Αντίγραφα Σημειώσεων και Διαφανειών από τις Διαλέξεις μου στο Σεμινάριο τού Β΄ Τομέα τού Μαθηματικού Τμήματος τού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Μέρος Β΄)

- Ευθέα συστήματα και ευθέα όρια
- Ορισμένες έννοιες από την Ομολογική Άλγεβρα
- Ιδιάζουσα Ομολογία και Συνομολογία
- Βασικές έννοιες από τη Θεωρία Δραγμάτων
- Ομάδες Συνομολογίας κατά Cech
- Μακρές ακριβείς ακολουθίες Συνομολογίας και εφαρμογές στη Θεωρία Επιφανειών Riemann
- Θεωρήματα Dolbeault και De Rham
- Θεώρημα Riemann-Roch και δυϊσμός τού Serre

Ευθέα συστήματα και ευθέα όρια

<u>Ορσ.</u> Ένα σύνολο A λέγεται <u>μερικώς διατεταγμένο</u> όταν είναι εφοδιασμένο με μια διμελή σχέση $\leq$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) για όλα τα $\alpha \in A$: $\alpha \leq \alpha$.

(ii) από $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \gamma$ έπεται: $\alpha \leq \gamma$.

Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο A ονομάζεται <u>κατευθυνόμενο</u> όταν για κάθε ζεύγος $\alpha, \beta \in A$ υπάρχει $\gamma \in A$: $\alpha \leq \gamma$ και $\beta \leq \gamma$.

<u>Ορισμός.</u> Ένα <u>ευθύ σύστημα</u> $\{G_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}$ <u>αβελιανών ομάδων υπεράνω ενός κατευθυνομένου συνόλου $(A, \leq)$</u> αποτελείται από μια οικογένεια $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ αβελιανών ομάδων, μια συνάρτηση $\alpha \mapsto G_\alpha$ που στέλνει το α στη G_α και μαρκάρει για κάθε ζεύγος $(\alpha, \beta) \in A \times A$ με $\alpha \leq \beta$ έναν ομομορφισμό $\rho_\alpha^\beta : G_\alpha \to G_\beta$ τέτοιον, ώστε:

(i) $\rho_\alpha^\alpha = Id_{G_\alpha}$ για κάθε $\alpha \in A$.

(ii) για $\alpha \leq \beta \leq \gamma$: $\rho_\beta^\gamma \circ \rho_\alpha^\beta = \rho_\alpha^\gamma$.

Εντελώς ανάλογα ορίζονται ευθέα συστήματα $\{R_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}$ δακτυλίων κι ευθέα συστήματα $\{M_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}$ R_α-προτύπων κ.λ.π.

<u>Ορσ.</u> Έστω $\{G_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}_{\alpha \in A}$ ένα ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων. Στην ένωση $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ ορίζουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:

$$G_\alpha \ni g_\alpha \sim g_\beta \in G_\beta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \exists \gamma \in A: \ \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma \\ \text{και} \ \ \rho_\alpha^\gamma(g_\alpha) = \rho_\beta^\gamma(g_\beta) \end{array}\right]$$

- Εάν g_α είναι ένα στοιχείο της G_α, τότε με $[g_\alpha]$ θα συμβολίζουμε την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας. Για κάθε δυό κλάσεις ισοδυναμίας $[g_\alpha]$, $[g_\beta]$ με $\gamma \in A$: $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$, ορίζουμε: $[g_\alpha] + [g_\beta] := [\rho_\alpha^\gamma(g_\alpha) + \rho_\beta^\gamma(g_\beta)]$, $-[g_\alpha] := [-g_\alpha]$.
Μέσω αυτής της πράξεως, το σύνολο πηλίκων:

$$\boxed{G := \varinjlim G_\alpha := \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Big/ \sim}$$

προσλαμβάνει τη δομή μιας αβελιανής ομάδας. (Το μηδενικό της στοιχείο 0_G έχει ως εκπρόσωπό του το μηδ. στοιχείο 0_α καθεμιάς των G_α.). G ονομάζεται το ευθύ όριο του ευθέως συστήματος $\{G_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}$. Για κάθε $\alpha \in A$,
$G_\alpha \ni g_\alpha \overset{\rho_\alpha}{\longmapsto} [g_\alpha] \in G$ είναι ομομορφισμός. Αν μάλιστα $\alpha \leq \beta$, τότε: $\rho_\beta \circ \rho_\alpha^\beta = \rho_\alpha$.

- Εάν $\{M_\alpha, \rho_\alpha^\beta\}$ είναι ένα ευθύ σύστημα R_α-προτύπων, τότε το $M := \varinjlim M_\alpha$ εφοδιάζεται κατά τρόπο φυσιολογικό με τη δομή ενός R-προτύπου, όπου $R := \varinjlim R_\alpha$.

- Επίσης κατά τρόπο φυσιολογικό ορίζονται <u>μορφισμοί</u>

$$\Upsilon : \{M_\alpha, \rho_\alpha^\beta\} \longrightarrow \{N_\alpha, r_\alpha^\beta\}$$

μεταξύ ευθέων συστημάτων R_α-προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνομένου συνόλου $(A, \leq)$. Αποτελούνται δηλαδή από οικογένειες $(\Upsilon_\alpha : M_\alpha \to N_\alpha)_{\alpha \in A}$ μορφισμών προτύπων για τους οποίους τα ακόλουθα διαγράμματα (με $\alpha \leq \beta$) είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "\Upsilon"] \arrow[d, "\rho_\alpha^\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_\alpha \arrow[d, "r_\alpha^\beta"] \\ M_\beta \arrow[r, "\Upsilon_\beta"'] & N_\beta \end{tikzcd}$$

- Βασικές ιδιότητες ευθέων ορίων συστημάτων R_α-προτύπων.

(i) $\quad \varinjlim (M_\alpha \oplus N_\alpha) \cong (\varinjlim M_\alpha) \oplus (\varinjlim N_\alpha)$

(ii) $\quad \varinjlim (M_\alpha \otimes_{R_\alpha} N_\alpha) \cong (\varinjlim M_\alpha) \otimes_{\lim R_\alpha} (\varinjlim N_\alpha)$.

Κάποιες έννοιες απ' την ομολογική άλγεβρα

<u>Ορσ.</u> Μια ακολουθία R-προτύπων και ομομορφισμών προτύπων:

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

λέγεται ακριβής $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$ για όλα τα i.

<u>Παράδειγμα:</u> Για κάθε ομομορφισμό προτύπων $f: M \to N$, η

$$0 \longrightarrow Ker(f) \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N \twoheadrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ N/Im(f)}}{Koker(f)} \longrightarrow 0$$

αποτελεί μια σύντομη ακριβή ακολουθία.

<u>Πρόταση 1:</u> Έστω $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ μια ακριβής ακολουθία. Τότε για κάθε πρότυπο N, η

$$0 \longrightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{g^*} Hom(M, N) \xrightarrow{f^*} Hom(M', N)$$

είναι ακριβής. (Για $\alpha \in Hom(M,N)$: $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$).

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ μιά ακριβής ακολουθία. Τότε για κάθε πρότυπο N, η

$$0 \longrightarrow Hom(N, M') \xrightarrow{f_*} Hom(N, M) \xrightarrow{g_*} Hom(N, M'')$$

είναι ακριβής. (Για $\alpha \in Hom(N, M')$: $f_*(\alpha) := f \circ \alpha$).

<u>Πρόταση 3.</u> Έστω $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ μιά ακριβής ακολουθία. Τότε για κάθε πρότυπο N, η ακολουθία

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes Id} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes Id} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$ είναι ακριβής.

<u>Πρόταση 4.</u> Εάν $\{M_\alpha, \rho_\alpha^\beta\} \xrightarrow{\Upsilon} \{N_\alpha, r_\alpha^\beta\} \xrightarrow{\Psi} \{Q_\alpha, \theta_\alpha^\beta\}$ είναι ομομορφισμοί ευθέων συστημάτων R_α-προτύπων υπεράνω ενός κατευθυνομένου συνόλου $(A, \leqslant)$ τέτοιοι, ώστε:

Οι ακολουθίες

$$0 \longrightarrow M_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} N_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} Q_\alpha \longrightarrow 0$$

να είναι ακριβείς για κάθε $\alpha \in A$, τότε κι η

$$0 \longrightarrow \varinjlim M_\alpha \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \varinjlim N_\alpha \xrightarrow{\tilde{\psi}} \varinjlim Q_\alpha \longrightarrow 0$$

είναι κι αυτή ακριβής.

<u>Πρόταση 5.</u> (Λήμμα των τριών) Αν στο (μεταθ.) διάγραμμα προτύπων κι ομομορφισμών

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

οι δυο γραμμές είναι ακριβείς και δύο εκ των f_1, f_2, f_3 είναι ισομορφισμοί, τότε κι ο τρίτος θα είναι αναγκαίως ισομορφισμός.

<u>Πρόταση 6.</u> (Λήμμα των πέντε) Αν στο μετ. διαγρ. πρ. και ομομ.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

οι δυό γραμμές του είναι ακριβείς, τότε ισχύουν τα εξής:

(i) f_1 επι, f_2, f_4 μονο $\Longrightarrow$ f_3 μονο.

(ii) f_5 μονο, f_2, f_4 μονο $\Longrightarrow$ f_3 επι.

(iii) f_1, f_2, f_4, f_5 ισο $\Longrightarrow$ f_3 ισο.

Πρόταση 7. (Λήμμα του φιδιού) · Έστω το ακόλουθο μετ. δ. προτύπων με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"'] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] & C_3 & \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε: $A_i := Ker(\alpha_i)$ και $D_i := Koker(\alpha_i) = C_i/Im(\alpha_i)$, $i=1,2.$

Τότε υπάρχει <u>κανονικός</u> ομομορφισμός: $\delta : A_3 \to D_1$ τέτοιος, ώστε η ακολουθία

$$(*) \quad A_1 \xrightarrow{\beta_1|A_1} A_2 \xrightarrow{\beta_2|A_2} A_3 \xrightarrow{\delta} D_1 \xrightarrow{\hat{\gamma}_1} D_2 \xrightarrow{\hat{\gamma}_2} D_3$$

($\hat{\gamma}_i$ επάγονται απ' τις γ_i)

<u>Ιδέα αποδείξεως:</u> Έχουμε το μ.διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & A_1 \arrow[r, "\beta_1|A_1"] \arrow[d, hook] & A_2 \arrow[r, "\beta_2|A_2"] \arrow[d, hook] & A_3 \arrow[d, hook] \arrow[ddll, dashed, "\delta"] & \\ & B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d, "\alpha_2"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"'] \arrow[d, two heads, "\pi_1"'] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d, two heads, "\pi_2"'] & C_3 \arrow[d, two heads, "\pi_3"] & \\ & D_1 \arrow[r, "\hat{\gamma}_1"'] \arrow[d] & D_2 \arrow[r, "\hat{\gamma}_2"'] \arrow[d] & D_3 \arrow[d] & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

κι ορίζουμε τον δ ως εξής: · Έστω $x \in A_3$. Τότε $\exists\, y \in B_2 : \beta_2(y) = x$ (β_2 επί). Άρα: $\gamma_2(\alpha_2(y)) = \alpha_3(\beta_2(y)) = \alpha_3(x) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists!\, z \in C_1 : \gamma_1(z) = \alpha_2(y)$ επειδή $Ker(\gamma_2) = Im(\gamma_1)$ και γ_1 μονο.

Θέτουμε: $\boxed{\delta(x) := \pi_1(z)}$

- Κανείς δείχνει πως ο δ είναι ένας καλώς ορισμένος (ανεξάρτητος της επιλογής του y) ομομορφισμός προτύπων.

- Η ακρίβεια της (*) δείχνεται είτε με στοιχειώδες κυνήγι διαγράμματος, είτε με εφαρμογή του λήμματος των τριών. □

<u>Ορσ.</u> Μια ακολουθία R-προτύπων με φθίνουσες (αύξουσες) δείκτες αριθμήσεως:

$$\mathcal{M}_\bullet = \{M_i, f_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \cdots \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} \cdots$$

αντ.

$$\mathcal{M}^\bullet = \{M^i, f^i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \cdots \xrightarrow{f^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} M^i \xrightarrow{f^i} M^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} M^{i+2} \xrightarrow{f^{i+2}} \cdots$$

λέγεται <u>αριστερό (αντ. δεξιό) R-σύμπλεγμα</u> ή <u>σύμπλεγμα αλυσίδων (αντ. σύμπλεγμα συναλυσίδων)</u>, αν για όλα τα $i\in\mathbb{Z}$ ισχύει:

$$f_i \circ f_{i+1} = 0 \quad (\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(f_i))$$

αντ. $$f^i \circ f^{i-1} = 0 \quad (\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f^{i-1}) \subset \mathrm{Ker}(f^i)), \quad \forall i,\ i\in\mathbb{Z}.$$

Ένας <u>μορφισμός</u> $\Phi_\bullet : \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{M}'_\bullet$ μεταξύ συμπλεγμάτων αλυσίδων (αντ. $\Phi^\bullet : \mathcal{M}^\bullet \to \mathcal{M}'^\bullet$ συναλυσίδων) αποτελείται από μια οικογένεια ομομορφισμών προτύπων $\Phi_i : M_i \to M_i'$ (αντ. $\Phi^i : M^i \to M'^i$) για την οποία ισχύει:

$$f_i' \circ \Phi_i = \Phi_{i-1} \circ f_i$$

αντ. $$\Phi^{i+1} \circ f^i = f'^i \circ \Phi^i, \quad \forall i,\ i\in\mathbb{Z}.$$

Ορσ. Εάν $\mathcal{M}_\bullet$ (αντ. $\mathcal{M}^\bullet$) είναι ένα σύμπλεγμα αλυσίδων (αντ. συναλυσίδων) υπεράνω του R, τότε:

$$\boxed{H_i(\mathcal{M}_\bullet) := H_i(\mathcal{M}_\bullet ; R) := Ker(f_i)/Im(f_{i+1})}$$

αντ.

$$\boxed{H^i(\mathcal{M}^\bullet) := H^i(\mathcal{M}^\bullet ; R) := Ker(f^i)/Im(f^{i-1})},$$

ονομάζεται <u>i-οστό πρότυπο ομολογίας</u> (αντ. <u>συνομολογίας</u>) <u>με συντελεστές απ' τον R</u>.

- Προφανώς κάθε μορφισμός $\Phi_\bullet : \mathcal{M}_\bullet \to \mathcal{M}'_\bullet$ (αντ. $\Phi^\bullet : \mathcal{M}^\bullet \to \mathcal{M}'^\bullet$) επάγει έναν ομομορφισμό R-προτύπων

$$\Phi_{*,i} : H_i(\mathcal{M}_\bullet) \longrightarrow H_i(\mathcal{M}'_\bullet) \quad \left(\text{αντ. } \Phi^{*,i} : H^i(\mathcal{M}^\bullet) \to H^i(\mathcal{M}'^\bullet)\right)$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 8 (Μακριά ακριβής ακολουθία ομολογίας)</u>. Για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων αλυσίδων

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_\bullet \xrightarrow{\Phi_\bullet} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\Psi_\bullet} \mathcal{M}''_\bullet \longrightarrow 0$$

υπάρχει ένας συνδετικός ομομορφισμός προτύπων

$$\partial_{*,i} : H_i(\mathcal{M}''_\bullet) \longrightarrow H_{i-1}(\mathcal{M}'_\bullet)$$

τέτοιος, ώστε η μακριά ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow H_i(\mathcal{M}'_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{*,i}} H_i(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{\Psi_{*,i}} H_i(\mathcal{M}''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{*,i}} H_{i-1}(\mathcal{M}'_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

να είναι ακριβής.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\mathcal{M}_\bullet = \{M_i, f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathcal{M}'_\bullet = \{M'_i, f'_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, ...

Έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(f'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, hook] & Ker(f_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, hook] & Ker(f''_\bullet) \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}'_\bullet \arrow[r, "\Phi_\bullet"] \arrow[d, "f'_\bullet"'] & \mathcal{M}_\bullet \arrow[r, "\Psi_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & \mathcal{M}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f''_\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}'_\bullet \arrow[r, "\Phi_\bullet"] \arrow[d] & \mathcal{M}_\bullet \arrow[r, "\Psi_\bullet"] \arrow[d] & \mathcal{M}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Koker(f'_\bullet) \arrow[r] & Koker(f_\bullet) \arrow[r] & Koker(f''_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

σύμφωνα με τον ορισμό των $\Phi_\bullet$ και $\Psi_\bullet$ και το λήμμα του φιδιού το ως άνω διάγραμμα είναι μεταθετικό κι έχει ακριβείς γραμμές και στήλες. Οι απεικονίσεις $f_i, (f_i', f_i''$ αντ.$)$ επάγουν απεικονίσεις:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f_{i+2}"] & M_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & M_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[d, "\text{προβολή}"] & & M_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & {} \\
0 \arrow[r] & H_i(\mathcal{M}_\bullet) \arrow[r, hook] & M_i/\mathrm{Im}(f_{i+1}) \arrow[r] & M_i/\mathrm{Ker}(f_i) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Ker}(f_{i-1}) \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[d, "\text{προβολή}"] & \\
 & & & \mathrm{Im}(f_i) & H_{i-1}(\mathcal{M}_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

επειδή $\mathrm{Im}(f_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(f_i)$ και $\mathrm{Im}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f_{i-1})$.

Εξ αυτού λαμβάνουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & H_i(\mathcal{M}_\bullet') \arrow[r] \arrow[d, hook] & H_i(\mathcal{M}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H_i(\mathcal{M}_\bullet'') \arrow[d, hook] \arrow[dddll, rounded corners, to path={-- ([xshift=4ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-8ex]\tikztotarget.south) \tikztonodes -- ([xshift=-4ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\partial_{*,i}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Koker}(f_{i+1}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Koker}(f_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Koker}(f_{i+1}'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f_{i-1}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(f_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(f_{i-1}'') \arrow[d] & \\
 & H_{i-1}(\mathcal{M}_\bullet') \arrow[r] \arrow[d] & H_{i-1}(\mathcal{M}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H_{i-1}(\mathcal{M}_\bullet'') \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές και στήλες. Το $\partial_{*,i}$ ορίζεται μέσω μιας νέας εφαρμογής του λήμματος του φιδιού. □

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 (<u>Μακριά ακριβής ακολουθία συνομολογίας</u>)

Για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων συναλυσίδων

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'^{\bullet} \xrightarrow{\Phi^{\bullet}} \mathcal{M}^{\bullet} \xrightarrow{\Psi^{\bullet}} \mathcal{M}''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

υπάρχει ένας συνδετικός ομομορφισμός προτύπων

$$\partial^{*,i} : H^{i}(\mathcal{M}''^{\bullet}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{M}'^{\bullet})$$

τέτοιος ώστε η μακριά ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow H^{i}(\mathcal{M}'^{\bullet}) \xrightarrow{\Phi^{*,i}} H^{i}(\mathcal{M}^{\bullet}) \xrightarrow{\Psi^{*,i}} H^{i}(\mathcal{M}''^{\bullet}) \xrightarrow{\partial^{*,i}} H^{i+1}(\mathcal{M}'^{\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

να είναι ακριβής.

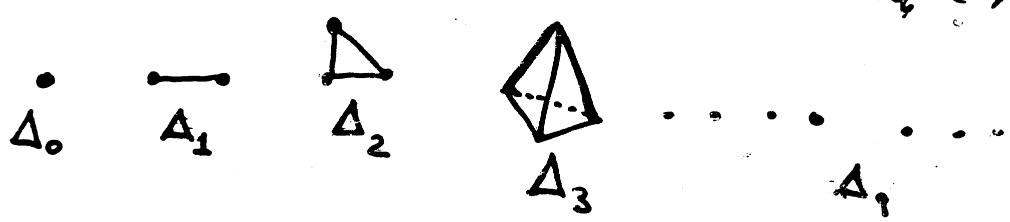
- <u>Παρατήρηση</u>: Αν $\mathcal{M}_{\bullet} = \{M_i, f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλεγμα αλυσίδων, τότε $Q^{\bullet} = \{\Xi^{i}, \theta^{i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\Xi^{i} := \mathrm{Hom}_{R}(M_i, R)$ είναι ένα σύμπλεγμα συναλυσίδων. $\theta^{i} = (f_i)^{*} : \Xi^{i} \to \Xi^{i+1}$

Ιδιάζουσα ομολογία και Συνομολογία

Έστω Δ_q το σύνηθες q-<u>μονόπλοκο</u> $\subset \mathbb{R}^{q+1}$, $q \geq 0$:

$$\Delta_q := \{(t_0, t_1, \ldots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_0, \ldots, t_q \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ και } \sum_{i=0}^{q} t_i = 1\}$$

$$= \mathrm{conv}(\{e_0, e_1, \ldots, e_q\}), \text{ όπου } \begin{array}{l} e_0 = (1,0,\ldots,0) \\ e_1 = (0,1,\ldots,0) \\ \vdots \\ e_q = (0,\ldots,1) \end{array}$$



Τα $e_0,\dots,e_q$ είναι οι κορυφές του Δ_q. Για $i\in\{0,1,\dots,q\}$, η

$$\Delta_q^i := \{(t_0,t_1,\dots,t_q)\in\Delta_q \mid t_i=0\} =$$
$$= \operatorname{conv}(\{e_0,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_q\}) \subset \Delta_q$$

είναι η i-οστή έδρα του Δ_q (βρίσκεται "απέναντι" απ' την κορυφή e_i)

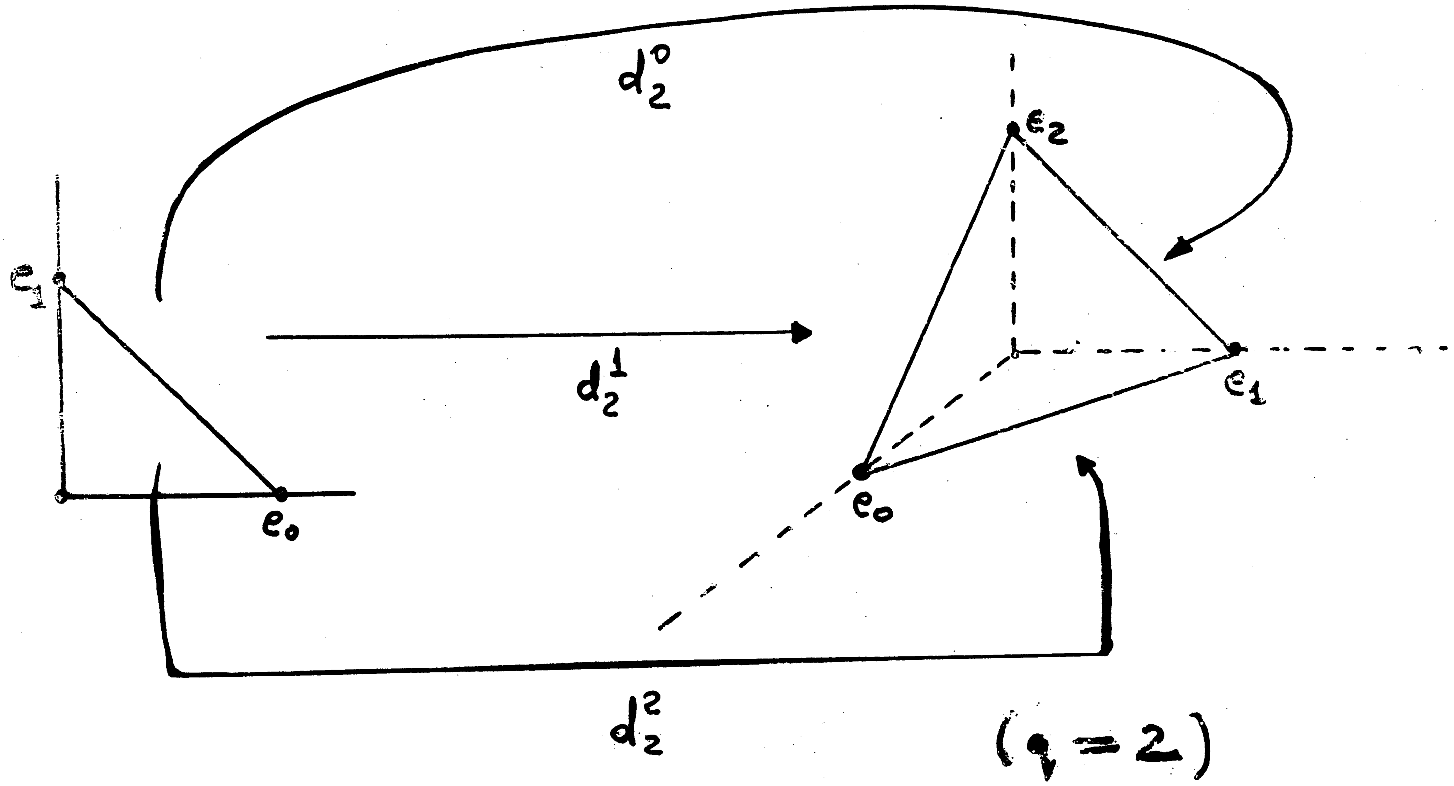
- Για κάθε $i\in\{0,1,\dots,q\}$, με $q\geq 1$, ορίζουμε:

$$d_q^i : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q \quad , \quad d_q^i((t_0,\dots,t_{q-1})) := (t_0,\dots,t_{i-1},0,t_i,t_{i+1},\dots,t_{q-1})$$

d_q^i απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα το Δ_{q-1} στην i-οστή έδρα $\Delta_q^i \subset \Delta_q$.

Επειδή $d_q^i(e_j) = \begin{cases} e_j, & \text{για } j<i \\ e_{j+1}, & \text{για } j\geq i \end{cases}$ κανείς αποδεικνύει εύκολα ότι:

$$\boxed{d_q^i \circ d_{q-1}^j = d_q^j \circ d_{q-1}^{i-1}, \quad \forall\, i,j\in\{0,\dots,q\},\ j<i} \quad (*)$$



$(q=2)$

Ορσ. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Για $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ένα ιδιάζον q-μονόπλοκο είναι μια συνεχής απεικόνιση $\sigma = \sigma_q : \Delta_q \to X$. Ορίζουμε:

$$S_q(X) := \left\{ \begin{array}{l} \text{ελ. αβ. ομάδα παραγόμενη απ'} \\ (\mathbb{Z}\text{-πρότυπο}) \quad \text{το } \{\sigma \mid \sigma : \Delta_q \xrightarrow[\text{μονοπλ.}]{} X\} \end{array} \right\}$$

Και έναν τελεστή:

$$\partial = \partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X) \qquad (\partial_q := 0, \text{ για } q<0)$$

$$\sigma \mapsto \partial\sigma := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ d_q^i)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10: $S_\bullet(X) := (S_q(X), \{\partial_q\}_{q\in\mathbb{Z}})$ αποτελεί ένα σύμπλεγμα αλυσίδων υπεράνω του $\mathbb{Z}$.

Απόδ. Για $q \geq 1$: $\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) = \partial_q\left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (\sigma \circ d_{q+1}^i)\right) =$

$$= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (\sigma \circ d_{q+1}^i) \right) \circ d_q^j = \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j) =$$

$$= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j) \overset{(*)}{=}$$

$$= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^j \circ d_q^{i-1}) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j) =$$

$$= -\left[\sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j) \right] + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ d_{q+1}^i \circ d_q^j) = 0. \qquad \square$$

Ορισμός: $\boxed{H_q^{sing}(X; \mathbb{Z}) := H_q(S_\bullet(X); \mathbb{Z})}$

q - ιδιάζουσα ομάδα ομολογίας του X.
($\mathbb{Z}$-πρ.)

Παραδείγματα

	X	μή τετρ. ομάδες ομολ. $H_q^{sing}(X;\mathbb{Z})$, $q\geq 1$ $\left(H_0(X)\cong\mathbb{Z},\ X \text{ συν. δρ.}\right)$
1.	$\mathbb{R}^n$	$(H_\bullet = 0)$
2.	$\mathbb{B}^n$	$(H_\bullet = 0)$
3.	$\mathbb{S}^n$	$H_n \cong \mathbb{Z}$
4.	$\mathbb{P}^{2n}_{\mathbb{R}}$	$H_{2n}=0$, $H_{2k+1}\cong\mathbb{Z}_2$, $0\leq k\leq n-1$
5.	$\mathbb{P}^{2n+1}_{\mathbb{R}}$	$H_{2k+1}\cong\mathbb{Z}_2$, $0\leq k\leq n-1$.
6.	$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$	$H_{2k}\cong\mathbb{Z}$, $1\leq k\leq n$
7.	Φιάλη Klein	$H_1\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$, $(H_2=0)$
8.	Προσανατολίσιμη συμπαγή τοπολογική επιφάνεια γένους g	$H_1\cong\mathbb{Z}^{2g}$, $H_2\cong\mathbb{Z}$
9.	Μή προσανατολίσιμη	$H_1\cong\mathbb{Z}^{g-1}\oplus\mathbb{Z}_2$, $(H_2=0)$ $\left(H_1\cong\pi_1/[\pi_1,\pi_1]\right)$

Ορισμός: $$H_q^{sing}(X;R) := H_q\left(S_\bullet(X)\otimes_{\mathbb{Z}} R\right)$$ πρότυπο

ιδιάζουσα q-ομολογία με συντελεστές απ' τον R

Ορισμός: $$H^q_{sing}(X;R) := H^q\left(\mathrm{Hom}(S_\bullet(X)\otimes_{\mathbb{Z}} R, R)\right)$$

ιδιάζουσα q-συνομολογία με συντελεστές απ' τον R.

Βασικές έννοιες από τη Θεωρία Δραγμάτων

Ορισμός: Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και τ το σύστημα των ανοικτών του συνόλων. Ένα προδράγμα αβελιανών ομάδων υπεράνω του X είναι μια οικογένεια δεδομένων $\{\mathcal{F}(U)\}_{U\in\tau}$ αντιστοιχίζουσα

$$\tau \ni U \longmapsto \text{ σε μια αβελιανή ομάδα } \mathcal{F}(U)$$

και σε κάθε ζεύγος $U, V \in \tau$, $V \subset U$, έναν ομομορφισμό ομάδων (ομομορφισμό περιορισμού)

$$\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

και υπακούει στα εξής αξιώματα:

(i) $\mathcal{F}(\phi) = \{0\}$

(ii) $\rho^U_U = id_{\mathcal{F}(U)}$, $\forall\, U,\ U\in\tau$.

(iii) $\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$, $\forall\, U, V, W$, με $W \subset V \subset U$.

Τα στοιχεία $f \in \mathcal{F}(U)$ λέγονται και τμήσεις του $\mathcal{F}$ υπεράνω του U και $\rho^U_V(f)$ καλείται ο περιορισμός της τμήσεως f επί του $V \subset U$.

- Εάν τα $\mathcal{F}(U)$'s είναι δακτύλιοι (αντ. $\mathbb{C}$-άλγεβρες, $\mathcal{R}(U)$-πρότυπα, κ.λ.π.) τότε τα ρ^U_V είναι ομομ.

Ορισμός: Έστω $\mathcal{F}$ ένα προδράγμα υπεράνω του X, $x \in X$ και $\tau_x := \{U \in \tau \mid x \in U\}$. Τότε $\{\mathcal{F}(U), \rho^U_V\}_{U\in\tau_x}$ αποτελεί ένα ευθύ σύστημα ορισμένο επί του κατευθυνόμενου συνόλου $A := \tau_x$ όπου $\leq\ :=\ \supset$. Το αντίστοιχο ευθύ όριο

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U\in\mathcal{T}_x} \mathcal{F}(U)$$

λέγεται το <u>στέλεχος του $\mathcal{F}$ στο σημείο x.</u>

• Έστω τώρα $\rho_x := \rho_U : \mathcal{F}(U) \ni f \longmapsto \rho_x(f) := [f] \in \mathcal{F}_x$

$(U\in\mathcal{T}_x)$

ο κανονικά επαγόμενος ομομορφισμός. $\rho_x(f)$ καλείται <u>το φύτρο της f στο σημείο x.</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{F}$ ένα προδράγμα υπεράνω του X. Ορίζουμε:

$$|\mathcal{F}| := \dot{\bigcup_{x\in X}} \mathcal{F}_x$$ και την απεικόνιση

$$p : |\mathcal{F}| \longrightarrow X \quad , \quad p(\varphi) := x, \ \forall \varphi, \ \varphi \in \mathcal{F}_x .$$

<u>Πρόταση 11.</u> Για κάθε $U\in\mathcal{T}$ και $f\in\mathcal{F}(U)$ ορίζουμε $[U,f] := \{\rho_x(f) : x\in U\} \subset |\mathcal{F}|$
Το σύνολο $\{[U,f] : U\in\mathcal{T}\} \subset |\mathcal{F}|$ αποτελεί μια βάση μιας τοπολογίας για το $|\mathcal{F}|$. Σχετικά μ' αυτήν η $p : |\mathcal{F}| \to X$ αποτελεί τοπικό ομοιομορφισμό.

<u>Απ.</u> Βλ. Forster 6.8. p. 43. □

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{F}$ προδράγμα υπεράνω του $(X,\mathcal{T})$. Μια <u>τομή φύτρων του $\mathcal{F}$ υπεράνω του $U\in\mathcal{T}$</u> είναι μια απεικόνιση

$\gamma : U \to |\mathcal{F}|$ τέτοια ώστε: $\gamma(x) \in \mathcal{F}_x$, $\forall x, x\in U$

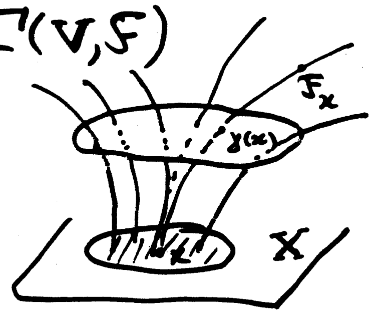
και $\forall x, x\in U$, $\exists\, V\subset U$, $V\in\mathcal{T}_x$ και $\exists\, g\in\mathcal{F}(V)$ με την ιδιότητα $\gamma(y) = \rho_y(g)$, $\forall y, y\in V$. Ορίζουμε:

$$\Gamma(U,\mathcal{F}) := \{\gamma : U \to |\mathcal{F}| \mid \gamma \text{ τομή φύτρων υπεράνω του } U\}.$$

Μέσω του $\mathcal{T} \ni \mathcal{U} \mapsto \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$

και $r^{\mathcal{U}}_{V} : \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}) \ni \gamma \mapsto \gamma|_V \in \Gamma(V,\mathcal{F})$

ορίζουμε το προδράγμα



$$\Gamma_{\mathcal{F}} := \{\, \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}),\, r^{\mathcal{U}}_{V} \,\}$$

ως <u>το προδράγμα των τμήσεων φύτρων του $\mathcal{F}$.</u>

- $\forall\, u, \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ $\exists$ κανονικός ομομ. $\varepsilon_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$

με:

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) \ni f \mapsto \varepsilon_{\mathcal{U}}(f)(x) := \rho_x(f) \in \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

<u>Ορισμός:</u> Ένα προδράγμα $\mathcal{F}$ υπεράνω του X λέγεται <u>δράγμα</u> (ή <u>σώρευμα</u>), όταν πληροί τις εξής ιδιότητες "συρραφής" για κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ και κάθε οικογένεια $(\mathcal{U}_i)_{i\in I} \subset \mathcal{U}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathcal{U}$ με $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$:

(i) Αν $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$: $\rho^{U}_{\mathcal{U}_i}(f) = \rho^{U}_{\mathcal{U}_j}(g)$, $\forall i \in I$, τότε $f = g$.

(ii) Αν $f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$, $i \in I$, με

$$\rho^{\mathcal{U}_i}_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}(f_i) = \rho^{\mathcal{U}_j}_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}(f_j), \quad \forall i, j \in I,$$

τότε $\exists!\, f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$: $\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}_i}(f) = f_i$, $\forall i, i \in I$.

<u>Πρόταση 12.</u> Έστω $\mathcal{F}$ ένα προδράγμα υπεράνω του X.

(i) $\Gamma_{\mathcal{F}}$ είναι ένα δράγμα.

(ii) Το ίδιο το $\mathcal{F}$ είναι δράγμα $\Leftrightarrow$ $\varepsilon_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow[\text{ισομ}]{} \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$ $\forall u, \mathcal{U} \in \mathcal{T}$

$\Leftrightarrow \mathcal{F} = \Gamma_{\mathcal{F}}$.

Ομάδες συνομολογίας κατά Čech με συντελεστές από δράγματα

Έστωσαν X ένας τοπολογικός χώρος, $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα και $\mathcal{F}$ ένα δράγμα αβελιανών ομάδων (ή προτύπων) υπεράνω του X. Για $q \geq 0$ ορίζουμε:

$$C^0(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \quad \Big(= \{ f : I \to \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) : \underset{f_i}{\overset{\shortparallel}{f(i)}} \in \mathcal{F}(U_i) \} \Big)$$

$$C^1(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \prod_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) := \prod_{\substack{(i_0,i_1,\dots,i_q)\in I^{q+1} \\ i_0<i_1<\dots<i_q}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

Τα στοιχεία $f \in C^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$ συμβολίζονται με $f = (f_{i_0,i_1,\dots,i_q})$ όπου $f_{i_0,i_1,\dots,i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_q})$ με $(i_0,\dots,i_q)\in I^{q+1}$: $i_0<i_1<\dots<i_q$. Επίσης ορίζουμε τον ομομορφισμό: $\delta^q_{\mathcal{U}} : C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U};\mathcal{F})$

$$\boxed{(\delta^q_{\mathcal{U}} f)_{i_0,\dots,i_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho^{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_{q+1}}}_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\cap\dots\cap U_{i_{q+1}}} (f_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{q+1}})}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13. $\delta^{q+1}_{\mathcal{U}} \circ \delta^{q}_{\mathcal{U}} = 0$. Κατά συνέπειαν

$\{ C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F}), \delta^\bullet_{\mathcal{U}} \}$ είναι σύμπλεγμα συναλυσίδων.

Ορισμός:
$$\check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) := H^q(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$$

η q-ομάδα συνομολογίας Čech του καλύματος $\mathcal{U}$ με συντελεστές στο $\mathcal{F}$.

Ορισμός. Αν εκτός του $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ είναι ένα άλλο κάλυμμα του X, τότε το $\mathcal{V}$ λέγεται εκλέπτυνση του $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ απεικόνιση $\tau : J \to I$ με $V_j \subset U_{\tau(j)}$, $\forall j$, $j\in J$. (Συμβολισμός: $\mathcal{V} < \mathcal{U}$)

Μια τέτοια απεικόνιση επάγει ομομορφισμούς:

$$\tau^q : C^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow C^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

$$\tau^q(f_{i_0, i_1, \ldots, i_q}) := \rho^{U_{\tau(j_0)} \cap U_{\tau(j_1)} \cap \cdots \cap U_{\tau(j_q)}}_{V_{j_0} \cap V_{j_1} \cap \cdots \cap V_{j_q}} (f_{\tau(j_0), \tau(j_1), \ldots, \tau(j_q)})$$

Παρατήρηση: (i) $\tau^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ είναι μορφισμός συμπλεγμάτων συναλυσίδων

(ii) Για κάθε q οι τ^q επάγουν ομομορφισμούς:

$$t^{q\,\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = \tau^{*,q} : \check{H}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

οι οποίοι εξαρτώνται μόνον από τα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ και όχι από την συγκεκριμένη επιλογή της τ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 14. (i) $t^{q\,\mathcal{U}}_{\mathcal{U}} = id$

(ii) Για $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U} \Rightarrow t^{q\,\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ t^{q\,\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = t^{q\,\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}$.

Ορισμός: Το σύνολο των ανοικτών καλυμμάτων του X είναι κατευθυνόμενο μέσω της $\leqslant \; := \; >$. Το αντίστοιχο ευθύ όριο:

$$\boxed{\check{H}^q(X;\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})}$$

λέγεται η κατά Čech q-ομάδα συνομολογίας του X με συντελεστές παρμένους απ' το δράγμα $\mathcal{F}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15 (ΘΕΩΡΗΜΑ LERAY) X παρασυμπαγής

$\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ αν. κάλυμμα.

Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \check{H}^n(U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_p};\mathcal{F})=0 \\ \forall n,\ n\geq 1,\ \forall\,(i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \cong \check{H}^q(X;\mathcal{F})$$

$\forall q \geq 0$

(παρασυμπαγής = Hausdorff + κάθε αν. καλ. έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση)

Ομομορφισμοί δραγμάτων και η μακριά ακριβής ακολουθία ομάδων συνομολογίας

<u>Ορισμός</u>. Έστωσαν $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ δράγματα αβελιανών ομάδων υπεράνω του (X, τ). Ένας <u>ομομορφισμός δραγμάτων</u> $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι μια οικογένεια ομομορφισμών ομάδων

$$\{\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \ , \ U \in \tau\}$$

η οποία είναι συμβιβαστή με τις απεικονίσεις περιορισμού, δηλ. $\forall U, V \in \tau : V \subset U$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\pi\varepsilon\rho."'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\pi\varepsilon\rho."] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

(αν α_U είναι όλοι ισο. τότε α λέγεται <u>ισο</u>).

<u>Παραδείγματα</u>: (i) Έχουμε ήδη για επιφάνειες Riemann X ορίσει τα ακόλουθα δράγματα:

$\mathcal{E}$:= δράγμα των διαφορίσιμων συναρτήσεων | $\mathcal{O}$:= ολόμορφες

$\mathcal{E}^{(i)}$:= δράγμα των διαφορικών μορφών βαθμού i, $i = 1, 2$.

$\mathcal{E}^{(1,0)}$:= δράγμα των 1-δ.μ. τύπου $(1,0)$

$\mathcal{E}^{(0,1)}$:= δράγμα των 1-δ.μ. τύπου $(0,1)$

Ω := δράγμα των ολόμορφων 1-δ. μορφών.

καθώς και κάποιους διαφορικούς τελεστές, οι οποίοι επάγουν ομομορφισμούς δραγμάτων: $d, d', d'' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{(1)}$ $\quad f \mapsto df \ (d'f, d''f)$

$d, d', d'' : \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)}$ $\quad \omega = \sum f_\alpha d\rho_\alpha \mapsto d\omega = \sum df_\alpha \ldots$

(ii) $\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$

πολλαπλασιαστικό δράγμα συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{C}^*$

$$\mathcal{O}(U) \ni f \longmapsto \exp_U(f) := e^{2\pi i f}.$$

Ορισμός: Αν $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι ένας ομομορφισμός δραγμάτων υπεράνω του X, τότε η

$$U \longmapsto \mathcal{K}(U) := \operatorname{Ker}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U))$$

ορίζει ένα δράγμα $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}(\alpha)$, τον πυρήνα του α.

Παραδείγματα: Για X μια επιφάνεια Riemann:

(i) $\mathcal{O} = \operatorname{Ker}(\mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)})$ [f ολομ $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$]

(ii) $\Omega = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)})$ [Κάθε κλειστή 1-δ.μ. τύπου $(1,0)$ είναι ολόμορφη]

(iii) $\mathbb{Z} = \operatorname{Ker}(\mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*)$

Παρατήρηση: (i) Για $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ομομ. δρ. $\rightsquigarrow$ $U \mapsto \mathcal{B}(U) = \operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$ είναι προδράγμα ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΕΝ ΓΕΝΕΙ δράγμα.

(ii) Για $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ομ. δρ.,

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$
$$\varphi = [f]_x \longmapsto \alpha_x(\varphi) := [\alpha_U(f)]_x$$

είναι ομομ. μεταξύ των στελεχών.

Ορισμός: Μια ακολουθία δραγμάτων

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\alpha_i} \cdots$$

λέγεται ακριβής $\overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\mathcal{F}_1)_x \xrightarrow{(\alpha_1)_x} (\mathcal{F}_2)_x \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\mathcal{F}_{i-1})_x \xrightarrow{(\alpha_{i-1})_x}$ είναι ακριβής.

<u>Παραδείγματα:</u> X επιφάνεια Riemann.

(i) $$0 \to \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$$ είναι ακριβής.

(Το επί του d'' έπεται από το λήμμα Dolbeault:

$$\forall \omega,\ \omega = g\,d\bar{z} \in \mathcal{E}^{(0,1)},\ g \in \mathcal{E}(X),\ \exists f \in \mathcal{E}(X) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$
$$\Downarrow$$
$$d'' f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = g\,d\bar{z} = \omega.)$$

(ii) $$0 \to \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{L} \longrightarrow 0$$ είναι ακριβής.

$$\mathcal{L} = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)})$$ = δράγμα κλειστών δ.μ.

(το επί του d έπεται απ' το ότι <u>τοπικά</u> κάθε κλειστή δ.μ. είναι ακριβής)
< ∃ πρ. συν.

(iii) $$0 \longrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega_1 \to 0$$ είναι αντιστοίχως ακριβής

(iv) $$0 \longrightarrow \Omega_1 \hookrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0$$ είναι ακριβής

Το επί της d: ως προς ένα χάρτη (U, z):

$$d(f\,dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

Για κάθε ανοικτό $V \subset U$ με $z(V) \subset \mathbb{C}$ ένα δίσκο, το $d : \mathcal{E}^{(1,0)}(V) \to \mathcal{E}^{(2)}(V)$ είναι επί

$$\Longrightarrow d : \mathcal{E}_x^{(1,0)} \to \mathcal{E}_x^{(2)},\ \forall x,\ x \in X.$$ Επί

(v) $$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$ είναι ακριβής

(ύπαρξη λογαρίθμου τοπικά για κάθε μη μηδ. συν.)

Έστω $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$

μιά σύντομη ακριβής ακολουθία δραγμάτων υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου X. Τότε:

$$0 \to C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}') \xrightarrow{\alpha^q_{\mathcal{U}}} C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^q_{\mathcal{U}}} C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}'') \to 0$$

είναι ακριβής, $\forall q$. Άν X είναι παρασυμπαγής, τότε

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{C}^q(X;\mathcal{F}') & \longrightarrow & \check{C}^q(X;\mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{C}^q(X;\mathcal{F}'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ & & \varinjlim_{\mathcal{U}} C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}') & & \varinjlim_{\mathcal{U}} C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) & & \varinjlim_{\mathcal{U}} C^q(\mathcal{U};\mathcal{F}'') & & \end{array}$$

είναι επίσης ακριβής.

Άρα βάσει του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 9 για τα $\check{H}^q(X;\mathcal{F}) := H^q(\check{C}^\bullet(X;\mathcal{F}))$ έχουμε μια μακριά ακριβή ακολουθία συνομολογίας Čech:

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^i(X;\mathcal{F}') \longrightarrow \check{H}^i(X;\mathcal{F}) \to \check{H}^i(X;\mathcal{F}'') \to \check{H}^{i+1}(X;\mathcal{F}') \to \cdots$$

<u>Λήμμα 16.</u> Αν $H^1(X;\mathcal{F}) = 0$, τότε

$$H^1(X;\mathcal{F}') \cong \mathcal{F}''(X) / \beta(\mathcal{F}(X))$$

<u>Απ.</u> Από την παρ. μακριά ακρ. ακ. $\rightsquigarrow$ $\underset{H^0(X;\mathcal{F})}{\overset{\|}{\mathcal{F}(X)}} \to \underset{H^0(X;\mathcal{F}'')}{\overset{\|}{\mathcal{F}''(X)}} \to H^1(X,\mathcal{F}'') \to 0$ ακριβής. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 (ΘΕΩΡΗΜΑ DOLBEAULT)

Για κάθε επιφάνεια Riemann X έχουμε τους εξής ισομορφισμούς:

(i) $$\check{H}^1(X,\mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X)$$

(ii) $$\check{H}^1(X,\Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\,\mathcal{E}^{(1,0)}$$

Απόδειξη: (i) $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$ ακριβής

και $$\check{H}^1(X;\mathcal{E}^{(0,1)}) = 0$$

(ii) $0 \to \Omega \hookrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$ ακριβής

και $$\check{H}^1(X;\mathcal{E}^{(2)}) = 0.$$ $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 (ΘΕΩΡΗΜΑ DE RHAM)

Για κάθε επιφάνεια Riemann X παίρνουμε

$$\check{H}^1(X;\mathbb{C}) \cong Rh^1(X) := \frac{\operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X))}{\operatorname{Im}(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X))}$$

Απόδειξη: $0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{L} \to 0$ ακριβής

$$\mathcal{L} = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)})$$

και $$\check{H}^1(\mathcal{L}) = 0.$$ $\square$

Το ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ RIEMANN (17.9.1826 – 20.7.1866) ΚΑΙ ROCH (9.12.1839 – 21.11.1866)

- Έστω X μιά επιφάνεια Riemann. Ένας <u>διαιρέτης επί του X</u> είναι μια απεικόνιση $D: X \longrightarrow \mathbb{Z}$ τέτοια, ώστε για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset X$, υπάρχει μόνον ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $x \in K$ με την ιδιότητα $D(x) \neq 0$. Το σύνολο $\mathrm{Div}(X)$ όλων των διαιρετών επί του X εφοδιάζεται με τη δομή της <u>αβελιανής ομάδας</u> μέσω της πράξης της πρόσθεσης. Το σύνολο $\mathrm{Div}(X)$ καθίσταται μερικώς διατεταγμένο ορίζοντας:

$$D \leq D' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} D(x) \leq D'(x),\ \forall x,\ x \in X.$$

- Έστω Y ένα ανοικτό υποσύνολο του X και $f \in \mathcal{M}(Y) = \left\{\begin{matrix}\text{μερόμορφες}\\ \text{συναρτήσεις}\\ \text{επί του } Y\end{matrix}\right\}$, δηλ. $f: Y' \longrightarrow \mathbb{C}$ (Y' ανοικτό $\subset Y$):

(i) $Y \setminus Y'$ αποτελείται μόνον από μεμονωμένα σημεία.

(ii) $\forall\, y,\ y \in Y \setminus Y'$: $\lim\limits_{x \to y} |f(x)| = \infty$ (όλα πόλοι)

$$\left[\ f \in \mathcal{M}(Y) \Longleftrightarrow f \text{ ολόμορφη}: Y \to \underset{\mathbb{C}\cup\{\infty\}}{\overset{\|}{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}} \text{ με } f|_{Y \setminus Y'} \equiv \infty\ \right]$$

Για ένα οποιοδήποτε $a \in Y$ ορίζουμε:

$$\boxed{\mathrm{ord}_a(f) := \begin{cases} 0, & \text{εάν η } f \text{ είναι ολόμορφη στο } a \text{ και } f(a) \neq 0 \\ k, & \text{εάν η } f \text{ έχει το } a \text{ ως θέση μηδενισμού τάξεως } k \\ -k, & \text{εάν η } f \text{ έχει το } a \text{ ως πόλο τάξεως } k \\ \infty, & \text{εάν } f \text{ είναι ταυτοτικά} \equiv 0 \text{ σε μιά αν. περ. του } a. \end{cases}}$$

- Για $f \in \mathcal{M}(X)\setminus\{0\}$ η απεικόνιση $x \longmapsto \mathrm{ord}_x(f)$ προσδιορίζει έναν διαιρέτη επί του X, τον οποίο από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με (f).

- Η συνάρτηση f θα λέγεται <u>πολλαπλάσιο</u> του διαιρέτη $D \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (f) \geqslant D$.

$(f) \geqslant 0 \iff f$ είναι ολόμορφη.

- Έστω $\omega \in \mathcal{M}^1(Y)$ (Y αν. $\subset X$) μια 1-μερόμορφη διαφορική μορφή, και $a \in Y$. Τότε $\exists$ χάρτης (U, z) γύρω απ' το a με:

$$\omega = f\,dz \;,\; f \in \mathcal{M}(U \cap Y).$$

Ορίζουμε: $\quad \mathrm{ord}_a(\omega) := \mathrm{ord}_a(f)$. [ορισμός ανεξάρτητος ειδικής επιλογής του (U, z)?]

Η απεικόνιση $x \mapsto \mathrm{ord}_a(\omega)$ προσδιορίζει κι αυτή έναν διαιρέτη συμβολιζόμενο με (ω).

- Για $f, g \in \mathcal{M}(X)\setminus\{0\}$, $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)\setminus\{0\}$ έχουμε:

$$(fg) = (f) + (g) \;,\; \left(\frac{1}{f}\right) = -(f) \;,\; (f\omega) = (f) + (\omega)$$

- Ένας διαιρέτης D επί του X ονομάζεται <u>κύριος διαιρέτης</u> όταν υπάρχει μια $f \in \mathcal{M}(X)\setminus\{0\}$: $(f) = D$.

$\underset{\text{ισοδυναμία}}{D \sim D'} \iff D - D' = (f)$ για κάποια $f \in \mathcal{M}(X)\setminus\{0\}$.

- Κάθε διαιρέτης της μορφής (ω), όπου $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)\setminus\{0\}$, καλείται <u>κανονικός</u>. Δύο οποιοιδήποτε κανονικοί διαιρέτες (ω_1) και (ω_2) επί του X είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους διότι $\exists\, f \in \mathcal{M}(X)\setminus\{0\}$: $\omega_1 = f \cdot \omega_2$.

- Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann. Προφανώς για κάθε $D \in \mathrm{Div}(X)$, $D(x) \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος $x \in X$. Κανείς μπορεί επομένως να ορίσει την απεικόνιση:

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z} \,, \quad \deg(D) := \sum_{x \in X} D(x)$$

$\deg(D)$ ονομάζεται βαθμός του D.
$\deg$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

Πρόταση 1. $\deg((f)) = 0$ για κάθε κύριο διαιρέτη (f), όπου $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

$$\#\begin{pmatrix}\text{θέσεων μηδενισμού}\\ \text{της } f\end{pmatrix} = \#\begin{pmatrix}\text{πόλων}\\ \text{της } f\end{pmatrix} \Longrightarrow \deg((f)) = 0$$

εξ ορισμού! ■

πόρισμα του θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Τα δράγματα $\mathcal{O}_D$

Έστω D ένας διαιρέτης επί μιας επιφάνειας Riemann X.

Η

$$\underset{\{\text{ανοικτά} \subset X\}}{U} \longmapsto \mathcal{O}_D(U) := \{ f \in \mathcal{M}(U) : \mathrm{ord}_x(f) \geq -D(x) \ \ \forall x, x \in U \}$$

ορίζει ένα δράγμα $\mathcal{O}_D$ επαγόμενο απ' τον D επί του X.

(για $D = 0$, παίρνουμε $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$ = δράγμα ολομόρφων απεικ. επί του X)

Όταν $D \sim D' \Longrightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} : D - D' = (\psi) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_D(U) \ni f \mapsto \psi \cdot f \in \mathcal{O}_{D'}(U)$ ορίζει έναν ισομορφισμό για κάθε ανοικτό $U \subset X$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{D'}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Έστω ότι X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann και D ένας διαιρέτης επί του X με βαθμό $\deg(D) < 0$. Τότε

$$\check{H}^0(X; \mathcal{O}_D) = 0.$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ.</u> Έστω ότι υπάρχει $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ με $f \neq 0$.

Τότε $$(f) \geq -D \Rightarrow \underbrace{\deg((f))}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{(από Πρόταση 1)}}} \geq \deg(-D) = -\deg(D) \underset{\text{υπόθεση}}{>} 0$$

Αντίφαση! ∎

Το δράγμα του ουρανοξύστη $\mathbb{C}_P$

Έστω P ένα σημείο μιας επιφάνειας Riemann X. Η

$$\underset{\text{αν.}}{U} \mapsto \mathbb{C}_P(U) := \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{εάν } P \in U \\ 0, & \text{εάν } P \notin U \end{cases} \leftarrow \text{ουρανοξύστης}$$

μαζί με τις προφανείς απεικονίσεις περιορισμού ορίζει ένα δράγμα.

ΛΗΜΜΑ 3. (i) $\check{H}^0(X; \mathbb{C}_P) \cong \mathbb{C}$.
(ii) $\check{H}^1(X; \mathbb{C}_P) = 0$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ.</u> (i) προφανές ($H^0(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}_P(X) = \mathbb{C}$)

(ii) $$\check{H}^1(X; \mathbb{C}_P) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) \xhookleftarrow[\text{ένθεση}]{} H^1(\mathcal{V}^e; \mathbb{C}_P)$$

αυθαίρετο ανοικτό κάλυμμα

$$H^1(\mathcal{V}^e; \mathbb{C}_P) = Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) / B^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P)$$

όπου $$Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) = \operatorname{Ker}\left(C^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) \right)$$
$$B^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) = \operatorname{Im}\left(C^0(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P) \right)$$

Αν $\xi \in \check{H}^1(\mathcal{V}^e; \mathbb{C}_P)$ τότε το ξ θα εκπροσωπείται μέσω ενός συγκύκλου στο $Z^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}_P)$.

Το κάλυμμα $\mathcal{V}^\ell$ έχει βεβαίως μιάν εκλέπτυνση $\mathcal{W}^\ell = (W_\alpha)_{\alpha\in A}$ τέτοια ώστε το P να περιέχεται σε ακριβώς ένα ανοικτό υποσύνολό της W_β για κάποιο $\beta \in A$. Μα αυτό σημαίνει ότι

$$Z^1(\mathcal{W}^\ell; \mathbb{C}_P) = 0 \Leftarrow C^1(\mathcal{W}^\ell; \mathbb{C}_P) = 0 \quad (*)$$

κι επειδή $\check{H}^1(\mathcal{V}^\ell; \mathbb{C}_P) \hookrightarrow \check{H}^1(\mathcal{W}^\ell; \mathbb{C}_P) = 0$

έχουμε $\check{H}^1(\mathcal{V}^\ell; \mathbb{C}_P) = 0$

Αλλ' επειδή $\mathcal{V}^\ell$ είναι αυθαίρετα επιλεγμένο κάλυμμα

$$\Longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}_P) = 0$$

[(*) Έχει στοιχεία της μορφής $f_{ij} \in \mathbb{C}_P(W_i^\ell \cap W_j)$
για $i=j \rightsquigarrow f_{ii} = 0$
για $i \neq j \rightsquigarrow$ μηδενισμός $[f_{ij} + f_{ji} = 0]$
λεξ ορισμού!] ■

- Έστω τώρα D ένας οιοσδήποτε διαιρέτης επί του X και P ένα σημείο του P. Σύμβαση: Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα P και τον διαιρέτη επί του P, ο οποίος παίρνει τιμή 1 στο P και είναι $=0$ οπουδήποτε αλλού. Προφανώς $D \leq D+P$ και υπάρχει μια ένθεση δραγμάτων:

$$\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+P}$$

- Έστω (V, z) ένας χάρτης γύρω από το P (δηλ. $z(P)=0$). Ορίζουμε έναν ομομορφισμό δραγμάτων $\beta : \mathcal{O}_{D+P} \longrightarrow \mathbb{C}_P$ ως εξής:

$$\underset{\text{ανοικτό}}{X \supset U} \rightsquigarrow \beta_U : \mathcal{O}_{D+P}(U) \longrightarrow \mathbb{C}_P(U)$$

με $\beta_U = 0$ όταν $P \notin U$.

Όταν το $P \in U$ και $f \in \mathcal{O}_{D+P}(U)$, τότε η P γύρω από το P είναι αναπτύξιμη σε σειρά Laurent (ως προς την τοπική συντεταγμένη z):

$$f = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{όπου } k := D(P)$$

$\left(\operatorname{ord}_x(f) \geq -(D+P)(x) = -D(x) - 1, \forall x \in U\right)$ θέσε $\underline{x=P}$

Ορίζουμε

$$\boxed{\beta_U(f) := c_{-k-1} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_P(U)}$$

Προφανώς (!) $\beta : \mathcal{O}_{D+P} \twoheadrightarrow \mathbb{C}_P$ είναι ένας επιμορφισμός δραγμάτων εξ ορισμού. Η σύντομη ακριβής ακολουθία δραγμάτων

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+P} \twoheadrightarrow \mathbb{C}_P \longrightarrow 0$$

επάγει την μακριά ακριβή ακολουθία ομάδων συνομολογίας (κατά Čech):

$\mathbb{C}$ (εξ ορισμού)

(**)

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X,\mathcal{O}_D) \hookrightarrow \check{H}^0(X,\mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow \underbrace{\check{H}^0(X,\mathbb{C}_P)}_{\cong\, \mathbb{C}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \check{H}^1(X,\mathcal{O}_D) \underset{\text{επιμορφισμός}}{\twoheadrightarrow} \check{H}^1(X,\mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow \check{H}^1(X,\mathbb{C}_P) = 0$$

(από λήμμα 3)

Λήμμα 4. Έστω X μια <u>συμπαγής</u> επιφ. Riemann και $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$. Αν $D' \geq D$, τότε η ένθεση $\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D'}$ επάγει έναν <u>επιμορφισμό</u> σε επίπεδο συνομολογίας:

$$\check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) \twoheadrightarrow \check{H}^1(X;\mathcal{O}_{D'})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν D' είναι $= D+P$ για κάποιον P, τότε αυτό είναι προφανές από την πιο πάνω ακριβή ακολουθία (**). Λόγω όμως της συμπάγειας του X, ο D' οφείλει σε κάθε περίπτωση να είναι της μορφής:

$$D' = D + P_1 + \dots + P_m$$

για κάποια $P_1, \dots, P_m \in X$ και εφάρμοσε μαθ. επαγωγή και τέλειωνε ∇ ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 5:

ΘΕΩΡΗΜΑ RIEMANN-ROCH: Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann έχουσα γένος $g = g(X)$. Έστω D ένας διαιρέτης επί του X. Τότε αμφότεροι οι $\check{H}^0(X; \mathcal{O}_D)$, $\check{H}^1(X; \mathcal{O}_D)$ αποτελούν $\mathbb{C}$-διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διαστάσεως και έχουμε:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X; \mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g(X) + \deg(D)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: • Περίπτωση (α): Τα παραπάνω είναι αληθή για τον διαιρέτη $D=0$. Κι αυτό γιατί $\underset{\mathcal{O}_D}{\check{H}^0(X; \mathcal{O}_X)} = \mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{C}$ απαρτίζεται αποκλειστικώς από σταθερές συναρτήσεις (όπως ξέρουμε από τις αρχικές διαλέξεις του κου Βλάχου ως αρχή μεγίστου) και $g(X) = \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$.(*)

• Περίπτωση (β): Έστω $P \in X$ και $D' = D + P$. Ας υποθέσουμε πως το θεώρημα είναι αληθές για έναν εκ των δύο διαιρετών D, D'. Θα διασπάσουμε την ακριβή ακολουθία (**) σε δύο άλλες σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

(*) Εδώ $\check{H}^1(X; \mathbb{C}) \cong \check{H}^0(X, \Omega) \oplus H^0(X, \bar{\Omega})$ (διάσπαση Hodge)

dim $= 2g(X)$

$\check{H}^0(X,\Omega) \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O})$ ← Serre duality.

Ορίζουμε: $V := \operatorname{Im}\left(\check{H}^0(X;\mathcal{O}_{D'}) \to \mathbb{C}\right)$ και

Θεωρούμε τον χώρο πηλίκων $W := \mathbb{C}/V$. Ισχύει:

$$\dim_{\mathbb{C}} V + \dim_{\mathbb{C}} W = 1 = \deg(D') - \deg(D) \qquad (1)$$

και οι ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X;\mathcal{O}_D) \hookrightarrow \check{H}^0(X;\mathcal{O}_{D'}) \twoheadrightarrow V \longrightarrow 0$$

(εξ ορισμού)

$$0 \longrightarrow W \hookrightarrow \check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) \twoheadrightarrow \check{H}^1(X,\mathcal{O}_{D'}) \to 0$$

(από λήμμα 4)

είναι προφανώς ακριβείς. Επομένως:

ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΧΩΡΟΙ ΕΧΟΥΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ:

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X;\mathcal{O}_{D'}) = \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X;\mathcal{O}_D) + \dim_{\mathbb{C}} V \qquad (2)$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) = \dim \check{H}^1(X;\mathcal{O}_{D'}) + \dim_{\mathbb{C}} W \qquad (3)$$

Από το συνδυασμό των (1), (2), (3):

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X,\mathcal{O}_{D'}) - \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X;\mathcal{O}_{D'}) - \deg(D') =$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X,\mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) - \deg(D).$$

Επομένως αν το R-R είναι αληθές για έναν εκ των D, D' τότε αναγκαστικά θα είναι αληθές και για τον άλλον !!

• Περίπτωση (γ): Ένας αυθαίρετος διαιρέτης $D \in \operatorname{Div}(X)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$D = P_1 + \cdots + P_m - P_{m+1} - \cdots - P_k$$

σημείων. Χρησιμοποίησε επαγωγή και ότι είπαμε στα (α), (β). ∎

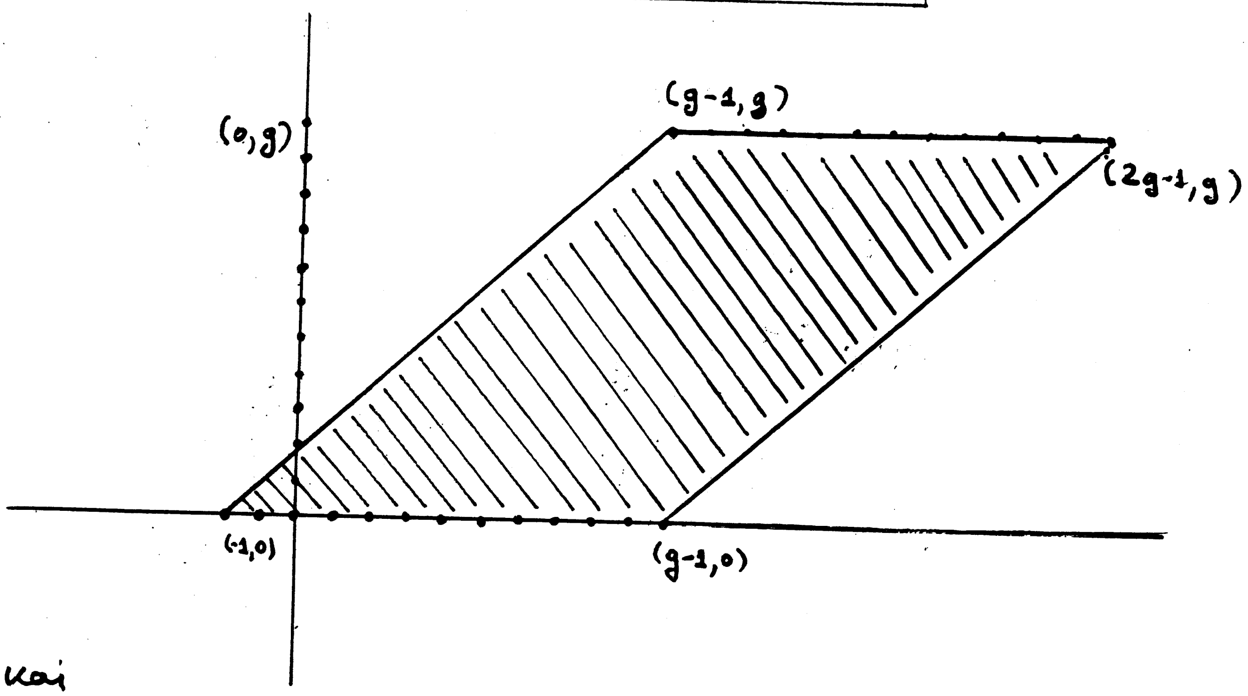
9

- Η διάσταση $i(D) := \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X; \mathcal{O}_D)$ λέγεται ο ειδικός δείκτης του διαιρέτη D. Το θεώρημα R-R αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X; \mathcal{O}_D) = 1 - g(X) + \deg(D) + i(D)$$

Από Πρόταση 2 έπεται: $\boxed{i(D) = g - 1 - \deg(D)}$ (1)'

Ο κατά Serre δυϊσμός θα δώσει: $\boxed{\deg(D) > 2g-2 \overset{(\text{Πρ}.2)}{\Longrightarrow} i(D) = 0}$ (2)'



Καθώς και

$$i(D) = \dim \check{H}^0(X; \mathcal{O}_{K_X - D})$$

└ κανονικός διαιρέτης

1η απόδειξη

Κλασικό Θεώρημα Gauss-Bonnet $\Longrightarrow$ $\boxed{\underset{(\omega)}{\deg(K_X)} = 2g-2}$ $\Big(\Leftarrow$ R.R. για $D = K$ — 2η απόδειξη

$\mathcal{O}_K$ ⟿ ολόμορφη εφαπτ. διαν. δέσμη

$\mathcal{O}_{-K}$ ⟿ συν. συνεφ. δ.

$\mathcal{O}_K = \Omega$

$$g - 1 = \dim \check{H}^0(X, \Omega) - \dim \check{H}^1(X, \Omega)$$

$$\| \quad 1 - g + \deg(K) \Big)$$

$$\Big(\deg(-K) = \frac{1}{4\pi} \int_X k \cdot \Phi = \chi(X)$$

← καμπυλότητα Gauss; ← (...)

$$U \mapsto \Omega_D(U) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) : \operatorname{ord}_x(\omega) \geq -D(x), \forall x \in U\}$$

$$\Omega_0 = \Omega.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 6. Εαν X είναι μια συμπαγής επιφάνεια Riemann και $a \in X$, τότε $\exists\, f$ μερόμορφη, μη σταθερή συνάρτηση $\in \mathcal{M}(X)$ η οποία έχει έναν πόλο τάξεως $\leq g+1$, και είναι ολόμορφη στο $X \setminus \{a\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζουμε $D : X \to \mathbb{Z}$ διαιρέτη με:

$$D(x) = \begin{cases} g+1, & x = a \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

$$RR \Rightarrow \quad \dim \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg(D) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ τέτοια } f \in \check{H}(X, \mathcal{O}_D). \blacksquare \qquad \left(\operatorname{ord}_a(f) \geq -D(a) = -(g+1)\right)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 7. X συμπ. επ. R., $g := g(X)$.

$\exists$ ολόμορφη απεικόνιση επικάλυψης $f : X \to \mathbb{P}^1$ με το πολύ $g+1$ φύλλα.

Αποδ. Έπεται από το πορ. 6 αφού η f που κατασκευάζουμε διότι σύμφωνα με την Πρ. 6.2 της πριν διάλεξη το ∞ προσλαμβάνεται με μιά πολλαπλότητα $\leq g+1$. $\blacksquare$

ΠΟΡΙΣΜΑ 8. Κάθε συμπαγής επ. Riemann $\underbrace{}_{\text{γένους } 0}$ είναι ισόμορφη πρός το $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Αποδ. Κάθε επικαλ. απεικόνιση με 1-φύλλο είναι αμφιολόμορφη. $\blacksquare$

Την προηγούμενη φορά αποδείξαμε το:

ΘΕΩΡΗΜΑ RIEMANN-ROCH: Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann έχουσα γένος $g=g(X)$. Έστω D ένας διαιρέτης επί του X. Τότε αμφότεροι οι $\check{H}^0(X;\mathcal{O}_D)$, $\check{H}^1(X;\mathcal{O}_D)$ αποτελούν $\mathbb{C}$-διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διαστάσεως και έχουμε:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X;\mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) = 1-g+\deg(D)}$$

$\left(U \text{ αν.} \mapsto \mathcal{O}_D(U) := \{ f \in \mathcal{M}(U) : \operatorname{ord}_x(f) \geq -D(x),\ \forall x,\ x \in U \} \right)$

Επίσης αποδείξαμε την:

Πρόταση 2: Κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann γένους 0 είναι $\cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος R-R αφορά τις συμπαγείς επιφάνειες Riemann γένους 1 (οι οποίες είναι τοπολογικώς τόροι). Αυτές είναι <u>προβολικές ποικιλότητες</u>:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann X γένους 1 είναι ισόμορφη με μία κυβική καμπύλη εντός του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

<u>Απόδειξη</u>: $\check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) \underset{\text{Serre}}{\cong} \check{H}^0(X;\mathcal{O}_{K-D})$ όπου $K=(\omega)$ ένας κανονικός διαιρέτης. Επειδή $\deg(K) = 2g-2 = 2\cdot 1-2 = 0$, για κάθε διαιρέτη D επί της X με $\deg(D) \geq 1$, το θεώρημα R-R δίνει:

$$\deg(K-D) < 0 \underset{\text{πρ. 2 (σελ. 4)}}{\Longrightarrow} \check{H}^0(X;\mathcal{O}_{K-D}) \cong \check{H}^1(X;\mathcal{O}_D) = 0 \underset{R-R}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X;\mathcal{O}_D) = \deg(D).$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε έναν διαιρέτη της μορφής

$D = n \cdot P = \underbrace{P + \cdots + P}_{n\text{-φορές}}$ $(P \in X)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε: $\dim \check{H}^0(X; \mathcal{O}_D) = n$.

- Επιλέγουμε για $n=2$ μια βάση $\{1, x\}$ του $\check{H}^0(X; \mathcal{O}_{2 \cdot P})$ (ως διανυσματικού $\mathbb{C}$-χώρου) με $x \in \check{H}^0(X; \mathcal{O}_{2P}) \setminus \check{H}^0(X; \mathcal{O}_P)$, δηλ. με x μια μερόμορφη συνάρτηση στον X έχουσα μόνον στο P πόλο τάξεως 2.

- Αντιστοίχως επιλέγουμε για $n=3$ τη βάση $\{1, x, y\}$ του $\check{H}^0(X; \mathcal{O}_{3 \cdot P})$ (ως διανυσματικού $\mathbb{C}$-χώρου) με $y \in \check{H}^0(X; \mathcal{O}_{3P}) \setminus \check{H}^0(X; \mathcal{O}_{2 \cdot P})$, δηλ. με y μια μερόμορφη συνάρτηση στον X έχουσα μόνον στο P πόλο τάξεως 3.

- Οι επτά μερόμορφες συναρτήσεις

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3$$

ανήκουν στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\check{H}^0(X; \mathcal{O}_{6 \cdot P})$ (ο οποίος έχει διάσταση 6). Κι επειδή $\operatorname{ord}_P(x^2) = 4$, $\operatorname{ord}_P(xy) = 5$ και $\operatorname{ord}_P(x^3) = 6$, έχουμε:

$$\check{H}^0(X; \mathcal{O}_{4 \cdot P}) = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot x + \mathbb{C} \cdot y + \mathbb{C} \cdot x^2$$
$$\check{H}^0(X; \mathcal{O}_{5 \cdot P}) = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot x + \mathbb{C} \cdot y + \mathbb{C} \cdot x^2 + \mathbb{C} \cdot xy$$
$$\check{H}^0(X; \mathcal{O}_{6 \cdot P}) = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot x + \mathbb{C} \cdot y + \mathbb{C} \cdot x^2 + \mathbb{C} \cdot xy + \mathbb{C} \cdot x^3$$

Όμως και $\operatorname{ord}_P(y^2) = 6$ (με $y \in \check{H}^0(X; \mathcal{O}_{6 \cdot P}) \setminus \check{H}(X; \mathcal{O}_{5 \cdot P})$), οπότε αναγκαστικά θα υπάρχει ένας $\mathbb{C}$-γραμμικός συνδυασμός που θα συνδέει τις παραπάνω επτά μερόμορφες συναρτήσεις:

$$y^2 = A_1 + A_2 x + A_3 y + A_4 x^2 + A_5 xy + A_6 x^3, \quad A_6 \neq 0.$$

Υποκαθιστώντας το x μέσω του $\frac{x}{A_6}$ και το y μέσω του $\frac{y}{A_6}$ μετατρέπουμε αυτήν τη εξίσωση σε μια εξίσωση της μορφής:

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

Εξ αυτής μπορούμε να ορίσουμε μια ολόμορφη απεικόνιση:

$$\varphi : X \longrightarrow C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \qquad \text{όπου } C \text{ είναι η στροβολική καμπύλη:}$$

$$C := \{[X:Y:Z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3\}$$

με $\varphi(P) = [0:0:1]$ = επάπειρον σημείο της C.

- Ως μη σταθερή, η φ οφείλει να είναι επί (επειδή X είναι συμπαγές (συνεκτικό))

- Αν $Q, R \in X \setminus \{P\}$, με $Q \neq R$, κι αν υποθέσουμε ότι $x(Q) = x(R)$ και $y(Q) = y(R)$, τότε

$$\{x - x(R),\ y - y(R)\} \subset \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{3P-Q-R}).$$

Επειδή $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X; \mathcal{O}_{3P-Q-R}) = 1 \Rightarrow x - x(R) = \lambda \cdot (y - y(R))$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Αυτό όμως είναι αδύνατο διότι $\mathrm{ord}_P(x - x(R)) < \mathrm{ord}_P(y - y(R))$. Άρα $y(Q) \neq y(R)$ ή $x(Q) \neq x(R)$, δηλ. η φ οφείλει να είναι και 1-1. ■

<u>Παρατήρηση</u>: Μια άλλη προσέγγιση γίνεται με μέσα από τη Θεωρία μερομ. συναρτήσεων επί του τόρου. Αν $X = \mathbb{C}/\Gamma$, $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ ($\{\omega_1, \omega_2\}$ $\mathbb{R}$-γρ. ανεξ.), τότε ορίζεται απ' ευθείας μια αμφιολόμορφη απεικόνιση

$$\psi : X = \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \psi(X) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

με

$$\psi(z \,(\mathrm{mod}\, \Gamma)) := \begin{cases} [1 : \wp(z) : \wp'(z)], & \text{αν } z \notin \Gamma \\ [0:0:1], & \text{αν } z \in \Gamma, \end{cases}$$

και

$$\psi(X) = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid z_0 z_2^2 - 4z_1^3 + g_2 z_0^2 z_1 + g_3 z_0^3 = 0\}.$$

Εδώ $g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \omega^{-4}$, $g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \omega^{-6}$

και $\boxed{\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left[\sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \omega^{-(2n+1)} \right] z^{2n}}$ <u>η συνάρτηση Weierstraß</u>

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3)$$

Επίσης γενικότερα ισχύει το:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann είναι προβολική.

(αρκεί να προσδιορισθεί ένας κατάλληλος διαιρέτης με $\deg(D) > 2g+1$

τέτοιος ώστε:

$$\varphi_D : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$x \longmapsto [s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_N(x)]$$ να είναι ολομ. 1-1.

$\{s_0, \dots, s_N\}$ βάση του $H^0(X; \mathcal{O}_D)$)

Σημαντικά Θεωρήματα που ισχύουν σε όλες τις διαστάσεις

• Εαν $f: \underset{\text{αν.}}{U} \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ είναι μια απεικόνιση με n μιγαδικές μεταβλητές

$$z_1 = x_1 + i y_1 , \ldots , z_n = x_n + i y_n$$

και

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

οι συνήθεις τελεστές Wirtinger με

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j , \quad d\bar{z}_j = dx_j - i\, dy_j$$

και

$$df = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j}_{\partial f} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j}_{\bar{\partial} f} ,$$

τότε η $f = u + iv$ είναι <u>ολόμορφη</u> εαν ισχύει μια (κι επομένως όλες) των εξής τριών ισοδυνάμων συνθηκών

(i) Cauchy-Riemann συνθήκες:

$$\partial u/\partial x_j = \partial v/\partial y_j , \quad \partial u/\partial y_j = -\frac{\partial v}{\partial x_j} , \forall j,\ 1 \le j \le n$$

(ii) $\bar{\partial} f = 0$ σε όλο το U

(iii) f είναι αναπτύξιμη ως απολύτως συγκλίνουσα δυναμοσειρά σε μια ανοικτή περιοχή κάθε σημείου του U.

<u>Ορισμός:</u> Έστω X ένα διαφορίσιμο (αντ. μιγαδικό) $\mathbb{K}$-πολύπτυγμα ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) διαστάσεως $n = \dim_{\mathbb{K}} X$. Το ζεύγος

$$\left(E = \bigcup_{x \in X} E_x ,\ \pi : E \to X \right)$$

λέγεται διαφορίσιμη (αντιστοίχως μιγαδική) $\mathbb{K}$-διανυσματική δέσμη τάξεως r υπεράνω του X, όταν

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & X \\ \cup & & \Psi \\ E_x = \pi^{-1}(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

είναι μια C^∞-διαφορίσιμη (για $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) και αντ. ολόμορφη ($\mathbb{K} \overset{\text{για}}{=} \mathbb{C}$) απεικόνιση, κάθε $E_x = \pi^{-1}(x)$ είναι εφοδιασμένο με τη δομή ενός r-διάστατου $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου, και ισχύει το εξής:

Υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ του X με αμφιδιαφορίσιμες (αντ. ολόμορφες) $\mathbb{K}$-γραμμικές (νηματικώς) απεικονίσεις:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d] & U_i \times \mathbb{K}^r \arrow[d, "\text{προβ.}"] \\ U_i \arrow[r, equal] & U_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{δ.χ.}" swap, "\cong"] & \pi(E_x) \subset \{x\}\times\mathbb{K}^r \arrow[d, dash] \\ \mathbb{K}^r \arrow[r, equal] & \mathbb{K}^r \end{tikzcd}$$

Μέσω της $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r$ ορίζεται μια πουθενά μηδενιζόμενη διαφορίσιμη (αντ. ολόμορφη) απεικόνιση

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\,(x,t) := (x, g_{ij}(x)\cdot t)\ , \quad \text{όπου}$$

$$U_i \cap U_j \ni x \longmapsto g_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|_{\{x\}\times\mathbb{K}^r} \in GL(r,\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{r^2}.$$

Αυτές οι απεικονίσεις μεταβιβάσεως πληρούν τις "συνθήκες συγκυκλημάτων"

$$g_{ii} = Id\ , \qquad g_{ij}\circ g_{jk}\circ g_{ki} = Id$$

Κι αντιστρόφως· δεδομένου του X και συναρτήσεων g_{ij} μπορεί κανείς να κατασκευάσει τη διανυσματική δέσμη:

$\pi: E \to X$ μέσω συγκολλήσεως:

$$E = \left(\dot{\bigcup_{i \in I}} U_i \times \mathbb{K}^r \right) \Big/ \sim$$

με $\quad (x,t) \sim (x',t') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [x = x', \ \ t' = g_{ij}(x).t]$.

• Παράδειγμα: Η εφαπτόμενη δέσμη ενός διαφ. n-διαστ. πολυπτύγματος X:

$$T_X = \bigcup_{x \in X} T_{X,x} \longrightarrow X, \quad T_{X,x} \cong \mathbb{R}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\},$$

• Παράδειγμα: Η πραγματική εφαπτόμενη δέσμη ενός μιγαδικού n-διαστ. πολυπτύγματος X

$$T_X^{(\mathbb{R})} = \bigcup_{z \in X} T_{X,z}^{(\mathbb{R})} \longrightarrow X, \quad T_{X,z}^{(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$$

και η "μιγαδοποίησή της":

$$T_X^{(\mathbb{C})} = T_X^{(\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigcup_{z \in X} T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \longrightarrow X$$

όπου σχετικώς μέ ένα σύστημα συντεταγμένων $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_j = x_j + i y_j$, $1 \le j \le n$, έχουμε:

$$T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\} \cong \mathbb{C}\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\}$$

με τη "διάσπαση":

$$\boxed{T_X^{(\mathbb{C})} = \underbrace{\overset{T_X'^{(\mathbb{C})}}{\overset{\cong}{\mathbb{C}\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}}}}_{\substack{\text{ολόμορφο} \\ \text{μέρος}}} \oplus \underbrace{\overset{T_X''^{(\mathbb{C})}}{\overset{\cong}{\mathbb{C}\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\}}}}_{\substack{\text{αντιολόμορφο} \\ \text{μέρος}}}}$$

- Συνεφαπτόμενη δέσμη (X διαφ.): $T_X^{\vee}$ (δυϊκή της T_X).

- Συνεφαπτόμενη μιγαδική δέσμη (X μ.π.):

$$\left(T_X^{(\mathbb{C})}\right)^{\vee} = \left(T_X'^{(\mathbb{C})}\right)^{\vee} \oplus \left(T_X''^{(\mathbb{C})}\right)^{\vee}$$

$\rightsquigarrow$ αντίστοιχα δράγματα:

- Δράγμα φύτρων των p-διαφορικών μορφών:

$$X \supset \underset{\text{αν}}{U} \longmapsto \mathcal{E}_X^{(p)}(U) := \Gamma(U, \Lambda^p T_X^{\vee})$$

τοπική γραφή:

$$\varphi = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} \underbrace{\varphi_{i_1,i_2,\dots,i_p}}_{\text{διαφορ.}}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Διαφορικό:

$$d\varphi := \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} \left[d\varphi_{i_1,i_2\dots i_p}(x)\right] \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Επάγει ομομορφισμό δραγμάτων

$$\underset{\substack{\| \\ d^p}}{d} : \mathcal{E}_X^{(p)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p+1)}, \quad p \geq 0$$

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathcal{E}_X^{(0)} \to \mathcal{E}_X^{(1)} \to \dots \to \mathcal{E}_X^{(p)} \to \mathcal{E}_X^{(p+1)} \to \dots$$

$$\boxed{H^p_{DR}(X; \mathbb{R}) := H^q(\mathcal{E}_X^{\bullet})}$$

De Rham ομ. συν.

ΘΕΩΡΗΜΑ DE RHAM: $\forall p,\ p \geq 0$, υπάρχουν ισομορφισμοί:

$$H^p_{DR}(X;\mathbb{R}) \cong H^p_{sing}(X;\mathbb{R})$$

οριζόμενοι από

$$\mathcal{E}^{(p)}_X(U) \ni [\varphi] \mapsto [\kappa_p(\varphi)] \in S^p(X;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(S_p(X;\mathbb{R});\mathbb{R})$$

με

$$S_p(X;\mathbb{R}) \ni [\sigma] \mapsto [\kappa_p(\varphi)](\sigma) := \int_\sigma \varphi \in \mathbb{R}.$$

Για X συμπαγές και συνεκτικό & προσανατολισμένο: οι βαθμολογημένοι δακτύλιοι $(H^*_{DR}(X;\mathbb{R}), \wedge)$ και $(H^q_{sing}(X;\mathbb{R}), \smile)$ είναι ισόμορφοι μεταξύ τους μέσω της:

$$\begin{tikzcd}
H^p_{sing}(X;\mathbb{R}) \times H^{n-p}_{sing}(X;\mathbb{R}) \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
H^p_{DR}(X;\mathbb{R}) \times H^{n-p}_{DR}(X;\mathbb{R}) \arrow[u, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[r, "\mu_{DR}"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

όπου: $\left\{\begin{array}{l} \mu(a,b) := \langle b, D_X(a)\rangle = \langle a \smile b, [X]\rangle \\ \mu_{DR}(a,b) := \int_X a \wedge b \end{array}\right\}$

και

$$D_X : H^q_{sing}(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^{sing}_{n-q}(X;\mathbb{R})$$

οι κατά Poincaré ισομορφισμοί και $\underset{H_n(X;\mathbb{R})}{\underset{\cap}{[X]}}$ η θεμ. κλάση προσ. του X.

$\langle , \rangle : H^i \times H_n \to H_{n-i}$, $H^n \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}(H_n, \mathbb{R})$

↳ γεν. Kronecker

$x \mapsto \psi(x) := ?$, $\psi(x)(\xi) = \langle x, \xi\rangle$

$a \in H^{n-i}, b \in H^i, \xi \in H_n$: $\langle a, b \cap \xi\rangle = \langle a \smile b, \xi\rangle$

- Αν X είναι ένα n-διάστατο μιγ. πολ.

$\rightsquigarrow$ δράγμα των (p,q)-διαφορικών μορφών

$$X \supset \underset{\text{αν}}{U} \mapsto \mathcal{E}_X^{(p,q)}(U) = \Gamma\left(U, \Lambda^p \left(T_X^{1,0}(\mathbb{C})\right)^{\vee} \otimes \Lambda^q \left(T_X^{0,1}(\mathbb{C})\right)^{\vee}\right)$$

Τοπικά γραφή

$$\omega = \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_p \\ j_1<j_2<\cdots<j_q}} \omega_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q}(z)\, dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

$\Omega_X^p := \mathcal{E}^{(p,0)}$

└ δράγμα ολομόρφων p-δ. μορφών

Τελεστές:

$$\partial : \mathcal{E}_X^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p+1,q)}, \quad \partial := \pi_{p+1,q} \circ d$$

$$\bar{\partial} : \mathcal{E}_X^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p,q+1)}, \quad \bar{\partial} := \pi_{p,q+1} \circ d$$

όπου $\pi_{p,q} : \mathcal{E}_X^{(r)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p,q)}$, για $p+q=r$, οι καν. προβολές

και $d : \mathcal{E}_X^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p+q+1)} = \sum_{r+s=p+q+1} \mathcal{E}_X^{(r,s)}$

$d = \partial + \bar{\partial}$

ακριβής ακ.

$$0 \to \Omega_X^p \to \mathcal{E}_X^{(p,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{(p,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \to \mathcal{E}_X^{(p,q)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{(p,q+1)} \to \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \check{H}^q(X; \mathcal{E}_X^{(p,r)}) = 0 \\ \forall q,\ q \geq 1 \\ \forall r,\ r \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{ΘΕΩΡΗΜΑ DOLBEAULT:} \\ \check{H}^q(X; \Omega_X^p) \cong \check{H}^q((\mathcal{E}^{(p,\bullet)}, \bar{\partial}))\end{array}}$$

ΚΑΤΑ SERRE ΔΥΪΣΜΟΣ. X συμπαγές μιγαδικό πολύπτυγμα διαστάσεως n. Ισχύει ο ισομ.:

$$H^q(X;\Omega_X^p) \xrightarrow{\cong} H^{n-q}(X;\Omega_X^{n-p})$$

π.χ. για $n=1$ (στην περ. συμπ. επ. Riemann)
$p=1$, $q=0$

$$<,>: H^0(X,\Omega_X)\times H^1(X,\mathcal{O}_X)\longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\omega\ ,\ \xi)\longmapsto <\omega,\xi>:=\mathrm{Res}(\omega,\xi)$$

$$i:\ H^0(X,\Omega_X)\xrightarrow[\text{SERRE}]{\cong}\left(H^1(X,\mathcal{O}_X)\right)^\vee$$

$$\omega \longmapsto i(\omega)$$

$$i(\omega)(\xi):=<\omega,\xi>$$

ΔΙΑΣΠΑΣΗ HODGE. X συμπαγές μιγαδικό πολύπτυγμα διαστάσεως n. Αν X είναι Kähler, τότε

$$\boxed{H^r(X;\mathbb{C})\cong\bigoplus_{p+q=r}\check{H}^q(X;\Omega_X^p)\ ,\ \forall r,\ 0\le r\le 2n}$$

σ' επίπεδο διαστάσεων, αν: $b_r(X):=\dim_{\mathbb{C}} H^r(X;\mathbb{C})$
$h^{p,q}(X):=\dim \check{H}^q(X;\Omega_X^p)$

τότε:

- $b_r(X)=\sum_{p+q=r} h^{p,q}(X)$
- $h^{p,q}(X)=h^{q,p}(X)$; $h^{p,p}(X)\geq 1$, $\forall p,\ p\le n$.
- $b_{2s+1}(X)\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, επειδή $b_{2s+1}(X)=2\left[\sum_{p=0}^{s} h^{p,2s+1-p}(X)\right]$

Για X ένα συμπαγές μιγ. πολύπτυγμα ισχύει:

X προβολικό $\Rightarrow$ X Kähler.

• Υπάρχουν – σε αντίθεση με την περίπτωση των συμπ. επιφανειών Riemann – συμπαγή μιγαδικά πολυπτύγματα διαστάσεως 2 («μιγαδικές επιφάνειες») οι οποίες <u>δεν</u> είναι Kähler και κατά συνέπειαν <u>δεν</u> είναι και προβολικά!

<u>Απλό παράδειγμα:</u> (Επιφάνεια Hopf)

Παίρνουμε την $S^3 := \{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$

Η

$$f: S^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$((z_1,z_2),t) \longmapsto (e^t z_1, e^t z_2)$$

είναι διαφορομορφισμός.

• Το $\mathbb{Z}$ δρα επί του γινομένου $S^3 \times \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\mathbb{Z} \times (S^3 \times \mathbb{R}) \longrightarrow S^3 \times \mathbb{R}$$
$$(m, ((z_1,z_2),t)) \longmapsto ((z_1,z_2), t+m)$$

Ο χώρος πηλίκων είναι $\quad S^3 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \underset{\text{διαφορ.}}{\approx} S^3 \times S^1$

• Το $\mathbb{Z}$ δρα αντιστοίχως επί του $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(m, (z_1,z_2)) \longmapsto (e^m z_1, e^m z_2)$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 \times \mathbb{R} & \approx & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & & \downarrow \text{πρ.} & & \downarrow \text{πρ.} \\ S^3 \times S^1 & \approx & (S^3 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} & \approx & X := (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\mathbb{Z} \end{array}$$

• $b_1(X) = b_1(S^3 \times S^1) = \underset{=1}{b_0(S^3)} \cdot \underset{=1}{b_1(S^1)} + \underset{=0}{b_1(S^3)} \cdot \underset{=1}{b_0(S^1)} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ X <u>δεν</u> μπορεί να'ναι Kähler

13

Riemann–Roch στη διάσταση n

X προβολικό πολύπτυχο$/_{\mathbb{C}}$ διαστάσεως n.

$$\begin{array}{l} E \;\; (rk = r) \\ \downarrow \pi \\ X \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad U \mapsto \mathcal{E}(U) := \Gamma(U, E)$$

$$c_t(E) := 1 + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \cdots + c_r(E)t^r = \prod_{j=1}^{r}(1+x_j t) \quad \overset{t=1}{\Rightarrow}$$

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_r(E) = \prod_{j=1}^{r}(1+x_j)$$

R-R:

$$\chi(X,\mathcal{E}) = \langle ch(E)\cdot td(T_X), [X]\rangle_{mod\, 2}$$

όπου $\chi(X,\mathcal{E}) := \sum_{p\geq 0} (-1)^p \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^q(X;\mathcal{E})$

$$ch(E) := \sum_{j=1}^{r} e^{x_j} = \underbrace{r}_{ch_0(E)} + \underbrace{c_1(E)}_{ch_1(E)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(c_1^2(E) - 2c_2(E)\right)}_{ch_2(E)} + \underbrace{\tfrac{1}{6}\left(c_1^3(E) - 3c_1c_2(E) + 3c_3(E)\right)}_{ch_3(E)} + \cdots$$

$$td(E) := \prod_{j=1}^{r}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\right) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}\left(c_1^2(E)+c_2(E)\right) + \frac{1}{24}c_1(E)c_2(E) + \cdots$$

(Εδώ $E = T_X$!)

Παράδειγμα: $n=1, r=1$: $\chi(X,\mathcal{E}) = \dim_{\mathbb{C}}\check{H}^0(X;\mathcal{E}) - \dim_{\mathbb{C}}\check{H}^1(X;\mathcal{E}) =$

$$= \langle (1+c_1(E))(1+\tfrac{1}{2}c_1(T_X)), [X]\rangle_{mod\,2} = \langle c_1(E) + \tfrac{1}{2}c_1(T_X), [X]\rangle =$$

$$= \underset{deg(E)}{\underset{\parallel}{\langle c_1(E), [X]\rangle}} + \underset{\tfrac{1}{2}\chi(X) = \tfrac{1}{2}(2-2g) = 1-g}{\underset{\parallel}{\tfrac{1}{2}\langle c_1(T_X), [X]\rangle}}$$