

Zur Klassifikation torischer log del Pezzo Flächen

Dimitrios I. Dais

Mathematische Fakultät, Universität Kreta

1. Juli 2010

Del Pezzo Flächen

Eine glatte kompakte, zusammenhängende, komplexe Fläche X heisst **del Pezzo Fläche** wenn ihr antikanonischer Divisor $-K_X$ ample ist, d.h., wenn die rationale Abbildung $\Phi_{|-mK_X|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(|-mK_X|)$, die mit dem linearen System $|-mK_X|$ assoziiert ist, eine geschlossene Einbettung:

$$\mathcal{O}_X(-mK_X) \cong \Phi_{|-mK_X|}^* (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(|-mK_X|)}(1))$$

für eine geeignete positive ganze Zahl m definiert. [Pasquale del Pezzo (1859-1936) hat diese Flächen im Jahre 1887 studiert.] Der **Grad** $\deg(X)$ einer derartigen Fläche X ist die Selbstschnittzahl $(-K_X)^2$. Folgendes Theorem ermöglicht die Klassifikation der del Pezzo Flächen:

Theorem

Sei X eine del Pezzo Fläche vom Grad $d := \deg(X)$. Dann ist $1 \leq d \leq 9$ und X wird durch d klassifiziert:

- (i) Ist $d = 9$, so ist X isomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.*
- (ii) Ist $d = 8$, so ist X isomorph entweder zu $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ oder zu der Aufblasung der projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in einem Punkt.*
- (iii) Falls $1 \leq d \leq 7$, dann ist X isomorph zu der Aufblasung der projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in $9 - d$ Punkten.*

Torische del Pezzo Flächen

Wenn $\deg(X) \in \{6, 7, 8, 9\}$, dann ist X eine **torische** Fläche, d.h., X enthält einen 2-dimensionalen algebraischen Torus \mathbb{T} (als eine dichte offene Teilmenge) und ist mit einer algebraischen Operation von \mathbb{T} auf X versehen, welche die natürliche Operation von \mathbb{T} auf sich selbst erweitert. Wenn wir die Beschreibung der glatten kompakten torischen Flächen durch die (\mathbb{Z} -gewichteten) “zirkulären Graphen” in Betracht ziehen (s., z.B., Oda’s Buch, S. 43-45 und 88-89), dann wird dies in der Sprache der torischen Geometrie folgendermassen formuliert:

Theorem (Batyrev (1981), K.+M. Watanabe (1982), Oda (1985))

Bis auf Isomorphismus gibt es nur fünf verschiedene torische del Pezzo Flächen, die den zirkulären Graphen des Bildes 1 (mit Gewichten $-1, 0$ und 1) entsprechen, nämlich: (i) $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, (ii) $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 (\cong \mathbb{F}_0)$, (iii) die Hirzebruchsche Fläche \mathbb{F}_1 , (iv) die äquivariante Aufblasung von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in zwei \mathbb{T} -Fixpunkten, und (v) die äquivariante Aufblasung von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in drei \mathbb{T} -Fixpunkten.

Torische del Pezzo Flächen

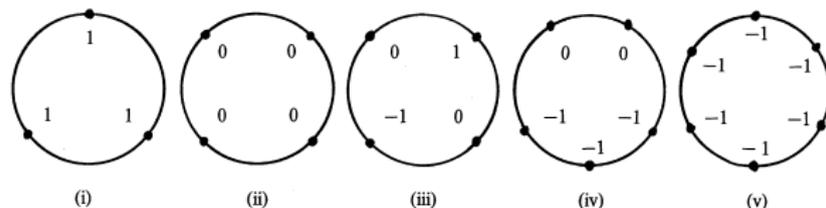


BILD 1.

[*Bemerkung.* Die sogenannten **Hirzebruchschen Flächen**

$$\mathbb{F}_\kappa := \{ ([z_0 : z_1 : z_2], [t_1 : t_2]) \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \mid z_1 t_1^\kappa = z_2 t_2^\kappa \}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

sind torisch. \mathbb{F}_κ kann mit dem totalen Raum $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_\mathbb{C}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\mathbb{C}^1}(\kappa))$ des $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ -Bündels vom Grad κ über $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ indentifiziert werden. Ausserdem ist jede glatte kompakte torische Fläche mit Picardscher Zahl 2 isomorph zu einer Hirzebruchschen Fläche. Nur \mathbb{F}_0 und \mathbb{F}_1 sind del Pezzo Flächen.]

Die singulären Analoga (“Log del Pezzo” Flächen)

Eine kompakte, zusammenhängende, komplexe Fläche X heisst **log del Pezzo Fläche** wenn sie höchstens log-terminale Singularitäten besitzt und wenn ihr antikanonischer Divisor $-K_X$ ein \mathbb{Q} -Cartier ample Divisor ist (d.h., wenn ein geeignetes ganzzahliges positives Vielfache von $-K_X$ ample ist).

- Der **Index** einer derartigen Fläche X wird als die kleinste positive ganze Zahl ℓ definiert, für die $-\ell K_X$ ample Cartier ist.

Die singulären Analoga (“Log del Pezzo” Flächen)

Eine kompakte, zusammenhängende, komplexe Fläche X heisst **log del Pezzo Fläche** wenn sie höchstens log-terminale Singularitäten besitzt und wenn ihr antikanonischer Divisor $-K_X$ ein \mathbb{Q} -Cartier ample Divisor ist (d.h., wenn ein geeignetes ganzzahliges positives Vielfache von $-K_X$ ample ist).

- Der **Index** einer derartigen Fläche X wird als die kleinste positive ganze Zahl ℓ definiert, für die $-\ell K_X$ ample Cartier ist.
- Die *log-terminalen Singularitäten* in Dimension 2 sind genau die **Quotientensingularitäten**, d.h., für jeden $x \in \text{Sing}(X)$ gibt es eine endliche Untergruppe $G_x \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$, so dass

$$(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G_x, [\mathbf{0}]). \quad \left[G_x \times \mathbb{C}^2 \ni (\mathbf{A}, (z_1, z_2)) \mapsto \mathbf{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \right]$$

Die singulären Analoga (“Log del Pezzo” Flächen)

Eine kompakte, zusammenhängende, komplexe Fläche X heisst **log del Pezzo Fläche** wenn sie höchstens log-terminale Singularitäten besitzt und wenn ihr antikanonischer Divisor $-K_X$ ein \mathbb{Q} -Cartier ample Divisor ist (d.h., wenn ein geeignetes ganzzahliges positives Vielfache von $-K_X$ ample ist).

- Der **Index** einer derartigen Fläche X wird als die kleinste positive ganze Zahl ℓ definiert, für die $-\ell K_X$ ample Cartier ist.
- Die *log-terminalen Singularitäten* in Dimension 2 sind genau die **Quotientensingularitäten**, d.h., für jeden $x \in \text{Sing}(X)$ gibt es eine endliche Untergruppe $G_x \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$, so dass

$$(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G_x, [\mathbf{0}]). \quad \left[G_x \times \mathbb{C}^2 \ni (\mathbf{A}, (z_1, z_2)) \mapsto \mathbf{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \right]$$

- P. Du Val (1964), E. Brieskorn (1968) und O. Riemenschneider (1977) haben die endlichen Untergruppen von $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ (bis auf Konjugation) [und damit auch die 2-dimensionalen Quotientensingularitäten (bis auf Isomorphismus)] vollständig klassifiziert.

Endliche Gruppen $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	Erzeugende von G	$ G $
$\mathbf{C}_{q,p}$, $q > p \geq 1$, $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$	$\begin{pmatrix} \zeta_q & 0 \\ 0 & \zeta_q^{-p} \end{pmatrix}$	q
$\mathbf{D}_{n,q}$, $n > q \geq 1$, $\mathrm{ggT}(n, q) = 1$	$\psi_{2q}, \tau, \varphi_{2(n-q)}$, falls $n - q \equiv 1 \pmod{2}$ $\psi_{2q}, \tau \circ \varphi_{4(n-q)}$, falls $n - q \equiv 0 \pmod{2}$	$4(n - q)q$
\mathbf{T}_m , $m \geq 1$, $m \equiv 1, 3, 5 \pmod{6}$	$\psi_4, \tau, \eta, \varphi_{2m}$, falls $m \equiv 1, 5 \pmod{6}$ $\psi_4, \tau, \eta \circ \varphi_{6m}$, falls $m \equiv 3 \pmod{6}$	$24m$
\mathbf{O}_m , $m \geq 1$, $\mathrm{ggT}(m, 6) = 1$	$\psi_8, \tau, \eta, \varphi_{2m}$	$48m$
\mathbf{I}_m , $m \geq 1$, $\mathrm{ggT}(m, 30) = 1$	u, v, w, φ_{2m}	$120m$

wobei $\zeta_k := e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}}$, $k \geq 2$, und

$$\psi_k = \begin{pmatrix} \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k^{-1} \end{pmatrix}, \varphi_k = \begin{pmatrix} \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_8 & \zeta_8^3 \\ \zeta_8 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & \zeta_5^2 \end{pmatrix},$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5^4 - \zeta_5 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ \zeta_5^2 - \zeta_5 & \zeta_5 - \zeta_5^4 \end{pmatrix}.$$

[$\mathbf{C}_{q,p}$ ist konjugiert zu $\mathbf{C}_{q',p'}$ genau dann, wenn $q = q'$ und entweder $p = p'$ oder $pp' \equiv 1 \pmod{q}$. Die übrigen Gruppen sind paarweise nicht konjugiert.]

- Es ist auch bekannt, dass die Familie der log del Pezzo Flächen mit vorgegebenem Index ℓ *beschränkt* ist (V.V. Nikulin (1990), A. Borisov (2002)).

Endliche Gruppen $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	Erzeugende von G	$ G $
$\mathbf{C}_{q,p}$, $q > p \geq 1$, $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$	$\begin{pmatrix} \zeta_q & 0 \\ 0 & \zeta_q^{-p} \end{pmatrix}$	q
$\mathbf{D}_{n,q}$, $n > q \geq 1$, $\mathrm{ggT}(n, q) = 1$	$\psi_{2q}, \tau, \varphi_{2(n-q)}$, falls $n - q \equiv 1 \pmod{2}$ $\psi_{2q}, \tau \circ \varphi_{4(n-q)}$, falls $n - q \equiv 0 \pmod{2}$	$4(n - q)q$
\mathbf{T}_m , $m \geq 1$, $m \equiv 1, 3, 5 \pmod{6}$	$\psi_4, \tau, \eta, \varphi_{2m}$, falls $m \equiv 1, 5 \pmod{6}$ $\psi_4, \tau, \eta \circ \varphi_{6m}$, falls $m \equiv 3 \pmod{6}$	$24m$
\mathbf{O}_m , $m \geq 1$, $\mathrm{ggT}(m, 6) = 1$	$\psi_8, \tau, \eta, \varphi_{2m}$	$48m$
\mathbf{I}_m , $m \geq 1$, $\mathrm{ggT}(m, 30) = 1$	u, v, w, φ_{2m}	$120m$

wobei $\zeta_k := e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}}$, $k \geq 2$, und

$$\psi_k = \begin{pmatrix} \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k^{-1} \end{pmatrix}, \varphi_k = \begin{pmatrix} \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_8 & \zeta_8^3 \\ \zeta_8 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & \zeta_5^2 \end{pmatrix},$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5^4 - \zeta_5 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ \zeta_5^3 - \zeta_5^2 & \zeta_5 - \zeta_5^4 \end{pmatrix}.$$

[$\mathbf{C}_{q,p}$ ist konjugiert zu $\mathbf{C}_{q',p'}$ genau dann, wenn $q = q'$ und entweder $p = p'$ oder $pp' \equiv 1 \pmod{q}$. Die übrigen Gruppen sind paarweise nicht konjugiert.]

- Es ist auch bekannt, dass die Familie der log del Pezzo Flächen mit vorgegebenem Index ℓ *beschränkt* ist (V.V. Nikulin (1990), A. Borisov (2002)).
- Die Klasse der del Pezzo Flächen ist in der Klasse der log del Pezzo Flächen vom Index 1 enthalten.

Für die log del Pezzo Flächen vom Index 1 gilt folgendes:

Theorem (M. Demazure (1980), F. Hidaka - K. Watanabe (1981))

Sei X eine log del Pezzo Fläche vom Index 1, $d := (-K_X)^2$ und $f : \tilde{X} \rightarrow X$ die minimale Desingularisierung von X . Dann hat X höchstens A - D - E -Singularitäten, $1 \leq d \leq 9$ und X wird durch d klassifiziert:

(i) Ist $d = 9$, so ist X isomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

(ii) Ist $d = 8$, so ist X isomorph entweder zu $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ oder zu \mathbb{F}_1 oder zum Kegel über einer Quadrik in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. (Im dritten Fall, $\tilde{X} \cong \mathbb{F}_2$, und $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(1, 1, 2)$ wird nach Kontraktion des ∞ -Schnittes ($\cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$) von \tilde{X} erhalten.)

(iii) Falls $1 \leq d \leq 7$, dann ist X isomorph zu der Aufblasung der projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in $9 - d$ Punkten, die sich in fast allgemeiner Lage befinden. (In diesem Fall wird X nach Kontraktion der (-2) -Kurven von \tilde{X} erhalten.)

Theorem (Q. Ye (2002))

Sei X eine singuläre log del Pezzo Fläche mit Index 1 und Picardscher Zahl $\rho(X) = 1$. Dann müssen die zugelassenen Typen der Singularitäten von X , sowie die Anzahl m der Isomorphieklassen derartiger Flächen mit diesen Typen von Singularitäten, in der folgenden Liste enthalten sein:

Sing(X)	m	Sing(X)	m	Sing(X)	m
E_8	2	$2A_4$	1	$A_1 + 2A_3$	1
$A_1 + E_7$	2	$A_1 + A_2 + A_5$	1	E_6	1
D_8	1	$2A_1 + 2A_3$	1	$A_1 + A_5$	1
A_8	1	$4A_2$	1	$3A_2$ [*]	1
$A_2 + E_6$	2	E_7	1	D_5	1
$2A_1 + D_6$	1	$A_1 + D_6$	1	$2A_1 + A_3$ [*]	1
$2D_4$	∞	A_7	1	A_4	1
$A_3 + D_5$	1	$A_2 + A_5$	1	$A_1 + A_2$ [*]	1
$A_1 + A_7$	1	$3A_1 + D_4$	1	A_1 [*]	1

[Alle Fälle sind *realisierbar*. Wenn wir den Fall $2D_4$ weglassen, dann erhalten wir insgesamt 29 verschiedene Isomorphieklassen; 15 davon entsprechen Flächen mit nur zyklischen Quotientensingularitäten.]

- Die log del Pezzo Flächen vom Index 2 sind von V. Alexeev und V.V. Nikulin in einem mehrseitigen Buch durch Gruppierung gewisser Graphen, die mit geeigneten (nicht unbedingt minimalen) Auflösungen ihrer Singularitäten assoziiert sind, klassifiziert. (“*Del Pezzo and K3 Surfaces*”, MSJ Memoirs, Vol. **15**, 2006, 150 Seiten!)

Sing(X)	m	Sing(X)	m	Sing(X)	m
E_8	2	$2A_4$	1	$A_1 + 2A_3$	1
$A_1 + E_7$	2	$A_1 + A_2 + A_5$	1	E_6	1
D_8	1	$2A_1 + 2A_3$	1	$A_1 + A_5$	1
A_8	1	$4A_2$	1	$3A_2$ [*]	1
$A_2 + E_6$	2	E_7	1	D_5	1
$2A_1 + D_6$	1	$A_1 + D_6$	1	$2A_1 + A_3$ [*]	1
$2D_4$	∞	A_7	1	A_4	1
$A_3 + D_5$	1	$A_2 + A_5$	1	$A_1 + A_2$ [*]	1
$A_1 + A_7$	1	$3A_1 + D_4$	1	A_1 [*]	1

[Alle Fälle sind *realisierbar*. Wenn wir den Fall $2D_4$ weglassen, dann erhalten wir insgesamt 29 verschiedene Isomorphieklassen; 15 davon entsprechen Flächen mit nur zyklischen Quotientensingularitäten.]

- Die log del Pezzo Flächen vom Index 2 sind von V. Alexeev und V.V. Nikulin in einem mehrseitigen Buch durch Gruppierung gewisser Graphen, die mit geeigneten (nicht unbedingt minimalen) Auflösungen ihrer Singularitäten assoziiert sind, klassifiziert. (“*Del Pezzo and K3 Surfaces*”, MSJ Memoirs, Vol. **15**, 2006, 150 Seiten!)
- Ein etwas andersartiger Zugang zur Klassifikation der log del Pezzo Flächen vom Index 2 erschien in einem Artikel von N. Nakayama. (“*Classification of log del Pezzo surfaces of index two*”, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **14** (2007), No. 3, 293-498, 206 Seiten!)

Wegen der Komplexität der algebraisch-geometrischen Methoden, die von Alexeev, Nikulin und Nakayama für Index $\ell = 2$ benutzt worden sind, und wegen der immer mehr benötigten Fallunterscheidungen und Listen, ist es sehr schwer zu glauben, dass es in der nahen Zukunft möglich sein wird, zu einer Klassifikation für höhere Indizes *in dieser Allgemeinheit* zu gelangen. Stattdessen (und anlässlich des zweiten Theorems, das vorher für den glatten Fall erwähnt worden ist) werden wir uns mit einem speziellen, aber leichter annäherbaren Problem begnügen.

Problem

Kann man zumindest die **torischen** log del Pezzo Flächen mit festgelegtem Index ℓ (auch wenn $\ell \geq 3$) bis auf Isomorphismus klassifizieren?

Dies kann, wie demnächst erklärt wird, *algorithmisch* behandelt werden, denn

- die torischen kompakten Flächen besitzen höchstens *zyklische* Quotientensingularitäten und ihre Isomorphieklassen sind deswegen mit Hilfe recht “einfacher” *gewichteten Graphen* bestimmbar, und

Wegen der Komplexität der algebraisch-geometrischen Methoden, die von Alexeev, Nikulin und Nakayama für Index $\ell = 2$ benutzt worden sind, und wegen der immer mehr benötigten Fallunterscheidungen und Listen, ist es sehr schwer zu glauben, dass es in der nahen Zukunft möglich sein wird, zu einer Klassifikation für höhere Indizes *in dieser Allgemeinheit* zu gelangen. Stattdessen (und anlässlich des zweiten Theorems, das vorher für den glatten Fall erwähnt worden ist) werden wir uns mit einem speziellen, aber leichter annäherbaren Problem begnügen.

Problem

Kann man zumindest die **torischen** log del Pezzo Flächen mit festgelegtem Index ℓ (auch wenn $\ell \geq 3$) bis auf Isomorphismus klassifizieren?

Dies kann, wie demnächst erklärt wird, *algorithmisch* behandelt werden, denn

- die torischen kompakten Flächen besitzen höchstens *zyklische* Quotientensingularitäten und ihre Isomorphieklassen sind deswegen mit Hilfe recht “einfacher” *gewichteten Graphen* bestimmbar, und
- die Klassifikation derjenigen, die log del Pezzo sind, kann auf die Klassifikation gewisser Gitterpolygone (bis auf unimodulare Äquivalenz), d.h., auf ein rein *geometrisch-kombinatorisches* Problem reduziert werden.

Affine 2-dimensionale torische Varietäten

Sei $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' = \{a\mathbf{n} + b\mathbf{n}' \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler stark konvexer, polyedrischer, rationaler Kegel, d.h.,

- $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$, \mathbf{n}, \mathbf{n}' linear unabhängig über \mathbb{R} und

Sein dualer Kegel ist der Kegel

Affine 2-dimensionale torische Varietäten

Sei $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' = \{a\mathbf{n} + b\mathbf{n}' \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler stark konvexer, polyedrischer, rationaler Kegel, d.h.,

- $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$, \mathbf{n}, \mathbf{n}' linear unabhängig über \mathbb{R} und
- $\sigma \cap (-\sigma) = \{\mathbf{0}\}$.

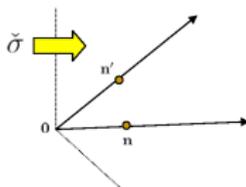


BILD 2.

Sein dualer Kegel ist der Kegel

Affine 2-dimensionale torische Varietäten

Sei $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' = \{a\mathbf{n} + b\mathbf{n}' \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler stark konvexer, polyedrischer, rationaler Kegel, d.h.,

- $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$, \mathbf{n}, \mathbf{n}' linear unabhängig über \mathbb{R} und
- $\sigma \cap (-\sigma) = \{\mathbf{0}\}$.

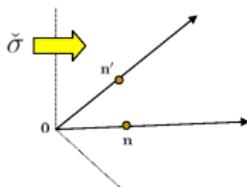


BILD 2.

Sein dualer Kegel ist der Kegel

- $\check{\sigma} := \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \sigma \}$ und

Affine 2-dimensionale torische Varietäten

Sei $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' = \{a\mathbf{n} + b\mathbf{n}' \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler stark konvexer, polyedrischer, rationaler Kegel, d.h.,

- $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$, \mathbf{n}, \mathbf{n}' linear unabhängig über \mathbb{R} und
- $\sigma \cap (-\sigma) = \{\mathbf{0}\}$.

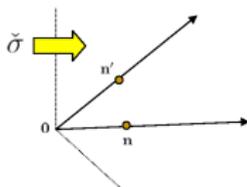


BILD 2.

Sein dualer Kegel ist der Kegel

- $\check{\sigma} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \sigma\}$ und
- $S_\sigma := \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ bildet eine additive, kommutative Halbgruppe mit dem $\mathbf{0}$ als neutralem Element, d.h., ein kommutatives Monoid.

Sei $\mathbb{C}[S_\sigma] := \bigoplus_{\mathbf{m} \in S_\sigma} \mathbb{C}e(\mathbf{m})$ die \mathbb{C} -Algebra mit $\{e(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in S\}$ als Basis, die aus formalen Elementen besteht, welche die "Exponentialbedingung" erfüllen:

$$e(\mathbf{m} + \mathbf{m}') = e(\mathbf{m})e(\mathbf{m}'), \forall (\mathbf{m}, \mathbf{m}') \in S_\sigma \times S_\sigma \quad [e(\mathbf{0}) =: 1_{\mathbb{C}[S_\sigma]}].$$

• $S_\sigma = \bar{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ ist endlich erzeugt (als Halbgruppe), d.h., $\exists \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_k$:

$$S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathbf{m}_1 + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathbf{m}_k \Rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma] \text{ ist von } \{e(\mathbf{m}_1), \dots, e(\mathbf{m}_k)\} \text{ erzeugt} \Rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]/\mathcal{I},$$

$$[\mathcal{I} := \text{Ker}(\varpi), \quad \varpi : \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k] \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma], \quad z_j \mapsto \varpi(z_j) := e(\mathbf{m}_j)]$$

• Die affine Varietät $U_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$, die $\mathbb{C}[S_\sigma]$ als Koordinatenring hat, heisst die dem Kegel σ zugeordnete **torische affine Varietät**. Übliche Identifikationen:

$$\boxed{\text{Hom}_{\text{semigr.}}(S_\sigma, \mathbb{C}) \xleftarrow{(a)} \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) \xleftarrow{(b)} \{\text{Punkte von } U_\sigma\} \xleftarrow{(c)} \text{Max-Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])}$$

(a):

$$\text{Hom}_{\text{semigr.}}(S_\sigma, \mathbb{C}) \ni u \mapsto \theta_u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}), \quad \theta_u(e(\mathbf{m})) := u(\mathbf{m}), \forall \mathbf{m} \in S_\sigma.$$

(b):

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) \ni \theta_u \mapsto P = (u(\mathbf{m}_1), \dots, u(\mathbf{m}_k)) \in \{\text{Punkte von } U_\sigma\}$$

(c): Ist $\mathcal{O}_{U_\sigma, P} := \{f \in \text{Quot}(\mathbb{C}[S_\sigma]) \mid f = \frac{a}{b}, b(P) \neq 0\}$ der einem Punkt P von U_σ zugehörige lokale Ring, so ist

$$\{\text{Punkte von } U_\sigma\} \ni P \mapsto \mathfrak{m}_P := \{f \in \mathcal{O}_{U_\sigma, P} \mid f(P) = 0\} \in \text{Max-Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

ebenfalls bijektiv. Die Operation des algebraischen Torus

$$\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^2 = \text{Max-Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}^2]) = \text{Hom}_{\text{semigr.}}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$$

auf $U_\sigma = \text{Hom}_{\text{semigr.}}(S_\sigma, \mathbb{C})$ kann deswegen als die übliche Multiplikation

$$\boxed{\mathbb{T} \times U_\sigma \ni (t, u) \mapsto t \cdot u \in U_\sigma}$$

von Halbgruppenhomomorphismen aufgefasst werden.

Fächer

Ein **Fächer** in \mathbb{R}^2 ist eine endliche Familie $\Delta \neq \emptyset$ von stark konvexen, polyedrischen, rationalen Kegeln der Dimension ≤ 2 in \mathbb{R}^2 , für die gilt:

(i) $\sigma \in \Delta, \tau \preceq \sigma \implies \tau \in \Delta$.

(ii) $\sigma, \sigma' \in \Delta \implies \sigma \cap \sigma' \preceq \sigma$ und $\sigma \cap \sigma' \preceq \sigma'$.

$[\tau \preceq \sigma \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \mathbf{m} \in S_\sigma : \tau = \{\mathbf{y} \in \sigma \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{y} \rangle = 0\}].$

Def. $U_\tau := \{u \in U_\sigma \mid u(\mathbf{m}) \neq 0\} \xrightarrow{\iota_{\tau, \sigma}} U_\sigma.$

- Ist Δ ein Fächer, so heisst $|\Delta| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ der **Träger** von Δ .

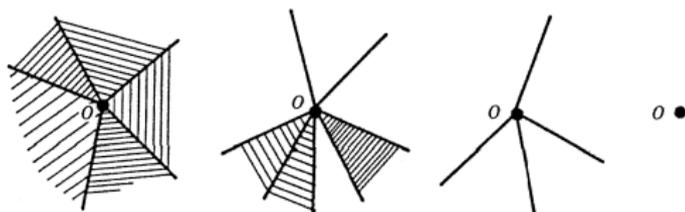


BILD 3.

- Die einem Fächer Δ zugeordnete **torische Varietät** $X_\Delta := (\coprod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma) / \sim$ wird durch das Verheftungslemma definiert:

$$U_{\sigma_1} \ni u_1 \sim u_2 \in U_{\sigma_2} \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 \in U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \text{ und } u_2 = \iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_2}(\iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_1}^{-1}(u_1)).$$

- Die einem Fächer Δ zugeordnete **torische Varietät** $X_\Delta := (\prod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma) / \sim$ wird durch das Verheftungslemma definiert:

$$U_{\sigma_1} \ni u_1 \sim u_2 \in U_{\sigma_2} \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 \in U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \text{ und } u_2 = \iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_2}(\iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_1}^{-1}(u_1)).$$

- Die zuvor erwähnte Operation von \mathbb{T} auf U_σ wird auf kanonische Weise auf X_Δ erweitert und jede Bahn ist von der Form

$$\text{orb}_\Delta(\sigma) := \text{Hom}_{\text{gr.}}(\sigma^\perp \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^*) \subset U_\sigma, \sigma \in \Delta \quad [\dim_{\mathbb{C}}(\text{orb}_\Delta(\sigma)) = 2 - \dim(\sigma)]$$

$$\text{mit } \sigma^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in \sigma \} \subset \check{\sigma}, U_\sigma = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} \text{orb}_\Delta(\tau),$$

$$\tau \preceq \sigma \iff \text{orb}_\Delta(\sigma) \subseteq \overline{\text{orb}_\Delta(\tau)} \quad \text{und} \quad \overline{\text{orb}_\Delta(\tau)} = \bigcup_{\sigma \preceq \tau} \text{orb}_\Delta(\sigma).$$

- Die einem Fächer Δ zugeordnete **torische Varietät** $X_\Delta := (\prod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma) / \sim$ wird durch das Verheftungslemma definiert:

$$U_{\sigma_1} \ni u_1 \sim u_2 \in U_{\sigma_2} \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 \in U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \text{ und } u_2 = \iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_2}(\iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_1}^{-1}(u_1)).$$

- Die zuvor erwähnte Operation von \mathbb{T} auf U_σ wird auf kanonische Weise auf X_Δ erweitert und jede Bahn ist von der Form

$$\text{orb}_\Delta(\sigma) := \text{Hom}_{\text{gr.}}(\sigma^\perp \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^*) \subset U_\sigma, \sigma \in \Delta \quad [\dim_{\mathbb{C}}(\text{orb}_\Delta(\sigma)) = 2 - \dim(\sigma)]$$

$$\text{mit } \sigma^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in \sigma \} \subset \check{\sigma}, U_\sigma = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} \text{orb}_\Delta(\tau),$$

$$\tau \preceq \sigma \iff \text{orb}_\Delta(\sigma) \subseteq \overline{\text{orb}_\Delta(\tau)} \quad \text{und} \quad \overline{\text{orb}_\Delta(\tau)} = \bigcup_{\sigma \preceq \tau} \text{orb}_\Delta(\sigma).$$

- X_Δ ist genau dann eine *kompakte* torische Fläche, wenn $|\Delta| = \mathbb{R}^2$.

- Die einem Fächer Δ zugeordnete **torische Varietät** $X_\Delta := (\prod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma) / \sim$ wird durch das Verheftungslemma definiert:

$$U_{\sigma_1} \ni u_1 \sim u_2 \in U_{\sigma_2} \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 \in U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \text{ und } u_2 = \iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_2}(\iota_{\sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_1}^{-1}(u_1)).$$

- Die zuvor erwähnte Operation von \mathbb{T} auf U_σ wird auf kanonische Weise auf X_Δ erweitert und jede Bahn ist von der Form

$$\text{orb}_\Delta(\sigma) := \text{Hom}_{\text{gr.}}(\sigma^\perp \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^*) \subset U_\sigma, \sigma \in \Delta \quad [\dim_{\mathbb{C}}(\text{orb}_\Delta(\sigma)) = 2 - \dim(\sigma)]$$

$$\text{mit } \sigma^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in \sigma \} \subset \check{\sigma}, U_\sigma = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} \text{orb}_\Delta(\tau),$$

$$\tau \preceq \sigma \iff \text{orb}_\Delta(\sigma) \subseteq \overline{\text{orb}_\Delta(\tau)} \text{ und } \overline{\text{orb}_\Delta(\tau)} = \bigcup_{\tau \preceq \sigma \in \Delta} \text{orb}_\Delta(\sigma).$$

- X_Δ ist genau dann eine *kompakte* torische Fläche, wenn $|\Delta| = \mathbb{R}^2$.
- $\text{Div}_W^{\mathbb{T}}(X_\Delta) = \bigoplus_{\varrho \in \Delta, \dim(\varrho)=1} \mathbb{Z} \overline{\text{orb}_\Delta(\varrho)}$. Insbesondere gilt:

$$K_{X_\Delta} = - \sum_{\varrho \in \Delta, \dim(\varrho)=1} \overline{\text{orb}_\Delta(\varrho)}.$$

Minimale Auflösungen 2-dim. torischer Singularitäten

Sei $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' \subset \mathbb{R}^2$ ein 2-dim. stark konvexer, polyedrischer, rationaler Kegel. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$ primitive Gitterpunkte sind.

Lemma (“Normalform” eines 2-dim. Kegels)

Sei $q = q_\sigma := |\det(\mathbf{n}, \mathbf{n}')|$. Dann $\exists p = p_\sigma \in \mathbb{Z}, 0 < p < q : \text{ggT}(p, q) = 1$ und

$$U_\sigma \cong U_{\mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(pe_1 + qe_2)}.$$

Von nun an nennen wir σ (p, q) -Kegel. Der **Sozius** von p ist die einzige ganze Zahl \hat{p} , für die gilt: $0 < \hat{p} < q, \text{ggT}(\hat{p}, q) = 1$ und $p\hat{p} \equiv 1 \pmod{q}$.

Lemma

Sind $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^2$ zwei derartige Kegel und $q_\sigma, q_\tau, p_\sigma, p_\tau$ die mit σ und τ assoziierten positiven ganzen Zahlen wie im vorigen Lemma, so gilt

$$U_\sigma \cong U_\tau \iff q_\sigma = q_\tau \text{ und entweder } p_\sigma = p_\tau \text{ oder } p_\sigma = \hat{p}_\tau.$$

Aus diesem Grunde parametrisieren $p = p_\sigma$ und $q = q_\sigma$ die Isomorphieklasse von U_σ eindeutig bis auf Ersetzung von p durch \hat{p} .

Sei $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' \subset \mathbb{R}^2$ ein (p, q) -Kegel. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $(p = 0 \Leftrightarrow) q = 1 \implies U_\sigma \cong \mathbb{C}^2$.
- $q > 1 \implies U_\sigma \cong \mathbb{C}^2/G = \text{Spec}(\mathbb{C}[z_1, z_2]^G)$, wobei $G = \langle \text{diag}(\zeta_q, \zeta_q^{-p}) \rangle$. In diesem Fall schreiben wir q/p als Kettenbruch

$$\frac{q}{q-p} = [b_1, b_2, \dots, b_s] := b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_{s-1} - \frac{1}{b_s}}}}$$

und definieren die Gitterpunkte

$$\mathbf{u}_0 := \mathbf{n}, \mathbf{u}_1 := \frac{1}{q}((q-p)\mathbf{n} + \mathbf{n}') \text{ und } \mathbf{u}_{j+1} := b_j \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}, \forall j \in \{1, \dots, s\}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $\mathbf{u}_{s+1} = \mathbf{n}'$ und $b_j \geq 2, \forall j \in \{1, \dots, s\}$.

Theorem (F. Hirzebruch (1953), T. Oda (1985))

Die minimale Auflösung $f : X_{\tilde{\Delta}_\sigma} \longrightarrow X_{\Delta_\sigma} = U_\sigma$ der Singularität $\text{orb}_{\Delta_\sigma}(\sigma)$ wird mittels der Verfeinerung

$$\tilde{\Delta}_\sigma := \{ \{ \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_{j+1} \mid 0 \leq j \leq s \} \text{ zusammen mit ihren Seiten} \}$$

des Fächers $\Delta_\sigma := \{ \sigma \text{ zusammen mit seinen Seiten} \}$ konstruiert und

$$E_j^2 = -b_j, \text{ wobei } E_j := \overline{\text{orb}_{\tilde{\Delta}_\sigma}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j)} \ (\cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1), \forall j \in \{1, \dots, s\}.$$

Kompakte torische Flächen

Sei Δ ein Fächer mit $|\Delta| = \mathbb{R}^2$ und seien $\sigma_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_i + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $\nu \geq 3$, seine 2-dim. (p_i, q_i) -Kegel, wobei die $\mathbf{n}_i \in \mathbb{Z}^2$ wie im Bild 4 (entgegen dem Uhrzeigersinn) geordnete primitive Gitterpunkte sind (mit $\mathbf{n}_{\nu+1} := \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_0 := \mathbf{n}_\nu$).

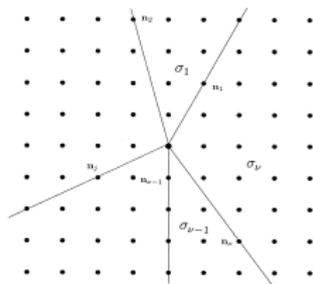


BILD 4.

Wir nehmen an, dass σ_i ein (p_i, q_i) -Kegel ist und wir setzen

$$I_\Delta := \{i \in \{1, \dots, \nu\} \mid q_i > 1\}, \check{I}_\Delta := \{i \in \{1, \dots, \nu\} \mid p_i = 1\}, J_\Delta := \{i \in \{1, \dots, \nu\} \mid q_i = 1\}.$$

X_Δ wird durch die Verheftung von $U_i := \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_i}])$, $i \in \{1, \dots, \nu\}$, konstruiert und

$$\text{Sing}(X_\Delta) = \{\text{orb}(\sigma_i) \mid i \in I_\Delta\}, \text{Sing}_{\text{Gor.}}(X_\Delta) = \{\text{orb}(\sigma_i) \mid i \in \check{I}_\Delta\}.$$

Wenn wir für jedes $i \in \{1, \dots, \nu\}$ die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{q_i}{q_i - p_i} = \left[b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_{s_i}^{(i)} \right]$$

betrachten und die Gitterpunkte $\mathbf{u}_0^{(i)} := \mathbf{n}_i$, $\mathbf{u}_1^{(i)} := \frac{1}{q_i}((q_i - p_i)\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{i+1})$ und

$$\mathbf{u}_{j+1}^{(i)} := b_j^{(i)}\mathbf{u}_j^{(i)} - \mathbf{u}_{j-1}^{(i)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, s_i\}, \quad [\mathbf{u}_{s_i+1}^{(i)} = \mathbf{n}_{i+1}]$$

definieren, dann ist die minimale Auflösung $f: X_{\tilde{\Delta}} \rightarrow X_{\Delta}$ der Singularitäten von X_{Δ} mittels der Verfeinerung

$$\tilde{\Delta} := \left\{ \begin{array}{l} \text{die Kegel } \{\sigma_i \mid i \in J_{\Delta}\} \\ \text{und } \left\{ \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j^{(i)} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_{j+1}^{(i)} \mid i \in I_{\Delta}, j \in \{0, 1, \dots, s_i\} \right\} \\ \text{zusammen mit ihren Seiten} \end{array} \right\}$$

des Fächers Δ konstruiert und $\text{Div}_{\mathbb{W}}^T(X_{\Delta}) = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathbb{Z} C_i$,

$$\text{Div}_{\mathbb{W}}^T(X_{\tilde{\Delta}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \text{Div}_{\mathbb{C}}^T(X_{\tilde{\Delta}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \left(\bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathbb{Q} \tilde{C}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_{\Delta}} \bigoplus_{j=1}^{s_i} \mathbb{Q} E_j^{(i)} \right),$$

wobei $E_j^{(i)} := \overline{\text{orb}_{\tilde{\Delta}}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{u}_j^{(i)})}$ mit $(E_j^{(i)})^2 = -b_j^{(i)}$, $\forall i \in I_{\Delta}, \forall j \in \{1, \dots, s_i\}$, und

$$C_i := \overline{\text{orb}_{\Delta}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_i)}, \quad \tilde{C}_i := \overline{\text{orb}_{\tilde{\Delta}}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_i)} \text{ [strikte Transformierte von } C_i \text{ bzgl. } f], \quad \forall i \in \{1, \dots, \nu\}.$$

Berechnung der Selbstschnittzahl \tilde{C}_i^2 . Es genügt die ganzen Zahlen r_i zu bestimmen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$r_i \mathbf{n}_i = \begin{cases} \mathbf{u}_{s_{i-1}}^{(i-1)} + \mathbf{u}_1^{(i)}, & \text{falls } i \in I'_{\Delta}, \\ \mathbf{n}_{i-1} + \mathbf{u}_1^{(i)}, & \text{falls } i \in I''_{\Delta}, \\ \mathbf{u}_{s_{i-1}}^{(i-1)} + \mathbf{n}_{i+1}, & \text{falls } i \in J'_{\Delta}, \\ \mathbf{n}_{i-1} + \mathbf{n}_{i+1}, & \text{falls } i \in J''_{\Delta}, \end{cases}$$

wobei

$$I'_{\Delta} := \{i \in I_{\Delta} \mid q_{i-1} > 1\}, \quad I''_{\Delta} := \{i \in I_{\Delta} \mid q_{i-1} = 1\},$$

und

$$J'_{\Delta} := \{i \in J_{\Delta} \mid q_{i-1} > 1\}, \quad J''_{\Delta} := \{i \in J_{\Delta} \mid q_{i-1} = 1\},$$

Dann gilt $\tilde{C}_i^2 = -r_i$, $\forall i \in \{1, \dots, \nu\}$.

Invarianten

- Eulersche Charakteristik:

$$e(X_\Delta) = \nu, \quad e(X_{\tilde{\Delta}}) = e(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i.$$

Invarianten

- Eulersche Charakteristik:

$$e(X_\Delta) = \nu, \quad e(X_{\tilde{\Delta}}) = e(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i.$$

- Picardsche Zahl:

$$\rho(X_\Delta) := \text{rank}(\text{Pic}(X_\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \nu - 2, \quad \rho(X_{\tilde{\Delta}}) = \rho(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i.$$

Invarianten

- Eulersche Charakteristik:

$$e(X_\Delta) = \nu, \quad e(X_{\tilde{\Delta}}) = e(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i.$$

- Picardsche Zahl:

$$\rho(X_\Delta) := \text{rank}(\text{Pic}(X_\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \nu - 2, \quad \rho(X_{\tilde{\Delta}}) = \rho(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i.$$

- Selbschnittzahl des antikanonischen Divisors:

$$\begin{aligned} K_{X_\Delta}^2 &= \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{2}{q_i} - r_i \right) + \sum_{i \in I_\Delta} \left(\frac{q_i - p_i}{q_i} + \frac{q_i - \hat{p}_i}{q_i} \right) \\ &= 12 - \nu + \sum_{i \in I_\Delta} \left(\frac{q_i - p_i + 1}{q_i} + \frac{q_i - \hat{p}_i + 1}{q_i} - 2 + \sum_{j=1}^{s_i} (b_j^{(i)} - 3) \right) \end{aligned}$$

und $K_{X_{\tilde{\Delta}}}^2 = 12 - \nu - \sum_{i \in I_\Delta} s_i$

[was aus der Noetherschen Formel $\frac{1}{12}(K_{X_{\tilde{\Delta}}}^2 + e(X_{\tilde{\Delta}})) = 1$ folgt].

Bestimmung der Isomorphieklassen durch gew. Graphen

Theorem (T. Oda (1978), R. Koelman (1991), D.D. (2006))

Wenn Δ, Δ' zwei Fächer mit $|\Delta| = |\Delta'| = \mathbb{R}^2$ sind, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $X_\Delta \cong X_{\Delta'}$.

(ii) Entweder $\mathfrak{G}_{\Delta'} \cong_{gr.} \mathfrak{G}_\Delta$ oder $\mathfrak{G}_{\Delta'} \cong_{gr.} \mathfrak{G}_\Delta^{rev}$. (Dabei bedeutet die Bezeichnung " $\cong_{gr.}$ " die Existenz eines graphentheoretischen Isomorphismus.)

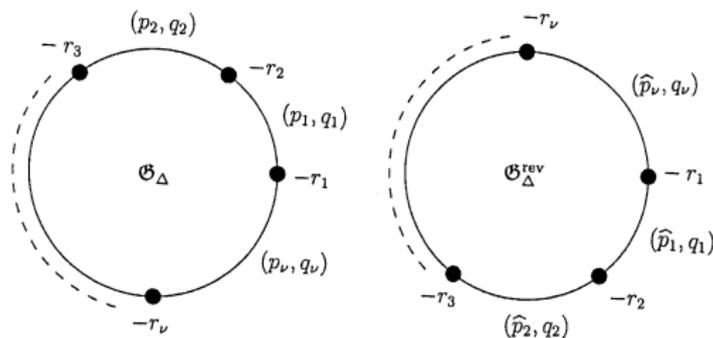


BILD 5.

Torische log del Pezzo Flächen

X_Δ (mit den kombinatorischen Daten $\sigma_i, \mathbf{n}_i, p_i, q_i, r_i, i \in \{1, \dots, \nu\}$) ist genau dann log del Pezzo vom Index ℓ , wenn ℓ die kleinste positive ganze Zahl ist, für die $-\ell K_{X_\Delta}$ ample Cartier ist. Aus der torischen Geometrie ist bekannt, dass

$$-\ell K_{X_\Delta} = -\ell \sum_{i=1}^{\nu} C_i \text{ ample Cartier} \iff \exists \mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}^2 : \langle \mathbf{m}_i, \frac{1}{\ell} \mathbf{n}_i \rangle = \langle \mathbf{m}_i, \frac{1}{\ell} \mathbf{n}_{i+1} \rangle = 1,$$

für alle $i \in \{1, \dots, \nu\}$. Dies bedeutet einerseits, dass

$$\boxed{\ell := \text{kgV}(l_1, \dots, l_\nu)}, \quad \left[l_i := \frac{q_i}{\text{ggT}(q_i, p_i - 1)} \text{ der lokale Index bzgl. } \sigma_i \right]$$

und andererseits, dass $\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_\nu\}$ die Eckpunktmenge eines (konvexen) Gitterpolygons $Q_\Delta := \text{conv}(\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_\nu\})$ bildet, für das gilt

$$\text{int}\left(\frac{1}{\ell} Q_\Delta\right) \cap \mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Theorem (B. Nill + D.D. (2008))

Sei X_Δ eine torische log del Pezzo Fläche vom Index ℓ . Dann gilt:

$$\rho(X_{\tilde{\Delta}}) \leq \begin{cases} 7, & \text{falls } \ell = 1, \\ 8\ell^2 - 6\ell + 3, & \text{falls } \ell \geq 2. \end{cases}$$

Die entsprechende bekannte obere Schranke für (nicht unbedingt torische) log del Pezzo Flächen ist die folgende:

Theorem (V.V. Nikulin (1990))

Seien X eine log del Pezzo Fläche vom Index ℓ und $\tilde{X} \rightarrow X$ ihre minimale Desingularisierung. Dann gilt:

$$\rho(\tilde{X}) < c \cdot \ell^{\frac{7}{2}} \quad (c \text{ eine Konstante}).$$

Theorem (D.D. (2009))

Sei X_{Δ} eine torische log del Pezzo Fläche vom Index ℓ . Dann gilt:

$$\sum_{i \in I_{\Delta}} s_i \leq 12 - \sum_{i \in I_{\Delta}} \left(- \left(\frac{q_i - p_i + 1}{q_i} + \frac{q_i - \hat{p}_i + 1}{q_i} \right) + 2 + \sum_{j=1}^{s_i} (2 - b_j^{(i)}) \right) - \left(1 + \frac{1}{\ell} \right) \nu.$$

Ferner hat man für $\ell \geq 2$:

$$\sum_{i \in \check{I}_{\Delta}} q_i \leq \left(\sum_{i \in I_{\Delta} \setminus \check{I}_{\Delta}} \left(1 - \frac{2}{l_i} \right) q_i \right) - (\nu - \sharp(I_{\Delta})) + 8.$$

Kompakte torische Flächen mit Picardscher Zahl 1

Jede kompakte torische Fläche X_Δ mit $\rho(X_\Delta) = 1$ ist notwendigerweise log del Pezzo (und $X_\Delta \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(w_1, w_2, w_3)/G$, G endlich und abelsch).

Lemma (“Normalisierung” der vorhandenen Kegel)

Sei X_Δ eine kompakte torische Fläche mit $\rho(X_\Delta) = 1$. Dann gibt es ein Tripel von Paaren $\{(p_i, q_i) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq 3\}$ mit

$$0 \leq p_i < q_i, \quad \text{ggT}(p_i, q_i) = 1, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

und

$$\boxed{q_1 q_2 \mid \widehat{p}_1 q_2 + p_2 q_1 + q_3}, \quad \boxed{q_1 q_3 \mid p_1 q_3 + \widehat{p}_3 q_1 + q_2}$$

sowie einen Fächer Δ' mit drei 2-dim. (p_i, q_i) -Kegeln σ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, wobei

$$\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{n}_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{n}_2, \quad \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{n}_2 + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{n}_3, \quad \sigma_3 = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{n}_3 + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{n}_1,$$

mit

$$\mathbf{n}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 := \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_3 := \begin{pmatrix} -(q_2 + p_1 q_3) / q_1 \\ -q_3 \end{pmatrix},$$

so dass $X_\Delta \cong X_{\Delta'}$.

- **Klassifikationsmethode.** Um die kompakten torischen Flächen X_Δ mit $\rho(X_\Delta) = 1$ und Index ℓ bis auf Isomorphismus zu klassifizieren, betrachten wir zuerst alle Kandidaten für die lokalen Indizes l_1, l_2, l_3 . Jeder konkrete Wert für l_i bringt zahlentheoretische Einschränkungen für p_i und q_i mit sich. Diese Einschränkungen führen zusammen mit den Divisibilitätsbedingungen des Lemmas und den zwei Ungleichungen des vorigen Theorems (nach langwierigen Fallunterscheidungen) zu einer Liste von (endlich vielen) “zugelassenen” Tripeln (p_i, q_i, r_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$. Es genügt also die dadurch entstehenden gewichteten Graphen bis auf (graphentheoretischen Isomorphismus) zu klassifizieren.

- Klassifikationsmethode.** Um die kompakten torischen Flächen X_Δ mit $\rho(X_\Delta) = 1$ und Index ℓ bis auf Isomorphismus zu klassifizieren, betrachten wir zuerst alle Kandidaten für die lokalen Indizes l_1, l_2, l_3 . Jeder konkrete Wert für l_i bringt zahlentheoretische Einschränkungen für p_i und q_i mit sich. Diese Einschränkungen führen zusammen mit den Divisibilitätsbedingungen des Lemmas und den zwei Ungleichungen des vorigen Theorems (nach langwierigen Fallunterscheidungen) zu einer Liste von (endlich vielen) “zugelassenen” Tripeln (p_i, q_i, r_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$. Es genügt also die dadurch entstehenden gewichteten Graphen bis auf (graphentheoretischen Isomorphismus) zu klassifizieren.
- Anzahl der Isomorphieklassen der kompakten torischen Flächen X_Δ mit $\rho(X_\Delta) = 1$ und Index $\ell \leq 16$.**

$$\mathfrak{N}_1(\ell) := \# \{ [X_\Delta] \mid \text{mit } \rho(X_\Delta) = 1 \text{ und Index } \ell \}.$$

ℓ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathfrak{N}_1(\ell)$	5	7	18	13	33	26	45	27

ℓ	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathfrak{N}_1(\ell)$	51	51	67	53	69	74	133	48

(Die Berechnungen für $\ell \leq 4$ kann man “mit der Hand” durchführen.)

- Klassifikation der X_Δ 's mit $\rho(X_\Delta) = 1$ und Index $\ell = 1$.

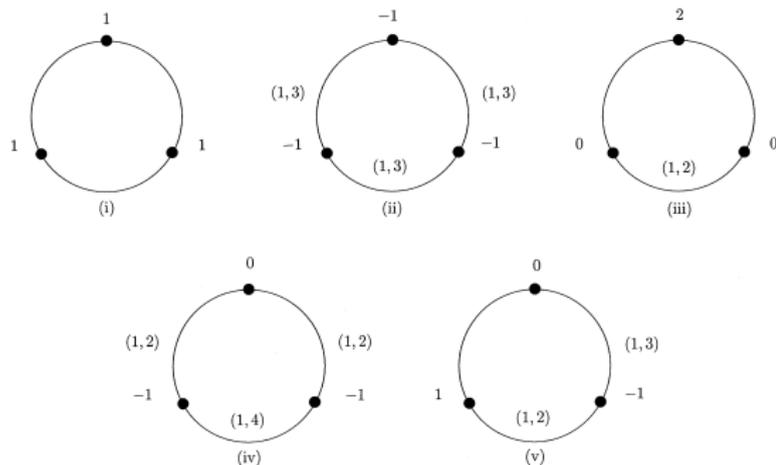


BILD 6.

[Vgl. die letzten vier mit denjenigen aus der Liste von Ye, die mit einem “*” gekennzeichnet sind.]

• Klassifikation der X_Δ 's mit $\rho(X_\Delta) = 1$ und Index $\ell = 2$.

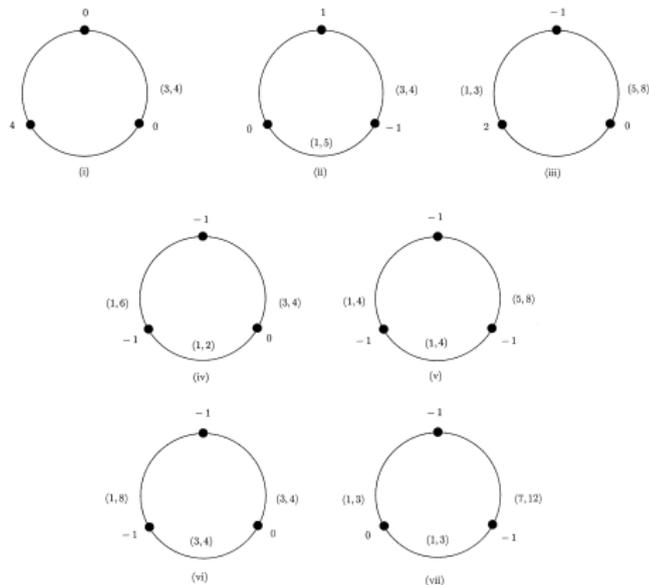


BILD 7.

• Klassifikation der X_Δ 's mit $\rho(X_\Delta) = 1$ und Index $\ell = 2$.

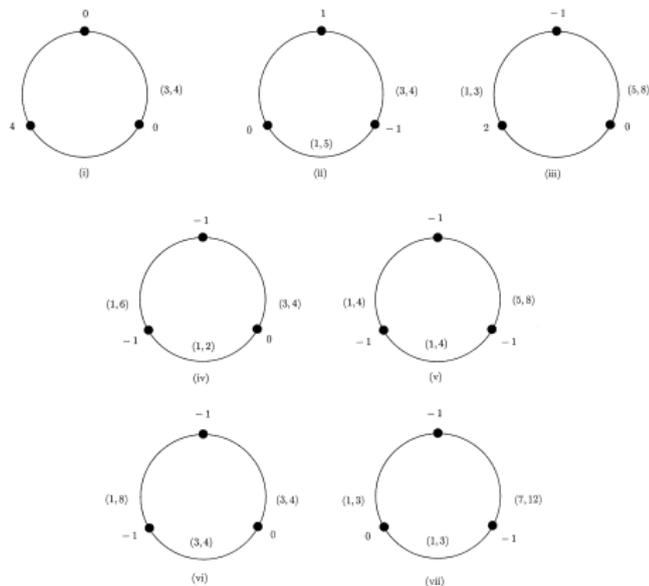


BILD 7.

Übergang zur kombinatorischen Geometrie

Definition. Ein Polygon $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{0} \in \text{int}(Q)$ heisst **LDP-Polygon** falls $\text{Vert}(Q) \subset \mathbb{Z}^2$ aus *primitiven* Gitterpunkten besteht. Sei Q ein derartiges Polygon. Der **lokale Index** einer Kante F von Q ist der ganzzahlige Abstand $l_F := \langle \boldsymbol{\eta}_F, F \rangle$ zwischen $\mathbf{0}$ und F . [Mit $\boldsymbol{\eta}_F$ wird der äussere Normalenvektor von F bezeichnet.] Der **Index** von Q ist

$$\ell_Q := \text{kgV}(\{l_F \mid F \in \text{Edg}(Q)\}) = \min \{ \lambda \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \text{Vert}(\lambda Q^*) \subset \mathbb{Z}^2 \},$$

wobei $\lambda Q^* := \{ \lambda \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in Q^* \}$ und $Q^* := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{y} \in Q \}$ das *polare* (rationale) Polygon von Q ist.

Lemma

Durch $[X_\Delta] \mapsto [Q_\Delta]$ und $[Q] \mapsto [X_Q]$, $X_Q := X_{\Delta_Q}$ mit

$$\Delta_Q := \{ \sigma_F \text{ zusammen mit seinen Seiten} \mid F \in \text{Edg}(Q) \} \quad [\sigma_F := \mathbb{R}_{\geq 0} F]$$

entsteht eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen torischer} \\ \text{log del Pezzo Flächen} \\ \text{vom Index } \ell \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen von} \\ \text{LDP-Polygonen } Q \text{ bzgl.} \\ \text{unimodularer Transformationen} \\ \text{mit } \ell_Q = \ell \end{array} \right\}.$$

Problem

Klassifiziere die LDP-Polygone Q mit festgelegtem Index $l_Q = \ell$ bis auf unimodulare Transformationen.

Theorem (Batyrev (1985), Rabinowitz (1989), Koelman (1991))

Es gibt genau 16 LDP-Polygone vom Index 1. (Siehe Bild 9.) [Diese heißen insbesondere **reflexive Polygone**.]

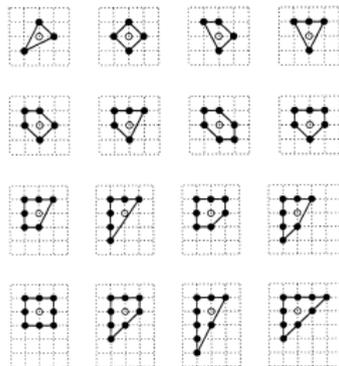


BILD 9.

Die entsprechenden gewichteten Graphen. Die zu den fünf Dreiecken gehörigen gewichteten Graphen sind schon im Bild 6 gezeigt worden. Für die übrigen siehe Bilder 10 und 11.

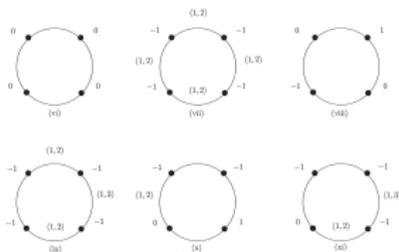


BILD 10.

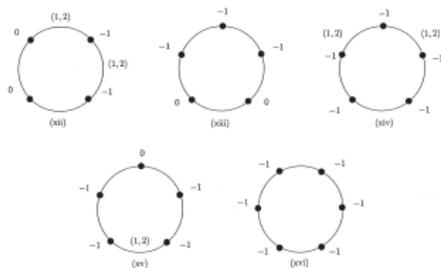


BILD 11.

Klassifikation der LDP-Polygone vom Index 2

Lemma

Sei Q ein LDP-Polygon mit $\max\{l_E \mid E \in \text{Edg}(Q)\} = k$. Wenn F eine Kante von Q mit $l_F = k$ ist, und wenn es einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}F \cap \mathbb{Z}^2$ gibt mit $\langle \boldsymbol{\eta}_F, \mathbf{x} \rangle = 1$, dann gilt: $\mathbf{m} + \mathbf{x} \in Q \cap \mathbb{Z}^2$, $\forall \mathbf{m} \in (Q \setminus F) \cap \mathbb{Z}^2$.

Lemma

Sei Q ein LDP-Polygon mit $\max\{l_E \mid E \in \text{Edg}(Q)\} = k$. Wenn F eine Kante von Q mit $l_F = k$ ist, dann gilt: $\#(F \cap \mathbb{Z}^2) \leq 2k^2$.

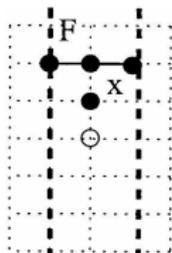
Theorem (B. Nill (2007))

Es gibt genau 30 LDP-Polygone vom Index 2.

Beweisidee. Sei Q ein LDP-Polygon vom Index 2 und sei F eine Kante von Q mit $l_F = 2$, so dass $\#(F \cap \mathbb{Z}^2)$ maximal ist. Bis auf unimodulare Transformation kann man annehmen, dass $F = \text{conv}(\{(a, 2), (1, 2)\})$ mit $a \leq -1$ ungerade. ($\#(F \cap \mathbb{Z}^2) = -a + 2$). Nach dem zweiten Lemma ist $-a + 2 \leq 8$, d.h., $a \geq -5$. Dies bedeutet, dass $a \in \{-1, -3, -5\}$.

Ist $\Xi_F := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0} F \cap \mathbb{Z}^2 \mid \langle \boldsymbol{\eta}_F, \mathbf{x} \rangle = 1 \}$, so gilt $\sharp(\Xi_F) = \frac{1-a}{2}$. Man unterscheidet drei Fälle:

- **Fall 1.** $a = -1$, $\Xi_F = \{ \mathbf{x} \}$. Nach dem ersten Lemma muss Q zwischen den zwei geschtrichelten parallelen Geraden liegen.



Es gibt drei Möglichkeiten: (i) $-\mathbf{x} \notin Q$:

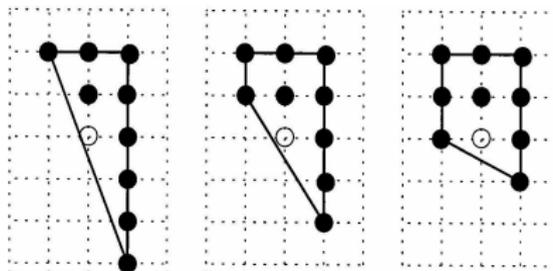


BILD 12.

(ii) $-\mathbf{x} \in \partial Q$:

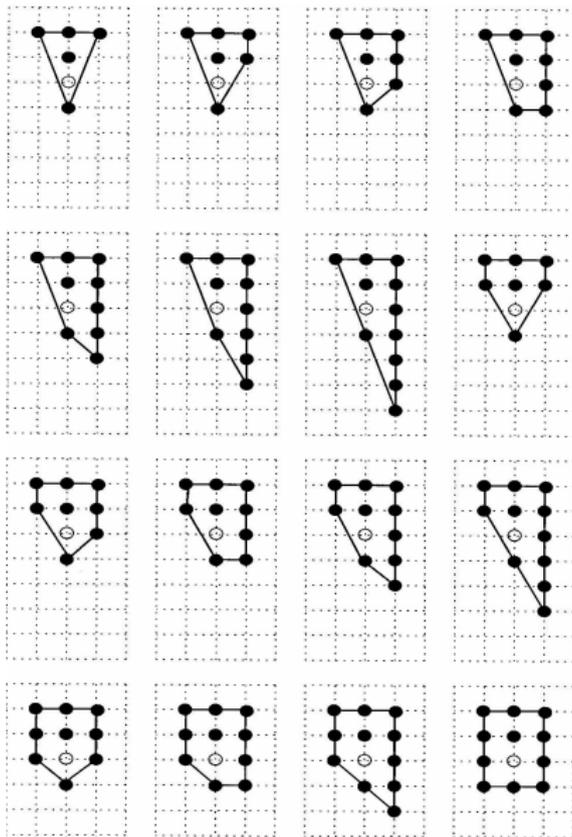


BILD 13.

(iii) $-\mathbf{x} \in \text{int}(Q)$ (d.h., $-\mathbf{x} \in \Xi_{F'}$ für eine Kante F' und $-2\mathbf{x} \in F'$):

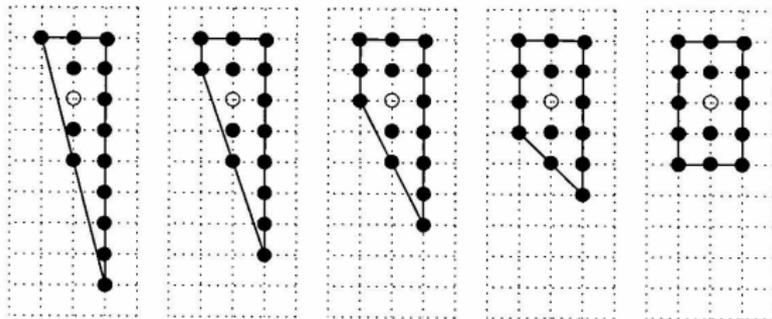
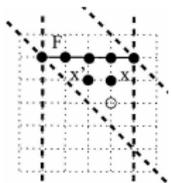


BILD 14.

- **Fall 2.** $a = -3$, $\Xi_F = \{\mathbf{x}', \mathbf{x}\}$ (in dieser Reihenfolge). Nach dem ersten Lemma muss Q in dem Bereich, der von den zwei gestrichelten Geraden bestimmt wird, liegen.



Daraus ergeben sich folgende Polygone:

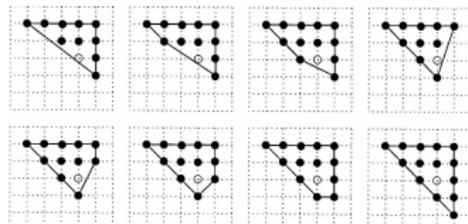
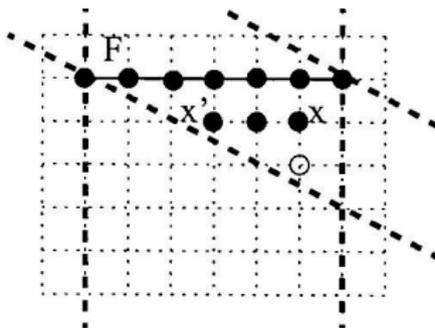


BILD 15.

Man muss dabei beachten, dass das erste und das vierte, bzw. das zweite und das fünfte, bzw. das dritte und das sechste unimodular äquivalent sind! Also gibt es in diesem Fall nur 5 verschiedene LDP-Polygone (bis auf unimodulare Äquivalenz).

- **Fall 3.** $a = -5$, $\Xi_F = \{\mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{x}\}$ (in dieser Reihenfolge). Nach dem ersten Lemma muss Q in dem Bereich, der von den zwei geschtrichelten Geraden bestimmt wird, liegen.



Daraus ergibt sich nur ein einziges LDP-Polygon:

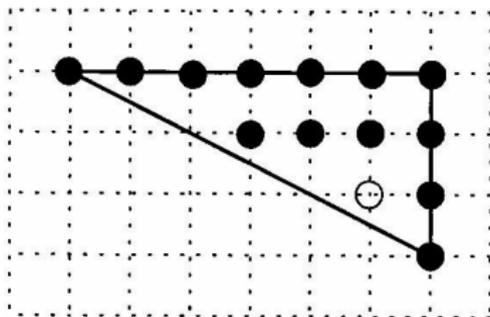


BILD 16.

Die entsprechenden gewichteten Graphen. Die zu den sieben Dreiecken gehörigen gewichteten Graphen sind schon im Bild 7 gezeigt worden. Für die übrigen siehe Bilder 17, 18 und 19.

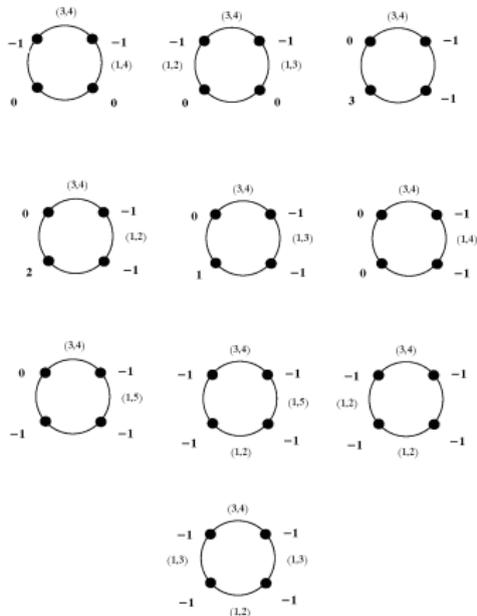


BILD 17.

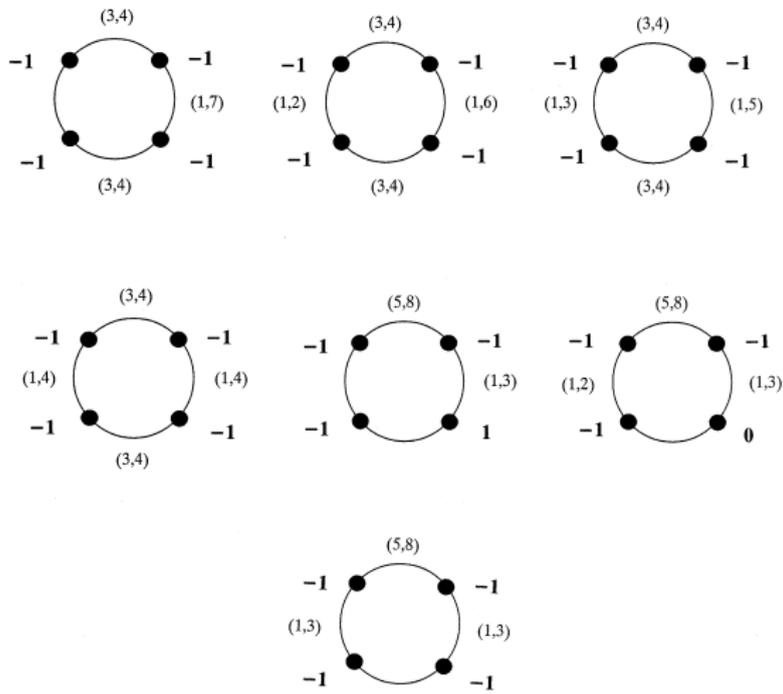


BILD 18.

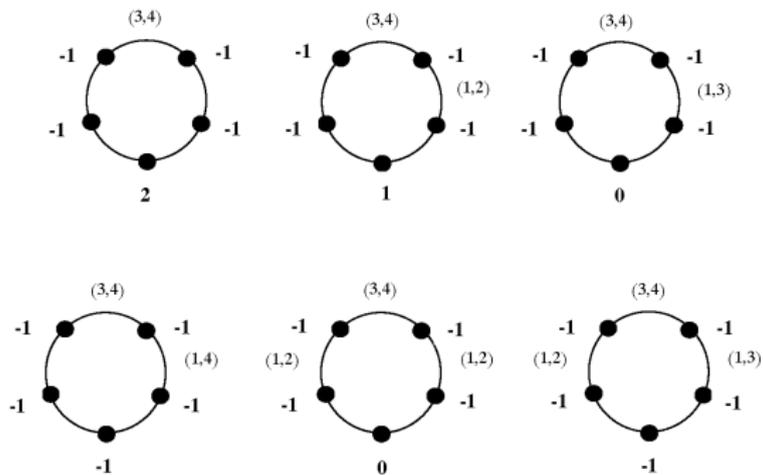


BILD 19.

- Anzahl der Isomorphieklassen der torischen log del Pezzo Flächen X_Q vom Index $\ell_Q = \ell \leq 16$.** (A. Kasprzyk, M. Kreuzer & B. Nill: *On the combinatorial classification of toric log del Pezzo surfaces*, LMS J. Comp. Math, **13** (2010) 33-46.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\ell) &:= \#\{[Q] \mid Q \text{ LDP-Polygon vom Index } \ell\} \\ &= \#\{[X_Q] \mid X_Q \text{ torische log del Pezzo Fläche vom Index } \ell\} \\ \mathfrak{N}_{\max}(\ell) &:= \max\{\#\text{(Vert}(Q)) \mid Q \text{ LDP-Polygon vom Index } \ell\}. \\ &\quad [\#\text{(Vert}(Q)) = e(X_Q) = \rho(X_Q) + 2] \end{aligned}$$

ℓ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathfrak{N}(\ell)$	16	30	99	91	250	379	429	307
$\mathfrak{N}_{\max}(\ell)$	6 [1]	5 [6]	6 [2]	6 [1]	6 [5]	8 [1]	6 [11]	6 [5]

ℓ	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathfrak{N}(\ell)$	690	916	939	1279	1142	1545	4312	1030
$\mathfrak{N}_{\max}(\ell)$	6 [24]	7 [1]	6 [27]	8 [1]	6 [39]	7 [5]	12 [1]	6 [41]

In den eckigen Klammern ist die Anzahl der (bis auf unimodulare Transformationen) verschiedenen LDP-Polygone, welche die maximale Anzahl der Eckpunkte besitzen, eingetragen.

Nützliche Einzelheiten über diese $16 + 30 + \dots + 1030 = 13\,454$ Polygone findet man auf der www-Seite von A. Kasprzyk:

<http://grdb.lboro.ac.uk/forms/toricldp>

Bemerkung. Das einzige LDP-Zwölfeck $Q \subset [-3, 3]^2$ vom Index 15 und der entsprechende gewichtete Graph werden wie folgt abgebildet:

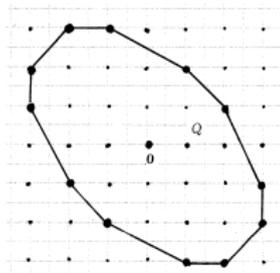


BILD 20.

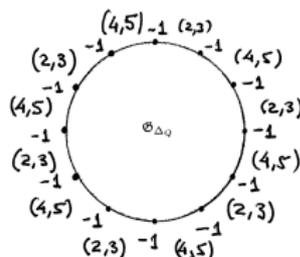


BILD 21.

X_Q besitzt 12 Quotientensingularitäten (abwechselnderweise sechs vom Typ $(2, 3)$ und sechs vom Typ $(4, 5)$.)

Der Algorithmus von Kasprzyk, Kreuzer und Nill

Definition. Eine Kante F eines Polygons $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{0} \in \text{int}(Q)$ und $\text{Vert}(Q) \subset \mathbb{Z}^2$ heisst **spezielle Kante**, wenn
$$\sum_{\mathbf{v} \in \text{Vert}(Q)} \mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0} F.$$

(Da $\mathbf{0} \in \text{int}(Q)$, gibt es immer mindestens eine spezielle Kante.)

Lemma

Seien Q ein LDP-Polygon und F eine spezielle Kante von Q . Dann gilt:

$$Q \subset \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid -l_F(l_F + 1) \leq \langle \boldsymbol{\eta}_F, \mathbf{v} \rangle \leq l_F \}.$$

Lemma

Seien Q ein LDP-Polygon und $F \in \text{Edg}(Q)$. Dann gilt:

$$\#(F \cap \mathbb{Z}^2) \leq 2\ell_Q(l_F + 1) + 1.$$

Algorithmus: Die LDP-Polygone Q mit vorgegebenem Index $\ell_Q = \ell$ werden produziert, indem man eine Gitterstrecke als spezielle Kante betrachtet und dann sukzessiv “zugelassene” Eckpunkte hinzufügt. (Dieser Prozess wird für jede mögliche Wahl von Eckpunkten und speziellen Kanten wiederholt.)

- **Schritt 1.** Man legt eine Gitterstrecke als spezielle Kante F (von den Q 's, die zu konstruieren sind) fest. Offensichtlich gilt $l_F \mid \ell$. O.B.d.A. kann man annehmen, dass $F = \text{conv}(\{(a, l_F), (b, l_F)\})$ mit $l_F < a < b$ und $\text{ggT}(a, l_F) = \text{ggT}(b, l_F) = 1$. Nach dem zweiten Lemma gilt:

$$b - a \leq 2\ell(l_F + 1).$$

- **Schritt 2.** Induktionsannahme: Sei $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ ($k \geq 2$) eine Familie von vorbestimmten Eckpunkten mit $\mathbf{v}_0 = (a, l_F)$, $\mathbf{v}_1 = (b, l_F)$, so dass $F_i := \text{conv}(\{\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i\})$ eine Kante für $i = 1, \dots, k-1$ ist. Gesucht wird jede mögliche Wahl für $\mathbf{v}_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\text{ggT}(x_k, y_k) = 1$, so dass $\text{conv}(\{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\})$ eine Kante ist. Aus den obigen Lemmata ergibt sich

$$-l_F(l_F + 1) \leq x_k \leq l_F, \quad -l_F y_k + (\ell + a)x_k \leq l_F \ell, \quad l_F y_k + (\ell - b)x_k \leq l_F \ell.$$

Wenn $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0$, dann wird der Prozess beendet und das konstruierte LDP-Polygon in der Liste eingetragen.

- **Schritt 3.** Aus der im Schritt 2 produzierten Liste von LDP-Polygonen vom Index ℓ bildet man ein Repräsentantensystem von nicht unimodular äquivalenten Polygonen (z.B. durch "PALP", s. M. Kreuzer & H. Skarke: *PALP: A package of analyzing lattice polytopes with applications of toric geometry*, Comput. Phys. Comm. **157** (2004) 87-106).

Ein weiteres Klassifikationsresultat

Die torischen log del Pezzo Flächen *mit genau einer* Singularität (ohne irgendeine a priori Voraussetzung über ihren Index oder ihre Picardsche Zahl) können ebenfalls bis auf Isomorphismus klassifiziert werden.

Theorem

Sei X_Q eine torische log del Pezzo Fläche (induziert von einem LDP-Polygon Q) mit genau einer Singularität. Dann gilt folgendes:

(i) $\rho(X_Q) \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) Wenn wir für jede positive ganze Zahl p die LDP-Polygone

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_p^{[1]} := \text{conv} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right), \\ Q_p^{[2]} := \text{conv} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right), \\ Q_p^{[3]} := \text{conv} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right), \end{array} \right\}$$

definieren, dann gilt für jedes $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\rho(X_Q) = k \iff \exists p \in \mathbb{Z}_{>0} : X_Q \cong X_{Q_p^{[k]}}$$

und die entsprechenden gew. Graphen $\mathfrak{G}_{\Delta_{Q_p^{[k]}}}$ sind diejenigen des Bildes 22.

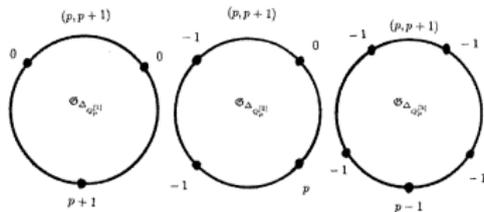


BILD 22.

Theorem (Fortsetzung)

- (iii) $X_{Q_p^{[1]}}$ ist isomorph zur gewichteten projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(1, 1, p+1)$ und man erhält sie durch Kontraktion des ∞ -Schnittes $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p+1))$ von \mathbb{F}_{p+1} . $X_{Q_p^{[2]}}$ wird konstruiert indem man die Hirzebruchsche Fläche \mathbb{F}_p in einem \mathbb{T} -Fixpunkt aufbläst und im Nachhinein ihren ∞ -Schnitt kontrahiert. $X_{Q_p^{[3]}}$ ist die Aufblasung von $X_{Q_p^{[2]}}$ in einem nicht singulären \mathbb{T} -Fixpunkt.
- (iv) Wenn X_Q Index ℓ und Picardsche Zahl $\rho(X_Q) = k \in \{1, 2, 3\}$ hat, dann ist

$$X_Q \cong \begin{cases} \text{entweder } X_{Q_{\ell-1}^{[k]}} \text{ oder } X_{Q_{2\ell-1}^{[k]}}, & \text{falls } \ell \text{ ungerade } \geq 3, \\ X_{Q_{2\ell-1}^{[k]}}, & \text{falls } \ell \in \{1\} \cup 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

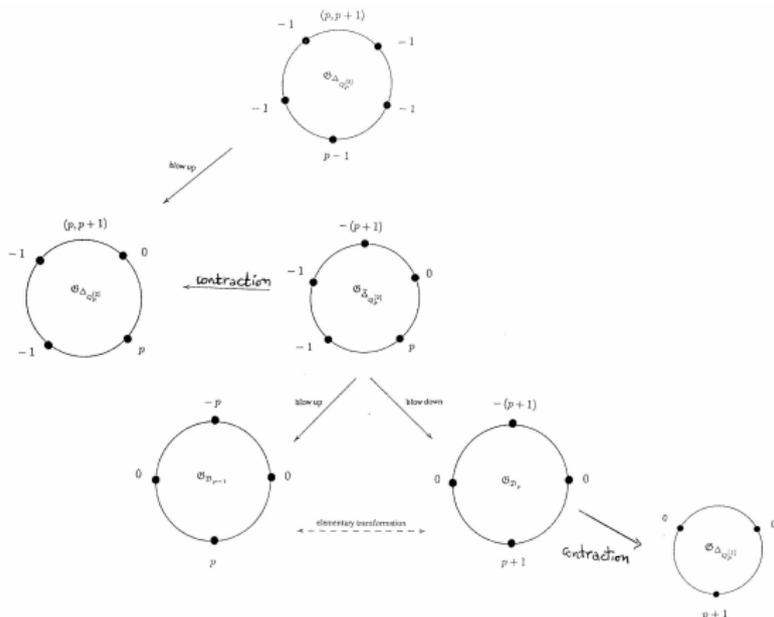


BILD 23.