Αντίγραφα Σημειώσεων και Διαφανειών από τις Διαλέξεις μου στο Σεμινάριο τού Β΄ Τομέα τού Μαθηματικού Τμήματος τού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Μέρος Γ΄)

- **Μιγαδικοί αναλυτικοί χώροι**

- **Ολόμορφες και μερόμορφες απεικονίσεις, ιδιώματα μιγ. αν. χώρων, αλγεβρικές ιδιότητές τους κ.ά.**

- **Διασυνδέσεις τής εν λόγω Θεωρίας με την Αλγεβρική Γεωμετρία (GAGA κλπ.)**

- **Διαιρέτες Cartier και Weil, και γραμμικά συστήματα διαιρετών. Θεώρημα Bertini. Ευρείς διαιρέτες.**

- **Διάσταση Kodaira. Παραδείγματα.**

- **Το Θεώρημα Αποσυνθέσεως κατά Hodge**

- **Το Θεωρήμα Riemann-Roch-Hirzebruch**

- **Περί τής ταξινομήσεως των αλγεβρικών επιφανειών (εντελώς περιληπτικά)**

<u>Ορσ.</u> Ένας <u>μιγαδικός αναλυτικός χώρος</u> είναι ένας δακτυλιακός χώρος $(X, \mathcal{O}_X)$ για τον οποίο (i) ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff
(ii) το $\mathcal{O}_X$ είναι ένα δράγμα δακτυλίων, και
(iii) για κάθε σημείο $x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά U του x καθώς και πεπερασμένου πλήθους ολόμορφες συναρτήσεις

$$f_1, \dots, f_k : D \to \mathbb{C} \qquad (D \text{ ανοικτό} \subseteq \mathbb{C}^n)$$

ούτως ώστε να ορίζεται ένας δακτυλιακός χώρος $(U, \mathcal{O}_U)$ μέσω των

$$U = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_D / \mathcal{J}_D) := \{x \in D : \mathcal{J}_{D,x} \neq \mathcal{O}_{D,x}\} =$$
$$= \{x \in D : f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$$

και

$$\mathcal{O}_U = (\mathcal{O}_D / \mathcal{J}_D)|_U,$$ όπου $\mathcal{O}_D$ είναι το δράγμα των ολόμορφων συναρτήσεων των οριζομένων επί του D και $\mathcal{J}_D$ το (υπο)δράγμα των ιδεωδών $\mathcal{J}_D = \mathcal{O}_D f_1 + \dots + \mathcal{O}_D f_k \subset \mathcal{O}_D$.

<u>Ορσ.</u> Οι μορφισμοί (αντ., ισομορφισμοί) δραγμάτων $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f, \tilde{f})} (Y, \mathcal{O}_Y)$ μεταξύ δύο αναλυτικών χώρων ($f : X \to Y$ συνεχής, $\tilde{f}_V : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ V αν. $\subseteq Y$, $\mathbb{C}$-αλγ. ομομορφισμός (αντ. ισο) συμβιβαστός με τους περιορισμούς) ονομάζονται <u>ολόμορφες απεικονίσεις</u> (αντ. <u>αμφιολόμορφες απεικονίσεις</u>).

<u>Ορσ.</u> Αν $(X, \mathcal{O}_X)$ είναι ένας μιγ. αν. χώρος, τότε ορίζουμε:

- $\operatorname{Reg}(X) := \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}$ είναι ένας κανονικός τοπικός δακτύλιος$\}$
  $(\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\})$

  $\operatorname{Sing}(X) := X \setminus \operatorname{Reg}(X) =$ <u>το ιδιάζον χωρίο του X</u>.

Τα σημεία του $\operatorname{Sing}(X)$ ονομάζονται <u>ιδιάζοντα σημεία</u> ή <u>ιδιώματα</u>.
Προφανώς $\operatorname{Sing}(X) = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{Reg}(X) = X \Leftrightarrow X$ είναι ένα μιγαδικό πολύπτυγμα.

- Ένα σημείο του X ονομάζεται <u>ανηγμένο</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι ανηγμένος δακτ.
  Ο $(X, \mathcal{O}_X)$ καλείται <u>ανηγμένος</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι ανηγμένοι, $\forall x, x \in X$.
  Ένα σημείο του X ονομάζεται <u>ορθό</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι ορθός δακτύλιος
- Ο $(X, \mathcal{O}_X)$ καλείται <u>ορθός</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$ είναι ορθός, $\forall x, x \in X$.

X ανηγμένος $\Longrightarrow$ $\operatorname{Sing}(X)$ είναι λεπτό (δηλ. κάθε $x \in \operatorname{Sing}(X)$ είναι οριακό σημείο αρ. του X)

X ανηγμένος και ορθός $\Longrightarrow$ $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2$.

Ορσ. Μια ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ μιγ. αν. χώρων $f: X \to Y$ ονομάζεται <u>γνήσια τροποποίηση</u> όταν

(i) η f είναι γνήσια και επιρριπτική, και

(ii) υπάρχουν αναλυτικά υποσύνολα $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, τα οποία δεν είναι πουθενά πυκνά, ούτως ώστε η $f|_{X \setminus X'}: X \setminus X' \to Y \setminus Y'$ να είναι αμφιολόμορφη.

Ορσ. Έστω ότι οι X και Y είναι δύο μιγαδικοί ~~αναλυτικοί~~ κυνηγμένα χώροι και ότι η φ είναι μια απεικόνιση από τον X στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(Y)$ του Y. Η φ λέγεται <u>μερόμορφη απεικόνιση</u> $\varphi: X \dashrightarrow Y$ όταν

(i) Το γράφημα $G_\varphi := \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}$ της φ αποτελεί ένα ανάγωγο αναλυτικό υποσύνολο του γινομένου $X \times Y$, και όταν

(ii) η προβολή $pr_X: G_\varphi \to X$ είναι μια γνήσια τροποποίηση.

(Η φ είναι ολόμορφη απ. $\Leftrightarrow$ pr_X αμφιολόμορφη).

$S_\varphi := \{$το ελάχιστο υποσύνολο του X : $\varphi|_{X \setminus S_\varphi}$ είναι ολόμορφη απ.$\}$

<u>σύνολο των απροσδιόριστων θέσεων της φ.</u>

Η φ λέγεται <u>αμφιμερόμορφη</u> (αντ. <u>επιρριπτική μερόμορφη</u>) <u>απεικόνιση</u>

$\Leftrightarrow$ $pr_Y: G_\varphi \to Y$ είναι μια γνήσια τροποποίηση (αντ. επιρριπτική).

Ορσ. Έστω X ένας αν. μιγ. αναλ. χώρος και έστω U ανοικτό $\subseteq X$

$$U \mapsto \mathcal{M}(U) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f \in \mathcal{O}_X(U),\ g \in \mathcal{O}_X(U) \text{ όχι μηδενοδιαιρέτης} \right\}$$

τα μέλη του είναι οι μερόμορφες συναρτήσεις επί του U.

απ' αυτό το προδράγμα

$\mathcal{M}$ <u>δράγμα των μερομόρφων συναρτήσεων επί του X.</u>

f: $\exists$ αν. υπ. $S \subset X$: $\forall x \in X$ $\exists$ περ. U του x και ολ. συν. $g, h|_U$

$f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$, $\forall t$, $t \in U \setminus S$.

Εργαζόμενοι εντός των πλαισίων της <u>Αλγεβρικής Γεωμετρίας</u> μπορούμε να ορίσουμε αναλόγως τις λεγόμενες "μιγαδικές ποικιλότητες"

<u>μιγαδική ποικιλότητα</u> $=$ { ακέραιο, διαχωρισμένο διάσχημα πεπερασμένου τύπου υπεράνω του $\mathbb{C}$ }

<u>διάσχημα</u> (sheme) $=$ { ένας δακτυλιακός χώρος $(X, \mathcal{R}_X)$ με δράγμα δομής $\mathcal{R}_X$, στελέχη $\mathcal{R}_{X,x}$ τοπικούς δακτυλίους, και με την ιδιότητα $\forall x, x \in X$ $\exists$ ανοικτό $\underset{x}{U} \subseteq X$: $(U, \mathcal{R}_X|_U)$ να είναι ένα συσχετικό διάσχημα. }

<u>συσχετικό διάσχημα</u> (affine scheme) $=$ ένας δακτυλιακός χώρος $(V, \mathcal{R}_V)$, όπου $V = \underset{\substack{\text{φάσμα} \\ \text{του } A}}{\mathrm{Spec}(A)} = \{$πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου $A\}$

εφοδιασμένος με την <u>τοπολογία Zariski</u>:

U <u>ανοικτό</u> στον V $\overset{}{\underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}}$ $(\exists$ ιδεώδες $I \subseteq A : U = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : I \not\subseteq \mathfrak{p}\})$

και $\mathrm{Spec}(A) \ni \mathfrak{p}$

$$\mathcal{R}_{V,\mathfrak{p}} := A_{\mathfrak{p}} := \underline{\text{εντόπιση του } A} \text{ ως προς το ιδεώδες } \mathfrak{p}$$

$$= (A \times (A \setminus \mathfrak{p}))/\sim$$

με

$$(a, s) \sim (a', s') \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \exists r \in A \setminus \mathfrak{p} : \\ r(s'a - sa') = 0 \end{array} \right\}$$

<u>Ορσ.</u> • Ένα διάσχημα $(X, \mathcal{R}_X)$ λέγεται <u>ακέραιο</u> όταν οι τοπικοί δακτύλιοι $\mathcal{R}_{X,x}$ είναι <u>ακηλιδωμένοι</u> $\forall x, x \in X$, και ταυτοχρόνως ο τοπολογικός χώρος X είναι <u>ανάγωγος</u> (ήτοι, δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο κλειστών γνησίων υποσυνόλων του)

$[\Leftrightarrow \forall U$ αν. $\subseteq X : \mathcal{R}_X(U)$ είναι ακεραία περιοχή$]$

• $(X, \mathcal{R}_X)$ καλείται <u>ορθό</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}_{X,x}$ είναι ορθοί, $\forall x, x \in X$.

<u>Ορσ.</u> Οι Μορφισμοί μεταξύ διασχημάτων $(X, \mathcal{R}_X) \to (Y, \mathcal{R}_Y)$ λέγονται <u>κανονικές απεικονίσεις (regular maps)</u>. Οι κανονικές αμφιρριπτικές απεικονίσεις με κανονικές αντιστρόφους ονομάζονται <u>αμφικανονικές</u>.

Οι μορφισμοί $(X, \mathcal{R}_X) \to \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[T])$ ονομάζονται ιδιαιτέρως <u>κανονικές συναρτήσεις επί του X</u>.

<u>Ορσ.</u> Ένας μορφισμός διασχημάτων $f: X \to Y$ λέγεται <u>κλειστή εμβάπτιση</u> (αντ. <u>ανοικτή εμβάπτιση</u>/<u>εμβάπτιση</u>) όταν υπάρχει ένα κλειστό υποδιάσχημα Z (αντ. ανοικτό υποδιάσχημα/υποδιάσχημα) του Y, ούτως ώστε η $f: X \to Z$ να είναι ισομορφισμός.

<u>Ορσ.</u> Ένα διάσχημα X καλείται <u>διαχωρισμένο</u> όταν ο «διαγώνιος» μορφισμός $\Delta: X \to X \times X$ είναι κλειστή εμβάπτιση.

<u>Ορσ.</u> Ένα <u>διάσχημα της Noether</u> είναι ένα διάσχημα το οποίο επιδέχεται ένα πεπερασμένο κάλυμμα από συσχετικά διασχήματα

$$X = \bigcup_i U_i \, , \quad U_i = \mathrm{Spec}(A_i) \qquad (*)$$

όπου οι A_i είναι δακτύλιοι της Noether. Ένα <u>διάσχημα πεπερασμένου τύπου υπεράνω ενός σώματος k</u> είναι ένα διάσχημα της Noether με ένα πεπ. κάλυμμα $(*)$, όπου τα A_i είναι k-άλγεβρες πεπερασμένου τύπου υπεράνω του k, δηλ.

$$A_i = k[x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}] / (\underbrace{f_1^{(i)}, \dots, f_{q_i}^{(i)}}_{\text{πολυώνυμα}})$$

<u>Ορσ.</u> Ένα διάσχημα X καλείται <u>προβολικό</u> αν υπάρχει μια κλειστή εμβάπτιση $j: X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$.

<u>Ορσ.</u> Έστω ότι τα X και Y είναι δύο διασχήματα και

$$\mathbb{E} := \{ (U, \varphi) \mid U \text{ ανοικτό, πυκνό} \subset X \text{ και } \varphi: U \to Y \text{ μια καν. απ.} \}$$

Για $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \ni ((U,\varphi),(V,\psi))$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας

$$(U,\varphi) \sim (V,\psi) \Leftrightarrow \varphi|_W = \psi|_W \text{ για κάποιο αν. πυκν. } W \subset U \cap V.$$

Ένα στοιχείο $f: X \dashrightarrow Y$ του $\mathbb{E}/\sim$ λέγεται <u>ρητή απεικόνιση από το X στο Y</u> με πεδίο ορισμού της το σύνολο:

$$\mathrm{dom}(f) := \{ x \in X \mid x \in U \text{ για κάποιο ζεύγος } (U,\varphi) \in f \}$$

Το $X \setminus \mathrm{dom}(f)$ είναι το σύνολο των απροσδ. θέσεων της f. Εάν για μια τέτοια $f: X \dashrightarrow Y$ έχουμε $\overline{\mathrm{Im}(f)} = Y$ (δηλ. $\varphi(U)$ είναι πυκνό εντός του Y για κάποιο $(U,\varphi) \in f$), τότε λέμε πως η f είναι <u>κυριαρχούσα</u>. Ονομάζουμε μια κυριαρχούσα ρητή απεικόνιση $f: X \dashrightarrow Y$ <u>αμφίρρητη</u> $\Leftrightarrow \exists\, g: Y \dashrightarrow X$ ρητή : $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

X και Y λέγονται <u>αμφιρρητώς ισοδύναμα</u> αν $\exists$ μια αμφίρρητη απ.: $f: X \dashrightarrow Y$.

Η αντιστοιχία GAGA (Serre 1956)

Έστω X ένα διάσχημα πεπερασμένου τύπου υπεράνω του $\mathbb{C}$. Θεωρούμε ένα ανοικτό κάλυμμα $X = \bigcup_i Y_i$, $Y_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $A_i \cong \mathbb{C}[x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}] / (f_1^{(i)}, \dots, f_{q_i}^{(i)})$ πολυώνυμα

Ορίζουμε ως Y_i^{an} τον αντίστοιχο μιγαδικό αναλυτικό χώρο θεωρώντας τα $f_1^{(i)}, \dots, f_{q_i}^{(i)}$ ως ολόμορφες συναρτήσεις επί του $\mathbb{C}^n$.

$$\boxed{X^{an} := \bigcup_i Y_i^{an}}$$

X συνεκτικός (ως προς την τοπολογία Zariski)	$\Leftrightarrow$	X^{an} συνεκτικός (ως προς τη συνήθη τοπολ.)
ανηγμένος	$\Leftrightarrow$	X^{an} ανηγμένος
μη ιδιάζων	$\Leftrightarrow$	μη ιδιάζων (δηλ. ένα μιγ. πολύπτυγμα)
ορθός	$\Leftrightarrow$	ορθός
ανάγωγος	$\Leftrightarrow$	ανάγωγος.

$\mathcal{F}$ συμφυές δράγμα υπεράνω του X $\rightsquigarrow$ $\exists$ ένα συμφυές δράγμα $\mathcal{F}^{an}$ υπεράνω του X^{an} $[= \varphi^*\mathcal{F}]$

$\Big[\varphi : X^{an} \to X$, $\varphi(X^{an}) = $ κλειστά σημεία του X $\rightsquigarrow \varphi^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X^{an}} \Big]$

και φυσικές απεικονίσεις:

$$\boxed{\alpha_i : H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X^{an}, \mathcal{F}^{an})} \quad (*)$$

Θεώρημα: Εάν X είναι ένα προβολικό διάσχημα υπεράνω του $\mathbb{C}$, τότε οι $(*)$ είναι ισομορφισμοί ομάδων.

Θεώρημα: Εαν τα X, X' είναι δύο προβολικά διασχήματα υπεράνω του $\mathbb{C}$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή $X^{an} \cong X'^{an} \Rightarrow X \cong X'$.

Επίσης για προβολικά διασχήματα (ποικιλότητες) X, Y

$f : X \dashrightarrow Y$ είναι $\left\{ \begin{array}{l} \text{ρητή απεικόνιση} \\ \text{αμφίρρητη} \ \text{''} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f^{an} : X^{an} \dashrightarrow Y^{an}$ είναι $\left\{ \begin{array}{l} \text{μερόμορφη} \\ \text{αμφιμερόμορφη} \end{array} \right\}$ κλπ.

$[f : X \to Y$ κανονική απεικόνιση $\Leftrightarrow f^{an} : X^{an} \to Y^{an}$ ολόμορφη απεικόνιση $]$

Ας συμβολίσαμε, από εδώ και στο εξής, με X μια μιγαδική ορθή ποικιλότητα.

- Ένας <u>πρώτος διαιρέτης Γ του X</u> είναι μια (κλειστή) υποποικιλότητα του X συνδιάστασης 1. Κάθε στοιχείο D της ελεύθερης (προσθετικής) αβελιανής ομάδας $WDiv(X)$ της παραγόμενης από το σύνολο των πρώτων διαιρετών του X λέγεται <u>διαιρέτης του Weil</u> επί του X.

$$D = \sum_i \lambda_i \Gamma_i$$

D λέγεται $\begin{cases} \underline{\text{αποδοτικός}} & \Leftrightarrow \quad \lambda_i \geq 0, \ \forall i. \\ \underline{\text{αυστηρώς αποδοτικός}} & \quad \lambda_i > 0, \ \forall i. \end{cases}$

- Για κάθε πρώτο διαιρέτη Γ μπορεί να ορισθεί ένας τοπικός δακτύλιος $\mathcal{O}_{X,\Gamma}$ με $\dim \mathcal{O}_{X,\Gamma} = \dim X - \dim \Gamma = 1$. Έτσι ο $\mathcal{O}_{X,\Gamma}$ αποτελεί έναν <u>διακριτικό εκτιμητικό δακτύλιο</u> του $Rat_{\mathbb{C}}(X) = \{\text{ρητές συν.}\}$ με συνάρτηση εκτίμησης

$$v_\Gamma : Rat_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \quad (0 \mapsto \infty)$$

Λέμε πως μια $f \in Rat_{\mathbb{C}}(X) \setminus \{0\}$ έχει:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{θέση μηδενισμού}} \\ \underline{\text{πόλο}} \end{array}\right\} \ \underline{\text{τάξης}} \ \begin{array}{c} v_\Gamma(f) \\ (-v_\Gamma(f)) \end{array} \ \underline{\text{κατά μήκος του } \Gamma} \Leftrightarrow \begin{array}{l} v_\Gamma(f) > 0 \\ v_\Gamma(f) < 0 \end{array}$$

Ο <u>διαιρέτης $div(f)$</u> μιας τέτοιας f: είναι ο $div(f) := \sum v_\Gamma(f)\, \Gamma$

Κάθε $D \in WDiv(X)$ με $D = div(f)$ λέγεται <u>κύριος διαιρέτης</u>.

<u>Ορσ.</u> Δύο Weil-διαιρέτες D, D' λέγονται <u>γραμμικώς ισοδύναμοι</u> όταν $\boxed{D - D' = div(f)}$ για κάποια $f \in Rat_{\mathbb{C}}(X) \setminus \{0\}$.

Για κάθε Weil-διαιρέτη $D = \sum \lambda_\Gamma \Gamma$ ορίζουμε ένα δράγμα $\mathcal{O}_X(D)$:

$$X \underset{\text{αν.}}{\supseteq} U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{ f \in Rat_{\mathbb{C}}(X) \mid v_\Gamma(f) \geq -\lambda_\Gamma, \ \forall \Gamma \text{ με } \Gamma \subset U \}$$

$$D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$$

Ο D ονομάζεται <u>διαιρέτης του Cartier</u> στο σημείο $x \in X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ γειτ. αν. $U \ni x$: $\mathcal{O}_X(D)|_U \cong \mathcal{O}_U$ (δηλ. η $\mathcal{O}_X(D)$ είναι αντιστρέψιμη στο x)

$\Leftrightarrow \left(\exists f \in Rat_{\mathbb{C}}(X) : v_\Gamma(f) = -\lambda_\Gamma, \ \forall \Gamma \text{ πρώτοδ. με } x \in Supp(\Gamma)\right)$.

Ο D είναι <u>διαιρέτης Cartier</u> αν είναι δ. Cartier $\forall x$, $x \in X$.

Υπάρχει και ένας άλλος, ισοδύναμος χαρακτηρισμός των διαιρετών Cartier

$$\mathrm{CDiv}(X) = \underbrace{H^0}_{\text{ολικές τομές.}}(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

$\cap$

$\mathrm{WDiv}(X)$

Από την ακριβή ακολουθία δραγμάτων

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

Παίρνουμε σε επίπεδο συνομολογίας:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \xrightarrow{(\ )} \mathrm{CDiv}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X; \mathcal{O}_X^*) \to H^1(X, \mathcal{M}_X^*) \to \cdots$$

$$f \longmapsto (f), \quad D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$$

$$(f) = \sum v_\Gamma(f)\Gamma$$

$\mathrm{CDiv}(X) \ni D \rightsquigarrow$ μια οικογ. $\{\varphi_i | U_i\}_{i\in I}$ μερομόρφων (ρητών) συναρτήσεων τέτοιων ώστε φ_i/φ_j, φ_j/φ_i να είναι ολόμορφες στο $U_i \cap U_j$.

$\{U_i\}_{i\in I}$ αν. καλ. του X

($\{\varphi_i = 0\}$ λέγεται τοπική εξίσωση του D στο U_i.)
Είναι μοναδική ως προς πολ/σμο με στ. του $H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = \frac{1}{\varphi_i}\mathcal{O}_{U_i} \subset \mathcal{M}_X|_{U_i}.$$

$D \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D)$

$(U_i, \varphi_i) \rightsquigarrow g_{ij} = \varphi_i/\varphi_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$

σύστημα συνθηκών

$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$, $D \in \mathrm{CartDiv}(X)$ $\iff$ ($\mathcal{L}$ έχει μια ολική τομή $\neq 0$.)

Όταν X είναι όχι μόνον ορθό, αλλά <u>και</u> συμπαγής μιγ. πολ., τότε ο

$$\boxed{L(D) := \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \mathrm{Rat}_{\mathbb{C}}(X) \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}}$$

$(D \in \mathrm{WDiv}(X))$ είναι ένας <u>πεπερασμένος</u> διαν. χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$.

$$\boxed{|D| := \{E \in \mathrm{CarDiv}(X) \mid E \geq 0,\ E \sim D\}}$$

το πλήρες γραμμικό σύστημα το καθοριζόμενο από τον D.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(L(D)) & \overset{\delta.\chi.}{\cong} & |D| & \overset{\cong}{\longleftrightarrow} & \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) \\ f & \longmapsto & (f)+D & & \\ & & (\psi) & \longleftarrow & [\psi] \end{array}$$

$$\dim |D| = h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - 1$$

- Ένας γραμμικός υπόχωρος Λ του $|D|$ διάστασης r λέγεται ένα <u>r-διάστατο γραμμικό σύστημα επί του X</u>.
  ($\dim \Lambda = 1 \Rightarrow \Lambda =$ δεσμίδα, $\dim \Lambda = 0 \Leftrightarrow \Lambda = \{0\}$, $\dim \Lambda = -1 \Leftrightarrow \Lambda = \phi$)

- Έστω Λ ένα γρ. σύστημα επί του X. Ένας αποδοτικός διαιρέτης F του X ονομάζεται <u>σταθερή συνιστώσα</u> του Λ όταν $D - F \geq 0$ για κάθε D, $D \in \Lambda$. Όταν το Λ έχει σταθερές συνιστώσες, τότε υπάρχει μια μεγιστοτική F_0 μεταξύ αυτών, δηλ.

$$F_0 \geq F, \quad \forall F,\ F \text{ στ. συνιστ.}$$

Αυτή η F_0 ονομάζεται <u>το σταθερό τμήμα του Λ</u>, ενώ το

$$\Lambda - F_0 := \{D - F_0 \mid D \in \Lambda\} \text{ <u>το κινούμενο τμήμα του Λ</u>.}$$

$(\dim(\Lambda - F_0) = \dim \Lambda)$

$X \ni x$ λέγεται <u>βασικό σημείο του Λ</u> $\Leftrightarrow x \in \bigcap \{\mathrm{Supp}(D) \mid D \in \Lambda - F_0\}$

$\mathrm{Bs}(\Lambda) := \{x \in X \mid x \text{ βασικό σημείο του } \Lambda\}$
λέγεται <u>το βασικό χωρίο του Λ</u>.

- Ένα r-διάστατο γραμμικό σύστημα Λ επάγει μια μερόμορφη απεικόνιση:

$\{s_0, \dots, s_r\}$ βάση του $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$

$$\begin{array}{cccc} \Phi_\Lambda : & X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}} \\ & x & \longmapsto & [s_0(x) : \dots : s_r(x)] \end{array}$$

σύνολο απροσδιόριστων θέσεών της $= \mathrm{Bs}(\Lambda - F_0)$ και $\Phi_\Lambda = \Phi_{\Lambda - F_0}$.
Έτσι η $\Phi_\Lambda : X \setminus \mathrm{Bs}(\Lambda - F_0) \to \mathbb{P}^r$ <u>είναι ολόμορφη</u>. Η Φ_Λ λέγεται
<u>μη εκφυλισμένη</u> $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\Phi_\Lambda) := \overline{\Phi_\Lambda(X \setminus \mathrm{Bs}(\Lambda - F_0))}$ δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο.

<u>Θεώρημα Bertini</u>: Έστω X ένα μιγ. προβολικό πολύπτυγμα και Λ ένα γραμμικό σύστημα (διάστασης $r \geq 1$) με $F_0 = \emptyset$.

(i) $\dim(\mathrm{Im}(\Phi_\Lambda)) \geq 2 \Rightarrow$ {Ένα γενικό μέλος τού Λ είναι ανάγωγο, δηλ. ένας πρώτος διαιρέτης}

(ii) $\dim(\mathrm{Im}(\Phi_\Lambda)) = 1 \Rightarrow$ {Ένα γενικό μέλος τού Λ είναι το άθροισμα d διαφορετικών πρώτων διαιρετών με $d \geq r$}

(iii) Για D "σε γενική θέση" στο $\Lambda \Rightarrow \mathrm{Sing}(D) \subset \mathrm{Bs}(\Lambda)$
(κατόπιν γενικής επιλογής)

Κι αντιστρόφως: Εάν $f : X \overset{\text{προβ.}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ είναι μια μερόμορφη απεικόνιση, η οποία δεν είναι εκφυλισμένη, τότε υπάρχει ένα γραμμικό σύστημα Λ με (χωρίς σταθ. συνιστώσες)

$$\Phi_\Lambda = f$$

<u>Αποδ.</u>

$$\mathbb{P}^N \supset X \ni x \overset{f}{\longmapsto} [F_0(x) : \dots : F_r(x)] \in \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$$

ομογ. πολ. ιδίου βαθμού m

$$U_j := \{[x_0 : \dots : x_N] \in X : x_j \neq 0\}, \quad 1 \leq j \leq N$$

για κάθε υπερεπίπεδο: $H := \{[y_0 : \dots : y_r] \in \mathbb{P}^r \mid \alpha_0 y_0 + \dots + \alpha_r y_r = 0\}$

$\updownarrow$ $[\alpha_0 : \dots : \alpha_r] \in \mathbb{P}^{r*}$

$F_H = \alpha_0 F_0 + \dots + \alpha_r F_r$ (μη μηδενιζόμενο ομογ. πολ. βαθμού m)

ΟΡΙΖΟΥΜΕ $g_j\left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_N}{x_j}\right) := F_H\left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_N}{x_j}\right)$ επί του U_j

$$\frac{g_j}{g_k} = \left(\frac{x_k}{x_j}\right)^m$$ ← μη μηδ. ολόμορφη συν. επί του $U_j \cap U_k$

$D_H := (g_i, U_i)$ ⇝ ορίζουμε $\Lambda := \{D_H \mid H \text{ υπερεπίπεδο}\}$

$$\mathbb{P}^{r*} \ni H \longmapsto D_H \in \Lambda$$

Έτσι $\boxed{f(x) = \Phi_\Lambda(x) = \cap\{H \mid H \text{ υπερεπίπεδο} : x \in D_H\}}$

r-διάστατα γρ. συστήματα Λ χωρίς στ. συν.
$\updownarrow$ 1:1
κλάσεις $X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ μερόμορφων απεικ. mod $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$

Ευρείς διαιρέτες (δέσμες ευθειών)

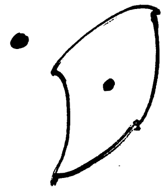
Πρόταση:

Εάν $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ είναι ένα αντιστρέψιμο δράγμα (δέσμη ευθειών) και εάν η $\mathcal{L}$ παράγεται από ολικές τομές ($\Leftrightarrow \exists\, s_0,\dots,s_r \in \Gamma(X,\mathcal{L})$: $\{s_0(x),\dots,s_r(x)\} \subset \mathcal{L}_x$ παράγει το $\mathcal{L}_x$ ως $\mathcal{O}_{X,x}$-πρότυπο, $\forall x, x \in X$).

Τότε $Bs|D| = \emptyset$ και η $\Phi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ είναι μια κλειστή εμβάπτιση

$\Leftrightarrow$

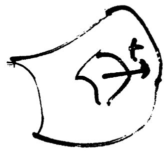
(i) το $|D|$ <u>διαχωρίζει σημεία</u>: $x, y \in X$, $x \neq y$ $\exists\, D' \in |D| : x \in \mathrm{Supp}(D')$, $y \notin \mathrm{Supp}(D')$



<u>και</u>

(ii) το $|D|$ <u>διαχωρίζει εφαπτόμενα διανύσματα</u>

δηλ. $\left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ t \in T_x(X) \\ \quad \overset{\shortparallel}{(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee} \end{array} \right.$: $\exists\, D' \in |D| : x \in \mathrm{Supp}(D')$, $t \notin T_x(D')$



Η $\mathcal{L}$ (ή ο D) λέγεται <u>πολύ ευρεία</u> $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{|D|} \text{ είναι μια κλειστή εμβάπτιση} \\ \text{και } \mathcal{L} = \Phi_{|D|}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}}(1)) \end{array} \right\}$

Η $\mathcal{L}$ λέγεται <u>ευρεία</u> $\Leftrightarrow \exists\, m > 0 : \mathcal{L}^{\otimes m}$ πολύ ευρεία.

<u>Κριτήριο:</u> $\mathcal{L}$ ευρεία $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Για κάθε συμφυές δράγμα } \mathcal{F},\ \exists\, n_0 > 0 \\ \text{με } H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0,\ \forall n, n \geq n_0 \\ \qquad \forall i, i > 0 \end{array} \right\}$

Διάσταση Kodaira

Έστω X μια ορθή προβολική ποικιλότητα και $\mathcal{L}$ μια δέσμη ευθειών επί της X. Εάν η $\mathcal{L}$ γράφεται ως $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, τότε ορίζουμε

$$\boxed{P_{mD}(X) := h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))}$$

$$\boxed{R(X,D) := R(X,\mathcal{L}) := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})}$$

Ο $R(X,D)$ είναι ένας βαθμολογημένος δακτύλιος. Επίσης ορίζουμε <u>το σώμα των ομογενών κλασμάτων από τον $R(X,D)$</u>:

$$\boxed{Q(X,D) := \left\{ \frac{s}{t} \mid s, t \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m}), m \geq 0, t \neq 0 \right\}}$$

Εάν ο D είναι πολύ ευρύς, τότε $Q(X,D) = \mathcal{M}(X)$ και

$$a(X) := \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(X) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}.\mathrm{deg}(Q(X,D)) = \dim X \; !$$

<u>αλγεβρική διάσταση του X</u>

<u>Υπενθύμιση</u>: Έστω Γ/K μια επέκταση σωμάτων. Ένα σύστημα στοιχείων $\{x_1, \dots, x_n\}$ του Γ λέγεται <u>αλγεβρικώς ανεξάρτητο</u> ή <u>υπερβατικό υπεράνω του K</u> όταν από $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, $f \in K[X_1, \dots, X_n]$, έπεται $f = 0$. Ένα σύστημα (όχι απαραίτητα πεπερασμένου πλήθους) στοιχείων του Γ λέγεται <u>υπερβατικό υπεράνω του K</u> όταν κάθε πεπερασμένο υποσύστημά του είναι υπερβατικό υπό την παραπάνω έννοια. Ονομάζουμε την επέκταση Γ/K <u>καθαρώς υπερβατική</u> όταν το Γ περιέχει ένα υπεράνω του K αλγεβρικώς ανεξάρτητο σύστημα $\mathfrak{X}$ και $\Gamma = K(\mathfrak{X})$ (= προσάρτηση του $\mathfrak{X}$). Εάν η Γ/K είναι καθαρώς υπερβατική, τότε ένα τέτοιο $\mathfrak{X}$ λέγεται <u>υπερβατική βάση</u> με <u>υπερβατικό βαθμό</u> $\mathrm{tr.deg}_K(\Gamma) = \#(\mathfrak{X})$.

Ορ.
$$\boxed{\mathrm{kod}(D) := \begin{cases} -\infty, & P_{mD}(X) = 0, \ \forall m, m \geq 1 \\ \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(X,D), & \text{αλλιώς} \end{cases}} \leq \begin{matrix} a(X) \\ \dim(X) \end{matrix}$$

$Q(X,D)$ αλγ. κλ. στο $\mathcal{M}(X) \Rightarrow \mathcal{M}(X)/Q(X,D)$ καθαρώς υπερβατική

$$\mathbb{C} \subset Q(X,D) \subset \mathcal{M}(X) \Rightarrow \overset{\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X))}{\overset{\|}{a(X)}} = \mathrm{tr.deg}_{Q(X,D)}(\mathcal{M}(X)) + \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(X,D).$$

Έστω $\Phi_{|mD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_m}$, $N_m := P_{mD}(X) - 1$

$x \mapsto [s_0(x), \dots, s_{N_m}(x)]$ $\quad \{s_0, \dots, s_{N_m}\}$ βάση του $H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$

$$\left(\Phi_{|mD|} : X \setminus \underbrace{\{s_0 = \dots = s_{N_m} = 0\}}_{Bs(|mD|)} \to \mathbb{P}^{N_m} \right.$$ ολόμορφη

$$\boxed{W_m := \overline{\Phi_{|mD|}(X \setminus Bs(|mD|))}}$$

$\mathbb{C}(W_m) = \mathbb{C}\left(\frac{s_1}{s_0}, \dots, \frac{s_{N_m}}{s_0}\right)$. Έστω $l_0 := \min\{m > 0 \mid P_{mD}(X) \neq 0\}$.

Πρόταση: $\exists\, m_0 > 0 : \mathbb{C}(\overline{W}_{m l_0}) = Q(X, D)$ για $m \geq m_0$.

<u>Αποδ.</u> $H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0 D)) \neq 0 \Rightarrow \mathbb{C}(W_{m \cdot l_0}) \subseteq \mathbb{C}(\overline{W}_{(m+1) l_0}) \Rightarrow$

$\Rightarrow Q(X, D) = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{C}(W_{m \cdot l_0})$, επειδή κανείς μετά από επέκταση μπορεί να γράψει τα ομογενή κλάσματα ως κλάσματα από στοιχεία εντός του $H^0(X, \mathcal{O}_X(m l_0 D))$. Επειδή ο $Q(X, D)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος υπεράνω του $\mathbb{C} \Rightarrow \exists\, m_0 > 0$ μετά από τον οποίο ο εγκλεισμός $\dots \subseteq \mathbb{C}(W_{m l_0}) \subseteq \mathbb{C}(W_{(m+1) l_0}) \subseteq \dots$ καθίσταται "στάσιμος". ■

Πόρισμα: $$\mathrm{kod}(D) = \begin{cases} -\infty, & \text{όταν } P_{mD}(X) = 0, \forall m, m \geq 1 \\ \max\{\dim W_m : m \geq 1\}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

<u>Αποδ.</u> $\mathbb{C}(\overline{W}_m) \subset Q(X, D) \Rightarrow \dim \overline{W}_m = \mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(W_m)) \leq$

$\leq \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}\, Q(X, D) = \mathrm{kod}(D)$. Όμως $\mathbb{C}(W_{m l_0}) = Q(X, D)$ για $m \geq m_0$, πράγμα που δείχνει το ζητούμενο. ■

<u>Ορσ.</u> Για $D = K_X$ εν καν. διαιρέτη $\Rightarrow$

$\mathrm{kod}(K_X) =: \mathrm{kod}(X)$ είναι η <u>διάσταση Kodaira του X</u>.

$P_m(X) := P_{mK_X}(X) =$ m-οστό πολυγένος του X.

$\mathrm{kod}(X) = -\infty \iff P_m(X) = 0, \ \forall m,\ m \geq 1.$

$\mathrm{kod}(X) = 0 \iff P_m(X) \in \{0,1\}$, για $m \geq 1$
αλλά όχι πάντα $= 0$.

$\mathrm{kod}(X) = k \iff \exists k$ και σταθερές $\alpha, \beta > 0$:
$1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}}(X)$

$$\alpha \cdot m^k < P_m(X) < \beta\, m^k$$
για $m >> 0$

(ήτοι $P_m \sim m^k$)

Συμπαγή μιγαδικά πολυπτύγματα διάστασης 1
(μιγαδικές μη ιδιάζουσες καμπύλες)

$\mathrm{kod}(C)$	g_C	$P_m(C),\ m \geq 2$	Δομή
$-\infty$	0	0	$\cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$
0	1	1	ελλειπτική καμπύλη
1	≥ 2	$(2m-1)(g_C-1)$	υπερελλειπτική καμπύλη

Riemann–Roch

$$h^0(C, \mathcal{O}(mK_C)) - h^1(C, \mathcal{O}(mK_C)) =$$

$$= \underbrace{m(2g_C - 2)}_{\deg(mK_C)} + (1 - g_C) = (2m-1)(g_C - 1)$$

Το Θεώρημα τοῦ Hodge

Ἔστω X ἕνα (συνεκτικό) συμπαγές μιγαδικό πολύπτυγμα με $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, κι ἔστω $\Omega^p_X = \Lambda^p T^{(\mathbb{C})}_{X\,\text{ολ.}}$ το δράγμα των ολόμορφων p-διαφορικών μορφών υπεράνω τοῦ X. Τότε οι ομάδες συνομολογίας τοῦ X με συντελεστές από το Ω^p_X, $H^q(X,\Omega^p_X)$, αποτελούν μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης. Οι διαστάσεις

$$\boxed{h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X,\Omega^p_X)}$$

ονομάζονται αριθμοί τοῦ Hodge για το X. Γι' αυτούς ισχύουν τα εξής:

$$h^{p,q}(X) = h^{n-p,n-q}(X) \qquad \text{(Δυισμός Kodaira-Serre)}$$

$$h^{n,n}(X) = h^{0,0}(X) = 1 \qquad \text{(λόγω συνεκτικότητας)}$$

$$h^{u,v}(X\times Y) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{p+r=u\\ q+s=v}} h^{p,q}(X)\, h^{r,s}(Y) \qquad \text{(γινόμενο)}$$

Θεώρημα αποσύνδεσης συνομολογιών τοῦ Hodge

Εάν το X είναι επιπροσθέτως και πολύπτυγμα Kähler, τότε

$$\boxed{H^i(X,\mathbb{C}) \underset{\delta.\chi.}{\cong} \bigoplus_{p+q=i} H^q(X,\Omega^p_X)}$$

Έτσι παίρνουμε:

$$h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$$

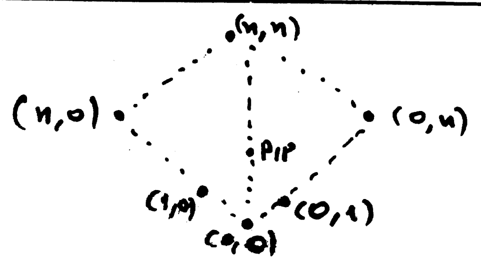
$$b_i(X) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}(X)$$

$$h^{p,p}(X) \geq 1$$

$$b_{2q+1}(X) = 2\Big[\sum_{p=0}^{q} h^{p,2q+1-p}(X)\Big]$$

(δηλ. b_{2q+1} είναι πάντοτε άρτιος)

Διαμάντι τοῦ Hodge:



Ομάδα των Neron και Severi

Εκκινώντας από την "εκθετική" σύντομη ακριβή ακολουθία δραγμάτων

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$
$$f \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}f}$$

Παίρνουμε σε επίπεδο συνομολογιών την εξής μακρά ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|\wr}{H^0(X,\mathbb{Z})}} \longrightarrow \underset{\mathbb{C}}{\underset{\|\wr}{H^0(X,\mathcal{O}_X)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{C}^*}{\underset{\|\wr}{H^0(X,\mathcal{O}_X^*)}} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X,\mathbb{Z}) \to \cdots \\
& \downarrow & & \| & & \cup \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X) & \hookrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \twoheadrightarrow & NS(X) \to 0 \\
& \| & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
& \ker(\delta) & & [\mathcal{L}] & & \delta([\mathcal{L}]) = c_1(\mathcal{L}).
\end{array}$$

Η $NS(X) := \mathrm{Im}(\delta)$ λέγεται <u>ομάδα των Neron και Severi</u>, είναι αβελιανή <u>και πεπερασμένως παραγόμενη</u>, κι έχει βαθμίδα

$$\boxed{\rho(X) := \mathrm{rank}(NS(X)) \quad \text{τον αριθμό του Picard}}$$

(Αν $\dim_{\mathbb{C}} X = 2 \Rightarrow \rho(X) \leq h^{1,1}(X)$)

Θεώρημα Riemann – Roch – Hirzebruch

X συμπ., προβ., μιγ. πολύπτυγμα διάστασης n.

E μιγ. διαν. δέσμη $\downarrow$ X rank $= r$ Τότε:

χαρ. Chern   γένος Todd   θεμ. κλ. προσ.

$$\boxed{\begin{array}{l} \chi(X, E) = \langle ch(E) \cdot td(T_X), [X] \rangle_{2n} \\ \| \\ \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{O}_X(E)) \end{array}}$$

για $\dim_{\mathbb{C}} X = 2 \Rightarrow$

$$\chi(X,E) = \frac{1}{2}\left(c_1^2(E) - 2c_2(E)\right) + \frac{1}{2} c_1(E) c_1(X) + \frac{r}{12}\left(c_1^2(X) + c_2(X)\right)$$

Ιδιαιτέρως:

Για $\begin{cases} E = \mathcal{O}_X, r = 1 \\ \dim_{\mathbb{C}} X = 2 \end{cases} \Rightarrow \chi(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}\left(K_X^2 + e(X)\right)$

(τύπος του Noether)

Για $\dim_{\mathbb{C}} X = 3 \Rightarrow \chi(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{24}\langle c_1(X) \cup c_2(X), [X] \rangle$

Θεώρημα προσήμου του Hirzebruch

X = $4k$-διάστατο, συμπαγές, προσανατολισμένο, συνεκτικό διαφορίσιμο πολύπτυγμα

τ = το πρόσημο της διγρ. μορφής $S_X : H_{2k}(X)/_{Tors} \times H_{2k}(X)/_{Tors} \to \mathbb{Z}$.

Τότε:

$$\boxed{\tau(X) = \langle L(T_X), [X] \rangle_{4k}}$$

L-πολυώνυμο.

Για $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ και X μιγ. πολ. $\quad \tau(X) = \frac{1}{3}\left(K_X^2 + 2e(X)\right)$

Διακριτές αναλλοίωτοι συμπαγών μιγαδικών επιφανειών

Έστω X μια συμπαγής (συνεκτική) μιγαδική επιφάνεια. Αυτή διαθέτει τις εξής διακριτές αναλλοίωτους:

(a) Τοπολογικές αναλλοίωτοι:
- (i) η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X)$
- (ii) οι αριθμοί του Betti $b_i(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X,\mathbb{Q})$
- (iii) $b_+(X)$, $b_-(X)$ και το πρόσημο $\tau(X) = b_+(X) - b_-(X)$

(b) Αναλυτικές αναλλοίωτοι:
- (i) οι αριθμοί του Hodge $h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X,\Omega^p)$
- (ii) ο αριθμός του Picard $\rho(X)$
- (iii) η αλγεβρική διάσταση $a(X) = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(X)$
- (iv) η διάσταση του Kodaira $\mathrm{kod}(X)$.

(c) Μικτές αναλλοίωτοι: οι αριθμοί του Chern

$$c_1^2(X) = K_X^2, \quad c_2(X) = e(X).$$

Διαμάντι του Hodge

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{2,2} & & \\ & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\ & & h^{0,0} & & \end{array}$$

$h^{0,0}(X) = h^{2,2}(X) = 1$ (X συνεκτικό)

$h^{2,1}(X) = h^{0,1}(X) = h^1(X,\mathcal{O}_X) := q(X)$ = αρρητότητα του X

$h^{1,2}(X) = h^{1,0}(X)$

Serre Duality ⊛

$h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X) = h^0(X,\mathcal{O}_X(K_X)) := p_g(X)$ = γεωμετρικό γένος του X

$$X \text{ Kähler} \Rightarrow \begin{cases} q(X) = h^{1,0}(X) \\ b_1(X) = 2h^{0,1}(X) \\ b_2(X) = 2h^{0,2}(X) + h^{1,1}(X) \end{cases}$$

⊛ $H^i(X,\mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X,\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X)^\vee \Rightarrow h^2(X,\mathcal{O}_X(D)) = h^0(X,\mathcal{O}_X(K_X - D))$

Χαρακτηριστική Euler: $\boxed{e(X) = 2 - b_1(X) + b_2(X)}$

Χαρ. Euler–Poincaré για το $\mathcal{O}_X$: $\boxed{\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X)}$

Riemann–Roch $\Rightarrow$ $\boxed{\chi(\mathcal{O}_X) = \dfrac{K_X^2 + e(X)}{12}}$ (Τύπος του Noether)

Τύπος του Hirzebruch για το πρόσημο: $\boxed{\tau(X) = \frac{1}{3}\left(K_X^2 - 2e(X)\right)}$

Έτσι παίρνουμε:
$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{e(X) + \tau(X)}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(b_+(X) - 2p_g(X)\right) + \left(2q(X) - b_1(X)\right) = 1$$

Ανισότητες: (i) $2h^{1,0}(X) \leq b_1(X) \leq h^{1,0} + h^{0,1} \leq 2h^{0,1}(X)$ ("=" kähler)

(ii) $h^{1,0}(X) \leq h^{0,1}(X)$ ("=" kähler)

(iii) $b_1(X) \leq 2q(X)$ (iv) $b_+(X) \geq 2p_g(X)$.

X Kählerian $\Rightarrow$
$$\begin{cases} b_1(X) = h^{1,0}(X) + h^{0,1}(X) \\ b_1(X) \text{ άρτιος} \Rightarrow b_1(X) = 2q(X),\ b_+(X) = 2p_g(X) + 1 \\ b_1(X) \text{ περιττός} \Rightarrow b_1(X) = 2q(X) - 1,\ b_+(X) = 2p_g(X \end{cases}$$

Κλάσεις επιφανειών X	$\mathrm{kod}(X)$	$b_1(X)$	$b_2(X)$	K_X^2	$e(X)$	$q(X)$	$p_g(X)$	$\chi(\mathcal{O}_X)$	m
Προβολικό επίπεδο $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$	$-\infty$	0	1	9	3	0	0	1	
Ρητές ευθειογενείς επιφάνειες Hirzebruch $\Sigma_n = \mathbf{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1}(n)\right), n \neq 1$	$-\infty$	0	2	8	4	0	0	1	
Άρρητες ευθειογενείς επιφάνειες $\mathbf{P}_C(E)$, όπου $g = g(C) > 0$	$-\infty$	$2g$	2	$8(1-g)$	$4(1-g)$	g	0	$1-g$	
Επιφάνειες $K3$	0	0	22	0	24	0	1	2	1
Επιφάνειες τού Enriques	0	0	10	0	12	0	0	1	2
Αβελιανές επιφάνειες	0	4	6	0	0	2	1	0	1
Υπερελλειπτικές επιφάνειες	0	2	2	0	0	1	0	0	12
Γνήσιες ελαχιστοτικές ελλειπτικές επιφάνειες	1			0	≥ 0			≥ 0	
Ελαχιστοτικές επιφάνειες γενικού τύπου	2			> 0	> 0			> 0	

Κλάσεις επιφανειών X	$\pi_1(X)$	S_X	$\tau(X)$
Προβολικό επίπεδο $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$	$\{1\}$	$\langle 1 \rangle$	1
Ρητές ευθειογενείς επιφάνειες Hirzebruch $\Sigma_n = \mathbf{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1}(n)\right), n \neq 1$	$\{1\}$	$\langle \mathbf{H} \rangle$, $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ $\langle \mathbf{1} \rangle \oplus \langle -\mathbf{1} \rangle$, $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$	0
Άρρητες ευθειογενείς επιφάνειες $\mathbf{P}_C(E)$, όπου $g = g(C) > 0$	$\pi_1(C)$	$\langle \mathbf{H} \rangle$, $\deg(E) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ $\langle \mathbf{1} \rangle \oplus \langle -\mathbf{1} \rangle$, $\deg(E) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$	0
Επιφάνειες $K3$	$\{1\}$	$2\langle -E_8 \rangle \oplus 3 \langle \mathbb{H} \rangle$	-16
Επιφάνειες τού Enriques	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\langle -E_8 \rangle \oplus 3 \langle \mathbb{H} \rangle$	-8
Αβελιανές επιφάνειες	$\mathbb{Z}^4$	$3 \langle \mathbb{H} \rangle$	0
Υπερελλειπτικές επιφάνειες	$1 \to \mathbb{Z}^4 \to \pi_1(X) \to G \to 1$	$\langle \mathbb{H} \rangle$	0
Γνήσιες ελαχιστοτικές ελλειπτικές επιφάνειες			
Ελαχιστοτικές επιφάνειες γενικού τύπου			