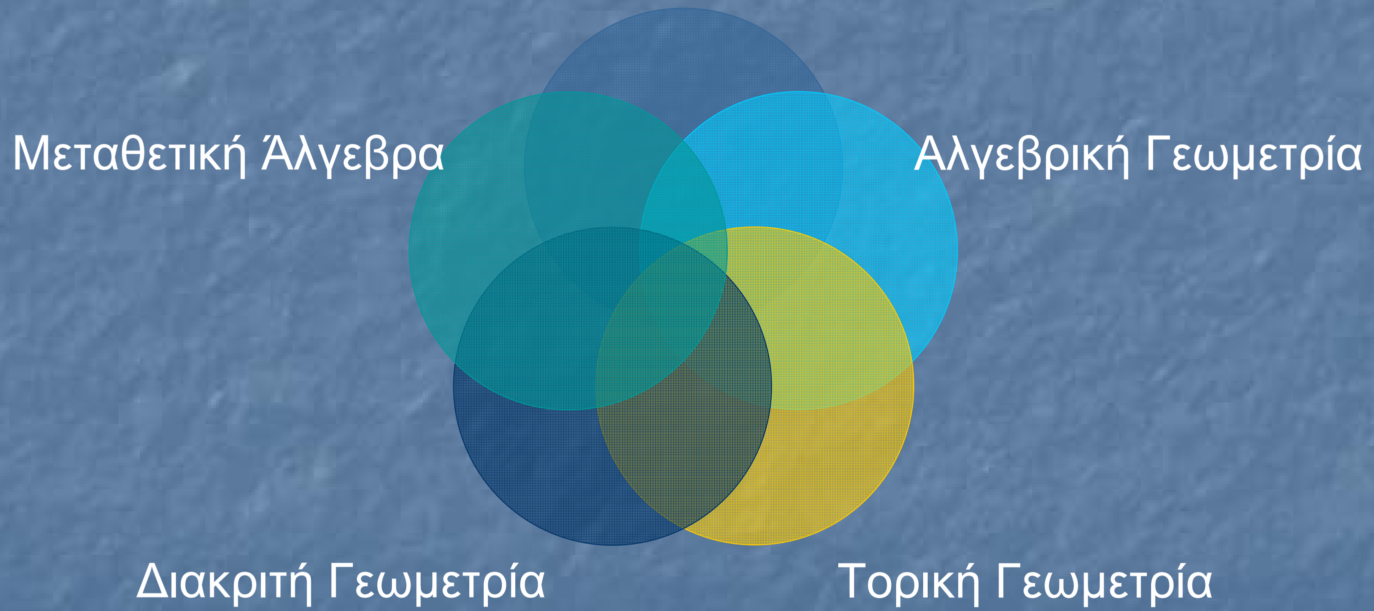
"Περί της ταξινομήσεως των τορικών ιδιωμάτων (με έμφαση στη διάσταση 3)",

Μελέτη ειδικών κλάσεων ιδιωμάτων



ΔΟΜΗΣΗ ΔΙΑΛΕΞΕΩΣ

- Βασικές έννοιες από τη Μεταθετική Άλγεβρα

(ιεράρχηση τοπικών ναιτεριανών δακτυλίων)

- Βασικές έννοιες από την Αλγεβρική Γεωμετρία

(συσχετικές ποικιλότητες, διογκώσεις και διαλύσεις ιδιωμάτων, ταξινόμηση ήπιων ιδιωμάτων που εμφανίζονται στο MMP, «στρατηγική τού M. Reid» για τη διάλυση 3-διάστατων κανονιστικών Ιδιωμάτων μέσω μη αποκλινόντων αμφιρρήτων μορφισμών)

- Τορικές ποικιλότητες και τορικά ιδιώματα

(κυρτοί πολυεδρικοί κώνοι, αντιστοιχούσες ημιομάδες και ημιομαδοδακτύλιοι συντεταγμένων, ταξινόμηση τορικών ιδιωμάτων)

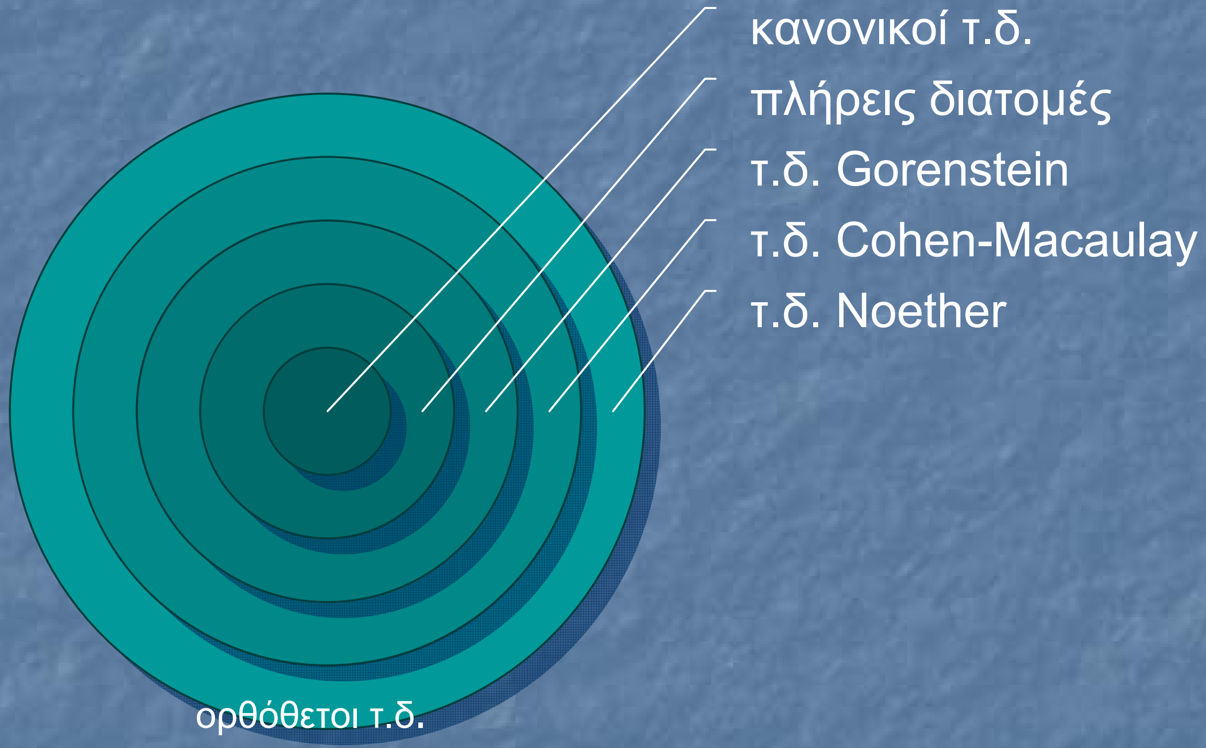
- Μελέτη 2-διάστατων κώνων και τορικών ιδιωμάτων μέσω «πεπερασμένων συνεχών κλασμάτων»

(εμφάνιση πηλικοϊδιωμάτων, διαλύσεις μέσω μιας σαφώς προδιαγεγραμμένης διαδικασίας εισαγωγής ακτίνων)

- Αναγωγή τής μελέτης 3-διάστατων τορικών ιδιωμάτων στη μελέτη κανονιστικών ιδιωμάτων και συνδυαστικά αποτελέσματα κατόπιν εφαρμογής τής «στρατηγικής τού M. Reid»

(συνδυαστικές τορικές διογκώσεις με ανηγμένη διασχηματική δομή μέσω εισαγωγής εγκιβωτισμένων κιγκλιδωματικών πολυγώνων, ελάττωση τής αναλλοιώτου των Laufer και Reid, εξαιρέσιμοι διαιρέτες κ.ά.)

Ιεράρχηση τοπικών ναιτεριανών δακτυλίων



Περί τής ταξινομήσεως των τορικών ιδιωμάτων

Δ. Ι. Νταής

Ηράκλειο Κρήτης, 3/5/2004

Υπάρχουν ορισμένα γενικά *ποιοτικά κριτήρια*, τα οποία χρησιμοποιούνται για μια *αδρή ταξινόμηση* των ιδιωμάτων μιγαδικών ποικιλοτήτων. Αυτά προέρχονται:

• από τη μελέτη τής κατά σημείο
αλγεβρικής συμπεριφοράς αυτών των ποικιλοτήτων
(ως προς τους τοπικούς δακτυλίους που αντιστοιχούν στα ιδιώματά τους)
[*Αλγεβρική ταξινόμηση*]

• από έναν εσώτερο χαρακτηρισμό
τής φύσεως των εμφανιζομένων εξαιρετικών τόπων (exceptional loci)
ως προς *οιαδήποτε* αποϊδιωματοποίηση (= διάλυση ιδιωμάτων, desingularization)
[*ιδιώματα ρητά, ελειπτικά, μη ελλειπτικά κλπ.*]

• από τη συμπεριφορά των λεγομένων «αποκλίσεων» («discrepancies»)
(στην περίπτωση θεωρήσεως ορθόθετων $\mathbb{Q}$-Gorenstein μιγαδικών ποικιλοτήτων)
[*adjunction-theoretic classification*, *ταξινόμηση μέσω συνθηκών προσαρτήσεως*]

• **Ιεράρχηση τοπικών ναιτεριανών δακτυλίων.** Ας ανακαλέσουμε στη μνήμη μας ορισμένες έννοιες από τη Μεταθετική Άλγεβρα. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Το **ύψος** ht$(\mathfrak{p})$ ενός πρώτου ιδεώδους $\mathfrak{p}$ τού R είναι το supremum (=ελάχιστο άνω φράγμα) των μηκών όλων των αλυσίδων πρώτων ιδεωδών, τα οποία περιέχονται εντός τού $\mathfrak{p}$, και η **διάσταση** τού R ορίζεται ως εξής:

$$\dim(R) := \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\,|\,\mathfrak{p} \text{ πρώτα ιδεώδη τού } R\}.$$

Ο R καλείται **δακτύλιος τής Noether** ή **ναιτεριανός δακτύλιος** όταν κάθε ιδεώδες του είναι πεπερασμένως παραγόμενο. Ο R είναι ένας **τοπικός δακτύλιος** όταν διαθέτει ένα και μόνον μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$. Ένας τοπικός δακτύλιος R είναι **κανονικός** (regular) όταν $\dim(R) = \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, ενώ καλείται **ορθόθετος** (normal) όταν είναι μια ακεραία περιοχή, η οποία είναι ακεραίως κλειστή εντός τού σώματος των κλασμάτων της. Μια πεπερασμένη ακολουθία $a_1, \ldots, a_\nu$ από στοιχεία ενός μεταθετικού 1-δακτυλίου R ονομάζεται **κανονική ακολουθία** (regular sequence) όταν το a_1 δεν είναι μηδενοδιαιρέτης τού R και, ταυτοχρόνως, το a_i δεν είναι μηδενοδιαιρέτης τού πηλικοδακτυλίου $R/\langle a_1, \ldots, a_{i-1}\rangle$ για κανένα i, $i = 2, \ldots, \nu$. Ένας ναιτεριανός τοπικός δακτύλιος R (με το $\mathfrak{m}$ ως μεγιστοτικό του ιδεώδες) καλείται **δακτύλιος των Cohen και Macaulay** όταν depth(R) =dim(R) , όπου το **βάθος** (depth) τού R ορίζεται ως το μέγιστο δυνατό μήκος όλων των κανονικών ακολουθιών, τα στοιχεία των οποίων ανήκουν στο $\mathfrak{m}$. Ένας τοπικός δακτύλιος R των Cohen και Macaulay καλείται **δακτύλιος τού Gorenstein** όταν

$$\mathrm{Ext}_R^{\dim(R)}(R/\mathfrak{m}, R) \cong R/\mathfrak{m}.$$

Λέμε ότι ένας ναιτεριανός τοπικός δακτύλιος R είναι **πλήρης διατομή** (complete intersection) όταν υπάρχει ένας κανονικός τοπικός δακτύλιος R', τέτοιος ώστε να ισχύει $R \cong R'/\langle f_1, \ldots, f_q\rangle$ για ένα πεπερασμένο σύνολο $\{f_1, \ldots, f_q\} \subset R'$ με πληθικό αριθμό ίσο με $q = \dim(R') - \dim(R)$. Η (ως προς συνολοθεωρητικό εγκλεισμό) ιεράρχηση των ανωτέρω κλάσεων ναιτεριανών τοπικών δακτυλίων περιγράφεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Ναιτεριανοί τοπικοί δακτύλιοι}\} & \supset & \{\text{ορθόθετοι τοπικοί δακτύλιοι}\} \\
\cup & & \cup \\
\{\text{τοπικοί δακτύλιοι των Cohen και Macaulay}\} & & \{\text{κανονικοί τοπικοί δακτύλιοι}\} \\
\cup & & \cap \\
\{\text{τοπικοί δακτύλιοι τού Gorenstein}\} & \supset & \{\text{πλήρεις διατομές}\}
\end{array}$$

Σημειωτέον ότι, εάν ο R είναι οιοσδήποτε ναιτεριανός δακτύλιος, τότε τόσο ο R όσο και το αντιστοιχούμενο συσχετικό διάσχημα (affine scheme) Spec(R) ονομάζονται Cohen-Macaulay, και, αντιστοίχως, Gorenstein, ορθόθετοι, κανονικοί ή πλήρεις διατομές, όταν όλες οι τοπικοποιήσεις (localizations) $R_\mathfrak{m}$ τού R (ως προς όλα τα μέλη $\mathfrak{m} \in$ Max-Spec(R) τού μεγιστοτικού φάσματός του) είναι τού ιδίου τύπου.

• **Βασικές έννοιες από την Αλγεβρική Γεωμετρία.** Ένας **δακτυλιακός χώρος** (ringed space) είναι ένα ζεύγος $(X, \mathcal{O}_X)$ αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο X και ένα *δράγμα δακτυλίων* (sheaf of rings) $\mathcal{O}_X$ (το λεγόμενο «δράγμα δομής» τού X). Τα **διασχήματα** (schemes) είναι δακτυλιακοί χώροι $(X, \mathcal{O}_X)$ για τους οποίους το ζεύγος $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ είναι ισόμορφο με κάποιο συσχετικό διάσχημα (affine scheme), για κάθε ανοικτό υποσύνολο U τού X.

• Ένα **συσχετικό διάσχημα** (affine scheme) είναι ένας δακτυλιακός χώρος τής μορφής $(\mathrm{Spec}(R), \widetilde{R})$, όπου ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, το $\mathrm{Spec}(R)$ είναι **το φάσμα** τού R (ήτοι το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του) εφοδιασμένο με την **κατά Zariski τοπολογία** (με βάση της τα σύνολα $D(g) := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) |\, g \notin \mathfrak{q}\}$, $g \in R$) και το δράγμα R ορίζεται μέσω δεδομένων αποκλειστικώς εξαρτωμένων από τον ίδιο τον δακτύλιο R :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{μη κενά}\\ \text{ανοικτά}\\ \text{υποσύνολα}\\ \text{τού Spec}(R)\end{array}\right\} \ni U \longmapsto \widetilde{R}(U) := \left\{ (r_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in U} \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} R_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (\forall \mathfrak{p} \in U) \\ (\exists g \in R \smallsetminus \mathfrak{p} : D(g) \subseteq U) \\ \text{και } (\exists f \in R : r_{\mathfrak{q}} = \frac{f}{g}, \\ \forall \mathfrak{q} \in D(g)) \end{array} \right\}$$

Το $\widetilde{R}$ έχει ως απεικονίσεις περιορισμού τις $\varrho^U_{U'} : \widetilde{R}(U) \longrightarrow \widetilde{R}(U')$ ($U' \subseteq U$ ανοικτό), οι οποίες καθορίζονται κατά τρόπο φυσικό από την απεικόνιση

$$\prod_{\mathfrak{p}\in U} R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in U'} R_{\mathfrak{p}},$$

την σχηματιζόμενη κατόπιν παραλείψεως των συνιστωσών τού συμπληρώματος $U \smallsetminus U'$.

• Μια ειδική κλάση συσχετικών διασχημάτων είναι αυτή των *συσχετικών μιγαδικών ποικιλοτήτων*. Μια **συσχετική μιγαδική ποικιλότητα** (affine complex variety) V αποτελεί τον χώρο λύσεων πεπερασμένου πλήθους πολυωνυμικών εξισώσεων $n \geq 1$ μιγαδικών μεταβλητών:

$$V = \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \; f_1(\mathbf{z}) = f_2(\mathbf{z}) = \cdots = f_q(\mathbf{z}) = 0\}.$$

Ορίζοντας τις απεικονίσεις

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\text{ιδεώδη τού}\\ \text{πολυωνυμικού δακτυλίου}\\ \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]\end{array}\right\} \begin{array}{c}\xrightarrow{\mathbf{V}}\\ \xleftarrow[\mathbf{I}]{}\end{array} \left\{\begin{array}{c}\text{συσχετικές μιγαδικές}\\ \text{ποικιλότητες } V\end{array}\right\}}$$

ως ακολούθως:

$$I \longmapsto \mathbf{V}(I) := \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \; f(\mathbf{z}) = 0, \; \forall f \in I\},$$

$$V \longmapsto \mathbf{I}(V) := \{f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \mid \; f(\mathbf{z}) = 0, \; \forall \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in V\},$$

λαμβάνουμε *αλγεβρογεωμετρικές αμφιρρίψεις*:

$$\begin{array}{cccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{ριζικά ιδεώδη τού}\\ \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{συσχετικές μιγαδικές}\\ \text{ποικιλότητες } V\\ \text{εντός τού } \mathbb{C}^n\end{array}\right\} & (\text{HNS: } \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))=\sqrt{J})\\
\cup & & \cup & \\
\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbf{z}]) & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{ανάγωγες}\\ \text{συσχετικές μιγαδικές}\\ \text{ποικιλότητες } V\\ \text{εντός τού } \mathbb{C}^n\end{array}\right\} & \\
\cup & & \cup & \\
\text{Max-Spec}(\mathbb{C}[\mathbf{z}]) & \longleftrightarrow & \{\text{σημεία τού } \mathbb{C}^n\} &
\end{array}$$

Ο δακτύλιος

$$\mathbb{C}\,[V] := \{\text{πολυωνυμικές συναρτήσεις } \varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}\}$$

καλείται **δακτύλιος συντεταγμένων** τής V. Σημειωτέον ότι ο επιμορφισμός δακτυλίων

$$\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n] \ni f \longmapsto \varphi\,(f) \in \mathbb{C}\,[V]\,, \quad \varphi\,(f)\,(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}),$$

έχει το $\mathbf{I}(V)$ ως πυρήνα του, οπότε βάσει τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών λαμβάνουμε

$$\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]\,/\,\mathbf{I}(V) \cong \mathbb{C}\,[V]$$

και μπορούμε, ως εκ τούτου, να επεκτείνουμε τις ως άνω αλγεβρογεωμετρικές αμφιρρίψεις ως ακολούθως:

$$\begin{array}{ccccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{ριζικά ιδεώδη}\\ \text{τού } \mathbb{C}[\mathbf{z}]\\ \text{περιέχοντα το } \mathbf{I}(V)\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{ριζικά ιδεώδη}\\ \text{τού } \mathbb{C}\,[V]\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{συσχετικά αλγεβρικά}\\ \text{υποσύνολα } W \subseteq V\end{array}\right\}\\
\cup & & \cup & & \cup\\
\left\{\begin{array}{c}\text{πρώτα ιδεώδη}\\ \text{τού } \mathbb{C}[\mathbf{z}]\\ \text{περιέχοντα το } \mathbf{I}(V)\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{C}\,[V]) & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{ανάγωγα αλγεβρικά}\\ \text{υποσύνολα } W \subseteq V\end{array}\right\}\\
\cup & & \cup & & \cup\\
\left\{\begin{array}{c}\text{μεγιστοτικά ιδεώδη}\\ \text{τού } \mathbb{C}[\mathbf{z}]\\ \text{περιέχοντα το } \mathbf{I}(V)\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \text{Max-Spec}(\mathbb{C}\,[V]) & \longleftrightarrow & \{\text{σημεία τής } V\}
\end{array}$$

(όπου $W \longmapsto \mathbf{I}(W)$, $\mathbb{C}[V] \supseteq$ ιδ. $J \longmapsto \mathbf{V}(J)$). Γι' αυτόν τον λόγο μπορούμε εφεξής να *ταυτίζουμε* την V με το φάσμα Spec($\mathbb{C}[V]$) τού δακτυλίου συντεταγμένων της (και τα *σημεία* της με το Max-Spec($\mathbb{C}[V]$)). Στην πραγματικότητα υφίσταται μια *ισοδυναμία κατηγοριών*

$$V \rightsquigarrow \mathbb{C}[V]$$

μεταξύ τής κατηγορίας των συσχετικών αναγώγων μιγαδικών ποικιλοτήτων και τής κατηγορίας των πεπερασμένως παραγομένων, ανηγμένων $\mathbb{C}$-αλγεβρών. (Εάν η A είναι μια τέτοια άλγεβρα και τα $a_1, \ldots, a_s$ γεννήτορές της, τότε αντιστοιχίζουμε σε αυτήν τη συσχετική ποικιλότητα $\mathbf{V}(I)$, όπου $I = \mathrm{Ker}(\varphi)$ και $\varphi : \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_s] \longrightarrow A$ ο επιμορφισμός $\mathbb{C}$-αλγεβρών για τον οποίον ισχύει $\varphi(z_j) = a_j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, s\}$).

• **Ο τοπικός δακτύλιος** $\mathcal{O}_{V,P}$ **στο σημείο** $P \in V$ (V ανάγωγη):

$$\mathbb{C}(V) = \mathbf{Fr}(\mathbb{C}[V]) = \left\{ \tfrac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}[V],\ b \neq 0_{\mathbb{C}[V]} \right\} \qquad \text{(σώμα κλασμάτων τής ακ. π. } \mathbb{C}[V]\text{)}$$

$$\cup$$

$$\mathcal{O}_{V,P} = \left\{ f \in \mathbb{C}(V) \;\middle|\; f = \tfrac{a}{b},\ b(P) \neq 0 \right\} \qquad \text{(\textbf{κανονικές συναρτήσεις} στο σημείο } P\text{)}$$

$$\cup$$

$$\mathfrak{m}_{V,P} = \left\{ f \in \mathcal{O}_{V,P} \;\middle|\; f(P) = 0 \right\} \qquad \text{(το μοναδικό μεγιστοτικό ιδεώδες τού } \mathcal{O}_{V,P}\text{)}$$

Η V ονομάζεται Cohen-Macaulay, και, αντιστοίχως, Gorenstein, ορθόθετη ή πλήρης διατομή όταν όλοι οι τοπικοί δακτύλιοι $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι αυτού τού τύπου για κάθε $P \in V$. Εάν οι $\mathcal{O}_{V,P}$ είναι κανονικοί τοπικοί δακτύλιοι για κάθε $P \in V$, τότε λέμε πως η V είναι μια **λεία ποικιλότητα**.

• **Η έννοια τού ιδιώματος.** Εάν η $V \subseteq \mathbb{C}^n$ είναι μια ανάγωγη συσχετική ποικιλότητα και $P = (p_1, \ldots, p_n) \in V$, τότε ο εφαπτόμενος χώρος τής V στο σημείο P είναι ο

$$T_P(V) := \bigcap_{f \in \mathbf{I}(V)} \mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(P)\,(z_j - p_j) \right).$$

Ως $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος ο $T_P(V)$ είναι δυϊκός τού $\mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}_{V,P}^2$ και

$$\dim_{\mathbb{C}} T_P(V) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{V,P}/\mathfrak{m}_{V,P}^2 \leq \dim_P V := \dim(\mathcal{O}_{V,P}).$$

Το σημείο $P \in V$ καλείται

$$\begin{cases} \text{\textbf{ιδιάζον σημείο} ή \textbf{ιδίωμα} (singularity)} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \dim_{\mathbb{C}} T_P(V) < \dim_P V \\ \text{\textbf{μη ιδιάζον ή ομαλό σημείο}} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \dim_{\mathbb{C}} T_P(V) = \dim_P V \Longleftrightarrow \mathcal{O}_{V,P} \text{ κανονικός τ.δ.} \end{cases}$$

Εάν, επί παραδείγματι, $\mathbf{I}(V) = \langle f_1, \ldots, f_q \rangle$, τότε το *ιακωβιανό κριτήριο* μας πληροφορεί ότι

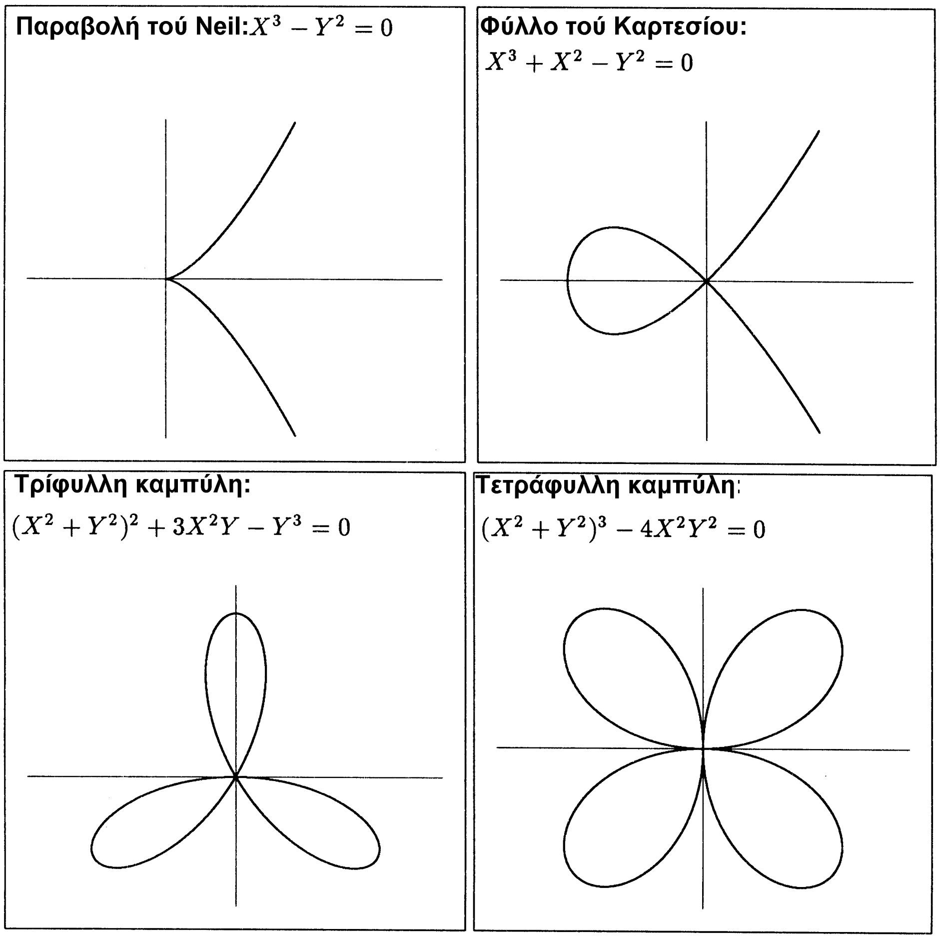
$$\text{Το } P \in V \text{ είναι ομαλό σημείο} \Longleftrightarrow \dim_P V = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_i}(P) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q}.$$

Ως

$$\mathrm{Sing}\,(V) = \{P \in V \mid \mathcal{O}_{V,P} \text{ μη κανονικός τοπικός δακτύλιος}\}$$

και $\mathrm{Reg}(V) = V \smallsetminus \mathrm{Sing}(V)$ συμβολίζουμε τον **ιδιάζοντα τόπο** (singular locus) και, αντιστοίχως, τον **τόπο των ομαλών σημείων** (regular locus) τής V.

• *Σημείωση*: Οι ως άνω έννοιες ορίζονται καταλλήλως ακόμη και όταν κανείς εργάζεται με *γενικές ποικιλότητες* $(X, \mathcal{O}_X)$ (ήτοι με *ανάγωγα, ανηγμένα, διαχωρισμένα διασχήματα πεπερασμένου τύπου ορισμένα υπεράνω οιουδήποτε σώματος* $\mathbf{k}$).



• **Διόγκωση ή μεγέθυνση (blow-up) σημείου τού** $\mathbb{C}^n$: Π.χ. για το $P=(0,..,0)$,

$$\begin{array}{l}\mathbf{Bl}_P\left(\mathbb{C}^n\right)=\left\{\left(\left(z_1,\ldots,z_n\right),\left[w_1,\ldots,w_n\right]\right)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}\;\mid\; z_iw_j-z_jw_i=0, 1\leq i<j\leq n\right\}\\ \downarrow\pi=\text{προβολή}\\ \mathbb{C}^n\end{array}$$

με αρχέτυπα

$$\pi^{-1}\left(\left(z_1,\ldots,z_n\right)\right)=\begin{cases}\{P\}\times\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}, & \text{όταν } \left(z_1,\ldots,z_n\right)=P,\\ \left(\left(z_1,\ldots,z_n\right),\left[z_1,\ldots,z_n\right]\right), & \text{ειδάλλως,}\end{cases}$$

οπότε $\mathbf{Bl}_P\left(\mathbb{C}^n\right)\smallsetminus\{\pi^{-1}\left(P\right)\}\;\cong\;\mathbb{C}^n\smallsetminus\{P\}$ $(\pi^{-1}\left(P\right)\}\;\cong\;\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ **= εξαιρετικό σύνολο** (exceptional set), υπό την έννοια *αυτού που ξεφεύγει από τα πλαίσια τού συνηθισμένου, που αποτελεί εξαίρεση στον κανόνα*.)

• **Διόγκωση ενός συσχετικού ναιτεριανού διασχήματος** $U=\mathrm{Spec}(R)$ **κατά μήκος ενός άλλου διασχήματος** $Z=\mathrm{Spec}(R/I)$:

$$\mathbf{Bl}_Z^I\left(U\right):=\mathrm{Proj}\left(S(R,I)\right)\longrightarrow U$$

όπου το $\mathrm{Proj}(S(R,I))$ είναι το λεγόμενο *ομογενές φάσμα* τού $S(R,I):=\bigoplus_{d\geq 0}I^d$. Εάν το $\{h_0,...,h_\mu\}$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων τού I, τότε

$$\mathbf{Bl}_Z^I\left(U\right)=\bigcup_{j=0}^{\mu}\mathrm{Spec}\left(R\left[\tfrac{h_0}{h_j},\ldots,\tfrac{h_\mu}{h_j}\right]\right),$$

με το $R\left[\frac{h_0}{h_j},\ldots,\frac{h_\mu}{h_j}\right]$ θεωρούμενο ως R-υποάλγεβρα τής τοπικοποιήσεως R_{h_j}.

• **Διόγκωση τυχούσας μιγαδικής ποικιλότητας** $(X,\mathcal{O}_X)$ **κατά μήκος ενός διασχήματος** Z: Εάν το $\mathcal{I}$ είναι ένα μη μηδενικό, συμφυές δράγμα (coherent sheaf) $\mathcal{O}_X$-ιδεωδών ορισμένο υπεράνω τής X και $\left(U_j=\mathrm{Spec}\left(R_j\right)\right)_{j\in J}$ ένα ανοικτό κάλυμμα τής X, τότε έχουμε $\mathcal{I}|_{U_j}=\widetilde{I}_j$, όπου I_j ένα ιδεώδες τού R_j. Κατόπιν *επικολλήσεως* των διογκώσεων

$$\left\{\mathbf{Bl}_{Z_j}^{I_j}\left(U_j\right):=\mathrm{Proj}\left(S(R_j,I_j)\right)\longrightarrow U_j\;\subseteq X\right|\;j\in J\right\},$$

κατά μήκος των Z_j λαμβάνουμε έναν αμφίρρητο, γνήσιο, επιρριπτικό μορφισμό

$$\mathbf{Bl}_Z^{\mathcal{I}}\left(X\right):=\mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{I}^d\right)\stackrel{\pi}{\longrightarrow}X,$$

τη διόγκωση τής X *κατά μήκος τής* Z $=\mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})=\{x\in X|\;(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})\neq 0\}$ με εξαιρετικό σύνολό του το $\mathrm{Exc}(\pi)=\pi^{-1}(Z)$, το οποίο ισούται με

$$\mathrm{Exc}(\pi)=\mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0}\mathrm{Sym}^d\left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right)\right),$$

όταν η X είναι (τοπικώς) πλήρης διατομή. Εάν το

$$W = \operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \{x \in X \mid (\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \neq 0\}$$

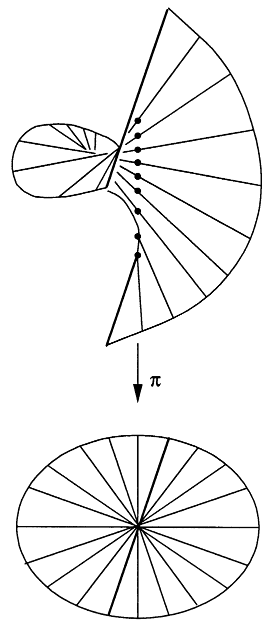
είναι ένα κλειστό υποδιάσχημα τού X με $Z \cap W = \operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}+\mathcal{J}) \neq \varnothing$, τότε

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{Bl}_Z^{\mathcal{I}}(X) & \xrightarrow{\pi} & X \\ & \cup & & \cup \\ \overline{\pi^{-1}(W \smallsetminus (Z \cap W))} & \cong \mathbf{Bl}_{Z\cap W}^{\mathcal{I}+\mathcal{J}}(X) & \xrightarrow{\pi|_{\pi\varepsilon\varrho.}} & W \end{array}$$

• **Κύριο θεώρημα διαλύσεως ιδιωμάτων τού H. Hironaka (1964):** *Για οιαδήποτε μιγαδική ποικιλότητα* X *υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία διογκώσεων*

$$\left\{ \pi : X_j = \mathbf{Bl}_{Z_{j-1}}^{\mathcal{I}_{j-1}}(X_{j-1}) \longrightarrow X_{j-1} \;\middle|\; 1 \leq j \leq l \right\},$$

τέτοια ώστε $X_0 = X$ *και* $\operatorname{Sing}(X_l) = \varnothing$, *όπου η* Z_j *είναι λεία υποποικιλότητα τού* $\operatorname{Sing}(X_j)$ *για κάθε* $j \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$.



• **Ρητά και ελλειπτικά ιδιώματα**. Λεμε πως μια μιγαδική ποικιλότητα X έχει (το πολύ) **ρητά ιδιώματα** όταν υπάρχει μια διάλυση των ιδιωμάτων της $f : Y \to X$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$f_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$$

(ή ισοδυνάμως, η Y να είναι ορθόθετη), και, ταυτοχρόνως,

$$R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0, \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq \ \dim_{\mathbb{C}} X - 1.$$

(Το *i-οστό δράγμα τής ευθείας εικόνας* ορίζεται μέσω τής

$$U \longmapsto R^i f_* \mathcal{O}_Y (U) := H^i \left(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y \left|_{f^{-1}(U)} \right. \right)).$$

Αυτός ο ορισμός είναι *ανεξάρτητος* τής εκάστοτε επιλογής τής διαλύσεως των ιδιωμάτων τής X. (Σύνηθες παράδειγμα: τα **πηλικοϊδιώματα** είναι ρητά ιδιώματα).

Επίσης λέμε πως ένα ιδίωμα Gorenstein x τής X είναι ένα **ελλειπτικό ιδίωμα** όταν υπάρχει μια διάλυση $f : Y \to X$ τού $x \in X$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0, \ \forall i, \quad 1 \leq i \leq \dim_{\mathbb{C}} X - 2, \ \text{ και}$$

$$R^{\dim_{\mathbb{C}} X - 1} f_* \mathcal{O}_Y \cong \mathbb{C}.$$

(Και αυτός ο ορισμός είναι ανεξάρτητος τής εκάστοτε επιλογής τής f.)

• **Ιδιώματα χρήσιμα για το MMP.** Εάν η X είναι μια ορθόθετη μιγαδική ποικιλότητα, τότε οι *κατά Weil διαιρέτες* της μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια «διαιρετικών» δραγμάτων ως εξής:

0.0.1 Λήμμα. *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για οιαδήποτε συμφυή δράγματα $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-μοδίων:*
(i) *Το F είναι ανακλαστικό (ήτοι $F \cong F^{\vee\vee}$, όπου $F^{\vee} := Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ το δυϊκό τού F) και η βαθμίδα του ισούται με 1.*
(ii) *Εάν η X^0 είναι μια μη ιδιάζουσα ανοικτή υποποικιλότητα τής X με $\operatorname{codim}_X\left(X \smallsetminus X^0\right) \geq 2$, τότε το $F|_{X^0}$ είναι αναστρέψιμο και*

$$\mathcal{F} \cong \iota_*\left(\mathcal{F}|_{X^0}\right) \cong \iota_*\iota^*\left(\mathcal{F}\right),$$

όπου $\iota : X^0 \hookrightarrow X$ η συνήθης ενθετική απεικόνιση.

Τα **διαιρετικά δράγματα** είναι ακριβώς εκείνα τα οποία πληρούν τις ανωτέρω συνθήκες. Επειδή κάθε διαιρετικό δράγμα είναι ελεύθερο στρέψεως, υπάρχει μια μη μηδενική τμήση $\gamma \in H^0\left(X, Rat_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}\right)$, με

$$H^0\left(X, Rat_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}\right) \cong \mathbb{C}\left(X\right) \cdot \gamma,$$

και το $\mathcal{F}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υποδράγμα τού σταθερού δράγματος Rat_X των ρητών συναρτήσεων επί τού X, ήτοι ένα ειδικό δράγμα *κλασματικών ιδεωδών.*

0.0.2 Πρόταση. *Η απεικόνιση*

$$Cl\left(X\right) \ni \{D\} \overset{\delta}{\longmapsto} \{\mathcal{O}_X\left(D\right)\} \in \left\{ \begin{array}{c} \text{διαιρετικά συμφυή} \\ \text{υποδράγματα τού } Rat_X \end{array} \right\} / \; H^0\left(X, \mathcal{O}_X^*\right),$$

όπου το $\mathcal{O}_X\left(D\right)$ ορίζεται στέλνοντας κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο U τής X στο

$$U \longmapsto \mathcal{O}_X\left(D\right)\left(U\right) := \left\{\varphi \in \mathbb{C}\left(X\right)^* \mid \left(\operatorname{div}\left(\varphi\right) + D\right)|_U \geq 0\right\} \cup \{0\},$$

είναι μια αμφίρριψη.

Έστω $\Omega_{\mathrm{Reg}(X)/\mathbb{C}}$ το δράγμα των κανονιστικών μορφών επί τού $\mathrm{Reg}(X) = X \smallsetminus \mathrm{Sing}(X) \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$, και για $i \geq 1$, έστω

$$\Omega^i_{\mathrm{Reg}(X)/\mathbb{C}} := \bigwedge^i \Omega_{\mathrm{Reg}(X)/\mathbb{C}}\,.$$

Ο (μέχρι ρητής ισοδυναμίας) *μονοσημάντως ορισμένος* κατά Weil διαιρέτης K_X, ο οποίος αντιστοιχεί (μέσω τής ανωτέρω δ) στο **κανονιστικό διαιρετικό δράγμα**

$$\omega_X := \iota_*\left(\Omega^{\dim_{\mathbb{C}}(X)}_{\mathrm{Reg}(X)/\mathbb{C}}\right),$$

καλείται **κανονιστικός διαιρέτης** τής X.

0.0.3 Πρόταση. *Μια ορθόθετη μιγαδική ποικιλότητα X είναι ποικιλότητα Gorenstein εάν και μόνον εάν είναι Cohen-Macaulay και το δράγμα and ω_X είναι αναστρέψιμο.*

0.0.4 Θεώρημα. (Elkik, Flenner). *Εάν η X είναι μια ορθόθετη μιγαδική ποικιλότητα διαστάσεως ≥ 2, τότε*

$$\left(\begin{array}{c} \text{Η } X \text{ έχει το πολύ} \\ \text{ρητά ιδιώματα} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Η } X \text{ είναι Cohen-Macaulay} \\ \text{και } \omega_X \cong f_* \omega_Y \end{array} \right),$$

όπου η $f : Y \to X$ υποδηλοί τυχούσα διάλυση των ιδιωμάτων τής X.

0.0.5 Ορισμός. Μια ορθόθετη μιγαδική ποικιλότητα X καλείται **$\mathbb{Q}$-Gorenstein** όταν

$$\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$$

όπου ο K_X είναι ένας $\mathbb{Q}$-Cartier διαιρέτης. (Ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ℓ, για τον οποίο ο ℓK_X είναι διαιρέτης Cartier, καλείται **δείκτης** τής X.)

0.0.6 Ορισμός. Έστω X μια ιδιάζουσα ορθόθετη $\mathbb{Q}$-Gorenstein ποικιλότητα διαστάσεως ≥ 2. Θεωρούμε μια διάλυση $f : Y \to X$ των ιδιωμάτων τής X, τέτοια ώστε ο εξαιρετικός τόπος (exceptional locus) τής f να είναι ένας διαιρέτης $\bigcup_i D_i$ με **απλές διευθετημένες διασταυρώσεις** (simple normal crossings), και ορίζουμε ως **απόκλιση** (discrepancy) τη διαφορά

$$\boxed{K_Y - f^*(K_X) = \textstyle\sum_i a_i D_i\ .}$$

Λέμε ότι η ποικιλότητα X διαθέτει **τερματικά** (και, αντιστοίχως, **κανονιστικά**, **log-τερματικά**, **log-κανονιστικά**) **ιδιώματα** όταν όλοι οι συντελεστές a_i τής αποκλίσεως είναι > 0 (και, αντιστοίχως, ≥ 0 / > -1 / ≥ -1). Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος τής επιλογής τής f.

0.0.7 Σημείωση. (i) Εάν όλοι οι a_i είναι $= 0$, τότε η $f : Y \to X$ καλείται **μη αποκλίνουσα** (crepant) διάλυση των ιδιωμάτων τής X. Σημειωτέον ότι το πλήθος $\#\{i \mid a_i = 0\}$ των μη αποκλινόντων εξαιρετικών διαιρετών διατηρείται σταθερό ως προς οιαδήποτε f υπό τον όρο ότι η X διαθέτει (το πολύ) κανονιστικά ιδιώματα.

(ii) Τα τερματικά ιδιώματα συνιστούν την μικρότερη δυνατή κλάση ιδιωμάτων, για την οποία κανείς να εφαρμόσει το **MMP** (= minimal model program) για λείες ποικιλότητες. Τα κανονιστικά ιδιώματα είναι ακριβώς εκείνα τα ιδιώματα που κάνουν την εμφάνισή τους στα λεγόμενα **κανονιστικά μοντέλα** (canonical models) ποικιλοτήτων γενικού τύπου (of general type). Τέλος, τα log-ιδιώματα (ιδιώματα λογαριθμικού τύπου) είναι τα ιδιώματα εκείνα, για τα οποία η απόκλιση εξακολουθεί να μην στερείται νοήματος.

Από το θεώρημα 0.0.4 και την πρόταση 0.0.3 συμπεραίνουμε ότι:

0.0.8 Θεώρημα. *Τα log-τερματικά ιδιώματα είναι ρητά και Gorenstein.*

0.0.9 Πόρισμα. *Ένα ιδίωμα $x \in X$ είναι κανονιστικό με δείκτη του το 1 εάν και μόνον εάν είναι ρητό και Gorenstein.*

0.0.10 Ορισμός. Έστω $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_{X,x})$ ο τοπικός δακτύλιος ενός σημείου x τής X και έστω V_x ένας πεπερασμένης διαστάσεως $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος που παράγει το μεγιστοτικό ιδεώδες $\mathfrak{m}_{X,x}$. Μια **γενική τομή υπερεπιπέδου** (general hyperplane section) διερχόμενη από το x είναι ένα $\mathbb{C}$-αλγεβρικό υποδιάσχημα $\mathbb{H} \subset U_x$, το οποίο καθορίζεται σε μια κατάλληλη κατά Zariski ανοικτή γειτονιά U_x τού x μέσω ενός δράγματος ιδεωδών $\mathcal{O}_X \cdot v$, όπου το $v \in V_x$ είναι **αρκούντως γενικό** (sufficiently general). Τούτο σημάινει ότι το v μπορεί να θεωρηθεί ως ένα $\mathbb{C}$-σημείο ενός κατά Zariski ανοικτού πυκνού υποσυνόλου τού V_x.)

0.0.11 Θεώρημα. (M. Reid). *Έστω X μια ορθόθετη οιονεί προβολική μιγαδική ποικιλότητα διαστάσεως $r \geq 3$ και $x \in \mathrm{Sing}(X)$. Εάν το (X, x) είναι ένα ρητό ιδίωμα Gorenstein, τότε, για μια γενική τομή υπερεπιπέδου $\mathbb{H}$ διερχόμενη από το x, το $(\mathbb{H}, x)$ είναι είτε ένα ρητό είτε ένα ελλειπτικό $(r-1)$-διάστατο ιδίωμα.*

• <u>**Τι συμβαίνει στις μικρές διαστάσεις 2 και 3;**</u> Στη διάσταση 2 ο ορισμός των ρητών και ελλειπτικών ιδιωμάτων πλησιάζει την ενόρασή μας για το τι θα όφειλε να σημαίνει «ρητός» και «ελλειπτικός». Τα «τερματικά σημεία» αντιστοιχούν στα ομαλά σημεία και τα κανονιστικά ιδιώματα είναι τα οικεία μας ρητά διπλά σημεία (βλ. θεώρημα 0.0.16). Επιπροσθέτως, τόσο τα τερματικά όσο και τα κανονιστικά ιδιώματα έχουν πάντοτε δείκτη ίσο με 1. Από την άλλη μεριά, η ύπαρξη *μονοσημάντως ορισμένης* **ελαχιστοτικής**[1] (και **καλής**[2] **ελαχιστοτικής**) **διαλύσεως ιδιωμάτων**, καθιστά τη μελέτη των ιδιωμάτων επιφανειών πολύ πιο εύκολη απ' ό,τι σε ανώτερες διαστάσεις.

0.0.12 Ορισμός. Έστω X μια ορθόθετη επιφάνεια, $x \in \mathrm{Sing}(X)$, και έστω $\cup_{i=1}^{k} C_i$ ο φορέας τού εξαιρετικού διαιρέτη ως προς έναν γνήσιο αμφίρρητο μορφισμό $f : X' \to X$, ο οποίος συστέλλει το x. Ο **θεμελιώδης κύκλος**

$$Z_{\text{fund}} = \sum_{i=1}^{k} n_i C_i, \; n_i > 0, \;\; \forall i, \;\; 1 \leq i \leq k,$$

τής f είναι ο μονοσημάντως ορισμένος, ελάχιστος κύκλος για τον οποίο $(Z_{\text{fund}} \cdot C_i) \leq 0$, για κάθε $i, 1 \leq i \leq k$.

0.0.13 Θεώρημα. (Artin) *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:
(i) *Το* (X, x) *είναι ένα ρητό ιδίωμα επιφανείας.*
(ii) $p_a(Z_{\text{fund}}) = 0$. (*όπου το* p_a *συμβολίζει εδώ το αριθμητικό γένος*).

0.0.14 Πόρισμα. (Brieskorn) *Εάν το* (X, x) *είναι ένα ρητό ιδίωμα επιφανείας, τότε ο φορέας* $\cup_{i=1}^{k} C_i$ *έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*:
(i) *όλες οι καμπύλες* C_i *είναι λείες και ρητές.*
(ii) $C_i \cap C_j \cap C_l = \varnothing$ *για ανά δύο διάφορους* i, j, l.
(iii) $(C_i \cdot C_j) \in \{0, 1\}$, *για* $i \neq j$.
(iv) *Το γράφημα των* $\{C_i \,|1 \leq i \leq k\}$ *δεν διαθέτει κλειστούς κύκλους.*

0.0.15 Πόρισμα. (Artin) *Εάν το* (X, x) *είναι ένα ρητό ιδίωμα επιφανείας, η*

$$\mathrm{mult}_x(X) = \mathrm{mult}(\mathcal{O}_{X,x})$$

η πολλαπλότητα *τής* X *στο* x *και η*

$$\mathrm{edim}(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\right)$$

[1] Μια διάλυση $f : X' \to X$ των ιδιωμάτων μιας ορθόθετης επιφάνειας X είναι **ελαχιστοτική** όταν το $\mathrm{Exc}(f)$ δεν περιέχει καμία καμπύλη με αριθμό αυτοδιατομής -1 ή, ισοδυνάμως, όταν για οιαδήποτε διάλυση $g : X'' \to X$ των ιδιωμάτων τής X, υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος μορφισμός $h : X'' \to X'$ με $g = f \circ h$.

[2] Μια διάλυση των ιδιωμάτων μιας ορθόθετης επιφάνειας είναι **καλή** όταν (i) οι ανάγωγες συνιστώσες τού εξαιρετικού συνόλου είναι λείες καμπύλες, και (ii) ο φορέας τής αντίστροφης εικόνας καθενός ιδιώματος είναι ένας διαιρέτης με απλές διευθετημένες διασταυρώσεις.

η ελαχίστη διασταση εμφυτεύσεώς *του, τότε* :

$$-Z_{\text{fund}}^2 = \text{mult}_x(X) = \text{edim}(X,x) - 1.$$

0.0.16 Θεώρημα. *Οι ακολουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ρητό ιδίωμα επιφανείας* (X,x):

(i) *Το* (X,x) *είναι ένα κανονιστικό ιδίωμα.*

(ii) *Το* (X,x) *είναι ένα ρητό ιδίωμα Gorenstein.*

(iii) *Το* (X,x) *είναι ένα* ρητό διπλό σημείο (RDP) *ή ένα ιδίωμα τού* Klein *ή τού* Du Val, *ήτοι αναλυτικώς ισοδύναμο προς ένα ιδίωμα υπερεπιφανείας*

$$\left(\left\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid \varphi(z_1,z_2,z_3)=0\right\},(0,0,0)\right)$$

καθοριζόμενο από ένα εκ των οιονεί ομογενών πολυωνύμων τού τύπου A-D-E των καταχωρηθέντων στον ακόλουθο κατάλογο :

Τύπος	$\varphi(z_1,z_2,z_3)$
$\mathbf{A}_n \quad (n\geq 1)$	$z_1^{n+1}+z_2^2+z_3^2$
$\mathbf{D}_n \quad (n\geq 4)$	$z_1^{n-1}+z_1z_2^2+z_3^2$
$\mathbf{E}_6$	$z_1^3+z_2^4+z_3^2$
$\mathbf{E}_7$	$z_1^3+z_2^4+z_3^2$
$\mathbf{E}_8$	$z_1^3+z_2^5+z_3^2$

(iv) *Το* (X,x) *αναλυτικώς ισοδύναμο προς ένα πηλικοϊδίωμα* $\left(\mathbb{C}^2/G,[\mathbf{0}]\right)$, *όπου η* G *συμβολίζει μία πεπερασμένη υποομάδα τής* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. *Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπ' όψιν την* *ταξινόμηση αυτών των ομάδων (μέχρις συζυγίας), εισπράττουμε την αντιστοιχία:*

Τύπος ιδιώματος	$\mathbf{A}_n$	$\mathbf{D}_n$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{E}_8$
Τύπος τής δρώσας ομάδας G	$\mathbf{C}_n$	$\mathbf{D}_n$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{I}$

(Η $\mathbf{C}_n$ *είναι κυκλική ομάδα τάξεως* n *και οι* $\mathbf{D}_n, \mathbf{T}, \mathbf{O}$ *και* $\mathbf{I}$ *οι δυαδικές διεδρικές, τετραεδρικές, οκταεδρικές και εικοσαεδρικές υπομάδες τής* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$*, με τάξεις* $4(n-2)$*,* $24, 48$ *και* 120*, αντιστοίχως).*

(v) [Επαγωγικό κριτήριο] *Το* (X, x) *είναι ένα* απολύτως μεμονωμένο διπλό σημείο*, υπό την έννοια τού ότι για κάθε πεπερασμένη ακολουθία*

$$\{\pi_{j-1} : X_j = \mathbf{Bl}^{\mathrm{red}}_{\{x_{j-1}\}} \longrightarrow X_{j-1} \mid 1 \leq j \leq l\}$$

διογκώσεων με κλειστά (ανηγμένα) σημεία ως κέντρα τους και $X_0 = X$*, τα μόνα ιδιάζοντα σημεία τής* X_l *είναι μεμονωμένα διπλά σημεία. (Ειδικότερα, το* (X, x) *είναι ένα διπλό σημείο υπερεπιφανείας, ο ορθόθετος κώνος τού οποίου είναι είτε μια (όχι κατ' ανάγκην ανάγωγη) επίπεδη κωνική ευθειών ή μια διπλή ευθεία).*

0.0.17 Ορισμός. Έστω (X, x) ένα ορθόθετο ιδίωμα επιφανείας. Ας υποθέσουμε πως το (X, x) είναι ελλειπτικό και Gorenstein. Ορίζουμε την **αναλλοίωτο των Laufer και Reid** $\mathrm{LRI}(X, x)$ τού x εντός τής X ως τον αντίθετο τού αριθμού αυτοδιατομής τού θεμελιώδους κύκλου τού Artin:

$$\mathrm{LRI}\,(X, x) = -Z^2_{\text{fund}}.$$

0.0.18 Θεώρημα. (Laufer, Reid) *Έστω* (X, x) *ένα ορθόθετο ιδίωμα επιφανείας. Εάν το* (X, x) *είναι ελλειπτικό και Gorenstein, τότε* $\mathrm{LRI}(X, x) \geq 1$ *με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Εάν* $\mathrm{LRI}(X, x) = 1$*, τότε*

$$(X, x) \cong (\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 + z_2^3 + \varphi\,(z_2, z_3) = 0\}, (0, 0, 0)),$$

όπου το $\varphi\,(z_2, z_3)$ *είναι ένα άθροισμα μονωνύμων τής μορφής* $z_2 z_3^\kappa$*,* $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$*, και* z_3^κ*,* $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 6}$*. Κατόπιν διογκώσεως*

$$\mathbf{Bl}^{(z_1^3, z_2^2, z_3)}_{\{x\}} \longrightarrow X$$

λαμβάνουμε μια ορθόθετη επιφάνεια που έχει το πολύ ένα σημείο Du Val.

(ii) *Εάν* $\mathrm{LRI}(X,x)=2$, *τότε*

$$(X,x)\cong\left(\left\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; z_1^2+\varphi(z_2,z_3)=0\right\},(0,0,0)\right),$$

όπου το $\varphi(z_2,z_3)$ *είναι ένα άθροισμα μονωνύμων τής μορφής* $z_2^{\kappa}z_3^{\lambda}$, $\kappa+\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 4}$. *Σε αυτήν την περίπτωση η ορθοθετημένη διόγκωση τής* X *στο* x

$$\mathrm{Norm}\left[\mathbf{Bl}^{\mathrm{red}}_{\{x\}}\right]=\mathbf{Bl}^{(z_1^2,z_2,z_3)}_{\{x\}}\longrightarrow X$$

έχει μόνο σημεία Du Val.

(iii) *Εάν* $\mathrm{LRI}(X,x)\geq 2$, *τότε* $\mathrm{LRI}\,(X,x)=\mathrm{mult}_x\,(X)$.

(iv) *Εάν* $\mathrm{LRI}(X,x)\geq 3$, *τότε* $\mathrm{LRI}\,(X,x)=\mathrm{edim}(X,x)$ *και ο υπερκείμενος χώρος τής συνήθους διογκώσεως*

$$\mathbf{Bl}^{\mathrm{red}}_{\{x\}}=\mathbf{Bl}^{\mathfrak{m}_{X,x}}_{\{x\}}\longrightarrow X$$

τού x *είναι μια ορθόθετη επιφάνεια που έχει (το πολύ) ιδιώματα Du Val.*

0.0.19 Θεώρημα. *Έστω* (X,x) *ένα ορθόθετο ιδίωμα επιφανείας. Τότε*[3]

$$\begin{cases}
\text{(i)} & \textit{το } x \textit{ είναι } \text{τερματικό} & \Longleftrightarrow & x\in\mathrm{Reg}\,(X)\\[2ex]
\text{(ii)} & \textit{το } x \textit{ είναι } \text{κανονιστικό} & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix}(X,x)\cong\left(\mathbb{C}^2/G,[\mathbf{0}]\right)\ \text{όπου}\\ G\ \text{μια πεπερασμένη}\\ \text{υποομάδα τής } \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\end{pmatrix}\\[2ex]
\text{(iii)} & \textit{το } x \textit{ είναι } \text{log-τερματικό} & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix}(X,x)\cong\left(\mathbb{C}^2/G,[\mathbf{0}]\right)\ \text{όπου}\\ G\ \text{μια πεπερασμένη}\\ \text{υποομάδα τής } \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\end{pmatrix}\\[2ex]
\text{(iv)} & \textit{το } x \textit{ είναι } \text{log-κανονιστικό} & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix}\text{το } x \text{ είναι απλό ελλειπτικό σημείο,}\\ \text{σημείο ανακάμψεως}\\ \text{ή μη ιδιάζον σημείο}\\ \text{ή πηλικοϊδίωμα}\\ \text{κατασκευαζόμενο μέσω αυτών}\end{pmatrix}
\end{cases}$$

Τ log-τερματικά ιδιώματα επιφανειών είναι ρητά (κατά το θεώρημα 0.0.8). Βεβαίως, κάτι τέτοιο δεν ισχύει και για log-κανονιστικά ιδιώματα επιφανειών που δεν είναι log-τερματικά.

[3]Επεξήγηση ορολογίας: Εάν η $f:X'\to X$ είναι η καλή ελαχιστοτική διάλυση των ιδιωμάτων τής X, τότε το x καλείται **απλό ελλειπτικό σημείο** (και, αντιστοίχως, **σημείο ανακάμψεως** (cusp)) στην περίπτωση κατά την οποία ο φορέας τού εξαιρετικού διαιρέτη ως προς την f ο κείμενος υπεράνω τού x συνίσταται από μια λεία ελλειπτική καμπύλη (και, αντιστοίχως, από έναν κλειστό κύκλο προβολικών ευθειών $\cong\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

(Πιο διεξοδική ταξινόμηση των log-τερματικών και log-κανονιστικών ιδιωμάτων επιφανειών εντοπίζει κανείς σε διάφορες εργασίες των Brieskorn, Iliev, Kawamata, Alexeev και Blache).

• Εν συνεχεία υπενθυμίζουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα τής θεωρίας τρισδιαστάτων τερματικών και κανονιστικών ιδιωμάτων.

0.0.20 Ορισμός. Ένα ορθόθετο τρισδιάστατο ιδίωμα (X, x) καλείται **σύμμικτο ιδίωμα (τού) Du Val** (*cDV sungularity*) όταν για κάποια γενική τομή υπερεπιπέδου $\mathbb{H}$ διερχόμενη από το x, το $(\mathbb{H}, x)$ είναι ένα (σύνηθες) ιδίωμα (τού) Du Val, ή, ισοδυνάμως, όταν

$$(X, x) \cong (\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid \varphi(z_1, z_2, z_3) + z_4 \cdot g(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0\}, (0, 0, 0, 0)),$$

όπου το $\varphi(z_1, z_2, z_3)$ είναι ένα εκ των οιονεί ομογενών πολυωνύμων τού καταλόγου που παρατίθεται στο θεώρημα 0.0.16 (iii) και το $g(z_1, z_2, z_3, z_4)$ τυχόν πολυώνυμο τού $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$. Αναλόγως τού τύπου τού $\varphi(z_1, z_2, z_3)$, το (X, x) καλείται $c\mathbf{A}_n, c\mathbf{D}_n, c\mathbf{E}_6, c\mathbf{E}_7$ και $c\mathbf{E}_8$-σημείο, αντιστοίχως. (Προσοχή! Τ α σύμμικτα ιδιώματα Du Val *δεν* είναι κατ' ανάγκην μεμονωμένα.)

0.0.21 Θεώρημα. (Reid)*Έστω (X, x) ένα τρισδιάστατο ορθόθετο ιδίωμα. Τότε*

$$\left\{\begin{array}{llcc}
\text{(i)} & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ τερματικό} & \Longrightarrow & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ μεμονωμένο} \\
\text{(ii)} & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ τερματικό με δείκτη} = 1 & \Longleftrightarrow & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ μεμονωμένο cDV-σημείο} \\
\text{(iii)} & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ τερματικό με δείκτη } \geq 1 & \Longleftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ πηλίκο ενός} \\ \text{μεμονωμένου cDV-σημείου} \\ \text{δημιουργούμενου μέσω τής} \\ \text{δράσεως μιας πεπερασμένης} \\ \text{κυκλικής ομάδας} \end{array}\right) \\
\text{(iv)} & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ είναι σύμμικτο ιδίωμα Du Val} & \Longrightarrow & \textit{το } x \textit{ είναι} \text{ κανονιστικό}
\end{array}\right.$$

Εκτεταμένοι κατάλογοι ταξινομήσεως 3-διαστάτων τερματικών ιδιωμάτων (οιουδήποτε δείκτη) περιέχονται σε εργασίες των Mori, Reid και Kollar & Shepherd-Barron. Οι διευθετημένες μορφές των οριζουσών εξισώσεων cDV-σημείων εχουν μελετηθεί από τον Markushevich. Από την άλλη μεριά, η ταξινόμηση των 3-διαστάτων τερματικών κυκλικών πηλικοϊδιωμάτων, τα οποία παίζουν έναν σημαντικό ρόλο στις προαναφερόμενες εργασίες, είναι σχετικώς απλή.

0.0.22 Θεώρημα. (Danilov, Morrison-Stevens) *Έστω (X,x) ένα τερματικό τρισδιάστατο ιδίωμα. Τότε*

$$\left(\begin{array}{c} (X,x) \cong \left(\mathbb{C}^3/G, [\mathbf{0}]\right) \text{ όπου η } G \text{ είναι μια} \\ \text{γραμμικώς δρώσα πεπερασμένη κυκλική} \\ \text{υποομάδα τής } \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \text{ χωρίς ψευδοκατοπτρισμούς} \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{η δράση τής } G \text{ δίνεται (μέχρις αναδιατάξεως των} \\ (z_1,z_2,z_3) \text{ και ομαδοθεωρητικών συμμετριών) από την} \\ (z_1,z_2,z_3) \longmapsto (\zeta_\mu^\lambda\, z_1, \zeta_\mu^{-\lambda}\, z_2, \zeta_\mu\, z_3), \text{ όπου } \mu := |G|\,, \\ \gcd(\lambda,\mu) = 1, \text{ και } \zeta_\mu \text{ μια } \mu\text{-οστή ρίζα τής μονάδας} \end{array}\right)$$

• **Αναγωγή των 3-διαστάτων κανονιστικών ιδιωμάτων**. Τα ιδιώματα μιας οιονεί προβολικής τρισδιάστατης μιγαδικής ποικιλότητας X είναι δυνατόν να αναχθούν σε απλούστερα μέσω μιας «κανονιστικής μετατροπής» της $X^{\mathrm{can}} \xrightarrow{g} X$, ούτως ώστε ο $K_{X^{\mathrm{can}}}$ να καθίσταται g-ευρύς. Αλλά και η X^{can} μπορεί να μεταλλαχθεί κάνοντας χρήση μιας «τερματικής μετατροπής» $X^{\mathrm{ter}} \xrightarrow{f} X^{\mathrm{can}}$, ούτως ώστε η X^{ter} να έχει (το πολύ) τερματικά ιδιώματα, όπου η f είναι προβολική και μη αποκλίνουσα. Τέλος, η X^{ter} μπορεί να μεταλλαχθεί έτι περαιτέρω μέσω μιας «$\mathbb{Q}$-τερματικής μετατροπής» $X^{\mathbb{Q}\text{-ter}} \xrightarrow{h} X^{\mathrm{ter}}$, ούτως ώστε η $X^{\mathbb{Q}\text{-ter}}$ να έχει (το πολύ) $\mathbb{Q}$-παραγοντικά τερματικά ιδιώματα και η h να είναι προβολική και ισομορφισμός στη συνδιάσταση 1. Τα κύρια βήματα αυτής τής «εσώτερης» διαδικασίας κατασκευής τής f, τα οποία οφείλονται στον Miles Reid, θα παρουσιασθούν πολύ συνοπτικά και κατόπιν θα εφαρμοσθούν εντός των πλαισίων τής Τορικής Γεωμετρίας.

Βήμα 1. Αναγωγή σε κανονιστικά ιδιώματα δείκτη 1 μέσω επικαλυπτικών απεικονίσεων. Εάν το $x \in X := X^{\mathrm{can}}$ είναι ένα κανονιστικό ιδίωμα με δείκτη ίσο με $\ell > 1$, τότε κανείς θεωρεί την πεπερασμένη επικαλυπτική απεικόνιση

$$\phi : Y = \mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \mathcal{O}_X\left(\ell K_X\right)\right) \longrightarrow X.$$

Η ίνα $\phi^{-1}(x)$ αποτελείται από ένα και μόνον σημείο, ας το πούμε y, και εάν το $y \in Y$ είναι τερματικό, τότε το ίδιο ισχύει και για το $x \in X$. Επιπροσθέτως, εάν η $\psi : Y' \to Y$ είναι μια μη αποκλίνουσα (μερική ή πλήρης) διάλυση των ιδιωμάτων τής Y (όπως αυτές που θα κατασκευασθούν στα επόμενα βήματα), τότε λαμβάνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \downarrow \phi' & & \phi \downarrow \\ Y'/\mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\psi'} & X \end{array}$$

το οποίο επεκτείνει τη δράση τής $\mathbb{Z}_\ell$ επί τού (X, x) σε μια δράση επί της Y', οπου η ψ' είναι μη αποκλίνουσα με τουλάχιστον έναν εξαιρετικό (ανάγωγο) διαιρέτη και η ϕ' είναι etale (επικαλυπτική) στη συνδιάσταση 1.

Βήμα 2. Βεβαρημένες διογκώσεις ιδιωμάτων που δεν είναι cDv. Εφεξής μπορούμε να υποθέτουμε ότι η X περιέχει (το πολύ) κανονιστικά ιδιώματα με δείκτη ίσο με 1 (δηλαδή ιδιώματα ρητά και Gorenstein). Εάν η X περιέχει ιδιώματα $x \in X$ που δεν είναι cDV, τότε, για μια γενική τομή υπερεπιπέδου $\mathbb{H}$ διερχόμενη από το x, το $(\mathbb{H}, x)$ είναι ένα ελλειπτικό ιδίωμα επιφανείας. Κάνοντας χρήση τού θεωρήματος 0.0.18 διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

0.0.23 Πρόταση. (i) *Εάν* $\mathrm{LRI}(\mathbb{H}, x) = 1$, *τότε*

$$(X, x) \cong (\left\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; z_1^2 + z_2^3 + \varphi(z_2, z_3, z_4) = 0\right\}, (0,0,0,0)),$$

με $\varphi(z_2, z_3, z_4) = z_2 F_1(z_3, z_4) + F_2(z_3, z_4)$, *όπου το* F_1 *(και, αντιστοίχως, το* F_2*) είναι ένα άθροισμα μονωνύμων τής μορφής* $z_3^\kappa z_4^\lambda$ *βαθμού* $\kappa + \lambda \geq 4$ *(και, αντιστοίχως,* ≥ 6*).*

(ii) *Εάν* $\mathrm{LRI}(\mathbb{H}, x) = 2$, *τότε*

$$(X, x) \cong (\left\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; z_1^2 + \varphi(z_2, z_3, z_4) = 0\right\}, (0,0,0,0)),$$

όπου το $\varphi(z_2, z_3, z_4)$ *είνια ένα άθροισμα μονωνύμων βαθμού* ≥ 4.

(iii) *Εάν* $\mathrm{LRI}(\mathbb{H}, x) \geq 3$, *τότε* $\mathrm{LRI}(\mathbb{H}, x) = \mathrm{edim}\,(\mathbb{H}, x) = \mathrm{edim}(X, x) - 1$.

Διογκώνοντας το $x \in X$ ως προς τα βάρη $(2,1,1,1), (3,2,1,1)$ και $(1,1,1,1)$ όταν $\mathrm{LRI}(\mathbb{H}, x) = 1, 2$ και ≥ 3, αντιστοίχως, λαμβάνουμε μια προβολική μη αποκλίνουσα (μερική) διάλυση των ιδιωμάτων τής X. Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία για *όλα* τα ιδιώματα που δεν είναι cDV, απαλλασσόμαστε πλήρως από αυτά.

Βήμα 3. Ταυτόχρονη διόγκωση μονοδιάστατων ιδιαζόντων τόπων. Από εδώ και στο εξής μπορούμε να υποθέτουμε ότι η X περιέχει (το πολύ) ιδιώματα cDV. Εάν ο ιδιάζων της τόπος $\mathrm{Sing}(X)$ έχει μονοδιάστατες συνιστώσες, τότε διογκώνουμε την ένωσή τους (εφοδιασμένη με την ανηγμένη διασχηματική δομή). Αυτή η διόγκωση υλοποιείται μέσω ενός «μικρού», μη αποκλίνοντος αμφιρρήτου μορφισμού. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία πεπερασμένου πλήθους φορές καταλήγουμε στο να έχουμε αναγάγει τα ιδιώματά μας σε μεμονωμένα cDV-ιδιώματα, ήτοι σε τερματικά ιδιώματα με δείκτη 1.

Βήμα 4 (προαιρετικό) Πλήρεις διαλύσεις ιδιωμάτων. Ενίοτε είναι χρήσιμο να διαλύονται τα ιδιώματα τής τρισδιάστατης ποικιλότητας αναφοράς μας *απ' άκρου εις άκρον*, διαλύοντας και τα εναπομείναντα τερματικά ιδιώματα (ει δυνατόν) μέσω «μικρών», μη αποκλινόντων αμφιρρήτων μορφισμών.

ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΟΡΙΚΩΝ ΙΔΙΩΜΑΤΩΝ

Διακριτή Γεωμετρία	**Αλγεβρική Γεωμετρία**
ισχυρώς κυρτός ρητός πολυεδρικός κώνος $\sigma \subset \mathbb{R}^r$	Η U_σ είναι πάντοτε ορθόθετη, και Cohen-Macaulay
$\mathrm{orb}\,(\sigma) \in U_\sigma$, σέένας μη βασικός κώνος τής μεγίστης δυνατής διαστάσεως r (διατηρούμε αυτήν την προϋπόθεση σε ό,τι ακολουθεί)	Το $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ είναι ένα ρητό ιδίωμα
$\exists!\ m_\sigma \in M_{\mathbb{Q}}$: $\mathrm{Gen}\,(\sigma) \subset \{y \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, y\rangle = 1\}$	Η U_σ είναι $\mathbb{Q}$-Gorenstein και το $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ είναι ένα log-τερματικό ιδίωμα με δείκτη ίσο με το $\min\{\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid m_\sigma \kappa \in M\}$
$\left\{ \begin{array}{l} \exists!\ m_\sigma \in M_{\mathbb{Q}} : \\ \mathrm{Gen}\,(\sigma) \subset \{y \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, y\rangle = 1\} \\ \text{και}\ \ N \cap \sigma \cap \{y \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, y\rangle < 1\} = \{\mathbf{0}\} \end{array} \right.$	Το $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ είναι ένα κανονιστικό ιδίωμα με δείκτη ίσο με το $\min\{\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid m_\sigma \kappa \in M\}$
$\left\{ \begin{array}{l} \exists!\ m_\sigma \in M_{\mathbb{Q}} : \\ \mathrm{Gen}\,(\sigma) \subset \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, \mathbf{x}\rangle = 1\} \\ \text{και}\ \ N \cap \sigma \cap \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, \mathbf{x}\rangle \leq 1\} \\ = \{\mathbf{0}\} \cup \mathrm{Gen}\,(\sigma) \end{array} \right.$	Το $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ είναι ένα τερματικό ιδίωμα με δείκτη ίσο με το $\min\{\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid m_\sigma \kappa \in M\}$
$\left\{ \begin{array}{l} \exists!\ m_\sigma \in M : \\ \mathrm{Gen}\,(\sigma) \subset \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, \mathbf{x}\rangle = 1\} \\ \text{με τον } \sigma \text{ να στηρίζει το κιγκλιδωματικό πολύτοπο} \\ P_\sigma := \sigma \cap \{\mathbf{x} \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_\sigma, \mathbf{x}\rangle = 1\}\ \text{και} \\ N \cap \mathrm{conv}\,(\{\mathbf{0}\} \cup P_\sigma) = \{\mathbf{0}\} \cup (N \cap P_\sigma) \end{array} \right.$	Το $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ είναι ένα ιδίωμα Gorenstein (ήτοι ένα κανονιστικό ιδίωμα με δείκτη ίσο με το 1)
Το ανωτέρω P_σ είναι κιγκλιδωματικώς ισοδύναμο με κάποιο πολύτοπο τού Nakajima	Το $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ είναι τοπικώς ένα ιδίωμα πλήρους διατομής

Παράδειγμα ενός 2-διάστατου τορικού ιδιώματος $(U_\sigma, \mathrm{orb}(\sigma))$. Αυτό είναι κατ' ανάγκην κυκλικό πηλικοϊδίωμα. Η εικόνα Fig. **1** δείχνει την ελαχιστοτική διάλυση $U_\sigma \xleftarrow{f} X(N, \Delta')$ αυτού τού ιδιώματος τού U_σ που κατασκευάζεται κατόπιν υποδιαιρέσεως τού κώνου

$$\sigma = \mathrm{pos}\left(\{(1,0),(4,5)\}\right) \subset \mathbb{R}^2$$

σε δύο μικρότερους «βασικούς» κώνους.

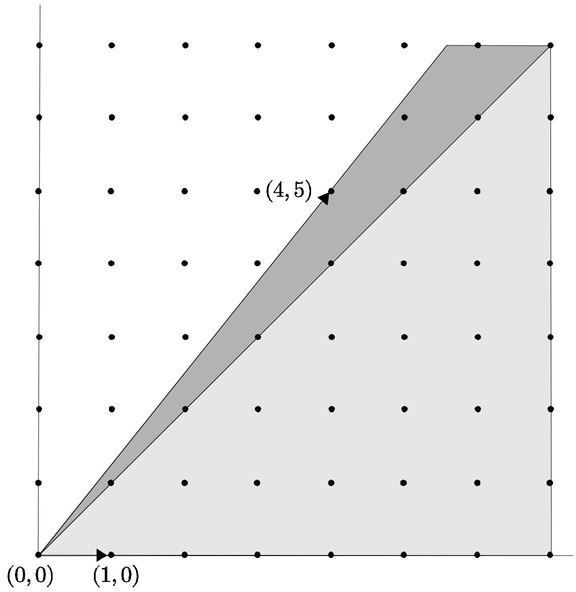


Fig. 1

Έχουμε $U_\sigma = \mathbb{C}^2/G$, όπου $G \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξεως 5 παραγόμενη από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}} \end{pmatrix}.$$

Το $(U_\sigma, \mathrm{orb}(\sigma))$ έχει διάσταση εμφυτεύσεως 6 και δεν είναι πλήρης διατομή, καθότι μπορεί να περιγραφεί ως ο χώρος λύσεων $\binom{5}{2} = 10$ μονωνυμικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα,

$$U_\sigma \cong \left\{ (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^6 \;\middle|\; \mathrm{rank} \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix} \leq 2 \right\}.$$

Πράδειγμα εφαρμογής τής στρατηγικής διαλύσεως ιδιωμάτων κατά M. Reid για ένα τρισδιάστατο τορικό ιδίωμα Gorenstein. Ας θεωρήσουμε τον κώνο $\sigma = \mathrm{pos}(P) \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$ ο οποίος στηρίζει το κιγκλιδωματικό τρίγωνο

$$P = \text{ conv}\{(-3,3,1), (3,1,1), (0,-3,1)\}$$

τής Fig. **2** (ως προς το σύνηθες ορθογώνιο κιγκλίδωμα $\mathbb{Z}^3$).

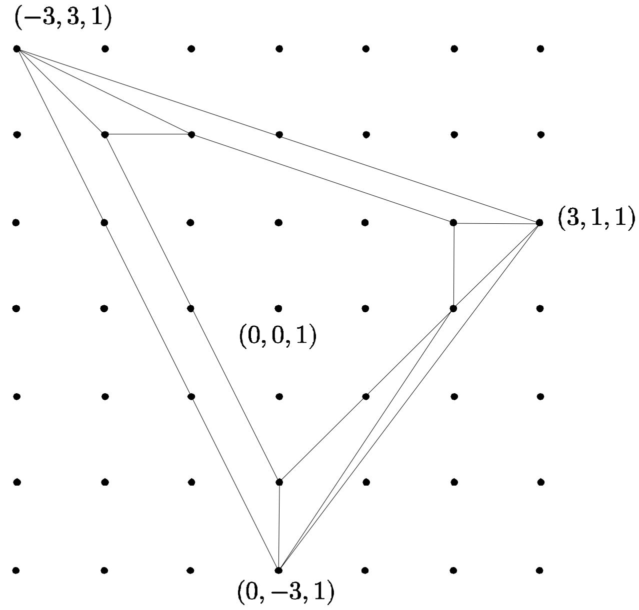


Fig. 2

Το ιδίωμα $(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma))$ έχει διάσταση εμφυτεύσεως

$$\mathrm{edim}\,(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma)) = \#(\mathbf{Hlb}_{(\mathbb{Z}^3)^\vee}\,(\sigma^\vee)) = 14.$$

Επομένως, κατά το θεώρημα 0.0.18 (iv) and την πρόταση 0.0.23 (iii), η αναλλοίωτος των Laufer και Reid ισούται με

$$\mathrm{LRI}\,(\mathbb{H}, \mathrm{orb}\,(\sigma)) = \mathrm{edim}\,(\mathbb{H}, x) = \mathrm{edim}\,(U_\sigma, \mathrm{orb}\,(\sigma)) - 1 = 13.$$

Η Fig. **3** δείχνει το αποτέλεσμα τής (συνήθους) διογκώσεως τού $\mathrm{orb}(\sigma) \in U_\sigma$.
Αξίζει να σημειωθεί ότι ο «κεντρικός» νέος κώνος $\sigma' = \mathrm{pos}(P')$ εντός του σ στηρίζει το κιγκλιδωματικό πεντάγωνο

$$P' = \text{ conv}\,(\{(-2,2,1), (-1,2,1), (2,1,1), (2,0,1), (0,-2,1)\}),$$

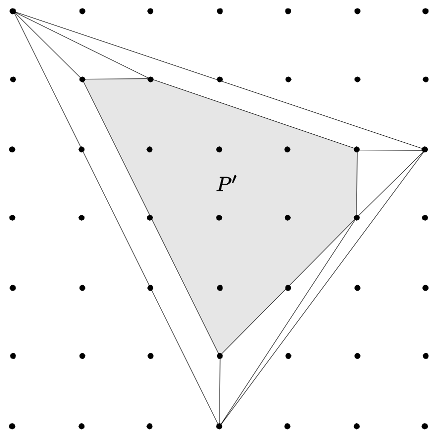


Fig. 3

το οποίο ορίζεται ως το κυρτό περίβλημα (κυρτή θήκη) των εσωτερικών κιγκλιδωματικών σημείων τού P. Με πολλαπλή εφαρμογή των ενδιάμεσων βημάτων καταλήγουμε στην πολυγωνική υποδιαίρεση τού P τής Fig. **4**.

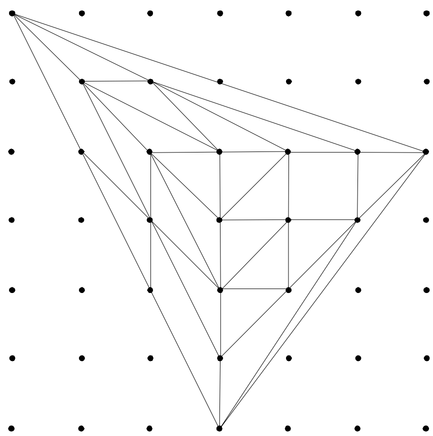


Fig. 4

Στο τελευταίο βήμα έχουμε $2^3 = 8$ δυνατές επιλογές (για το πώς φέρουμε τις διαγωνίους για τον σχηματισμό τριγωνισμού).