

D.I. Dais

**Der Weg, der zu den
teuflischen Triangulierungen führt**

Berlin, Juli 1995

Der Weg, der zu den teuflischen Triangulierungen führt.

1 Sekundäres Polytop

Sei $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$ eine endliche Teilmenge von \mathbb{R}^r , $k \geq r$, die eine affine Hyperebene bestimmt. Eine *Triangulierung* von \mathcal{A} ist eine Triangulierung des $(r-1)$ -dimensionalen ("primären") Polytops $P := \text{conv}(\mathcal{A})$ mit Eckpunkten aus \mathcal{A} . Man definiert das *sekundäre Polytop* Q von \mathcal{A} (vgl. [1], S. 158, [3], S. 220) durch

$$Q := \text{conv} \{ \phi_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \text{ Triangulierung von } \mathcal{A} \},$$

wobei

$$\phi_{\mathcal{T}} := \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^{\nu} \{ \text{Vol}(\tau_j) : a_i \in \tau_j \} \right] \cdot e_i$$

die "charakteristische Funktion von \mathcal{T} " bezeichnet.

In dieser Formel ist $\left\{ e_i := \left(0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, 0 \right) \mid 1 \leq i \leq k \right\}$ die gewöhnliche Vektorraumbasis von

\mathbb{R}^k , $\mathcal{T}^{(r-1)} = \{\tau_1, \dots, \tau_{\nu}\}$ eine Numerierung der $(r-1)$ -dimensionalen Simplices von \mathcal{T} mit $\tau_j := \text{conv}(\{b_1^{(j)}, \dots, b_r^{(j)}\})$, $1 \leq j \leq \nu$, und

$$\mathcal{A} = \cup_{j=1}^{\nu} \{b_1^{(j)}, \dots, b_r^{(j)}\}$$

die entsprechende Numerierung der Punkte a_1, \dots, a_k von \mathcal{A} ($k \leq r\nu$).

Definition 1.1 Eine Funktion $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt \mathcal{T} -stückweise linear falls sie affin-linear auf jedem Simplex τ von \mathcal{T} ist. Eine solche Funktion heißt stark konkav, wenn für alle $x, y \in P$, $0 \leq t \leq 1$, $h(tx + (1-t)y) \geq th(x) + (1-t)h(y)$, und $h|_{\tau} \neq h|_{\tau'}$ für (maximale) Simplices τ, τ' von \mathcal{T} . Eine Triangulierung \mathcal{T} von \mathcal{A} heißt kohärent oder kombinatorisch regulär, wenn auf P mindestens eine \mathcal{T} -stückweise lineare stark konkave Funktion definiert werden kann.

Theorem 1.2 ([1], S. 160, [3], S.221) (i) Q hat Dimension $k-r$.

(ii) Es existiert eine Bijektion der Eckpunktmenge von Q auf die Menge aller kohärenten Triangulierungen von \mathcal{A} .

Corollary 1.3 ([1], S. 161, [3], S.221) Sind \mathcal{T} und \mathcal{T}' zwei Triangulierungen von \mathcal{A} mit $\phi_{\mathcal{T}} = \phi_{\mathcal{T}'}$ und $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, so sind beide nicht kohärent.

Beweis. Wäre z.B \mathcal{T} kohärent, so wäre \mathcal{T}' ebenfalls kohärent, denn $\phi_{\mathcal{T}} = \phi_{\mathcal{T}'}$. Nach 1.2 hätten wir dann $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. □

Corollary 1.4 Wenn wir annehmen, daß die Simplices, die in irgendeiner Triangulierung von \mathcal{A} enthalten sein können, alle gleiches Volumen besitzen, dann besteht jedes "sternerhaltende" Paar $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, aus zwei nicht kohärenten Triangulierungen.

(Ich nenne ein Paar $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, genau dann sternerhaltend, wenn

$\#\{\text{Simplices des Sternes des Punktes } a_i \text{ bzgl. } \mathcal{T}\} = \#\{\text{Simplices des Sternes des Punktes } a_i \text{ bzgl. } \mathcal{T}'\}$, für alle $i, 1 \leq i \leq k$, gilt.)

2 Anwendung des letzten Korollars zur Konstruktion nicht projektiver Auflösungen einer Klasse von drei-dimensionalen abelschen Gorensteinschen Quotientensingularitäten

Sei $X(N, \Delta)$ eine r -dimensionale *glatte (nicht unbedingt kompakte)* torische Varietät (bzgl. des Fächers Δ und des Gitters N). Wir definieren die additiven Gruppen der linearen, bzw. stark konkaven linearen Δ -Trägerfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{LSF}(N, \Delta) & : = \{h : |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}, h(N \cap |\Delta|) \subset \mathbb{Z}, h \text{ linear auf } \sigma, \forall \sigma \in \Delta\}, \text{ bzw.} \\ \text{SCLSF}(N, \Delta) & : = \{h \in \text{LSF}(N, \Delta) \mid h \text{ stark konkav bzgl. } \Delta\}. \end{aligned}$$

(Bemerkung: (i) $h \in \text{LSF}(N, \Delta) \iff \forall \sigma \in \Delta, \exists l_\sigma \in M$, so daß $h(n) = \langle l_\sigma, n \rangle, \forall n \in \sigma$, und $\langle l_\sigma, n \rangle = \langle l_\tau, n \rangle \iff n \in \tau \prec \sigma$.
(ii) $h \in \text{LSF}(N, \Delta)$ heißt *stark konkav* bzgl. Δ : \iff für alle $\sigma \in \Delta(r)$ und alle $n \in N_\mathbb{R}$ ist $h(n) \leq \langle l_\sigma, n \rangle$, mit " = " genau dann, wenn $n \in \sigma$.)

Theorem 2.1 *Es bestehen folgende Bijektionen:*

$$\begin{array}{ccc} h \in \text{LSF}(N, \Delta) & \supset & \text{SCLSF}(N, \Delta) \\ \downarrow & \uparrow 1:1 & \uparrow 1:1 \\ D_h \in T_N \text{Div}(X(N, \Delta)) = \bigoplus_{\varrho \in \Delta(1)} \mathbb{Z}V(\varrho) & \supset & \{\text{ample Divisoren auf } X(N, \Delta)\}, \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} D_h & : = - \sum_{\varrho \in \Delta(1)} h(n(\varrho)) V(\varrho), \quad V(\varrho) := \overline{\text{orb}(\varrho)}, \\ \text{und } n(\varrho) & \in N \cap \varrho \text{ primitiv (mit } \varrho = \mathbb{R}_{\geq 0}n(\varrho)). \end{aligned}$$

Beweis. Man findet den Beweis für die erste Bijektion bei Oda [5], Prop. 2.1, S. 68-69. Für die zweite Bijektion, falls $X(N, \Delta)$ kompakt ist, siehe [5], Cor. 2.14, S. 83. Der allgemeine Fall wird in [4], Chap. I, §3, Th. 9, S. 42 und Th. 13, S. 48, behandelt. \square

Corollary 2.2 *Eine torische (bzw. eine kompakte torische) Varietät $X(N, \Delta)$ ist quasiprojektiv (bzw. projektiv) $\iff \text{SCLSF}(N, \Delta) \neq \emptyset$.*

Sei nun

$$X(N_G, \Delta'_0(\mathcal{T})) \rightarrow X(N_G, \Delta_0)$$

eine T_{N_G} -äquivalente nicht-diskrepante Auflösung einer 3-dimensionalen Gorensteinschen abelschen Quotientensingularität $X(N_G, \Delta_0) = \mathbb{C}^3 / G$, die mittels einer Triangulierung \mathcal{T} des "primären Polytops" ,d.h. des Dreiecks $s_0 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ (mit Eckpunkten genau die Punkte von $s_0 \cap N_G$), bestimmt wird.

Es bestehen offensichtlich folgende Bijektionen:

$$\begin{aligned} \{\text{Fächer } \Delta'_0(\mathcal{T})\} & \supset \Delta'_0(\mathcal{T})(i) \ni \sigma \longleftrightarrow (i-1) - \text{dim. Simpleses } s(\sigma) \in \{\text{Triang. } \mathcal{T}\} \\ & \forall i, i \in \{1, 2, 3\}, \text{ mit} \\ s(\sigma) & : = \left\{ y \in N_\mathbb{R} \mid y = \sum_{\mu=1}^i \lambda_\mu n_\mu \text{ mit } \sum_{\mu=1}^i \lambda_\mu = 1 \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}, \\ \text{falls } \sigma & = \mathbb{R}_{\geq 0}n_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}n_i, \\ \text{SCLSF}(N_G, \Delta'_0(\mathcal{T})) & \ni h \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T} \text{ - stückweise lineare stark konkave Funktionen} \\ \tilde{h} : \text{conv}\{n \mid n \in s_0 \cap N_G\} (= s_0) \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right. \\ \text{mit } h(\sigma) & : = \tilde{h}(s(\sigma)), \forall \sigma \in \Delta'_0(\mathcal{T})(i). \end{aligned}$$

Da die Voraussetzungen von 1.4 von $\mathcal{A} = s_0 \cap N_G$ und all seinen Triangulierungen \mathcal{T} erfüllt werden, kann man nicht projektive (nicht-diskrepante) Desingularisierungen

$$X(N_G, \Delta'_0) \rightarrow X(N_G, \Delta_0)$$

auf "natürliche Weise" konstruieren, indem man derartige operierende Gruppen G wählt, daß $\text{conv}(\mathcal{A})$ sternerhaltende Paare besitzt.

In [2] wurde die folgende unendliche Familie G_k von abelschen auf \mathbb{C}^3 operierenden Gruppen mit der obigen Eigenschaft definiert. (Jede der Triangulierungen, die als ein Element eines sternerhaltenden Paares in dieser Konstruktion auftritt, wird *teuflich* genannt. Diese Triangulierungen sind in der Tat teuflich, denn sie zerstören die Projektivität des entsprechenden Auflösungsmorphismus, obwohl sie typisch-göttliche Symmetrien aufweisen.)

Für $k \geq 2$ definieren wir

$$G_k := \left\{ \text{diag} \left(\zeta_k^a, \zeta_k^b, \zeta_k^c \right) : a + b + c \equiv 0 \pmod{k} \right\} \text{ mit } \zeta_k := \exp \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k} \right).$$

Es ist $G_k = \left\langle \text{diag} \left(\zeta_k, \zeta_k^{k-1}, 1 \right), \text{diag} \left(1, \zeta_k, \zeta_k^{k-1} \right) \right\rangle$ und $|G_k| = k^2$.

Sei $X(N_{G_k}, \Delta'_0) \rightarrow X(N_{G_k}, \Delta_0)$ eine beliebige nicht-diskrepante Desingularisierung von $X(N_{G_k}, \Delta_0) = \mathbb{C}^3/G_k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \#(\text{Int}(s_0) \cap N_{G_k}) &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} \\ \#(\partial(s_0) \cap N_{G_k}) &= 3k \\ \#((s_0 \setminus \{e_1, e_2, e_3\}) \cap N_{G_k}) &= \frac{(k-1)(k+4)}{2} \\ \text{Anzahl der 0-Simplices einer beliebigen Triangulierung } \mathcal{T} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ \text{Anzahl der 1-Simplices einer beliebigen Triangulierung } \mathcal{T} &= \frac{3k(k+1)}{2} \\ \text{Anzahl der 2-Simplices einer beliebigen Triangulierung } \mathcal{T} &= k^2 \end{aligned}$$

Theorem 2.3 ([2]) *Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann existieren für jedes k ,*

$$3n + 1 \leq k \leq 3n + 3,$$

mindestens ℓ_k nicht kohärente Triangulierungen \mathcal{T} von s_0 , d.h. mindestens ℓ_k nicht projektive Auflösungen

$$X(N_{G_k}, \Delta'_0(\mathcal{T})) \rightarrow X(N_{G_k}, \Delta_0),$$

wobei

$$\ell_k := \begin{cases} 2, & \text{falls } n = 1, & k \in \{4, 5\} \\ 4, & \text{falls } n = 1, & k = 6 \\ \prod_{\rho=0}^{n-1} (\varepsilon_\rho + 2) - \prod_{\rho=0}^{n-1} \varepsilon_\rho, & \text{falls } n \geq 2, & k \in \{3n + 1, 3n + 2\} \\ 2 \left(\prod_{\rho=0}^{n-1} (\varepsilon_\rho + 2) - \prod_{\rho=0}^{n-1} \varepsilon_\rho \right), & \text{falls } n \geq 2, & k = 3n + 3 \end{cases}$$

mit

$$\varepsilon_\rho := \begin{cases} 2 \left(\frac{k - 3\rho - 4}{2} - 2 \right), & \text{falls } \begin{cases} \text{entweder } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } \rho \equiv 0 \pmod{2} \\ \text{oder } k \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ und } \rho \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \\ 2 \left(\frac{k - 3\rho - 1}{2} - 2 \right), & \text{falls } \begin{cases} \text{entweder } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } \rho \not\equiv 0 \pmod{2} \\ \text{oder } k \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ und } \rho \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall \rho, \rho \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Bemerkung: Die Zahl ℓ_k wächst rapide....

k	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ℓ_k	2	2	4	20	32	104	864	2352	15088

References

- [1] BILLERA L.J., FILLIMAN P., STURMFELS B. : *Construction and Complexity of Secondary Polytopes*, Adv. in Math. **83**, (1990), 155-179.
- [2] DAIS D.I. : *Teuflische Triangulierungen*[®], unpublished notes, Juli 1993.
- [3] GELFAND I.M., KAPRANOV M.M., ZELEVINSKY A.V. : *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Mathematics: Theory & Applications. (Ed. V.Kadison, I.M.Singer), Birkhäuser, ISBN 3-7643-3600-9, (1994).
- [4] KEMPF G., KNUDSEN F., MUMFORD D., SAINT-DONAT D. : *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **339**, (1973), Springer Verlag.
- [5] ODA T. : *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the theory of toric varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. **15**, ISBN 3-540-17600-4, Springer Verlag, (1988).

D.I. Dais

Teuflische Triangulierungen

Bonn, Juli 1993

D. Dais (30.7.1993)

Teufelische Triangulierungen

①

Definiere für $k \geq 2$ die Gruppe:

$$G_k := \left\{ \text{diag} \left(\zeta_k^a, \zeta_k^b, \zeta_k^c \right) \mid a+b+c \equiv 0 \pmod{k} \right\}, \quad \zeta_k := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}\right),$$

mit $|G_k| = k^2$.

Sei $X_{G_k} = T_{N_{G_k}} \text{emb}(\Delta_0) \xleftarrow{\pi} \hat{X}_{G_k} = T_{N_{G_k}} \text{emb}(\Delta_0^*(S))$ eine beliebige

minimale torische Auflösung von X_{G_k} und $s_0 := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Dann gilt:
(nicht-diskrepant)

$$\# \left((s_0)^\circ \cap N_{G_k} \right) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

$$\# \left(\partial s_0 \cap N_{G_k} \right) = 3k$$

$$\# \Phi_{G_k} = \# \left((s_0 \setminus \{e_1, e_2, e_3\}) \cap N_{G_k} \right) = \frac{(k-1)(k+1)}{2}$$

$$\nu(0) = \# \Phi_{G_k} + 3 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\nu(1) = \frac{3}{2} k(k+1)$$

$$\nu(2) = k^2$$

($\nu(i)$:= Anzahl der i -simplices)

Theorem Sei n eine beliebige natürliche Zahl ≥ 1 . Dann existieren für jedes k , $3n+1 \leq k \leq 3n+3$, mindestens l_k nicht reguläre Triangulierungen \mathcal{S} von s_0 , d.h. mindestens l_k nicht quasiprojektive ^{minimale} Desingularisierungen \hat{X}_{G_k} von X_{G_k} , wobei

$$l_k := \begin{cases} 2 & , \text{ falls } n=1, k \in \{4, 5\} \\ 4 & , \text{ falls } n=1, k=6 \\ \prod_{p=0}^{n-1} (\varepsilon_p + 2) - \prod_{p=0}^{n-1} \varepsilon_p & , \text{ falls } n \geq 2, k \in \{3n+1, 3n+2\} \\ 2 \cdot \left(\prod_{p=0}^{n-1} (\varepsilon_p + 2) - \prod_{p=0}^{n-1} \varepsilon_p \right) & , \text{ falls } n \geq 2, k=3n+3 \end{cases}$$

mit

$$\varepsilon_p := \begin{cases} 2 \cdot \begin{pmatrix} k-3p-4 \\ \frac{k-3p}{2} - 2 \end{pmatrix} & , \text{ falls } \begin{cases} \text{entweder } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \equiv 0 \pmod{2} \\ \text{oder } k \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} k-3p-4 \\ \frac{k-3p-1}{2} - 2 \end{pmatrix} & , \text{ falls } \begin{cases} \text{entweder } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \not\equiv 0 \pmod{2} \\ \text{oder } k \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall p, 0 \leq p \leq n-1$$

Beweis: Für $3n+1 \leq k \leq 3n+3$ konstruieren wir l_k disjunkte nicht reguläre Triangulierungen von s_0 wie folgt: Für alle i , $0 \leq i \leq n$, bilden wir zunächst n "geschachtelte" Dreiecke $s_i := \langle \frac{1}{k}(k-2i, i, i), \frac{1}{k}(i, k-2i, i), \frac{1}{k}(i, i, k-2i) \rangle$, für welche gilt:

$$\#((s_i)^\circ \cap N_{G_k}) = \frac{(k-3i-1)(k-3i-2)}{2}$$

und

$$\#((\partial s_i) \cap N_{G_k}) = 3(k-3i).$$

Insbesondere ist $\partial s_i \cap N_{G_k} = L_i^{1,2} \cup L_i^{2,3} \cup L_i^{3,1}$, wobei:

$$\begin{cases} \Gamma_i^{1,2} := \{ v_{i,0}^{1,2}, v_{i,1}^{1,2}, \dots, v_{i,k-3i}^{1,2} \} \\ \Gamma_i^{2,3} := \{ v_{i,0}^{2,3}, v_{i,1}^{2,3}, \dots, v_{i,k-3i}^{2,3} \} \\ \Gamma_i^{3,1} := \{ v_{i,0}^{3,1}, v_{i,1}^{3,1}, \dots, v_{i,k-3i}^{3,1} \} \end{cases}$$

mit

$$\begin{cases} v_{i,j_i}^{1,2} := \frac{1}{k} (k-2i-j_i, j_i+i, i)^t \\ v_{i,j_i}^{2,3} := \frac{1}{k} (i, k-2i-j_i, j_i+i)^t \\ v_{i,j_i}^{3,1} := \frac{1}{k} (j_i+i, i, k-2i-j_i)^t, \quad \forall j_i, j_i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j_i \leq k-3i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_i^{1,2} \cap \Gamma_i^{2,3} = \{ v_{i,0}^{2,3} = v_{i,k-3i}^{1,2} = \frac{1}{k} (i, k-2i, i)^t \} \\ \Gamma_i^{1,2} \cap \Gamma_i^{3,1} = \{ v_{i,0}^{1,2} = v_{i,k-3i}^{3,1} = \frac{1}{k} (k-2i, i, i)^t \} \\ \Gamma_i^{2,3} \cap \Gamma_i^{3,1} = \{ v_{i,0}^{3,1} = v_{i,k-3i}^{2,3} = \frac{1}{k} (i, i, k-2i)^t \} \end{cases}$$

und

$$(s_n)^\circ \cap N_{G_k} = \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } k \in \{3n+1, 3n+2\} \\ \{ \text{das Baryzentrum } v_{\text{bar}} := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^t \}, \text{ falls } k=3n+3. \end{cases}$$

Nun ist für alle $p, 0 \leq p \leq n-1$, $((s_p)^\circ \setminus s_{p+1}) \cap N_{G_k} = \emptyset$

und $s_p \setminus (s_{p+1})^\circ$ stellt einen geschlossenen Streifen innerhalb s_0 dar.

Wir versehen $s_p \setminus (s_{p+1})^\circ$ mit zwei disjunkten "schiefen" Triangulierungen

$$\mathcal{T}_p^1 := \{ \{s_p \setminus (s_{p+1})^\circ\} \cup \{ \langle v_{p,0}^{\alpha,\beta}, v_{p+1, \mu_{p+1}}^{\alpha,\beta} \rangle \mid \forall \mu_{p+1} \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \mu_{p+1} \leq k-3(p+1) \} \cup \{ \langle v_{p, \xi_p}^{\alpha,\beta}, v_{p+1, k-3p}^{\alpha,\beta} \rangle \mid \forall \xi_p \in \mathbb{N}, 1 \leq \xi_p \leq k-3p \}, \text{ wobei } (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \}$$

und

$$\mathcal{T}_p^2 := \{ \{s_p \setminus (s_{p+1})^\circ\} \cup \{ \langle v_{p, k-3p}^{\alpha,\beta}, v_{p+1, \mu_{p+1}}^{\alpha,\beta} \rangle \mid \forall \mu_{p+1} \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \mu_{p+1} \leq k-3(p+1) \} \cup \{ \langle v_{p, \xi_p}^{\alpha,\beta}, v_{p+1, 0}^{\alpha,\beta} \rangle \mid \forall \xi_p \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \xi_p \leq k-3p-1 \}, \text{ wobei } (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \}.$$

Wenn $n \geq 2$ ist, definieren wir für $(\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

die Dreiecke

(Dreiecke am Rande)

$$\bar{S}_p^{\alpha, \beta} := \begin{cases} \langle \mathcal{U}_{\frac{k-3p}{2}}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{\frac{k-3(p+1)-1}{2}}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{\frac{k-3(p+1)+1}{2}}^{\alpha, \beta} \rangle, & \text{falls } \begin{cases} \text{entweder } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \equiv 0 \pmod{2} \\ \text{oder } k \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \\ \langle \mathcal{U}_{\frac{k-3p+1}{2}}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{\frac{k-3p-1}{2}}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{\frac{k-3p+1}{2}}^{\alpha, \beta} \rangle, & \text{falls } \begin{cases} \text{entweder } k \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \not\equiv 0 \pmod{2} \\ \text{oder } k \not\equiv 0 \pmod{2} \text{ und } p \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \end{cases}$$

und (mittlere Dreiecke)

$$\tilde{S}_p^{\alpha, \beta} := \langle \mathcal{U}_{p,0}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p,2}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p, k-3p-2}^{\pi(\alpha), \pi(\beta)} \rangle, \text{ wobei } \pi: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\} \text{ die}$$

Permutation $\pi(1)=3, \pi(2)=1, \pi(3)=2$ bezeichnet.

Seien $\mathcal{U}_p, \hat{\mathcal{U}}_p$ die folgenden Unterteilungen von $\left\{ \bigcup_{(\alpha, \beta)} \tilde{S}_p^{\alpha, \beta} \mid (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\}$

$$\mathcal{U}_p := \left\{ \left\{ \bigcup_{(\alpha, \beta)} \tilde{S}_p^{\alpha, \beta} \mid (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\}, \langle \mathcal{U}_{p,0}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p+1,0}^{\alpha, \beta} \rangle, \langle \mathcal{U}_{p,1}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p+1,0}^{\alpha, \beta} \rangle, \langle \mathcal{U}_{p+1,0}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p, 3k-p-1}^{\pi(\alpha), \pi(\beta)} \rangle \right\}$$

$$\hat{\mathcal{U}}_p := \left(\mathcal{U}_p \setminus \left\{ \bigcup_{(\alpha, \beta)} \langle \mathcal{U}_{p,0}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p+1,0}^{\alpha, \beta} \rangle \mid (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\} \right) \cup \left\{ \bigcup_{(\alpha, \beta)} \langle \mathcal{U}_{p,1}^{\alpha, \beta}, \mathcal{U}_{p, 3k-p-1}^{\pi(\alpha), \pi(\beta)} \rangle \mid (\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\}$$

($\hat{\mathcal{U}}_p$ entsteht also aus \mathcal{U}_p durch drei symmetrische elementare Transformationen)

Nun betrachten wir den Anteil $S_p \setminus ((S_{p+1})^{\circ} \cup \bigcup_{(\alpha, \beta)} \{ (\bar{S}_p^{\alpha, \beta})^{\circ} \cup (\tilde{S}_p^{\alpha, \beta})^{\circ} \})$.
 Er besteht, je nach Werten von k und p , entweder aus drei Paaren von Parallelogrammen $P_p^{\alpha, \beta}, P_p^{\prime \alpha, \beta}$ oder aus drei Paaren von Trapezoiden $Q_p^{\alpha, \beta}, Q_p^{\prime \alpha, \beta}$, deren Elemente sich voneinander um eine räumliche Drehung um 180° bzgl. der durch $\mathcal{U}_{\frac{k-3p}{2}}^{\alpha, \beta}$ (bzw. $\mathcal{U}_{\frac{k-3(p+1)}{2}}^{\alpha, \beta}$) und v_{bar} bestimmten Gerade unterscheiden. (siehe Fig. 1 und 2).

$P_p^{\alpha, \beta}$ (bzw. $Q_p^{\alpha, \beta}$) besitzt genau $k-3p-2$

Gitterpunkte aus $\mathbb{N} \mathbb{G}_k$ und deswegen ist die gesamte Anzahl all seiner möglich Triangulierungen $\frac{e_p}{2}$. Sei $\{ \mathbb{F}_{p,1}^{\alpha, \beta}, \dots, \mathbb{F}_{p, \frac{e_p}{2}}^{\alpha, \beta} \}$ eine Numerierung dieser Triangulierungen. Ferner sei $\mathbb{V}_{p,1}^{\alpha, \beta}, \dots, \mathbb{V}_{p, \frac{e_p}{2}}^{\alpha, \beta}$ die Triangulierung von

⑤

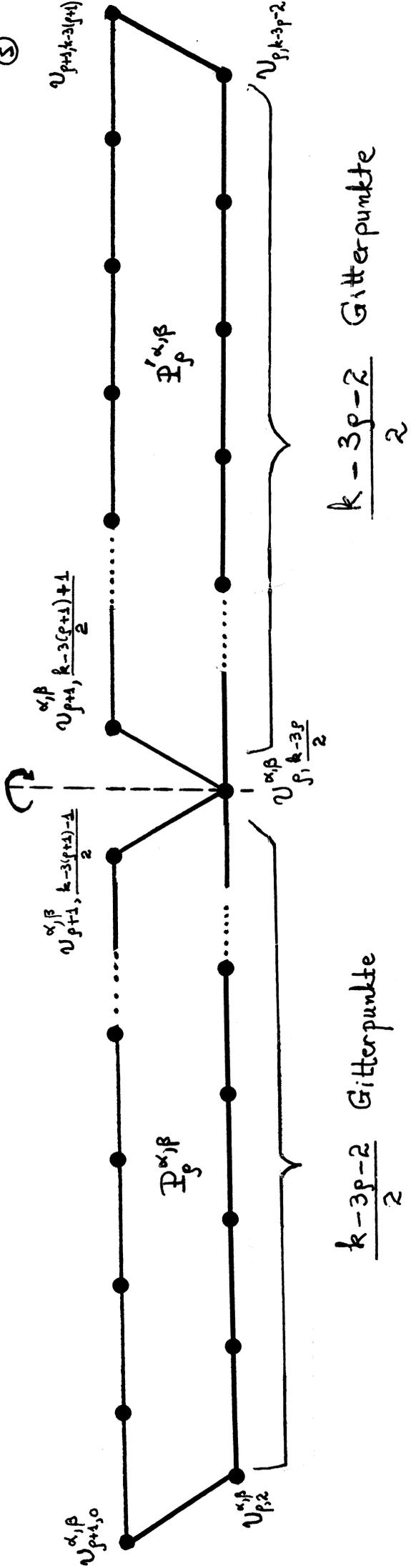


Fig. 1.

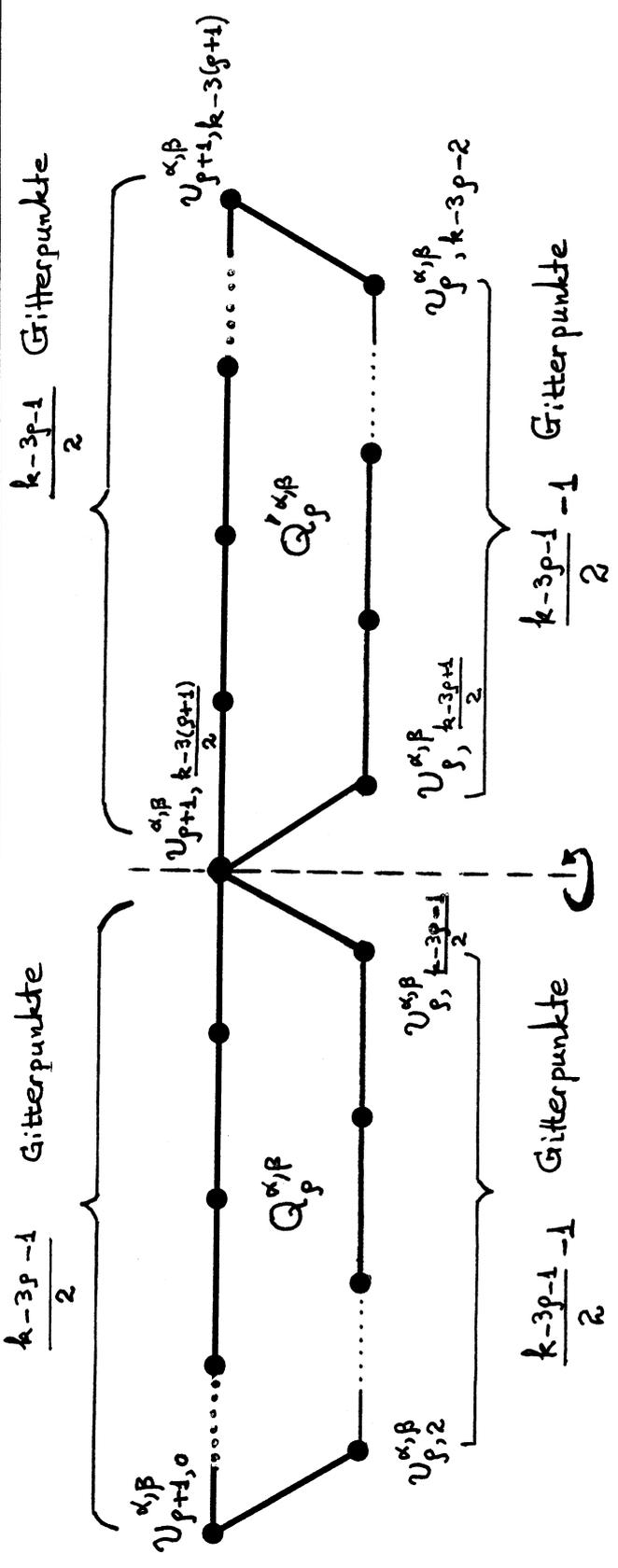


Fig. 2.

$P_p^{\alpha,\beta}$ (bzw. von $Q_p^{\alpha,\beta}$), die durch die kanonische o.g. Drehung aller Elemente von $\Xi_{p,q}^{\alpha,\beta}$ konstruiert wird. Dann können wir ϵ_p weitere Triangulierungen des gesamten geschlossenen Streifens $S_p \setminus (S_{p+1})^\circ$ auf folgende Weise bestimmen:

$$\mathcal{T}_p^{q+2} := \left\{ \mathcal{V}_{p,(\alpha,\beta)} \cup \left\{ \bar{S}_p^{\alpha,\beta}, \Xi_{p,q}^{\alpha,\beta}, \Xi_{p,q}^{\alpha,\beta} \mid (\alpha,\beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\} \right\},$$

$$\mathcal{T}_p^{q+2+\frac{\epsilon_p}{2}} := \left\{ \hat{\mathcal{V}}_{p,(\alpha,\beta)} \cup \left\{ \bar{S}_p^{\alpha,\beta}, \Xi_{p,q}^{\alpha,\beta}, \Xi_{p,q}^{\alpha,\beta} \mid (\alpha,\beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\} \right\}, \quad \forall q, q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \frac{\epsilon_p}{2}.$$

Zum Schluss triangulieren wir S_n mittels

$$\mathcal{T}_n := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } k=3n+1 \\ \{ \langle v_{n,1}^{1,2}, v_{n,1}^{2,3} \rangle, \langle v_{n,1}^{2,3}, v_{n,1}^{3,1} \rangle, \langle v_{n,1}^{3,1}, v_{n,1}^{1,2} \rangle \}, & \text{falls } k=3n+2 \end{cases}$$

bzw. mittels entweder

$$\mathcal{T}_n^1 := \left\{ \langle v_{\text{bar}}, v_{n,0}^{\alpha,\beta} \rangle, \langle v_{\text{bar}}, v_{n,1}^{\alpha,\beta} \rangle, \langle v_{\text{bar}}, v_{n,2}^{\alpha,\beta} \rangle, \langle v_{\text{bar}}, v_{n,3}^{\alpha,\beta} \rangle \mid (\alpha,\beta) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \right\}$$

oder

$$\mathcal{T}_n^2 := \left(\mathcal{T}_n^1 \setminus \{ \langle v_{\text{bar}}, v_{n,0}^{1,2} \rangle, \langle v_{\text{bar}}, v_{n,0}^{2,3} \rangle, \langle v_{\text{bar}}, v_{n,0}^{3,1} \rangle \} \right) \cup \{ \langle v_{n,1}^{1,2}, v_{n,2}^{3,1} \rangle, \langle v_{n,2}^{1,2}, v_{n,1}^{2,3} \rangle, \langle v_{n,2}^{2,3}, v_{n,1}^{3,1} \rangle \}$$

falls $k=3n+3$.

Ist $\mathcal{A} := \{ (m_0, m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}) \in \{ \{1, 2, \dots, \epsilon_0 + 2\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, \epsilon_{n-1} + 2\} \} \setminus \{ \{3, 4, \dots, \epsilon_0 + 2\} \times \dots \times \{3, 4, \dots, \epsilon_{n-1} + 2\} \} \}$

so können wir l_k Triangulierungen des ganzen Dreiecks s_0 konstruieren, indem wir setzen:

$$g_k^{(m_0, \dots, m_{n-1})} := \{ \tau_0^{m_0}, \tau_1^{m_1}, \dots, \tau_{n-1}^{m_{n-1}}, \tau_n \} \cup \{ \cup_{i=0}^n \tilde{U}_i \}, \text{ für } k \in \{3n+1, 3n+2\},$$

bzw. $g_k^{(m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda)} := \{ \tau_0^{m_0}, \tau_1^{m_1}, \dots, \tau_{n-1}^{m_{n-1}}, \tau_n^\lambda \} \cup \{ \cup_{i=0}^n \tilde{U}_i \}, \text{ für } k = 3n+3,$

wobei $((m_0, \dots, m_{n-1}), \lambda) \in \mathcal{A} \times \{1, 2\}.$

All diese Triangulierungen sind nicht regulär, denn $g_k^{(m_0, \dots, m_{n-1})}$ (bzw. $g_k^{(m_0, \dots, m_{n-1}, \lambda)}$) kommen für jedes ^{fixierte} n -Tupel $(m_0, \dots, m_{n-1}) \in \mathcal{A}$ von $g_k^{(m'_0, \dots, m'_{n-1})}$ (bzw. $g_k^{(m'_0, \dots, m'_{n-1}, \lambda)}$) nach einer räumlichen Spiegelung her, wobei:

$$m'_p := \begin{cases} m_p, & \text{falls } m_p \in \{3, 4, \dots, \epsilon_p + 2\} \\ 1, & \text{falls } m_p = 2 \\ 2, & \text{falls } m_p = 1 \end{cases} \quad \forall p, p \in \mathbb{N}_0, 0 \leq p \leq n-1.$$

Dies, kombiniert mit der Tatsache, dass sie eine Symmetrie bzgl. ebener $\frac{2\pi}{3}$ -Drehungen besitzen und dass sie sich ^{paarweise} voneinander um eine sternerhaltende Kettenreaktion ^{von Elementartransformationen} unterscheiden, führt zu dem gewünschten Resultat. Q.E.D. ■

k	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
l_k	2	2	4	20	32	104	864	2352	15088 ...