)$ sein *duales Bündel.*

(ii) Sind $(E, g_{ij}), (F, h_{ij})$ zwei vorgegebene Bündel über X, so kann man kanonisch neue Bündel konstruieren, wie z.B.

die *direkte Summe* $\left(E \oplus F, \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}\right)$, das *Tensorprodukt* $\left(E \otimes_{\mathbb{K}} F,\ \underbrace{(g_{ij}) \otimes_{\mathbb{K}} (h_{ij})}_{\text{Kronecker-Produkt}}\right)$,

das *Quotientenbündel* E/F (falls F ein Teilbündel von E ist), das *Hom-Bündel* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F)$, das Bündel der *p-fachen äußeren Potenzen* $\bigwedge^p E$ von E, $0 \le p \le \mathrm{Rang}(E)$, u.a.

(iii) Die m-getwisteten Bündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, über $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$: Sind $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ die homogenen Koordinaten von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, so sind $\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(m), g_{ij}\right)$ holomorphe *Linienbündel* (d.h., vom Rang 1), mit $g_{ij}(\mathbf{z}) := \left(\frac{z_i}{z_j}\right)^m$ auf $U_i \cap U_j$, wobei $U_i := \{\mathbf{z} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : z_i \neq 0\}$, $0 \le i \le n$.

(iv) Das *Tangentialbündel* einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X

$$T_X = \bigcup_{x\in X} T_{X,x} \longrightarrow X, \quad \text{wobei} \quad T_{X,x} \cong \mathbb{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}.$$

(v) Das *reelle Tangentialbündel* einer komplexen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X

$$T_X^{(\mathbb{R})} = \bigcup_{z\in X} T_{X,z}^{(\mathbb{R})} \longrightarrow X, \quad \text{wobei} \quad T_{X,z} \cong \mathbb{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$$

und seine *Komplexifizierung*

$$T_X^{(\mathbb{C})} = T_X^{(\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigcup_{z\in X} T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \longrightarrow X,$$

wobei bzgl. eines lokalen Koordinatensystems $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + \sqrt{-1}\, y_j$, $\forall j$, $1 \le j \le n$,

$$T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\} \cong \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right\}.$$

Spaltung:

$$T_X^{(\mathbb{C})} = T_X'^{(\mathbb{C})} \oplus T_X''^{(\mathbb{C})}, \quad \underbrace{T_{X,z}'^{(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}}_{\text{holomorpher Anteil}}, \quad \underbrace{T_{X,z}''^{(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right\}}_{\text{anti-holomorpher Anteil}}.$$

(vi) Das *Kotangentialbündel* $T_X^\vee$ einer differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X.

(vii) Das *komplexe Kotangentialbündel* $\left(T_X^{(\mathbb{C})}\right)^\vee$ einer komplexen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X mit der Spaltung:

$$\left(T_X^{(\mathbb{C})}\right)^\vee = \left(T_X'^{(\mathbb{C})}\right)^\vee \oplus \left(T_X''^{(\mathbb{C})}\right)^\vee.$$

(viii) Das *Normalbündel* $\mathcal{N}_{Y/X}$ einer Untermanigfaltigkeit Y einer differenzierbaren Mannigfaltigjkeit X ist definiert als das Quotientenbündel

$$\mathcal{N}_{Y/X} := (T_X|_Y) \ / \ T_Y.$$

In dem Fall der komplexen Untermannigfaltigkeiten Y einer komplexen Mannigfaltigkeit X definiert man

$$\mathcal{N}_{Y/X} := \left(T_X'^{(\mathbb{C})}|_Y\right) \ / \ T_Y'^{(\mathbb{C})} \ .$$

Bemerkungen. (i) Ein *Vektorbündelhomomorphismus* $f : (E, \pi : E \longrightarrow X) \longrightarrow (E', \pi' : E' \longrightarrow X)$ zwischen zwei Vektorraumbündeln über einer differenzierbaren bzw. komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine C^∞-differenzierbare bzw. holomorphe Abbildung $f : E \longrightarrow E'$, so daß $\pi = \pi' \circ f$ fasertreu und $f|_{E_x}$ ist $\mathbb{K}$-linear ist. (f ist *Isomorphismus* falls f diffeomorph bzw. biholomorph ist). Der *Kern* $\mathrm{Kern}(f) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Kern}(f|_{E_x})$ bzw. das *Bild* $\mathrm{Bild}(f) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Bild}(f|_{E_x})$eines Vektorbündelhomomorphismus f sind wieder Vektorraumbündel.

(ii) Eine Sequenz $E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E''$ von Vektorbündelhomomorphismus heißt *exakt*, wenn $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(f)$.

5 Grundbegriffe aus der Garbentheorie

Definition 5.1 (Prägarben) Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{T}$ das System seiner offenen Mengen. Unter einer *Prägarbe* $\mathfrak{F}$ von abelschen Gruppen über X versteht man eine Vorschrift

$$\mathfrak{T} \ni U \mapsto \mathfrak{F}(U)$$

welche jedem U eine abelsche Gruppe und welche jedem Paar ($U, V \in \mathfrak{T}$, $V \subset U$) einen Gruppenhomomorphismus ("Beschränkungshomomorphismus")

$$\varrho_V^U : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V)$$

zuordnet, so daß folgende Axiome gelten:

(i) $\mathfrak{F}(\varnothing) = \{0\}$,

(ii) $\varrho_U^U = \mathrm{Id}_{\mathfrak{F}(U)}, \ \forall U, \ U \in \mathfrak{T}$.

(iii) $\varrho_W^V \circ \varrho_V^U = \varrho_W^U, \ \ \forall U, V, W \in \mathfrak{T} \quad \text{mit} \quad W \subset V \subset U.$

Die Elemente f von $\mathfrak{F}(U)$ nennet man insbesondere *Schnitte* von $\mathfrak{F}$ über U und $\varrho_V^U(f)$ die *Einschränkung des Schnittes* f auf $V \subset U$.

Bemerkungen. (i) Ist $\mathfrak{F}(U)$ jeweils ein Ring (oder eine $\mathbb{C}$-Algebra), so sind ϱ_V^U's jeweils Homomorphismen von Ringen (bzw. von $\mathbb{C}$-Algebren) und sind die Axiome (i)-(iii) erfüllt. (Hierbei wird $\{0\}$ ausnahmsweise als Ring betrachtet).

(ii) Sei $\mathcal{R}$ eine Prägarbe von Ringen über X. Ist $\mathfrak{F}(U)$ ein $\mathcal{R}(U)$-Modul und $\varrho_V^U : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V)$ jeweils ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(U)$-Moduln, so nennt man die $U \mapsto \mathfrak{F}(U)$ definierten Zuordnung eine Prägarbe von $\mathcal{R}$-Moduln.

Definition 5.2 ("Halme" und "Keime") Seien $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe über X, $x \in X$, und

$$\mathfrak{T}_x := \{U \in \mathfrak{T} \mid x \in U\} \ .$$

Offensichtlich ist $\left\{\mathfrak{F}(U), \varrho_V^U\right\}_{U \in \mathfrak{T}_x}$ ein direktes System in dem Sinne von 1.9 und zwar definiert über der gerichteten Menge $A := \mathfrak{T}_x$, wobei "$\leq$":= $\supset$ die gewöhnliche mengentheoretische Inklusionsrelation ist (aber andersrum!). Der zugehörige direkte Limes (1.1)

$$\boxed{\mathfrak{F}_x := \varinjlim_{U \in \mathfrak{T}_x} \mathfrak{F}(U)}$$

heißt der *Halm* von $\mathfrak{F}$ im Punkt x. Für $U \in \mathfrak{T}_x$ sei nun

$$\varrho_x := \varrho_U : \mathfrak{F}(U) \ni f \longmapsto \varrho_x(f) = [f] \in \mathfrak{F}_x$$

die kanonisch induzierte Abbildung (1.2). $\varrho_x(f)$ wird der *Keim* von f in x genannt.

Definition 5.3 (Der einer Prägarbe zugeordnete Überlagerungsraum) Sei $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe über einem topologischen Raum X. Definiere

$$|\mathfrak{F}| := \dot{\bigcup_{x\in X}} \mathfrak{F}_x \quad \text{und die Abbildung} \quad p : |\mathfrak{F}| \supset \mathfrak{F}_x \ni \varphi \longmapsto x \in X \ .$$

Proposition 5.4 *Für jedes $U \in \mathfrak{T}$ und $f \in \mathfrak{F}(U)$ definiere $[U, f] := \{\varrho_x(f) : x \in U\} \subset |\mathfrak{F}|$. Dann bildet*

$$\{[U, f] : U \in \mathfrak{T}\} \subset |\mathfrak{F}|$$

die Basis einer Topologie auf $|\mathfrak{F}|$ und $p : |\mathfrak{F}| \longrightarrow X$ ist lokal topologisch, d.h. eine unverzweigte Überlagerung. Ist weiterhin X ein lokal zusammenhängender Hausdorffraum und $\mathfrak{F}$ derart, daß

$$(\forall Y \ \text{ Gebiet } \subset X \quad \text{und} \quad f, g \in \mathfrak{F}(Y) : (\varrho_x(f) = \varrho_x(g) \quad \text{für ein} \quad x \in X \Longrightarrow f = g))\,,$$

so ist $|\mathfrak{F}|$ mit der obigen Topologie Hausdorffsch.

Beweis. Siehe z.B. O.Forster: *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, (1977), 6.8-6.10, S. 39-40. □

Definition 5.5 (Prägarbe der Schnitten von Keimen) Sei $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe über einem topologischen Raum $(X, \mathfrak{T})$ und $U \in \mathfrak{T}$. Unter einem *Schnitt von Keimen von $\mathfrak{F}$ über U* versteht man eine Abbildung

$$\gamma : U \longrightarrow |\mathfrak{F}|$$

derart, daß $\gamma(x) \in \mathfrak{F}_x$, $\forall x$, $x \in U$, und daß zu jedem Punkt $x \in U$ ein $V \subset U$, $V \in \mathfrak{T}_x$, und einen Schnitt $g \in \mathfrak{F}(V)$ gibt mit der Eigenschaft: $\gamma(y) = \varrho_y(g)$, $\forall y$, $y \in V$. Bezeichnung:

$$\boxed{\Gamma(U, \mathfrak{F}) := \{\gamma : U \longrightarrow |\mathfrak{F}| \ \mid \ \gamma \text{ Schnitte von Keimen von } \mathfrak{F} \text{ über } U\}}$$

Durch die Zuordnung

$$\mathfrak{T} \ni U \longmapsto \Gamma(U, \mathfrak{F})\,,$$

und durch die Abbildungen

$$r_V^U : \Gamma(U, \mathfrak{F}) \ni \gamma \longmapsto \gamma|_V \in \Gamma(V, \mathfrak{F})$$

definiert man eine neue Prägarbe

$$\boxed{\Gamma_{\mathfrak{F}} := \left\{\Gamma(U, \mathfrak{F}), r_V^U\right\}}$$

(von abelschen Gruppen, Moduln usw. je nachdem, was $\mathfrak{F}(U)$'s für eine Struktur haben). Außerdem gibt es für jedes $U \in \mathfrak{T}$ einen kanonischen Homomorphismus $\boldsymbol{\varepsilon}_U : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{F})$,

$$\boxed{\mathfrak{F}(U) \ni f \longmapsto \boldsymbol{\varepsilon}_U(f)(x) := \varrho_x(f) \in \Gamma(U, \mathfrak{F})} \tag{5.1}$$

Definition 5.6 (Garben) Eine Prägarbe $\mathfrak{F}$ über X nennen wir eine *Garbe*, wenn sie zusätzlich die sogenannten "Verklebungseigenschaften" hat, d.h., wenn für jede $U \in \mathfrak{T}$ und jede Familie $(U_i)_{i\in I} \subset U$ von offenen Teilmengen von U mit $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ folgende Bedingungen ("Garbenaxiome") erfüllt sind:

(i) Sind $f, g \in \mathfrak{F}(U)$ Elemente mit $\varrho_{U_i}^U(f) = \varrho_{U_j}^U(g)$, für alle $i \in I$, so gilt $f = g$.

(ii) Seien $f_i \in \mathfrak{F}(U_i)$, $i \in I$, vorgegebene Elemente mit

$$\boxed{\varrho_{U_i\cap U_j}^{U_i}(f_i) = \varrho_{U_i\cap U_j}^{U_j}(f_j)\,, \ \text{für alle } i, j \in I.} \tag{5.2}$$

Dann existiert ein $f \in \mathfrak{F}(U)$, für welches gilt:

$$\boxed{\varrho^U_{U_i}(f) = f_i, \quad \text{für alle } i \in I.} \tag{5.3}$$

(Dieses f ist zwar eindeutig bestimmt wegen (i)).

Proposition 5.7 *Sei* $\mathfrak{F}$ *eine Prägarbe über einem topologischen Raum* $(X, \mathfrak{T})$.

(i) $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ *ist eine Garbe.* (*Man sagt* $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ *sei* ***die zur*** $\mathfrak{F}$ ***assoziierten Garbe***).

(ii) $\mathfrak{F}$ *selbst ist genau dann eine Garbe über* X*, wenn für alle* $U \in \mathfrak{T}$ *, die Homomorphismen*

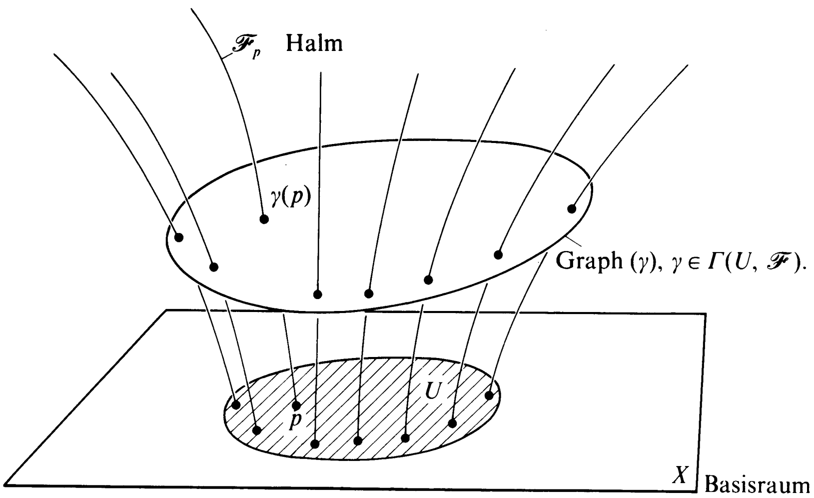
$$\boldsymbol{\varepsilon}_U : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{F})$$

(*definiert durch* (5.1)) *Isomorphismen sind, d.h., genau dann, wenn*

$$\boxed{\mathfrak{F} = \Gamma_{\mathfrak{F}}}$$

(Die Injektivität von $\boldsymbol{\varepsilon}_U$'s ist eigentlich äquivalent zur Bedingung (5.2); die Surjektivität zu (5.3)).

Beweis. Siehe z.B. M.Broadmann: *Algebraische Geometrie*, Birkhäuser, (1989), S. 360-361. □



Definition 5.8 Seien $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ zwei Garben über $(X, \mathfrak{T})$. Ein *Garbenhomomorphismus* $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}'$ ist eine Familie von Homomorphismen $\{f_U : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}'(U)\}_{U \in \mathfrak{T}}$, die mit den Beschränkungshomomorphismen verträglich sind, d.h. für jedes Paar offener Mengen U, V von X mit $V \subset U$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathfrak{F}'(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathfrak{F}'(V) \end{array}$$

kommutativ. Ist $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}'$ ein Garbenhomomorphismus, so ist

$$\mathfrak{T} \ni U \longmapsto \text{Kern}\left(\mathfrak{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathfrak{F}'(U)\right)$$

eine Garbe, der *Kern* von f. Ein Garbenhomomorphismus $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}'$ induziert für jedes $x \in X$ Homomorphismen der Halme $f_x : \mathfrak{F}_x \longrightarrow \mathfrak{F}'_x$. Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$\cdots \longrightarrow \mathfrak{F}_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \mathfrak{F}_i \xrightarrow{f_i} \mathfrak{F}_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

heißt *exakt*, wenn für jedes $x \in X$

$$\cdots \longrightarrow (\mathfrak{F}_{i-1})_x \xrightarrow{(f_{i-1})_x} (\mathfrak{F}_i)_x \xrightarrow{(f_i)_x} (\mathfrak{F}_{i+1})_x \xrightarrow{(f_{i+1})_x} \cdots$$

exakt ist, d.h. $\mathrm{Bild}(f_i)_x = \mathrm{Kern}(f_{i+1})_x$ für alle i.

Definition 5.9 (Lokal freie Garben) Sei $\mathcal{R}$ eine Garbe von (kommutativen) Ringen und $\mathfrak{F}$ eine Garbe von $\mathcal{R}$-Moduln über X. $\mathfrak{F}$ heißt *frei*, wenn

$$\mathfrak{F} \cong \underbrace{\mathcal{R} \oplus \mathcal{R} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}}_{p\text{-mal}} =: \mathcal{R}^p$$

für ein $p \geq 0$. (Für $p = 0$ soll $\mathfrak{F}$ trivial sein). $\mathfrak{F}$ heißt *lokal frei*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine derartige Umgebung besitzt, daß $\mathfrak{F}|_U$ frei ist.

Proposition 5.10 *Sei X eine zusammenhängende differenzierbare oder komplexe Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Isomorphieklassen von differenzierbaren} \\ \text{(bzw. holomorphen) Vektorbündeln über } X \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{Isomorphieklassen von lokal freien} \\ \text{Garben von } \mathcal{E} \text{ - (bzw. } \mathcal{O}\text{-) Moduln über } X \end{array} \right\}$$

Beweis. Zuerst ordnet man jedem differenzierbaren (bzw. holomorphen) Bündel $\pi : E \longrightarrow X$ über X die Garbe

$$U \longmapsto \mathcal{E}_X(E)(U) := \{\text{diffenzierbare Abbildungen } \gamma : U \longrightarrow E \text{ mit } \pi \circ \gamma = \mathrm{Id}_U\}$$

bzw.

$$U \longmapsto \mathcal{O}_X(E)(U) := \{\text{holomorphe Abbildungen } \gamma : U \longrightarrow E \text{ mit } \pi \circ \gamma = \mathrm{Id}_U\}$$

(für alle offenen Teimengen U von X). Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung von U von x, so daß

$$E|_U \cong U \times \mathbb{K}^r \quad (r = \mathrm{Rang}(E)) \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_X(E)(U) \cong \mathcal{E}_X(U \times \mathbb{R}^r) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathcal{O}_X(E)(U) \cong \mathcal{O}_X(U \times \mathbb{C}^r) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

D.h.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_X(U \times \mathbb{R}^r) \cong (\mathcal{E}_X|_U)^r & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathcal{O}_X(U \times \mathbb{C}^r) \cong (\mathcal{O}_X|_U)^r & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{F}$ eine lokal freie (oBdA nicht triviale) Garbe, so kann man immer eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X ein $r > 0$ finden, so daß für alle $i \in I$, Isomorphismen

$$g_i : \mathfrak{F}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_X^p|_{U_i} \quad (\text{bzw. } \mathcal{O}_X^p|_{U_i}).$$

existieren. (r hängt nicht von i ab, denn X ist zusammenhängend). Definiere

$$g_{ij} := g_i \circ g_j^{-1} : \mathcal{E}_X^p\big|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_X^p\big|_{U_i \cap U_j} \quad (\text{bzw. } \mathcal{O}_X^p\big|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^p\big|_{U_i \cap U_j})$$

und ordne $\mathfrak{F}$ das differenzierbare (bzw. holomorphe) Bündel (E, g_{ij}) zu. $\square$

6 Garbenkohomologie

Ist $0 \longrightarrow \mathfrak{F}' \xrightarrow{f} \mathfrak{F} \xrightarrow{g} \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$ eine exakte kurze Sequenz von Garben über X, so ist

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathfrak{F}') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathfrak{F}'')$$

auf dem Nieveau von globalen Schnitten exakt, aber $\Gamma(g)$ im allgemeinen nicht surjektiv.

Definition 6.1 (Welke Garben) Eine Garbe$\mathfrak{F}$ über X heißt *welk*, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ der Beschränkungshomomorphismus $\Gamma(X, \mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{F})$ surjektiv ist

Lemma 6.2 *Ist* $0 \longrightarrow \mathfrak{F}' \xrightarrow{f} \mathfrak{F} \xrightarrow{g} \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$ *eine exakte kurze Sequenz von Garben über* X *und* $\mathfrak{F}$ *welk, so ist* $\Gamma(g)$ *surjektiv und deswegen ist die folgende Sequenz ebenfalls exakt*

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathfrak{F}') = \mathfrak{F}'(X) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(X) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathfrak{F}'') = \mathfrak{F}''(X) \longrightarrow 0$$

Definition 6.3 (Kanonische Welke Auflösung) Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe über einem topologischen Raum X. Man definiert eine welke Garbe $\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ durch

$$\left(U \longmapsto \mathfrak{C}(\mathfrak{F})(U) := \prod_{x \in U} \mathfrak{F}_x, \quad \text{gewöhliche Beschränkungshomomorphismen} \right).$$

(Mit anderen Worten: Man betrachtet alle nicht unbedingt stetigen Schnitte über allen U's!). Durch

$$\mathfrak{F}(U) \ni \gamma \longmapsto (\gamma_x)_{x \in U} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{F})(U)$$

wird ein Garbenmonomorphismus $\mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ induziert. Definiere

$$\mathfrak{C}^0(\mathfrak{F}) := \mathfrak{C}(\mathfrak{F}), \quad \mathfrak{G}^q(\mathfrak{F}) := \begin{cases} \mathfrak{C}^0(\mathfrak{F}) / \mathfrak{F} & q = 1 \\ \mathfrak{C}^{q-1}(\mathfrak{F}) / \mathfrak{G}^{q-1}(\mathfrak{F}) & q \geq 2 \end{cases}$$

und

$$\boxed{\mathfrak{C}^q(\mathfrak{F}) := \mathfrak{C}^0(\mathfrak{G}^q(\mathfrak{F})), \ \forall q, \quad q \geq 1}$$

Man erhält die folgenden kanonischen kurzen exakten Sequenzen:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}^0(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{G}^1(\mathfrak{F}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{G}^q(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{C}^q(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{G}^{q+1}(\mathfrak{F}) \longrightarrow 0 \ .$$

Setzt man sie zusammen, so erhält man die sog. *kanonische welke Auflösung von* $\mathfrak{F}$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{C}^0(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{C}^1(\mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{C}^{q-1}(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{C}^q(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathfrak{C}^{q+1}(\mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots \tag{6.1}$$

Definition 6.4 (Kohomologiegruppen) Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine Garbe über X. Die q-te *Kohomologiegruppe* (*bzw. der* q-ter *Kohomologiemodul*) *von* X *mit Koeffizienten in* $\mathfrak{F}$ wird definiert durch (6.1):

$$\boxed{H^q(X; \mathfrak{F}) := H^q(\mathfrak{C}^\bullet(\mathfrak{F}))}$$

7 Čechsche Kohomologiegruppen

Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdekung von X und $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen (oder von Moduln) über X. Für $q \geq 0$ definiere:

$$\begin{aligned}
C^0(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) &:= \prod_{i\in I} \mathfrak{F}(U_i)\\
C^0(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) &:= \prod_{i,j\in I, i<j} \mathfrak{F}(U_i \cap U_j)\\
&\vdots\\
C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) &:= \prod_{\substack{(i_0,i_1,\dots,i_q)\in I^{q+1}\\ i_0<i_1<\dots<i_q}} \mathfrak{F}\left(U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_q}\right).
\end{aligned}$$

Die Elemente von $C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ werden durch $f = \left(f_{i_0,i_1,\dots,i_q}\right)$, wobei $f_{i_0,i_1,\dots,i_q} \in \mathfrak{F}\left(U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_q}\right)$ mit $(i_0,i_1,\dots,i_q)\in I^{q+1}$, $i_0<i_1<\dots<i_q$, bezeichnet. Weiterhin definiere den Gruppenhomomorphismus (bzw. Modulhomomorphismus):

$$\delta^q_{\mathfrak{U}} : C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$$

$$\boxed{\left(\delta^q_{\mathfrak{U}} f\right)_{i_0,i_1,\dots,i_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \; \varrho^{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_{q+1}}}_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\dots\cap U_{i_{q+1}}} \left(f_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1}\dots,i_{q+1}}\right)}$$

für alle $f = \left(f_{i_0,i_1,\dots,i_q}\right) \in C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Proposition 7.1 *Die folgende Sequenz ist ein Kokettenkomplex:*

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta^0_{\mathfrak{U}}} C^1(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta^1_{\mathfrak{U}}} C^2(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta^2_{\mathfrak{U}}} C^3(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta^3_{\mathfrak{U}}} C^4(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta^4_{\mathfrak{U}}} \cdots \tag{7.1}$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für alle $q \geq 0$ gilt: $\delta^{q+1}_{\mathfrak{U}} \circ \delta^q_{\mathfrak{U}} = 0$. In der Tat,

$$\left(\delta^{q+1}_{\mathfrak{U}} \circ \delta^q_{\mathfrak{U}}\right)\left(f_{i_0,i_1,\dots,i_{q+2}}\right) = \sum_{\nu=0}^{q+2} (-1)^\nu \; \varrho^{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_{q+2}}}_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{l-1}}\cap U_{i_{l+1}}\dots\cap U_{i_{q+2}}} \left(\delta^q_{\mathfrak{U}}\left(f_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1}\dots,i_{q+2}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{q+2} (-1)^\nu \; \varrho^{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_{q+2}}}_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{l-1}}\cap U_{i_{l+1}}\dots\cap U_{i_{q+2}}} \left(\sum_{\substack{k=0\\k<\nu}}^{q+2} (-1)^k \; \varrho^{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{\nu-1}}\cap U_{i_{\nu+1}}\cap\dots\cap U_{i_{q+2}}}_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\cap\dots\cap U_{i_{\nu-1}}\cap U_{i_{\nu+1}}\dots\cap U_{i_{q+2}}} (\cdots \right.$$

$$\cdots\; f_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{\nu-1},i_{\nu+1}\dots,i_{q+2}}) +$$

$$\left. + \sum_{\substack{k=0\\k>\nu}}^{q+2} (-1)^{k-1} \; \varrho^{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{\nu-1}}\cap U_{i_{\nu+1}}\cap\dots\cap U_{i_{q+2}}}_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{\nu-1}}\cap U_{i_{\nu+1}}\cap\dots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\dots\cap U_{i_{q+2}}} \left(f_{i_0,\dots,i_{\nu-1},i_{\nu+1},\dots,i_{k-1},i_{k+1}\dots,i_{q+2}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k,\nu=0 \\ k<\nu}}^{q+2} (-1)^{k+\nu} \varrho^{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{q+2}}}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\cap\cdots\cap U_{i_{\nu-1}}\cap U_{i_{\nu+1}}\cdots\cap U_{i_{q+2}}} \left(f_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{\nu-1},i_{\nu+1}\ldots,i_{q+2}}\right) -$$

$$- \sum_{\substack{k,\nu=0 \\ k<\nu}}^{q+2} (-1)^{k+\nu} \varrho^{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{q+2}}}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\cap\cdots\cap U_{i_{\nu-1}}\cap U_{i_{\nu+1}}\cdots\cap U_{i_{q+2}}} \left(f_{i_0,\ldots,i_{\nu-1},i_{\nu+1},\ldots,i_{k-1},i_{k+1}\ldots,i_{q+2}}\right) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 7.2 Die zum Kettenkomplex (7.1) assoziierte Kohomologiegruppe

$$\boxed{\check{H}^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) := H^q(C^\bullet(\mathfrak{U};\mathfrak{F}))}$$

heißt die *q-te Čech-Kohomologiegruppe der Überdeckung $\mathfrak{U}$ mit Koeffizienten in $\mathfrak{F}$*. (Ist $\mathfrak{F}$ eine Garbe von Moduln, so sind auch $C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ und $H^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ Moduln).

Definition 7.3 (Verfeinerungen) Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdekung von X und $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen (oder von Moduln) über X. Eine weitere offene Überdekung $\mathfrak{V} = (V_j)_{j\in J}$ von X heißt *Verfeinerung von* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$, wenn es eine Abbildung $\tau : J \longrightarrow I$ gibt, so daß $V_j \subset U_{\tau(j)}$, für alle $j \in J$. (Ist $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$, so bezeichnen wir dies mit $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$). Eine solche Abbildung τ induziert Homomorphismen

$$\tau^q : C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{V};\mathfrak{F})$$

wie folgt:

$$\tau^q\left(f_{i_0,i_1,\ldots,i_q}\right) := \varrho^{U_{\tau(j_0)}\cap U_{\tau(j_1)}\cap\cdots\cap U_{\tau(j_q)}}_{V_{j_0}\cap V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_q}} \left(f_{\tau(j_0),\tau(j_1),\ldots,\tau(j_q)}\right).$$

Proposition 7.4 $\tau^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{V};\mathfrak{F})$ *ist ein Morphismus von Kokettenkomplexen, d.h. alle Diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\delta^q_{\mathfrak{U}}} & C^{q+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \\
\downarrow \tau^q & \circlearrowright & \tau^{q+1} \downarrow \\
C^q(\mathfrak{V};\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\delta^q_{\mathfrak{V}}} & C^{q+1}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})
\end{array}$$

sind kommutativ.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Theorem 7.5 *Nach Prop. 7.4 induzieren τ^q's Homomorphismen $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} := \tau^{*,q}$*

$$t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : \check{H}^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V};\mathfrak{F}).$$

Diese Homomorphismen sind unabhängig von der Wahl von $\tau : J \longrightarrow I$, d.h. $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ hängen (bis auf Isomorphie) nur von den offenen Überdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ ab.

Beweis. Siehe z.B. C.A.Cazacu: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher*, Birkhäuser, (1975), Kap. 7, §2, S. 133-137. □

Proposition 7.6 *Die Homomorphismen $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ haben folgende Eigenschaften*:
(i) $t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{U}} = \mathrm{Id}$.
(ii) *Für drei offene Überdeckungen mit $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$ gilt $t^q{}^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \circ t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = t^q{}^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}$.*

Definition 7.7 (Čech-Kohomologiegruppen) Die Menge der offenen Überdeckungen von X ist gerichtet und zwar bzgl. "$\leq$"= "$\succ$". Deshalb kann man nach 1.10 den direkten Limes

$$\boxed{\check{H}^q(X;\mathfrak{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}$$

bilden. Er heißt die *q-te Čech-Kohomologiegruppe (bzw. der q-ter Kohomologiemodul) von X mit Koeffizienten in $\mathfrak{F}$.*

Definition 7.8 Ein topologischer Raum X heißt *parakompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jede seiner offenen Überdeckungen eine lokal-endliche Verfeinerung zuläßt. Reguläre topologische Räume (d.h. $T_3 + T_1$ Räume), die eine abzählbare Basis besitzten, sind parakompakt.

Theorem 7.9 (Isomorphie zwischen Kohomologietheorien) *Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen (oder von Moduln) über einem parakompakten topologischen Raum X, so gilt:*

$$\boxed{\check{H}^q(X;\mathfrak{F}) \cong H^q(X;\mathfrak{F})}$$

Beweis. Siehe G.E.Bredon: *Sheaf Theory*, Second Ed., Graduate Texts in Math., Vol. **170**, Springer-Verlag, (1997), Cor. 4.12, S. 192. □

Theorem 7.10 (Leray's Theorem) *Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen (oder von Moduln) über einem parakompakten topologischen Raum X und $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt*

$$\check{H}^n\left(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p};\mathfrak{F}\right) = 0$$

für alle $n \geq 1$ und alle $(p+1)$-Tupel $(i_0, i_1, \ldots, i_p)$, so gibt es für alle $q \geq 0$ Isomorphismen:

$$\boxed{\check{H}^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \cong \check{H}^q(X;\mathfrak{F}) \quad (\cong H^q(X;\mathfrak{F}))}$$

Beweis. Siehe G.E.Bredon: *Sheaf Theory*, Thm. 4.13, S. 193, oder R.C.Gunning: *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Vol. **III**, Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series, (1990), S. 56-57. □

8 Theoreme von De Rham und Dolbeault

• Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}_X^{(p)}$ die Garbe der Keime der p-Differentialformen, die durch

$$U \longmapsto \mathcal{E}_X^{(p)}(U) := \Gamma(U, \textstyle\bigwedge^p T_X^{\vee})$$

definiert sind. Ist φ eine p-Differentialform, die bzgl. eines lokalen Koordinatensystems $(x_1, \ldots, x_n)$ als

$$\varphi = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} \underbrace{\varphi_{i_1,i_2,\cdots,i_p}(x)}_{\text{reellwertig und differenzierbar}} \quad dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

geschrieben werden kann, so definiert man das *Differential* $d\varphi$ von φ:

$$d\varphi = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} \left[d\varphi_{i_1,i_2,\cdots,i_p}(x)\right] \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

und somit einen Garbenhomomorphismus $d = d^p : \mathcal{E}_X^{(p)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p+1)}$ für alle $p \geq 0$. ($\mathcal{E}_X^{(0)} := \underline{\mathbb{R}}$). Nach dem Satz von Poincaré ist $d^{p+1} \circ d^p = 0$, d.h. $\left(\mathcal{E}_X^{(\bullet)}, d^{\bullet}\right)$ ist ein Kokettenkomplex.

Definition 8.1 (De Rham Kohomologie) Die q-te *De Rham Kohomologiegruppe* von X ist

$$\boxed{H^q_{\mathrm{DR}}(X;\mathbb{R}) := H^q\left(\left(\mathcal{E}^{(\bullet)}_X, d^\bullet\right);\mathbb{R}\right)}$$

Theorem 8.2 (Theorem von De Rham) *Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so existieren für alle $q \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$\boxed{H^q_{\mathrm{DR}}(X;\mathbb{R}) \cong H^q_{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{R})}$$

die durch

$$\mathcal{E}^{(p)}_X(U) \ni [\varphi] \longmapsto [\boldsymbol{\kappa}_p(\varphi)] \in S^p(X;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(S_q(X;\mathbb{R});\mathbb{R})$$

mit

$$S_q(X;\mathbb{R}) \ni [\sigma] \longmapsto [\boldsymbol{\kappa}_p(\varphi)](\sigma) := \int_\sigma \varphi \in \mathbb{R}$$

Insbesondere sind in dem Fall, in dem X kompakt, zusammenhängend und orientiert ist, $(H^*_{\mathrm{DR}}(X;\mathbb{R}), \wedge)$ und $\left(H^q_{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{R}), \smile\right)$ als graduierte Ringe isomorph durch:

$$\begin{array}{ccccc} H^p_{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{R}) & \times & H^{n-p}_{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{R}) & \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}} & \mathbb{R} \\ \downarrow\cong & & \cong\downarrow & & \| \\ H^p_{\mathrm{DR}}(X;\mathbb{R}) & \times & H^{n-p}_{\mathrm{DR}}(X;\mathbb{R}) & \xrightarrow{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{DR}}} & \mathbb{R} \end{array}$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu}(a,b) := \langle b, D_X(a)\rangle = \langle a \smile b, [X]\rangle, \qquad \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{DR}}(a,b) := \int_X a \wedge b$$

(vgl. Prop. 3.11)

Beweis. Siehe R.O. Wells: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, GTM, Vol. **65**, 2nd. Ed., Springer-Verlag, 1980, Thm. 3.15. S. 60-61. □

• Sei nun X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}^{(p,q)}_X$ die Garbe der Keime von differenzierbaren Differentialformen vom *Bigrad* (p,q), die durch

$$U \longmapsto \mathcal{E}^{(p,q)}_X(U) := \Gamma\left(U, \bigwedge^p \left(T'^{(\mathbb{C})}_X\right)^\vee \otimes \bigwedge^q \left(T''^{(\mathbb{C})}_X\right)^\vee\right)$$

definiert sind. Ist ω eine (p,q)-Differentialform, die bzgl. eines lokalen Koordinatensystems $(z_1,\dots,z_n)$ als

$$\omega = \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\ j_1<j_2<\cdots<j_q}} \omega_{i_1,i_2,\cdots,i_p,j_1,j_2,\dots,j_q}(z)\ dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q}$$

geschrieben werden kann, so definiert man das *Differential* $\overline{\partial}\omega$ von ω:

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p\\ j_1<j_2<\cdots<j_q}} \left[\overline{\partial}\omega_{i_1,i_2,\cdots,i_p,j_1,j_2,\dots,j_q}(z)\right]\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q}$$

und somit einen Garbenhomomorphismus

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}^{p,q} : \mathcal{E}_X^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p,q+1)}$$

für alle $p, q \geq 0$. ($\mathcal{E}_X^{(p,0)} := \Omega_X^p$ ist die Garbe der Keime der *holomorphen* $(p,0)$-Differentialformen). Nach einem Satz von Dolbeault ist $\overline{\partial}^{p,q+1} \circ \overline{\partial}^{p,q} = 0$, d.h. $\left(\mathcal{E}_X^{(p,\bullet)}, \overline{\partial}^{p,\bullet}\right)$ ist ein Kokettenkomplex.

Definition 8.3 (Dolbeault Kohomologie) Die q-te *Dolbeault p-Kohomologiegruppe* von X ist

$$\boxed{H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X) := H^q\left(\left(\mathcal{E}_X^{(p,\bullet)}, \overline{\partial}^{p,\bullet}\right); \mathbb{R}\right)}$$

Theorem 8.4 (Theorem von Dolbeault) *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{Z}$:*

$$\boxed{H^q(X; \Omega_X^p) \cong H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X)}$$

Beweis. Siehe R.O. Wells: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, GTM, Vol. **65**, 2nd. Ed., Springer-Verlag, 1980, Thm. 3.17. S. 61. $\square$