Αντίγραφα Σημειώσεων και Διαφανειών από τις Διαλέξεις μου στο Σεμινάριο τού Β΄ Τομέα τού Μαθηματικού Τμήματος τού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Μέρος Α΄)

- Σύνοψη κάποιων θεμελιωδών εννοιών από τη Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μίας Μεταβλητής

- Επιφάνειες Riemann

- Ομοτοπία δρόμων και θεμελιώδης ομάδα

- Τοπολογική ταξινόμηση επιφανειών Riemann

- Επικαλυπτικές απεικονίσεις και σημεία διακλαδώσεως

- Ο τύπος των Riemann και Hurwitz

- Διαφορικές μορφές και ολοκλήρωση στα πλαίσια τής Θεωρίας Επιφανειών Riemann

- Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

Σύνοψη κάποιων θεμελιωδών εννοιών από την Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μίας Μεταβλητής

- **1.1. Σειρές και δυναμοσειρές. Τρόποι συγκλίσεως.**

ομοιόμορφη σύγκλιση $\Rightarrow$ τοπικά ομοιόμορφη σύγκλιση $\Rightarrow$ σημειακή σύγκλιση

$\Updownarrow$

συμπαγής σύγκλιση

- **1.2. Επικαμπύλια ολοκληρώματα**

Για καμπύλες $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ και συνεχείς συναρτήσεις $f:X=\gamma([a,b])\to\mathbb{C}$:

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

- **1.3. Ολόμορφες συναρτήσεις**

Μια συνάρτηση $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, U ανοικτό, είναι **ολόμορφη** σε ένα σημείο $z_0\in U$ όταν η f είναι μιγαδικώς διαφορίσιμη στο z_0 $\Leftrightarrow$ η $f=u+iv$ είναι πραγματικώς διαφορίσιμη στο z_0 και πληροί τις διαφορικές εξισώσεις των Cauchy και Riemann :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$\Leftrightarrow$ η f είναι αναπτύξιμη (γύρω από το z_0) ως μια δυναμοσειρά (η οποία συγκλίνει σε έναν ανοικτό δίσκο που περιέχεται στο U).

- **1.4. Θεωρήματα ταυτότητας, διατήρησης περιοχών, αρχή μεγίστου, εκτιμήσεις κατα Cauchy, θεώρημα Liouville κ.α.**

- **1.5. Δυναμοσειρές Laurent**

- **1.6. Θέσεις μηδενισμού και πόλοι ολόμορφων συναρτήσεων, αιρόμενα και ουσιαστικά ιδιώματα (ανώμαλα σημεία)**

- **1.7. Δείκτης στροφής και ολοκληρωτικά υπόλοιπα**

- **1.8. Μερόμορφες συναρτήσεις**

Επιφάνειες Riemann

• 2.1. Μιγαδικοί χάρτες και μιγαδικές δομές

Εστω X ένα διδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα. Ένας **μιγαδικός χάρτης** επί του X αποτελείται από ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset X$ κι έναν ομοιομορφισμό $\varphi: U \to V$ επί ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{C}$. Δυό χάρτες $\varphi: U_i \to V_i, i=1,2$ επί του X ονομάζονται **αμφιολομόρφως συμβιβαστοί** όταν η απεικόνιση μεταβιβάσεως

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

είναι αμφιολόμορφη. Ένας **μιγαδικός άτλαντας** επί του X είναι ένα σύστημα ανά δύο αμφιολομόρφως συμβιβαστών χαρτών $\mathfrak{U} = \{\varphi: U_i \to V_i, i \in I\}$ τέτοιο, ώστε $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Δύο μιγαδικοί άτλαντες $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ λέγονται **αμφιολομόρφως συμβιβαστοί** όταν κάθε χάρτης του $\mathfrak{U}$ είναι αμφιολομόρφως συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathfrak{U}'$. (Η συμβιβαστότητα αυτή ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας). Μια **μιγαδική δομή** επί ενός διδιαστάτου τοπολογικού πολυπτύγματος είναι μια κλάση ισοδυναμίας αμφιολομόρφως συμβιβαστών μιγαδικών ατλάντων.

• 2.2. Ορισμός και παραδείγματα επιφανειών Riemann

Μια **επιφάνεια Riemann** είναι ένα ζεύγος αποτελούμενο από ένα συνεκτικό διδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα μαζί με μια μιγαδική δομή επ' αυτού.

Παραδείγματα μη συμπαγών : $\mathbb{C}$, ανοικτά συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ κ.α.

Παραδείγματα συμπαγών : Η προβολική μιγαδική ευθεία $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$, ο μιγαδικός 1-τόρος $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, λείες υπερεπιφάνειες στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ή, πιο γενικά, μια λεία 1-διάστατη πλήρης διατομή στό $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, χώροι πηλίκων κ.α.

• 2.3. Ολόμορφες απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών Riemann

Έστω Y ένα ανοικτό υποσύνολο μιας επιφάνειας Riemann X. Μια συνάρτηση $f: Y \to \mathbb{C}$ λέγεται **ολόμορφη** όταν για κάθε χάρτη $\varphi: U \to V$ επί του X, η σύνθετη συνάρτηση $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη επί του ανοικτού συνόλου $\varphi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$. Αντιστοίχως, μια συνεχής απεικόνιση $f: X \to Y$ μεταξύ επιφανειών Riemann λέγεται **ολόμορφη**, όταν για κάθε ζεύγος χαρτών $\varphi_1: U_1 \to V_1$ επί του X και $\varphi_2: U_2 \to V_2$ επί του Y με $f(U_1) \subset U_2$, η απεικόνιση $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}: V_1 \to V_2$ είναι ολόμορφη υπό την συνήθη έννοια. f καλείται **αμφιολόμορφη** όταν f είναι αμφιμονότιμη και f, f^{-1} ολόμορφες.

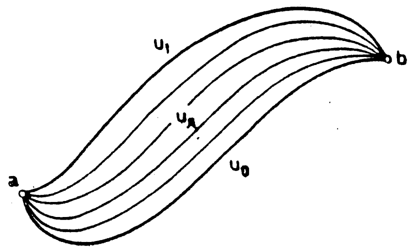
Ομοτοπία δρόμων (= καμπυλών) και θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X)$

- **Ομοτοπία δρόμων**

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $a, b \in X$. Δυο δρόμοι (ή καμπύλες) $u, v: I \to X$ από το a στο b λέγονται **ομοτοπικές** (συμβολισμός: $u \sim v$) όταν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $A: I \times I \to X$ που έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $A(t,0) = u(t),\ A(t,1) = v(t),\ \forall t, t \in I$ (ii) $A(0,s) = a,\quad A(1,s) = b, \forall s, s \in I$.

Ουσιαστικώς η οικογένεια $(u_s)_{0 \le s \le 1}$ οριζόμενη μέσω του τύπου $u_s(t) := A(t,s)$ εκφράζει μια συνεχή παραμόρφωση της καμπύλης u που τη μεταφέρει στην καμπύλη v.



ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. "$\sim$" ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου όλων των δρόμων που ξεκινούν από το σημείο a και περατούνται στο σημείο b.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2. Εάν a, b, c είναι σημεία ενός τοπολογικού χώρου X, $u: I \to X$ μια καμπύλη από το a στο b, και $v: I \to X$ μια καμπύλη από το b στο c, τότε ορίζεται η **συντιθέμενη καμπύλη** $u \bullet v$ από το a στο c:

$$(u \bullet v)(t) := \begin{cases} u(2t) & , \quad 0 \le t \le \tfrac{1}{2} \\ v(2t-1) & , \quad \tfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

καθώς και η **αντίστροφη καμπύλη** u^- της u από το b στο a : $u^-(t) := u(1-t), \forall t, t \in I$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. Εάν a, b, c, d είναι σημεία ενός τοπολογικού χώρου X, και $u, v, w: I \to X$ καμπύλες τέτοιες, ώστε $u(0) = a, u(1) = v(0) = b, v(1) = w(0) = c, w(1) = d$, u_0 η ταυτοτική καμπύλη $= a$ και v_0 η ταυτοτική καμπύλη $= b$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $u_0 \bullet u \sim u \sim u \bullet v_0$, (ii) $u \bullet u^- \sim u_0$ και (iii) $(u \bullet v) \bullet w \sim u \bullet (v \bullet w)$.

- **Θεμελιώδης ομάδα**

Το σύνολο $\pi_1(X,a)$ των κλάσεων ομοτοπίας των κλειστών καμπυλών του X με σημείο αρχής και τέλους το a εφοδιάζεται με τη δομή της ομάδας μέσω της σύνθεσης "$\bullet$" και ονομάζεται η **θεμελιώδης ομάδα** του X με **σημείο βάσης** το a. (Όταν ο X είναι δρομικά συνεκτικός, τότε $\pi_1(X,a)$ δεν εξαρτάται από το σημείο βάσης και συμβολίζεται απλώς ως $\pi_1(X)$).

Τοπολογική ταξινόμηση

συμπαγών επιφανειών Riemann

- **Τοπολογική ταξινόμηση μέσω της εισαγωγής της εννοίας του "τοπολογικού γένους" $g = g(X)$ μίας επιφάνειας Riemann X.**

Ένα διδιάστατο (συνεκτικό) τοπολογικό πολύπτυγμα δίχως σύνορο (καλούμενο επίσης "τοπολογική επιφάνεια"), ονομάζεται **τριγωνοποιήσιμο** όταν είναι ομοιομορφικό με τον υποκείμενο τοπολογικό χώρο ενός διδιάστατου πεπερασμένου μονοπλεκτικού συμπλέγματος (ή "μονοπλεκτικού 2-πολυέδρου"). Τριγωνοποιήσεις ορισμένων τοπολογικών επιφανειών είχαν μελετηθεί ήδη από τους J. B. Listing (1862) και A. F. Möbius (1865). Το έτος 1924 ο T. Rado απέδειξε πως κάθε συμπαγής τοπολογική επιφάνεια (καλουμένη επίσης "κλειστή επιφάνεια") είναι τριγωνοποιήσιμη. Η πλήρης όμως τοπολογική ταξινόμηση **όλων** των συμπαγών διδιαστάτων τοπολογικών πολυπτυγμάτων κατέστη δυνατή μετά απο τις εργασίες των M. Dehn, P. Heegaard [D-He] (το 1907) και F. Levi [Levi] (το 1929).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Κάθε συμπαγής τοπολογική επιφάνεια X ταξινομείται μέσω μιας τοπολογικής αναλλοίωτης που ονομάζεται* **το γένος της** $g = g(X) \in \mathbb{N}_0$. *Πιο συγκεκριμένα:*

(i) *Εάν η X είναι προσανατολίσιμη (δηλ. εάν υπάρχει μια τριγωνοποίησή της με τρίγωνα συμφυώς προσανατολίσιμα), τότε οφείλει να είναι ομοιομορφική με την F_g, για κάποιο $g \in \mathbb{N}_0$, όπου η F_g είναι η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ εφοδιασμένη με g "χερούλια" (ή, ισοδυνάμως, το συνεκτικό άθροισμα της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ και g "τόρων"). Η F_g, $g \geq 1$, προκύπτει εναλλακτικώς από ένα "πολυγωνικό μοντέλο" με $4g$ πλευρές, μέσω των ταυτίσεων των υποδεικνυομένων στο σχ.* **1.** *(και των $2g$ επιγραφικών βοηθημάτων $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$), κι έχει θεμελιώδη ομάδα*

$$\pi_1(F_g) \cong \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g \;\middle|\; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \right\rangle$$

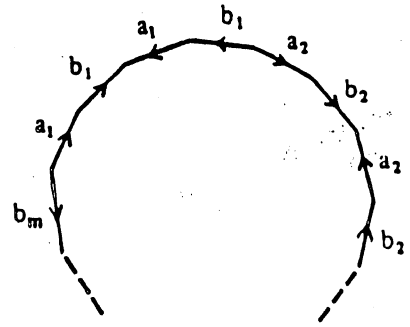
(με αβελιανοποιητή $\pi_1(F_g)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$).

(ii) *Εάν η X είναι μη προσανατολίσιμη, τότε $X \approx N_g$, $g \geq 1$, όπου η N_g είναι η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ εφοδιασμένη με g "σταυρωτά σκουφιά" (ή, ισοδυνάμως, το συνεκτικό άθροισμα της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ και g διδιαστάτων πραγματικών προβολικών χώρων $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$). Η N_g, με τη σειρά της, προκύπτει κι αυτή από ένα "πολυγωνικό μοντέλο" με $2g$ πλευρές, μέσω των ταυτίσεων των υποδεικνυομένων στο σχ.* **2.** *(και των g επιγραφικών βοηθημάτων $a_1, a_2, \ldots, a_g$), κι έχει θεμελιώδη ομάδα*

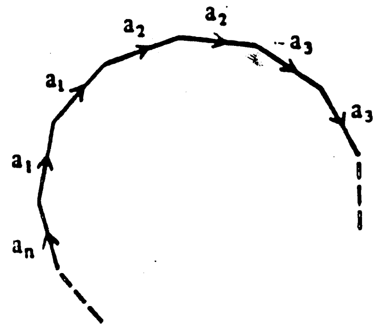
$$\pi_1(N_g) \cong \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_g \;\middle|\; a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 = 1 \right\rangle$$

(με αβελιανοποιητή $\pi_1(N_g)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$).

Απόδειξη. Παραπέμπω π.χ. στα βιβλία [Kinsey], [Fulton, σ. 233-241] και [Ossa, σ. 104-115]■



σχ. 1



σχ. 2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 3.2. (i) Το συνεκτικό άθροισμα $S_1 \# S_2$ δυο επιφανειών S_1 και S_2 ορίζεται ως εξής: Αποκόπτουμε έναν μικρό δίσκο απο καθεμιά των S_1, S_2 και επικολλούμε τις συνοριακές περιφέρειες αυτών των δίσκων.

(ii) Η σφαίρα με ένα σταυρωτό σκουφί κατασκευάζεται ως εξής: Τρυπάμε τη σφαίρα (αποκόπτοντας έναν δίσκο) και κλείνουμε την τρύπα με μια "ταινία Möbius" κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το σύνορο του δίσκου να ταυτισθεί με το σύνορο της ταινίας.

(iii) Επειδή οι συμπαγείς επιφάνειες Riemann είναι κλειστές επιφάνειες εφοδιασμένες με μιγαδική δομή, είναι προσανατολίσιμες, και κατά συνέπειαν ταξινομούνται τοπολογικώς βάσει του θεωρήματος 4.1. (i).

(iv) Υπάρχει ένα θεώρημα αντίστοιχο του 4.1. που ταξινομεί διδιάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα με σύνορο. (Τα κλασσικά παραδείγματα είναι ο "κύλινδρος" για τα προσανατολίσιμα και η "φιάλη του Klein" για τα μη προσανατολίσιμα). Ουσιαστικώς κανείς θεωρεί και πάλι συνεκτικά αθροίσματα τόρων ή/και διδιαστάτων προβολικών χώρων και τους αφαιρεί έναν πεπερασμένο αριθμό δίσκων.

- **Η χαρακτηριστική Euler-Poincaré $\chi(X)$ μίας συμπαγούς επιφανείας Riemann X ως συνάρτηση του $g(X)$.**

Έστω X ένα τριγωνοποιήσιμο διδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα. Η χαρακτηριστική Euler-Poincaré $\chi(X)$ του X ισούται με το εναλλάσον άθροισμα

$$\#\,(\text{κορυφές της } \Sigma) - \#\,(\text{ακμές της } \Sigma) + \#\,(\text{τρίγωνα της } \Sigma)$$

όπου Σ συμβολίζει μια τριγωνοποίηση του X.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. (i) *$\chi(X)$ είναι καλώς ορισμένη, δηλ. ανεξάρτητη της επιλογής της Σ.*

(ii) *Εάν X είναι μια συμπαγής επιφάνεια Riemann, τότε*

$$\boxed{\chi(X) = 2 - 2g(X)} \tag{4.1}$$

Επικαλυπτικές απεικονίσεις και σημεία διακλαδώσεως.

- **Διακλαδωμένες κι αδιακλάδωτες επικαλυπτικές απεικονίσεις**

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. *Έστωσαν X και Y δύο επιφάνειες Riemann. Κάθε μή σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση $f: X \to Y$ είναι ανοικτή (δηλ. απεικονίζει ανοικτά υποσύνολα σε ανοικτά) και διακριτή (δηλ. οι ίνες της $f^{-1}(y)$ για κάθε $y \in Y$ είναι εφοδιασμένες με τη διακριτή τοπολογία).*

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.2, σελ. 20]. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2. Έστωσαν X και Y δυο επιφάνειες Riemann και $f: X \to Y$ μια μη σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση. Ένα σημείο $x \in X$ καλείται **σημείο διακλαδώσεως** της f, όταν δεν υπάρχει καμμιά γειτονιά U του x, τέτοια ώστε η $f|_U$ να είναι 1-1. Η f λέγεται **αδιακλάδωτη** όταν δεν περιέχει κανένα σημείο διακλαδώσεως εντός του X.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3. *Έστωσαν X και Y δύο επιφάνειες Riemann και $f: X \to Y$ μια μή σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση. Η f είναι αδιακλάδωτη εάν και μόνον εάν αποτελεί έναν τοπικό ομοιομορφισμό, δηλ. εάν και μόνον εάν για κάθε σημείο $x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά U του x, τέτοια ώστε να απεικονίζεται μέσω της f ομοιομορφικώς επί ενός ανοικτού συνόλου V του Y.*

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.4, σελ. 21]. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4. Έστωσαν X και Y δυο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Η f λέγεται **επικαλυπτική απεικόνιση** (ή απλώς μια **επικάλυψη**) όταν για κάθε σημείο $y \in Y$ υπάρχει μια ανοιχτή γειτονιά V του y το αρχέτυπο της οποίας γράφεται ως ένωση $f^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} U_j$ ξένων (μεταξύ τους) ανοικτών υποσυνόλων $\{U_j : j \in J\}$ του X, έτσι ωστε οι περιορισμοί για κάθε $j \in J$ να είναι ομοιομορφισμοί. (Μια επικαλυπτική απεικόνιση είναι τοπικός ομοιομορφισμός αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.)

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5. *Έστωσαν X και Y δύο τοπολογικοί χώροι Hausdorff, Y δρομικά συνεκτικός και $f: X \to Y$ μια επικαλυπτική απεικόνιση. Τότε γιά κάθε ζευγάρι σημείων $y_1, y_2 \in Y$ οι ίνες $f^{-1}(y_1)$ και $f^{-1}(y_2)$ έχουν την ίδια πληθικότητα. Ιδιαιτέρως, εάν το X είναι μη κενό, τότε η απεικόνιση f είναι επί.* (Η κοινή αυτή πληθικότητα $f^{-1}(y), y \in Y$, καλείται **το πλήθος των φύλλων της** f.)

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.16, σελ. 26]. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6. Ένας **τοπικά συμπαγής χώρος** είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff στον οποίο κάθε σημείο έχει μιά συμπαγή γειτονιά. Μια συνεχής απεικόνιση $f: X \to Y$ μεταξύ δύο τοπικά συμπαγών χώρων ονομάζεται **γνήσια**, όταν τα αρχέτυπα όλων των συμπαγών συνόλων είναι συμπαγή σύνολα. (Αυτό είναι π.χ. πάντα αληθές όταν το ίδιο το X είναι συμπαγές). Σημειωτέον οτι κάθε γνήσια απεικόνιση είναι κλειστή.

ΛΗΜΜΑ 5.7. *Έστωσαν X και Y δύο τοπικά συμπαγείς χώροι και $f: X \to Y$ μία γνήσια, διακριτή απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε σημείο $y \in Y$, το σύνολο $f^{-1}(y)$ είναι πεπερασμένο.*

(ii) *Έστω $y \in Y$ και U μια γειτονιά του $f^{-1}(y)$. Τότε υπάρχει μια γειτονιά του y τέτοια, ώστε $f^{-1}(V) \subset U$.*

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.21, σελ. 28]. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.8. *Έστωσαν X και Y δύο τοπικά συμπαγείς χώροι και $f: X \to Y$ ένας γνήσιος τοπικός ομοιομορφισμός. Τότε η f είναι μια επικαλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.22, σελ. 29]. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.9. *Έστωσαν X και Y δύο επιφάνειες Riemann και $f: X \to Y$ μια μή σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση. Έστω $x \in X$ και $y := f(x)$. Τότε για κάθε γειτονιά U του x υπάρχουν γειτονιές $U' \subset U$ του x και W του y τέτοιες, ώστε για κάθε σημείο $w \in W$ με $w \neq y$ το σύνολο $f^{-1}(w) \cap U'$ αποτελείται από k στοιχεία.* (Ο αριθμός αυτός k προέρχεται από την πρόταση που αφορά την τοπική μορφή της ολόμορφης απεικόνισης f και χαρακτηρίζεται ως η **πολλαπλότητα** με την οποία η f προσλαμβάνει την τιμή y στο σημείο x).

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.24, σελ. 29]. ■

Ο τύπος των Riemann και Hurwitz ([Hur1]).

Τοπολογική απόδειξη και γεωμετρικές εφαρμογές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1. Έστωσαν X και Y δύο επιφάνειες Riemann και $f: X \to Y$ μία γνήσια, μη σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση. Το σύνολο A των σημείων διακλαδώσεως της f αποτελεί ένα κλειστό υποσύνολο του X. Επειδή η f είναι γνήσια, η εικόνα του $S := f(A)$ είναι ένα κλειστό και διακριτό υποσύνολο του Y. Το σύνολο S καλείται **το σύνολο των κρισίμων τιμών** της f. Ορίζουμε $Y' := Y \setminus S$ και

$$X' := X \setminus f^{-1}(S) \subseteq X \setminus A \qquad \left(f^{-1}(S) = f^{-1}(f(A)) \supseteq A\right).$$

Ο περιορισμός $f|_{X'}: X' \to Y'$ είναι μία γνήσια, αδιακλάδωτη ολόμορφη επικαλυπτική απεικόνιση. Σύμφωνα με το λήμμα 5.7.(i) και τα θεωρήματα 5.5 και 5.8, η $f|_{X'}$ έχει έναν **καλώς ορισμένο** πεπερασμένο αριθμό φύλλων n. Αυτό σημαίνει πως κάθε τιμή $y \in Y'$ προσλαμβάνεται ακριβώς n-φορές. Προκειμένου να γενικεύσουμε αυτήν την ιδιότητα **και** για τις κρίσιμες τιμές $y \in S$ της f, είμαστε υποχρεωμένοι να εισαγάγουμε καταλλήλως την **προσμέτρηση με πολλαπλότητα**. Αν λοιπόν με $\upsilon(f;x)$ συμβολίσουμε την πολλαπλότητα με την οποία η f προσλαμβάνει την τιμή $f(x)$ στο σημείο $x \in X$ (πρβλ. θεώρημα 5.9.), τότε θα λέμε πως η f επί του X **προσλαμβάνει την τιμή** $y \in Y$ **μετρουμένη με πολλαπλότητα** m-φορές όταν

$$\boxed{m = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \upsilon(f;x)}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. *Έστωσαν X και Y δύο επιφάνειες Riemann και $f: X \to Y$ μία γνήσια, μη σταθερή ολόμορφη απεικόνιση. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε η f να προσλαμβάνει* ***κάθε*** *τιμή από το Y μετρουμένη με πολλαπλότητα ακριβώς n-φορές.* (Αυτός ο αριθμός n δεν είναι κανείς άλλος από τον πληθικό αριθμό των φύλλων του περιορισμού $f|_{X'}: X' \to Y'$ και χαρακτηρίζεται συνήθως ως **ο βαθμός επικαλύψεως** της f).

Απόδειξη. Βλέπε [Forster, 4.24, σελ. 29]. ∎

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3. Έστωσαν X και Y δύο συμπαγείς επιφάνειες Riemann και $f: X \to Y$ μία μη σταθερή ολόμορφη απεικόνιση. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε τον αριθμό

$$\boxed{b(f;x) := \upsilon(f;x) - 1}$$

ως **την τάξη διακλαδώσεως** της f στο σημείο x. Ισχύει $b(f;x)=0$ ακριβώς όταν η f είναι αδιακλάδωτη στο x. Επειδή το X είναι συμπαγές, υπάρχουν μόνο πεπερασμένα σημεία $x\in X$ για τα οποία $b(f;x)\neq 0$.

Επομένως η επονομαζόμενη **συνολική τάξη διακλαδώσεως** της f,

$$\boxed{b(f):=\sum_{x\in X} b(f;x)}$$

είναι καλώς ορισμένη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.4. (Ο τύπος των Riemann και Hurwitz) *Έστω $f:X\to Y$ μία μη σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ δύο συμπαγών επιφανειών Riemann. Έστω n ο βαθμός επικαλύψεως της f. Τότε ισχύει η εξής σχέση η οποία διασυνδέει το γένος του επικαλύπτοντος χώρου X με εκείνο του υποκειμένου χώρου Y :*

$$2g(X)-2=n(2g(Y)-2)+\sum_{x\in X}\left[\upsilon(f;x)-1\right]=n(2g(Y)-2)+b(f),$$

δηλαδή

$$\boxed{g(X)=\frac{b(f)}{2}+n(g(Y)-1)+1} \tag{6.1}$$

Πρώτη Απόδειξη. Έστω $S:=\{f(x)\,|\,x\in X \text{ και } b(f;x)>0\}$ το σύνολο των κρίσιμων τιμών της f. Επειδή το S είναι πεπερασμένο, μπορεί κανείς να τριγωνοποιήσει τον τοπολογικό χώρο Y κατα τέτοιον τρόπο, ώστε κάθε σημείο του S να αποτελεί κορυφή της επιλεγμένης τριγωνοποιήσεως. (Η τριγωνοποίηση μπορεί βεβαίως να έχει και άλλες διαφορετικές κορυφές). Ας υποθέσουμε πως μια τέτοια τριγωνοποίηση έχει ακριβώς κ_Y κορυφές, α_Y ακμές και τ_Y τρίγωνα (έδρες). Επιπλέον ας θεωρήσουμε την τριγωνοποίηση του τοπολογικού χώρου X την επαγόμενη από αυτήν μέσω της f, και ας υποθέσουμε πως έχει ακριβώς κ_X κορυφές, α_X ακμές και τ_X τρίγωνα. Κατ' αρχήν θα πρέπει να παρατηρήσουμε πως το σύνολο των κορυφών της τριγωνοποιήσεως του X περιέχει όλα τα σημεία διακλαδώσεως της f. Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει κανένα σημείο διακλαδώσεως της f υπεράνω των "γενικών" σημείων καθενός τριγώνου (αντιστοίχως, καθεμιάς ακμής) της τριγωνοποιήσεως. Επομένως ισχύει:

$$\tau_X=n\tau_Y \quad \text{και} \quad \alpha_X=n\alpha_Y\,. \tag{6.2}$$

Έστω τώρα y μια κορυφή της τριγωνοποιήσεως του Y. Το πλήθος $\#(f^{-1}(y))$ των αρχετύπων του y εντός του X μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

$$\#(f^{-1}(y))=\sum_{x\in f^{-1}(y)}1=n+\sum_{x\in f^{-1}(y)}\left[1-\upsilon(f;x)\right]. \tag{6.3}$$

Γι αυτό το λόγο ο συνολικός αριθμός των αρχετύπων των κορυφών της τριγωνοποιήσεως του Y ισούται με κ_X, όπου

$$\kappa_X = \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των κορυφών } y \\ \text{της τριγωνοποιήσεως του } Y}} \left(n + \sum_{x \in f^{-1}(y)} \left[1 - \upsilon(f;x) \right] \right) = \qquad \text{(από την (6.3))}$$

$$= n\kappa_Y - \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των κορυφών } y \\ \text{της τριγωνοποιήσεως του } Y}} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \left[\upsilon(f;x) - 1 \right] \right) =$$

$$= n\kappa_Y - \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των κορυφών } x \\ \text{της επαγομένης τριγωνοποιήσεως του } X}} b(f;x) \tag{6.4}$$

Βάσει της (3.1) και της (6.4) παίρνουμε

$$2g(X) - 2 = -\chi(X) = -\kappa_X + \alpha_X - \tau_X =$$

$$= -n\kappa_Y + \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των κορυφών } x \\ \text{της επαγομένης τριγωνοποιήσεως του } X}} b(f;x) + n\tau_Y - n\alpha_Y = \qquad \text{(από την (6.2))}$$

$$= -n\chi(Y) + \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των κορυφών } x \\ \text{της επαγομένης τριγωνοποιήσεως του } X}} b(f;x) =$$

$$= -n(2g(Y) - 2) + \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των κορυφών } x \\ \text{της επαγομένης τριγωνοποιήσεως του } X}} b(f;x) = -n(2g(Y) - 2) + b(f).$$

Δεύτερη απόδειξη. Γράφουμε τον Y ως ένωση $Y = Y' \cup Y''$, όπου Y' συμβολίζει την ένωση αρκούντως μικρών κλειστών δίσκων γύρω από τα κρίσιμα σημεία και $Y'' = \overline{Y \setminus Y'}$ την τοπολογική κλειστή θήκη του συμπληρώματος $Y \setminus Y'$ του Y' ως προς τον Y. Προφανώς έχουμε

$$\chi(Y) = \chi(Y') + \chi(Y'') - \chi(Y' \cap Y''), \text{ όπου } Y' \cap Y'' = \mathbb{S}^1 \coprod \mathbb{S}^1 \coprod \cdots \coprod \mathbb{S}^1 \coprod \mathbb{S}^1.$$

Επειδή $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$ έχουμε $\chi(Y' \cap Y'') = 0$, δηλαδή

$$\chi(Y) = \chi(Y') + \chi(Y'') \tag{6.5}$$

Έστω τώρα $X = X' \cup X''$ η "ανύψωση" της παραπάνω διασπάσεως ($X' = f^{-1}(Y')$ και $X'' = f^{-1}(Y'')$). Αναλόγως δείχνει κανείς οτι ισχύει

$$\chi(X) = \chi(X') + \chi(X'') \tag{6.6}$$

Απ' την άλλη μεριά έχουμε

$$\chi(X'') = n\,\chi(Y'') \tag{6.7}$$

όπου

$$\chi(X') = \sum_{x\in X : b(f;x)>0} \chi(\mathbb{D}^2) \tag{6.8}$$

και

$$\chi(Y') = \sum_{y\in Y : \exists\, x\in X \text{ με } y=f(x) \text{ και } b(f;x)>0} \chi(\mathbb{D}^2)\ . \tag{6.9}$$

Από τις σχέσεις (6.8) και (6.9) και την ισότητα $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$ έπεται

$$n\,\chi(Y') = \chi(X') + \sum_{x\in X} b(f;x) = \chi(X') + l(f) \tag{6.10}$$

διότι $\sum_{x\in X : f(x)=y} \left(b(f;x)+1\right) = n$. Τελικώς από τις (6.10), (6.5), (6.6) και (6.7) παίρνουμε

$$\chi(X) = n\,\chi(Y) - b(f),$$

η οποία οδηγεί στην (6.1).

Τρίτη απόδειξη. Αυτή μπορεί να γίνει μέσω διαφορικών μορφών (αφού κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει την ισότητα $g(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega_X)$) αλλά προς το παρόν θα την παραλείψουμε. (Βλ. [Forster, σελ. 140]). ■

- **Πρώτη εφαρμογή του τύπου Riemann-Hurwitz : Προσδιορισμός του τοπολογικού γένους μιας λείας υπερεπιφάνειας βαθμού d εντός του διδιάστατου προβολικού μιγαδικού χώρου $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.**

Έστω $C = \left\{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \;\middle|\; F(z_0, z_1, z_2) = 0\right\}$ μια ανάγωγη υπερεπιφάνεια εντός του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ βαθμού $\deg(F) = d$. Η C είναι λεία εάν και μόνον εάν το σύνολο

$$\left\{ P \in C \;\middle|\; \frac{\partial F}{\partial z_0}\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial z_1}\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial z_2}\Big|_P = 0 \right\}$$

είναι κενό. Σε αυτήν την περίπτωση η C αποτελεί μια συμπαγή επιφάνεια Riemann και η εφαπτομένη της C σε ένα σημείο $P \in C$ δίνεται από την εξίσωση :

$$\sum_{i=0}^{2} z_i \,\frac{\partial F}{\partial z_i}\Big|_P = 0\ .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.5. Αν $[z_0 : z_1 : z_2]$ είναι ένα σύστημα ομογενών συντεταγμένων του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, τότε κάθε ευθεία L του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ορίζεται μέσω μιας εξισώσεως $\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0$, όπου το $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ είναι μοναδικό (ως προς πολλαπλασιασμό με βαθμωτό παράγοντα). Εκλαμβάνοντας το $[\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2]$ ως σημείο του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, μπορούμε να ορίσουμε μιαν απεικόνιση $L \mapsto [\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2]$ η οποία επάγει μια 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ του συνόλου $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})^{\vee}$ όλων των ευθειών του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ και των σημείων του ιδίου του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Το $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})^{\vee}$ μπορεί επομένως κι αυτό να θεωρηθεί ως ένα προβολικό επίπεδο, κι ονομάζεται ιδιαιτέρως το **δυϊκό προβολικό επίπεδο** του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Εάν $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ είναι μια αλγεβρική καμπύλη, τότε -κατ' αντιστοιχίαν- η

$$C^{\vee} := \left\{ L \in (\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})^{\vee} \mid L \text{ εφαπτομένη της } C \text{ σε κάποιο σημείο} \right\}$$

καλείται η **δυϊκή καμπύλη** της C.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.6. *Έστω $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ μια ανάγωγη υπερεπιφάνεια βαθμού $\deg(F) = d$ και $C^{\vee} \subset (\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})^{\vee}$ η δυϊκή της καμπύλη. Τότε $C^{\vee}$ είναι επίσης ανάγωγη. Επιπρόσθετα, στην περίπτωση κατά την οποία η C είναι λεία, η $C^{\vee}$ είναι επίσης λεία, έχει βαθμό*

$$d^{\vee} = d(d-1) \tag{6.11}$$

και $d^{\vee}$ ισούται με το μέγιστο δυνατό πλήθος των εφαπτομένων οι οποίες μπορούν να αρθούν από ένα σημείο $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus C$ σε σημεία της C. (Το μέγιστο αυτό πλήθος των εφαπτομένων προσλαμβάνεται για "σχεδόν όλα" τα σημεία $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus C$).

Απόδειξη. Βλέπε [Br-Kn, σελ. 326]. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.7 (Ο τύπος του τοπολογικού γένους της C). *Έστω $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ μια ανάγωγη, λεία υπερεπιφάνεια βαθμού $\deg(F) = d$. Τότε το τοπολογικό της γένος δίνεται από τον τύπο:*

$$\boxed{g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}} \tag{6.12}$$

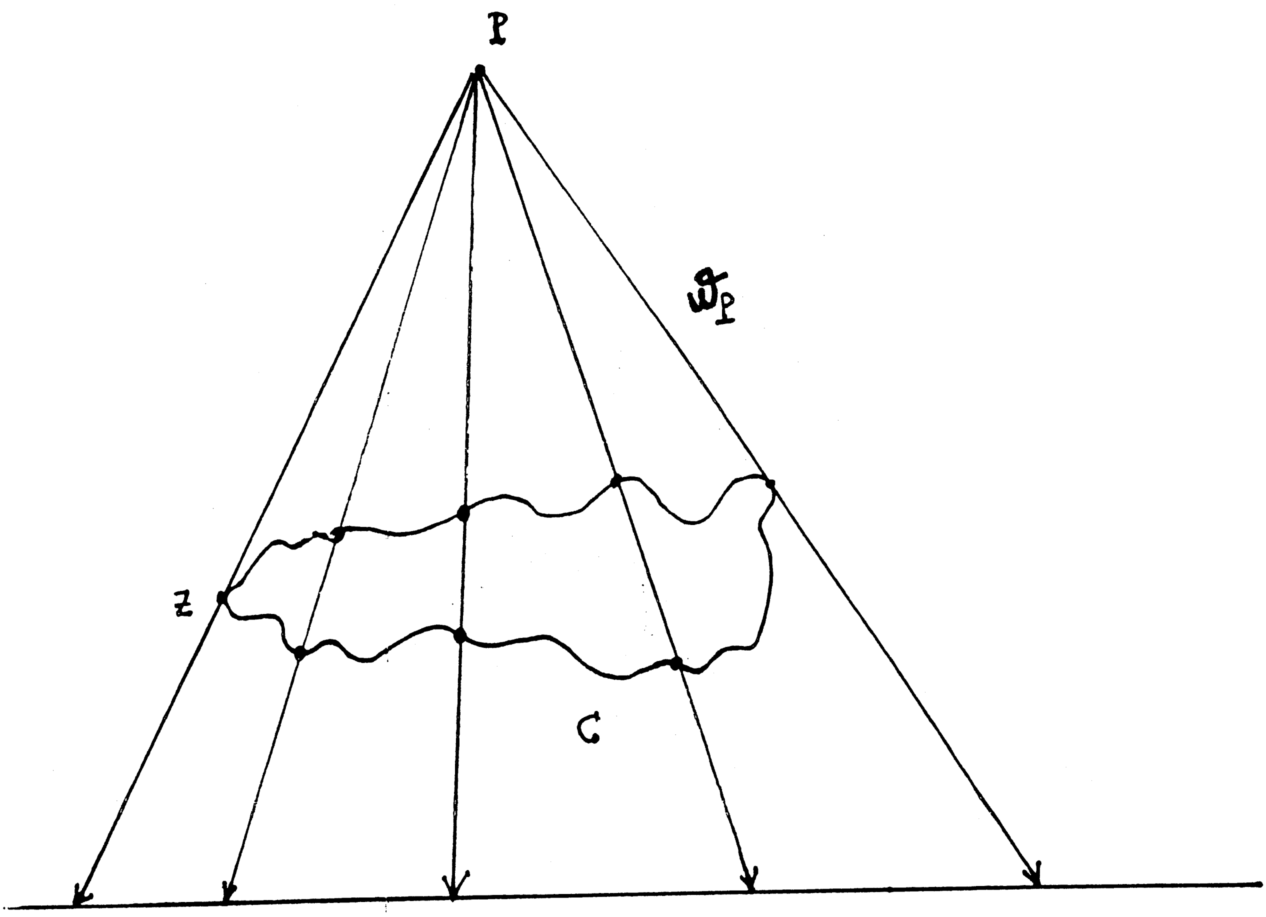
Απόδειξη. Για $d = 1$ η ίδια η C αποτελεί μια προβολική ευθεία. Μπορούμε επομένως από εδώ και στο εξής να υποθέσουμε οτι $d \geq 2$. Επιλέγουμε ένα σημείο $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus C$ και μια ευθεία $L \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε $P \notin L$. Κατόπιν ορίζουμε την ολόμορφη (προφανώς μη σταθερή) απεικόνιση προβολής $\varpi_P : C \to L$ της C επι της L με κέντρο προβολής το P. Αυτή η επικαλυπτική απεικόνιση διακλαδώνεται ακριβώς εκεί όπου οι ακτίνες προβολής αποτελούν εφαπτόμενες της καμπύλης C (βλέπε σχήμα 3). Εξάλλου ο βαθμός επικαλύψεως της ϖ_P ισούται με d, διότι κάθε "γενεσιακή" ευθεία προβολής τέμνει την C σε ακριβώς d σημεία. Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον τύπο των Riemann και Hurwitz (6.1) αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε τη συνολική τάξη διακλαδώσεως της ϖ_P. Από την πρόταση 6.6. έπεται οτι

$$b(\varpi_P) = \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των} \\ \text{ευθυγράμμων τμημάτων} \\ [P,z] \text{ που είναι εφαπτόμενα} \\ \text{της καμπύλης } C \text{ στο } z}} b(\varpi_P; z) = \sum_{\substack{\text{υπεράνω όλων των} \\ \text{ευθυγράμμων τμημάτων} \\ [P,z] \text{ που είναι εφαπτόμενα} \\ \text{της καμπύλης } C \text{ στο } z}} 1 = d^{\vee} .$$

Τώρα η (6.1) γράφεται

$$g(C) = \frac{b(\varpi_P)}{2} + d\big(g(L) - 1\big) = \frac{d^{\vee}}{2} - d + 1 .$$

Επειδή $g(L) = 0$ η (6.12) συνάγεται από την (6.11). ▫



Σχ.3

- **Δεύτερη εφαρμογή του τύπου Riemann-Hurwitz: Εκτίμηση της τάξης της ομάδας αυτομορφισμών μιας συμπαγούς επιφάνειας Riemann τοπολογικού γένους ≥ 2.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.8. (Θεώρημα Hurwitz [Hur2]) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρα ολομόρφως και αποτελεσματικώς επί μιας συμπαγούς επιφανείας Riemann X τοπολογικού γένους $g(X) \geq 2$. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$|G| \leq 84(g(X)-1)$$

(Η ομάδα αυτομορφισμών της X είναι πεπερασμένη! Ιδιαιτέρως δε ισχύει το εξής: αυτή μπορεί να λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή για την υπερελλειπτική επιφάνεια του Klein

$$X = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$$

τετάρτου βαθμού και τοπολογικού γένους 3.)

- **Τρίτη εφαρμογή του τύπου Riemann-Hurwitz: Θεώρημα Poncelet**

Παραπέμπω στην διάλεξη του κου Θωμά στο Σεμινάριο του χειμερινού εξαμήνου 1998-99.

Διαφορικές μορφές και ολοκλήρωση στα πλαίσια της Θεωρίας Επιφανειών Riemann

Έστω X μια επ. Riemann, $Y \subset X$ ανοικτό και $f : Y \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση με την εξής ιδιότητα:

(*) Για κάθε χάρτη $z = x + iy : U \to V \subset \mathbb{C}$ με $U \subset Y$ $\exists$ $\tilde{f} : V \to \mathbb{C}$ πραγματικώς διαφορίσιμη ως προς x, y (από την κλάση $\mathcal{E}^{\infty}$), τέτοια ώστε

$$f|_U = \tilde{f} \circ z.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ U & \xrightarrow{f|_U} & f(U) \\ {\scriptstyle z}\downarrow & & \\ \mathbb{C} \supset V & & \end{array}$$

(μονοσημάντως ορισμένη μέσω των f, z)

Τότε γιά κάθε σημείο $p \in X$ με $p \in U$ μπορούμε να ορίσουμε τους ακόλουθους διαφορικούς τελεστές:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(p) := \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{f}(z(p))$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(p) := \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{f}(z(p))$$

- Γιά U ανοικτό $\subset X$ ορίζουμε:

$$\mathcal{E}(U) := \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ διαφορίσιμη (δηλ. με (*))} \}$$

δ.χ. υπεράνω του $\mathbb{C}$ με διαφ. τελ.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$$ [ορισμός ανεξάρτητος των επιλεγομένων χαρτών].

- Εκτός των $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ ορίζει κανείς και τους τελεστές του κατά Wirtinger λογισμού:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

- Από τις συνθήκες Cauchy–Riemann παίρνουμε:

$$\mathcal{O}(U) := \{\text{ολόμορφες συναρτήσεις επί του } U\} = \operatorname{Ker}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

- Έστω $a \in X$ και $\mathcal{E}_a := \left(\dot{\bigcup\limits_{a\in U}} \mathcal{E}(U)\right)\Big/ \underset{a}{\sim}$ το "στέλεχος" του δράγματος $\mathcal{E}$ των φύτρων των διαφορίσιμων συναρτήσεων επί του X στο σημείο a.

ορσ Για $\underset{a}{U_1 \cap U_2} \neq \emptyset$: $\mathcal{E}(U_1) \ni f_1 \underset{a}{\sim} f_2 \in \mathcal{E}(U_2) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \exists\, W \text{ ανοικτό } {\subset U_1 \atop \subset U_2},\ a \in \\ f_1|_{W\cap U_1} = f_2|_{W\cap U_2} \end{array} \right.$

$\mathcal{E}(U) \ni f \mapsto [f] = (\text{η κλάση του mod } \underset{a}{\sim}) \in \mathcal{E}_a$

$\llcorner$ $\mathbb{C}$-δ.χ.

Ορίζουμε τώρα τους υπόχωρους $\mathfrak{M}_a^2 \subset \mathfrak{M}_a \subset \mathcal{E}_a$:

$$\mathfrak{M}_a := \{\varphi = [f] \in \mathcal{E}_a \mid f(a) = 0\}$$

$$\mathfrak{M}_a^2 := \left\{\varphi \in [f] \in \mathfrak{M}_a \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0\right\}$$

<u>Ορισμός</u>: (a) Ο <u>συνεφαπτόμενος χώρος του X</u> στο σημείο a ορίζεται ως χώρος πηλίκων:

$$\boxed{T_a^{(1)} := \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2}$$

(b) Εάν U είναι μια ανοικτή περιοχή του a, τότε ορίζουμε το <u>διαφορικό</u> $d_a f \in T_a^{(1)}$ <u>της f στο a</u> ως εξής:

$$\boxed{d_a f := (f - f(a)) \bmod \mathfrak{m}_a^2}.$$

<u>Πρόταση 1</u>: Έστω X μια επιφάνεια Riemann, $(U, z = x+iy)$ ένας χάρτης και $a \in U$. Τότε:

(a) $\{d_a x, d_a y\}$ και $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ αποτελούν βάσεις του διανυσματικού χώρου $T_a^{(1)}$ (δηλ. $\dim_{\mathbb{C}} T_a^{(1)} = 2$).

(b) Για $f \in \mathcal{E}(\bar{W})$, $W \subset U$:

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, d_a y = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\, d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\, d_a \bar{z}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο συνεφαπτόμενος χώρος $T_a^{(1)}$ γράφεται ως ευθύ άθροισμα:

$$\boxed{T_a^{(1)} = T_a^{(1,0)} \oplus T_a^{(0,1)}}$$

όπου:

$$\left.\begin{aligned} T_a^{(1,0)} &:= \mathbb{C}\, d_a z \\ T_a^{(0,1)} &:= \mathbb{C}\, d_a \bar{z} \end{aligned}\right\} \text{ οι χώροι των συνδιανυσμάτων } \underset{\text{τύπου}}{} \left\{\begin{aligned} &(1,0) \\ &(0,1) \end{aligned}\right.$$

Επίσης, όταν η f είναι διαφορίσιμη σε μία αν. περιοχή του a ορίζουμε:

$$\left.\begin{aligned} d'_a f &:= \frac{\partial f}{\partial z}(a)\, d_a z \in T_a^{*(1,0)} \\ d''_a f &:= \frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)\, d_a \bar z \in T_a^{*(0,1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad d_a f = d_a f' + d_a f''.$$

X επ. Riemann, Y ανοικτό $\subset X$.

- <u>Ορισμός</u>: (1) <u>Διαφορική μορφή βαθμού 1 (1-δ.μ.)</u>:

$$\omega : Y \longrightarrow \bigcup_{a\in Y} T_a^{*(1)} \quad : \quad \omega(a) \in T_a^{*(1)},\ \forall a \in Y.$$

Π.χ. για $f \in \mathcal{E}(Y)$: $(df)(a) := d_a f$.

(όταν $\omega(a) \in \begin{cases} T_a^{*(1,0)} \\ T_a^{*(0,1)} \end{cases}$, $\forall a$, $a\in Y \rightsquigarrow$ τότε η ω λέγεται <u>τύπου</u> $\begin{cases} (1,0) \\ (0,1) \end{cases}$.

(2) Για $(U, z = x+iy)$ χάρτη στο $U\cap Y$ μια 1-δ.μ. ω γράφεται:

$$\omega = f dx + g dy = \varphi dz + \psi d\bar z$$

όπου $f, g, \varphi, \psi : U\cap Y \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις (όχι αναγκαίως συνεχείς).

(i) ω λέγεται <u>διαφορίσιμη</u> $\Leftrightarrow \omega = f dz + g d\bar z$, $f, g \in \mathcal{E}(U\cap Y)$

(ii) ω λέγεται <u>ολόμορφη</u> $\Leftrightarrow \omega = f dz$ επί του $U\cap Y$, $f \in \mathcal{O}(U\cap$

- <u>Συμβολισμός</u>:

$\mathcal{E}^{(1)}$ = δράγμα των 1-δ.μορφών επί του X, οι οποίες είναι διαφορίσιμες,

$\mathcal{E}^{(1,0)}$ (αντ. $\mathcal{E}^{(0,1)}$) = δράγμα των 1-δ.μ. τύπου $(1,0)$ (αντ. $(0,1)$), "

Ω = δράγμα των <u>ολόμορφων 1-διαφορικών μορφών</u> επί του X.

• Πρόθεσή μας τώρα είναι να ορίσουμε "2-διαφ. μορφές".

Εξωτερικό γινόμενο

Έστω V ένας $\mathbb{C}$-δ.χ. Ορίζουμε το <u>εξωτερικό γινόμενο</u> $\Lambda^2 V$ ως τον $\mathbb{C}$-δ.χ. τον αποτελούμενο από πεπερασμένα αθροίσματα στοιχείων της μορφής $v_1 \wedge v_2$, $v_1, v_2 \in V$, τα οποία υπακούουν στους εξής νόμους:

(a) $(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$

(b) $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda (v_1 \wedge v_2)$

(c) $v_1 \wedge v_2 = - v_2 \wedge v_1$

όπου $v_1, v_2, v_3 \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Εάν $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι μιά βάση του V, τότε $\{e_i \wedge e_j \mid i<j\}$ είναι μια βάση του $\Lambda^2 V$ και $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda^2 V = \binom{n}{2}$.

• <u>Ορισμός</u>: Έστω Y ένα ανοιχτό υποσύνολο μιας επιφάνειας Riemann X. Μια <u>διαφορική μορφή βαθμού 2 (ή 2-δ.μ.) επί του Y</u> είναι μια απεικόνιση

$$\omega : Y \longrightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^{(2)} : \omega(a) \in T_a^{(2)}, \forall a \in Y.$$

• ω ονομάζεται <u>διαφορίσιμη</u> $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ ω τοπικά (σχ. με ένα χάρτη (U, z)) παρίσταται ως:

$$\omega = f \, dz \wedge d\bar{z}, \; f \in \mathcal{E}(U \cap Y)$$

$\mathcal{E}^{(2)} :=$ δράγμα των 2-διαφ. μ.

Παρ. (a) $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(1)}(Y) \rightsquigarrow \omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$

$$[(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a)].$$

(b) $\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{E}(Y) \\ \omega \in \mathcal{E}^{(2)}(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow f\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(Y) \; [(f\omega)(a) := f(a)\omega(a)$

Διασύνδεση $\mathcal{E}^{(1)}$ με $\mathcal{E}^{(2)}$ μέσω παραγωγίσεων

X επ. Riemann

$\cup$

U ανοικτό

$$d, d', d'' : \mathcal{E}^{(1)}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}(U)$$

$$\omega = \sum_k f_k \, dg_k$$

πεπερ. αθρ. $f_k, g_k \in \mathcal{E}(U)$

$$d\omega := \sum df_k \wedge dg_k$$

$$d'\omega := \sum d'f_k \wedge dg_k$$

$$d''\omega := \sum d''f_k \wedge dg_k$$

π.χ. $\omega = \varphi \, dz + \psi \, d\bar{z} \Rightarrow d\omega = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}.$

Οι παραπάνω ορισμοί είναι ανεξάρτητοι των "τοπικών εκπροσώπων": $\omega = \sum f_k dg_k$. Αν $\omega = \sum f_k dg_k = \sum \tilde{f}_j d\tilde{g}_j$, τότε εργαζόμενοι με έναν χάρτη $(U, z = x+iy)$, έχουμε:

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy, \quad d\tilde{g}_j = \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \partial y$$

$$\Rightarrow \sum f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \quad \text{και} \quad \sum f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}$$

(+)

παραγώγιση μερική ως προς x και y και αφαίρεση μας δίνει:

$$\Rightarrow \sum' \left(\frac{\partial f_k}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{\partial g_k}{\partial y}\right) = \sum' \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y}\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x}\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}\right)$$

Επειδή όμως

$$\sum df_k \wedge dg_k = \sum \left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y}\frac{\partial g_k}{\partial x}\right) dx\wedge dy$$

$$\sum d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j = \sum \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x}\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y}\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}\right) dx\wedge dy$$

έχουμε ισότητα ✓

Λήμμα 2 (Στοιχειώδης Ιδιότητες): Για $f\in\mathcal{E}(U)$, $\omega\in\mathcal{E}^{(1)}(U)$ έχουμε:

(a) $ddf = d'd'f = d''d''f = 0$

(b) $d\omega = d'\omega + d''\omega$

(c) $d(f\omega) = df\wedge\omega + f\,d\omega$ (και ανάλογα για d', d'').

<u>αποδ.</u> (a) $ddf = d(1\cdot df) = d1\wedge df = 0$ (ανάλογα για d', d'').

(b) $d'\omega + d''\omega = \sum' d'f_k\wedge dg_k + \sum' d''f_k\wedge dg_k =$

$= \sum' (d'f_k + d''f_k)\wedge dg_k = \sum df_k\wedge dg_k = d\omega.$

(c) $d(f\omega) = d\left(\sum f h_k \wedge dg_k\right) = \sum' d(fh_k)\wedge dg_k =$

$= \sum' (df\, h_k + f\, dh_k)\wedge dg_k = df\wedge\omega + f\,d\omega.$ □

Παρατήρηση: Από (a),(b): $d'd''f = -d''d'f$ επειδή

$0 = (d'+d'')(d'+d'')f = d'd''f + d''d'f$. Εξάλλου ανεξ. με ένα τοπικό χάρτη $(U, z = x+iy)$ παίρνουμε:

$$d'd''f = d'(d''f) = d'\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z\right) = d'\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) \wedge d\bar z \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad d'd''f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} dz \wedge d\bar z = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge d$$

- f λέγεται <u>αρμονική</u> $\iff d'd''f = 0$.

- <u>Ορισμός</u>: Y ανοικτό $\subset X$.

  $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ ονομάζεται <u>κλειστή</u> $\underset{ορσ}{\iff} d\omega = 0$

  -"- -"- <u>ακριβής</u> $\underset{ορσ}{\iff} \exists f \in \mathcal{E}(Y) : \omega = df$.

<u>Πρόταση 3</u>: (a) Κάθε ολόμορφη δ.μ. $\omega \in \Omega(Y)$ είναι κλειστή.
(b) Κάθε κλειστή δ.μ. $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}(Y)$ είναι ολόμορφη.

<u>Απόδειξη</u>. (a) $\omega = f\, dz$, (U,z) χάρτης, $f \in \mathcal{O}(U \cap Y) \Longrightarrow d\omega = df \wedge dz \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z\right) \wedge dz = -\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}_{\overset{\|}{0} \iff f \text{ ολ.}} dz \wedge d\bar z$$

(b) Προφανές. □

Παρ. f αρμονική $\Longrightarrow d'f$ ολόμορφη επειδή

$$dd'f = d''d'f = 0. \checkmark$$

Επαναφορά διαφορικών μορφών

Έστω $F: X \longrightarrow Y$ μια ολόμορφη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann. Για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subset Y$ η F επάγει έναν ομομορφισμό «επαναφοράς»:

$$F^*: \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(F^{-1}(U)), \quad F^*(f) := f\circ F,$$

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(U) \subset X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F^* f"] & Y \supset U \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Και κατ' επέκταση κι έναν ομομορφισμό:

$$F^*: \mathcal{E}^{(k)}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{(k)}(F^{-1}(U)), \quad \text{για } k=1,2,$$

που ορίζονται ως εξής:

"τοπικά" ⇝ $\begin{cases} F^*\left(\sum f_j\, dg_j\right) := \sum (F^* f_j)\, d(F^* g_j) \\ F^*\left(\sum f_j \cdot dg_j \wedge dh_j\right) := \sum (F^* f_j)\cdot d(F^* g_j) \wedge d(F^* h_j). \end{cases}$

⇝ ανεξ. των τοπ. εκφρ. ⇝ ολικός ορ.

- Βασικές ιδιότητες: (a) $F^*(df) = d(F^* f)$, $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$

  (b) $F^*(\underset{d''}{d'} f) = \underset{d''}{d'}(F^* f)$, $F^*(\underset{d''}{d'}\omega) = \underset{d''}{d'} F^*(\omega)$

  (c) f αρμονική ⟹ $F^* f$ αρμονική (επειδή $d'd''(F^* f) = d'(F^* d'' f) = F^*(d'd'' f) =$

Ολοκλήρωση διαφορικών 1-μορφών

Έστω X μια επιφάνεια Riemann και $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.

Έστω $c : [0,1] \longrightarrow X$ μιά τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη, δηλ. μια συνεχής απεικόνιση για την οποία υπάρχει μια διαμέριση $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ του διαστήματος $[0,1]$ και χάρτες $(U_k, z_k = x_k + i y_k)$, $1 \le k \le n$, τέτοιοι ώστε:

$c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ και οι συναρτήσεις

$$x_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow \mathbb{R}$$

να είναι μια φορά συνεχώς διαφορίσιμες. Το ολοκλήρωμα της ω υπεράνω της καμπύλης c ορίζεται ως εξής:

Στο U_k η ω γράφεται ως άθροισμα $\omega = f_k\, dx_k + g_k\, dy_k$ με $f_k, g_k \in \mathcal{E}(U_k)$. Θέτουμε:

$$\boxed{\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t)) \frac{d x_k(c(t))}{dt} + g_k(c(t)) \frac{d y_k(c(t))}{dt} \right) dt}$$

Αυτός ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλεγομένης διαμερίσεως και των χαρτών εκκίνησης.

Το ολοκλήρωμα αυτό για ακριβείς δ.μ. εξαρτάται μόνον από τα σημεία αρχής και πέρατος της καμπύλης c.

<u>Πρόταση 4.</u> X και $c:[0,1]\to X$ όπως παραπάνω και $F\in\mathcal{E}(X)$.

Τότε

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

<u>Απόδειξη:</u> Για μια διαμέριση $t_0=0<t_1<\dots<t_n=1$ και χάρτες (U_k,z_k) όπως παραπάνω, έχουμε $dF = \partial F/\partial x_k \, dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k$, οπότε

$$\int_c dF = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t))\frac{d(x\circ c)(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t))\frac{d(y\circ c)(t)}{dt}\right)dt =$$

$$\overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{d}{dt}F(c(t))\right)dt \overset{1^\circ\ \Theta.\text{Α.Λογ.}}{=} \sum_{k=1}^{n}\Big(F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))\Big) =$$

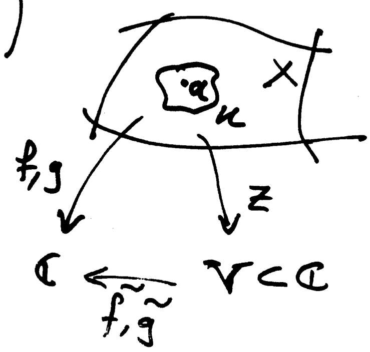
$$= F(c(1)) - F(c(0)). \ \square$$

<u>Ορισμός.</u> Μια συνάρτηση $F\in\mathcal{E}(X)$ λέγεται <u>πρωταρχική</u> (ή <u>παράγουσα</u>) συνάρτηση μιας δ.μ. $\omega\in\mathcal{E}^{(1)}(X) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} dF=\omega$.

(Δυο πρωταρχικές συναρτήσεις F_1, F_2 της $\omega\in\mathcal{E}^{(1)}(X)$ διαφέρουν ως προς μιά σταθερά, δηλ. $F_1-F_2=$ σταθ.)

Ύπαρξη πρωταρχικών συναρτήσεων

• **ΤΟΠΙΚΗ:** Έστω X μια επιφάνεια Riemann, $a \in X$, $z = x+iy : U \to$ ένας χάρτης γύρω απ' το a με $z(a)=0$. Δίχως βλάβη της γενικότητας έστω $V = \{z \in \mathbb{C} : |z|<r\}$, $r>0$. Έστω $\omega = f\,dx + g\,dy \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ μιά κλειστή δ.μ., δηλ. $d\omega = 0$ $\left(\Longleftrightarrow \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)$



Για $x,y \in V$ ορίζουμε:

$$\tilde{F}(x,y) := \int_0^1 [\tilde{f}(tx,ty)x + \tilde{g}(tx,ty)y]\,dt.$$

$F := \tilde{F} \circ z$. Ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z^{-1}(x,y)) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,y) \overset{d\omega=0}{=} \tilde{f}(x,y) = f(z^{-1}(x,y)).$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z^{-1}(x,y)) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x,y) = \tilde{g}(x,y) = g(z^{-1}(x,y)).$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt}\tilde{f}(tx,ty) + \tilde{f}(tx,ty)\right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\tilde{f}(tx,ty))\,dt = \tilde{f}(x)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \tilde{g}(x,y) \Longrightarrow \boxed{dF = \omega} \checkmark$$

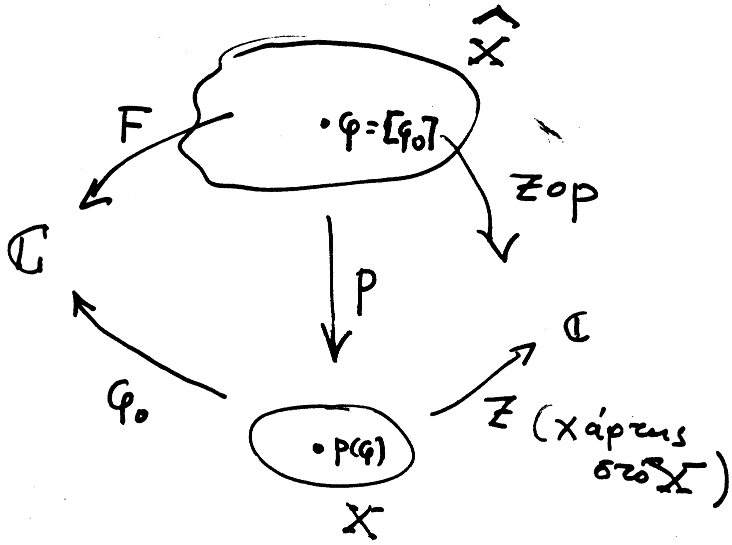
• «ΟΛΙΣΤΙΚΑ» υπάρχουν εν γένει πρωταρχικές συναρτήσεις μιας κλειστής δ. μορφής μόνον ως πλειοτιμικές συναρτήσεις, δηλαδή πρωταρχικές συναρτήσεις (υπό την συνήθη έννοια) μόνον της επαναφοράς της επί ενός χώρου επικαλύψεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Έστω X μιά επ. Riemann και $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ μιά κλειστή δ.μ. Τότε υπάρχει μια απεικόνιση επικαλύψεως $p : \hat{X} \to X$ με $\hat{X}$ συνεκτικό και μια πρωταρχική συνάρτηση $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ της δ.μορφής $p^*\omega$.

"<u>Ιδέα αποδείξεως</u>". Έστω $\mathcal{F}$ το δράγμα των πρωταρχικών συναρτήσεων της ω: $\underset{\hat{X}}{U} \rightsquigarrow \mathcal{F}(U) := \{ f \in \mathcal{E}(U) \mid df = \omega \text{ επί του } U$

και $p : |\mathcal{F}| := \dot{\bigcup}_{x \in X} \mathcal{F}_x \longrightarrow X$ ο επαγόμενος χώρος επικαλύψεως (απ.)

- Το ζητούμενο p είναι ο περιορισμός $p|\hat{X} : \hat{X} \to X$ της παραπάνω p σε μια συνεκτική συνιστώσα του $|\mathcal{F}|$.



Τοπικά: $\omega = f\,dx + g\,dy$

$$\Downarrow$$

$$p^*\omega = (f \circ p)\, d(x \circ p) + (g \circ p)\, d(y \circ p)$$

Ορίζουμε: $F : \hat{X} \to \mathbb{C}$

$$\varphi = [\varphi_0] \longmapsto F(\varphi) := \varphi_0(p(\varphi))$$

Πρωταρχική συνάρτηση "γύρω από το $p(\varphi)$"

Τότε $\dfrac{\partial F}{\partial (x \circ p)}(\varphi) = \dfrac{\partial}{\partial x} \varphi_0(p(\varphi)) \overset{\text{τοπ.πρ.συν.}}{=} (f \circ p)(\varphi)$

Αντίστοιχως $\partial F / \partial (y \circ p)(\varphi) = (g \circ p)(\varphi)$

$\Longrightarrow dF = p^*\omega$. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 6. Έστω X μια επιφάνεια Riemann, $\pi: \tilde{X} \to X$ η καθολική επικάλυψή της, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ και $d\omega = 0$, τότε $\exists\, f \in \mathcal{E}(\tilde{X})$: $df = \pi^*\omega$.

<u>Απόδειξη.</u>

$p: \hat{X} \to X$

$F \in \mathcal{E}(\hat{X})$

όπως παραπάνω.

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{X} \arrow[lld, "f"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dd, bend left, "\tau"] \\
\mathbb{C} & & X \\
 & & \hat{X} \arrow[llu, "F"] \arrow[u, "p"']
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\pi: \tilde{X} \to X$ είναι καθολική

$\exists$ ολόμορφη απ. $\tau: \tilde{X} \to \hat{X}$

που σέβεται τα νήματα.

Ορίζουμε $f := \tau^* F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$

Τότε: $df = \tau^*(dF) = \tau^*(p^*\omega) = \pi^*\omega$. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 7. Σε μια επιφάνεια Riemann X που είναι απλά συνεκτική κάθε κλειστή διαφορική μορφή $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ έχει μια πρωταρχική συνάρτηση $F \in \mathcal{E}(X)$.

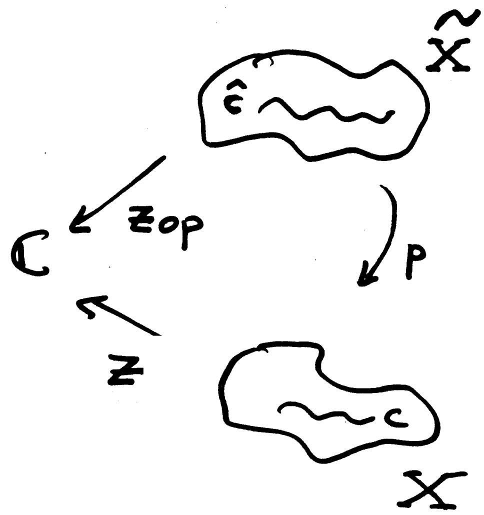
($Id = p$ σ' αυτήν την περ.)

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Αν $p: \tilde{X} \to X$ είναι η καθολική επικάλυψη, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ κλειστή, $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$: $dF = p^*\omega$. Εάν $c: [0,1] \to X$ είναι μια τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη και $\hat{c}: [0,1] \to X$ μια ανύψωση της c, τότε

$$\int_c \omega = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0))$$

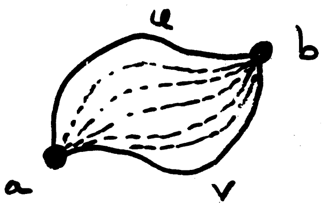
Απόδειξη.

$$\int_c \omega = \int_{\hat c} p^*\omega = \int_{\hat c} dF \overset{\text{Πρόταση 4}}{=} F(\hat c(1)) - F(\hat c(0)). \quad \square$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 9. Έστω X μια επιφάνεια Riemann και $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ με $d\omega = 0$.

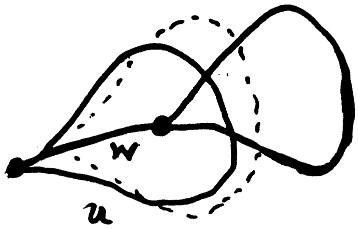
(α) $a, b \in X$, $u, v : [0,1] \to X$ ομοτοπικές καμπύλες από το a στο b $\Rightarrow \displaystyle\int_u \omega = \int_v \omega.$



(β) $u, v : [0,1] \to X$ κλειστές καμπύλες ελευθέρως ομοτοπικές $\Rightarrow \displaystyle\int_u \omega = \int_v \omega.$

Απόδειξη. (α) $p : \tilde X \to X$ καθ. επ. $\Rightarrow$ οι ανυψώσεις $\hat u, \hat v : [0,1] \to \tilde X$ των u, v έχουν κοινό αρχικό σημείο, δηλ. $\hat u(0) = \hat v(0)$.
Επίσης από την ιδιότητα ανυψώσεως καμπυλών: $\hat u(1) = \hat v(1)$.
Άρα το αποτέλεσμα έπεται από το Θ. 8.

(β) u και $w \cdot v \cdot w^-$ είναι ομοτοπικές.



$$\int_u \omega \underset{\text{από (α)}}{=} \int_{w\cdot v\cdot w^-} \omega = \int_w \omega + \int_v \omega - \int_w \omega = \int_v \omega. \quad \square$$

Ολοκλήρωση 2-διαφορικών μορφών με συμπαγή φορέα

- Έστω U ανοικτό $\subset \mathbb{C}$ και $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$. Τότε η ω γράφεται

$$\omega = \underline{f\,dx\wedge dy = \frac{i}{2} f\,dz\wedge d\bar{z}}\ ,\ f\in \mathcal{E}(U),$$

με $\mathrm{supp}(f) = \{(x,y) : f(x,y) \neq 0\} \subset U$. Ορίζουμε:

$$\boxed{\iint_U \omega := \iint_U f(x,y)\,dx\,dy \quad \left(\begin{array}{l}\text{σύνηθες}\\ \text{διπλό}\\ \text{ολοκλήρωμα}\end{array}\right)}$$

- Έστω V ένα άλλο ανοικτό $\subset \mathbb{C}$ και $\varphi = u+iv : V \longrightarrow U$ αμφιολόμορφη. Τότε έχουμε

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ιακωβιανή}\\ \text{ορίζουσα}}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CR}\\ \text{συνθήκες}}}{=} |\underset{\substack{\shortparallel\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}}}{\varphi'}|^2 > 0 \qquad (z = x+iy)$$

και μπορούμε να ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\boxed{\iint_U \omega = \iint_V \varphi^*\omega \qquad \left(\begin{array}{l}\varphi \text{ διατηρεί}\\ \text{τον προσανατολισμό}\end{array}\right)}$$

Επειδή $\varphi^*\omega = \frac{i}{2}(f\circ\varphi)\,\varphi^*(dz\wedge d\bar{z}) = \frac{i}{2}(f\circ\varphi)\,d\varphi\wedge d\bar{\varphi} =$
$= \frac{i}{2}(f\circ\varphi)\,(\varphi' dz)\wedge(\bar{\varphi}' d\bar{z}) = \frac{i}{2}(f\circ\varphi)\,|\varphi'|^2\,dz\wedge d\bar{z} = (f\circ\varphi)\underset{\substack{\shortparallel\\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}}{|\varphi'|^2}\,dx\wedge dy$

(κι έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο μετασχηματισμού για συναρτήσεις 2 μεταβλητών.)

• Έστω τώρα X μια επιφάνεια Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ και $\mathrm{supp}(\omega) := \{a \in X : \omega(a) \neq 0\}$. Έστω $\varphi : U \to V$ ένας χάρτης της X, τέτοιος ώστε $\mathrm{supp}(\omega) \subset U$. Τότε $(\varphi^{-1})^*\omega$ αποτελεί μια δ.μ. στο $V \subset \mathbb{C}$ με φορέα περιεχόμενο στο V. Επομένως το ολοκλήρωμα:

$$\boxed{\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega}$$

είναι καλώς ορισμένο μιας και δέν εξαρτάται απ' την επιλογή των χαρτών (βάσει των όσων έχουμε ήδη πει). Αν π.χ. $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ ήταν ένας άλλος χάρτης με $\mathrm{supp}(\omega) \subset \tilde{U}$, τότε δ.β.τ.γ. θα μπορούσαμε να υποθέσαμε ότι $U = \tilde{U}$ (αλλιώς θεωρούμε την τομή $U \cap \tilde{U}$ με $\psi := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : V \to \tilde{V}$ αμφιολόμορφη)
Επειδή $(\varphi^{-1})^*\omega = (\tilde{\varphi} \circ \psi)^*\omega = \psi^*((\tilde{\varphi})^*\omega)$ θα έχουμε:

$$\iint_V (\varphi^{-1})^*\omega = \iint_{\tilde{V}} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega . \checkmark$$

• Έστω τώρα $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ μια 2-δ.μ. με συμπαγή φορέα. Υπάρχουν χάρτες $\varphi_k : U_k \to V_k$, $1 \le k \le n$, με $\mathrm{supp}(\omega) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ και διαμερίσεις της μονάδας, δηλ. n συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}(X)$ τέτοιες ώστε:

(i) $\mathrm{supp}(f_k) \subset U_k$, $\forall k$, $1 \le k \le n$ $\left(\omega_k := f_k \cdot \omega \rightsquigarrow \mathrm{supp}(\omega_k) \Subset U_k\right)$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$, $\forall x, x \in \mathrm{supp}(\omega)$ $\rightsquigarrow$ $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$.

Ορίζουμε:

$$\boxed{\iint_X \omega := \sum_{k=1}^{n} \iint_X f_k \cdot \omega = \sum_{k=1}^{n} \iint_X \omega_k .}$$

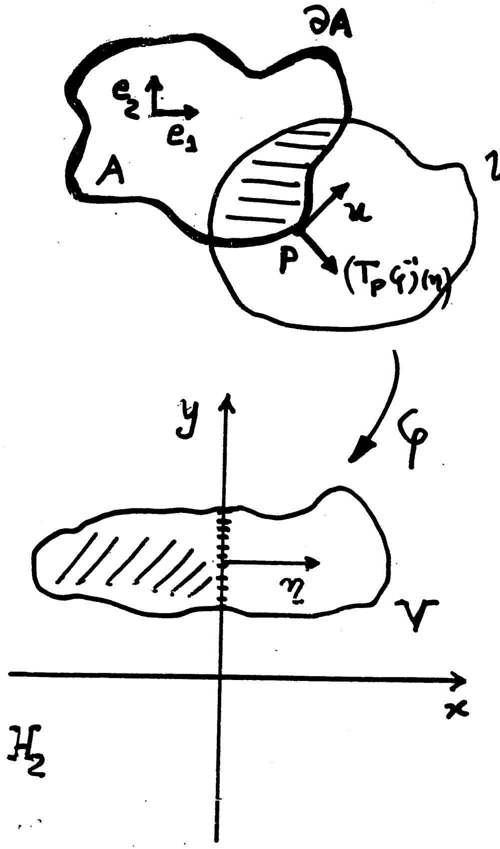
- Ιδιαίτερη περίπτωση του Θεωρήματος του Stokes για το επίπεδο.

Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό (καν. προσ.) $\subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ω μια συνεχώς διαφορίσιμη $(n-1)$-δ.μ. στο $\mathcal{U}$ και $A \subset \mathcal{U}$ συμπαγές με λείο σύνορο ∂A (∂A με τον επαγόμενο προσανατολισμό)

Τότε
$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega .$$

Ειδικά για $\boxed{n=2}$:

$$\mathbb{H}_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$$



- <u>λείο σύνορο</u>: $\forall p,\ p \in \partial A$ $\exists \varphi : \mathcal{U} \to V$ με (i) $\varphi(A \cap \mathcal{U}) = \mathbb{H}_2 \cap V$

  (ii) $\varphi(\partial A \cap \mathcal{U}) = \partial \mathbb{H}_2 \cap V$

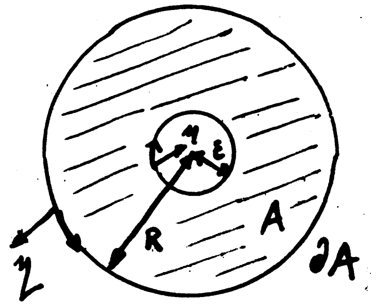
- <u>Επαγόμενος προσανατολισμός</u>:

$u \in T_p(\partial A)$ θετικά προσανατολισμένο
$\Leftrightarrow$ $\{(T_p\varphi^{-1})(\eta), u\}$ είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

- Μέσω διασπάσεως σε πραγματικό και φανταστικό μέρος έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U} \text{ ανοικτό } \subset \mathbb{C} \\ \omega \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathcal{U}),\ A \text{ συμπαγές } \subset \mathcal{U} \\ \partial A \text{ λείο με επαγόμενο προσανατολισμό} \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_A d\omega = \int_{\partial A} \omega .$$

Παράδειγμα:



$A := \{ z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon \leq |z| \leq R \}$, $0 < \varepsilon < R$.

∂A: Θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια $|z| = R$.
αρνητικά προσανατολισμένη περ. $|z| = \varepsilon$

Για την δ.μ. $\omega = f\,dx + g\,dy$ το Θεώρημα Stokes μας λέει ότι:

$$\iint_A d\omega = \iint_{\varepsilon \leq |z| \leq R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{|z|=R} f\,dx + g\,dy - \int_{|z|=\varepsilon} f\,dx + g\,dy .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10. Έστωσαν X μια επιφάνεια Riemann και $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ μια 1-διαφορική μορφή με συμπαγή φορέα. Τότε:

$$\iint_X d\omega = 0 .$$

Απόδειξη: Υπάρχουν χάρτες (U_k, z_k), $1 \leq k \leq n$ και διαμέριση της μονάδας $f_1, \ldots, f_n$ όπως πριν: $\exists\, R_k > 0 :\ z_k(\mathrm{supp}(\underbrace{f_k \omega}_{\omega_k})) \subset \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R_k \}$ $\forall k, 1 \leq k \leq n$.

$$\Longrightarrow \iint_X d\omega = \sum_{k=1}^{n} \iint_X d\omega_k = \sum_{k=1}^{n} \iint_{|z_k| \leq R_k} d\omega_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{|z_k| = R_k} \omega_k = 0 . \quad \square$$

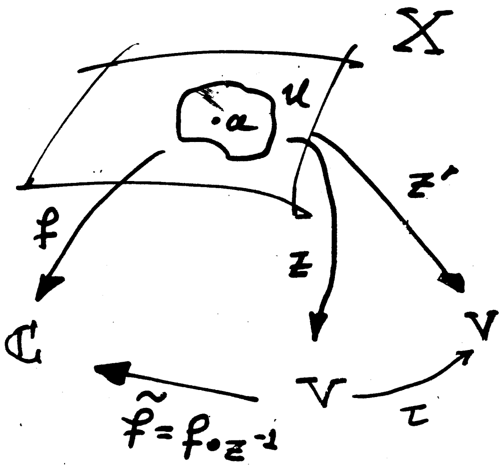
Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Έστω X μια επιφάνεια Riemann, Y ανοικτό $\subset X$, $\omega \in \Omega(Y \setminus \{a\})$

$z : U \to V : z(a) = 0$ (δ.β.γ. $V = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$).

$U \subset Y$

$$\omega = f \, dz \quad , \quad f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$$



Ανάπτυξη σε σειρά Laurent:

$$\tilde{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

(γύρω απ' το a ως προς την συντεταγμένη z).

Από τη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής γνωρίζουμε:

- $c_n = 0 \ \forall n, \ n < 0 \Rightarrow$ η ω μπορεί να επεκταθεί ολομόρφως επί όλου του Y (a: αιρόμενο ιδίωμα).

- $\left.\begin{array}{l} \exists k < 0 : c_k \neq 0 \\ c_n = 0, \ \forall n, \ n < k \end{array}\right\} \Rightarrow$ ω έχει πόλο τάξεως k στο σημείο a.

- για άπειρα $n < 0 : c_n \neq 0 \Rightarrow$ ω έχει ένα ουσιαστικό ιδίωμα στο a.

<u>Ορισμός:</u> Ο συντελεστής

$$\boxed{c_{-1} =: \mathrm{Res}_a(\omega)}$$

ονομάζεται <u>τό ολοκληρωτικό υπόλοιπο της ω στο σημείο a.</u>

Λήμμα 11. $\mathrm{Res}_a(\omega)$ είναι ανεξάρτητο του θεωρουμένου χάρτη (U, z).

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $z' : U' \to V'$ ένας άλλος χάρτης με $z'(a) = 0$.

Δίχως β.τ.γ. $U = U'$ (αλλιώς πάρε τομή τους).

$$\omega = g\, dz' , \quad g \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$$

$$\hat{g} = g \circ z^{-1} \in \mathcal{O}(V' \setminus \{0\})$$

Έχουμε:

$$dz' = \frac{\partial z'}{\partial z} dz \qquad z' \text{ ολόμορφη}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \circ z \qquad \text{όπου } \tau := z' \circ z^{-1} \text{ είναι αμφιολόμορφη}$$

Επομένως:

$$\omega = g\, dz' = g\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \circ z\right) dz \Rightarrow \begin{cases} f = g \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \circ z\right) \\ \tilde{f} = (\hat{g} \circ \tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} \end{cases}$$

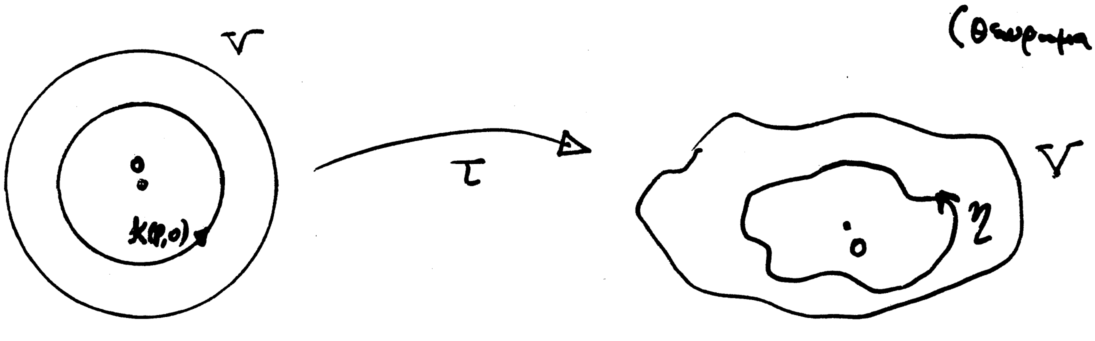
και

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(0,\rho)} \tilde{f}(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\rho e^{it})\, \rho i e^{it}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\hat{g} \circ \tau)(\rho e^{it})\, \underbrace{\tau' \rho i e^{it}}_{\eta'(t)}\, dt \qquad \left(\text{όπου } \eta(t) := \tau(\rho e^{it})\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \hat{g}(\underset{\xi}{\eta(t)}) \cdot \eta'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} \hat{g}(\xi)\, d\xi = c'_{-1} . \quad \square$$

τ διατηρεί προσ.
(Θεώρημα ολ. και Cauchy).



<u>Ορισμός:</u> Y αν. $\subset X$, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$. ω ονομάζεται <u>μερόμορφη 1-διαφορική μορφή</u> $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ ανοικτό $Y' \subset Y$, τέτοιο ώστε:

(i) $\omega \in \Omega(Y')$, (ii) $Y \setminus Y'$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία και (iii) ω έχει πόλο γιά κάθε σημείο $a \in Y \setminus Y'$.

$\mathcal{M}^{(1)} \rightsquigarrow$ δράγμα μερομόρφων 1-μορφών. (ή αβελιανών διαφορικών)

ΘΕΩΡΗΜΑ 12. (ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ)
Έστω X μια συμπαγής επιφάνεια Riemann και $a_1, \dots, a_n$ n διακεκριμένα σημεία επί της X. Τότε για κάθε $\omega \in \Omega(X')$, $X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, έχουμε:

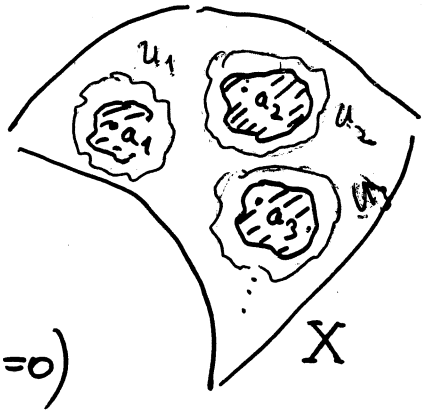
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k}(\omega) = 0 \qquad \odot$$

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε χάρτες (U_k, z_k), $1 \le k \le n$, τέτοιους ώστε:

(i) $U_j \cap U_k = \emptyset$ για $j \neq k$

(ii) $z_k(a_k) = 0$ και

(iii) $z_k(U_k) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$



Για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ επιλέγουμε συναρτήσεις $f_k \in \mathcal{E}(X)$: $\operatorname{supp}(f_k) \subset U_k$ (οπότε $f_k|_{X \setminus U_k} = 0$) και $f_k|_{U_k'} = 1$ (με U_k' ανοικτό $\subset U_k$).

Ορίζουμε: $g := 1 - (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$. Προφανώς $g|_{U_k'} = 0$.
Επομένως η $g \cdot \omega$ μπορεί να επεκταθεί σε κάθε σημείο a_k (παίρνοντας σ' αυτό την τιμή 0) και να θεωρηθεί ως στοιχείο του $\mathcal{E}^{(1)}(X)$.
Από το ΘΕΩΡΗΜΑ 10 έχουμε: $\iint_X d(g\omega) = 0$ (διότι $g \cdot \omega$ έχει συμπαγή φορέα).

- Επειδή η ω είναι ολόμορφη στο $X' \Rightarrow d\omega|_{X'}=0$

(από Πρ. 3(α)).

- Εντός του $U_k' \cap X'$ ισχύει: $f_k\omega=\omega \Rightarrow d(f_k\omega)|_{U_k'\cap X'}=0$.

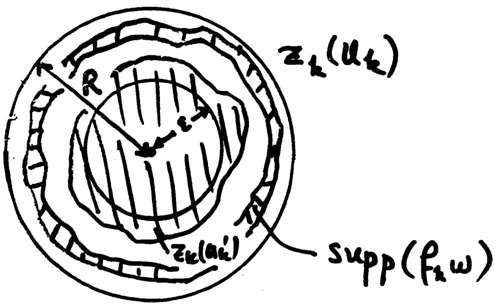
Άρα: $f_k\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ με $supp(d(f_k\omega)) \subset U_k \setminus U_k'$.

Συνεπώς: $0=\iint_X d(g\omega) = -\sum_{k=1}^{n}\iint_X d(f_k\omega) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\iint_X d(f_k\cdot\omega)=0$ (*)

Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη θα δείξουμε ότι:

$$\iint_X d(f_k\omega) = -2\pi i \, Res_{a_k}(\omega) \qquad (**)$$

(διότι προφανώς (*), (**) $\Rightarrow \odot$). Επειδή $supp(d(f_k\omega)) \subset U_k$ είναι αρκετό να ολοκληρώσουμε υπεράνω του U_k. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη συντεταγμένη z_k μπορούμε να ταυτίσουμε το U_k με έναν μοναδιαίο δίσκο. Τώρα υπάρχουν $0<\varepsilon<R<1$ τέτοια ώστε:



(i) $z_k(supp(d(f_k\omega))) \subset \{z_k\in\mathbb{C} : \varepsilon \le |z_k| \le R\}$

$(supp(f_k) \subset \{|z_k|<R\})$ και

(ii) $\{|z_k|<\varepsilon\} \subset z_k(U_k')$ $\quad (f_k|_{\{|z_k|\le\varepsilon\}}=1)$.

Επομένως: $\iint_X d(f_k\omega) = \iint_{\varepsilon\le|z_k|\le R} d(f_k\omega) \underset{\text{stokes}}{=} \underbrace{\int_{|z_k|=R} f_k\omega}_{0} - \int_{|z_k|=\varepsilon} f_k\omega =$

$= -\int_{|z_k|=\varepsilon}\omega = -2\pi i \, Res_{a_k}(\omega)$ (από το Θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων στο μιγ. επίπεδο)

Άρα η (**) αποδείχθηκε. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 13. Κάθε μη σταθερή μερόμορφη συνάρτηση f επί μιας συμπαγούς επιφάνειας Riemann X έχει τόσα σημεία μηδενισμού όσους και πόλους (απαριθμώντας και πολλαπλότητες)

Απόδειξη: Ορίζουμε $A := \{a \in X \mid f(a) = \infty$ ή $f(a) = 0\}$.

X συμπ. $\Rightarrow$ A πεπ. και $\omega = \dfrac{df}{f} = \dfrac{f'}{f}dz$ είναι ολόμορφη επί του $X \setminus A$

- Αν f έχει μια θέση μηδενισμού στο a τάξεως m, τότε

$\exists$ αν.π. $U \ni a$: $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση

$\Rightarrow \exists$ $\varphi : U \to V$ χάρτης του X : $\varphi(a) = 0$

και $F = f \circ \varphi^{-1} = z^m$ στο V

έπεται από το Θεώρ. τοπικής συμπεριφοράς ολομόρφων συναρτήσεων

ο εκθ. πρέπει να είναι $= m$ επειδή και η F έχει σ.μ. μεγ. τάξη m.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "Id"] \\ V \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$F = z^m$

Άρα $F'(z) = m z^{m-1}$ στο V $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(\rho,0)} \frac{F'(z)}{F(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{K(\rho,0)} m\,\frac{dz}{z} = m. \quad (1)$$

- Αν η f έχει έναν πόλο στο a τάξεως m, τότε

$\exists$ αν. περ. $U \ni a$: $\dfrac{1}{f} : U \to \mathbb{C}$ να είναι ολόμορφη, μη σταθερή

$\Rightarrow \exists$ $\varphi : U \to V$ χάρτης του X : $\varphi(a) = 0$

και $F = 1/f \circ \varphi^{-1} = z^m$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "1/f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "Id"] \\ V \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$F = z^m$

Έστω $\psi := \dfrac{1}{\varphi} : U \setminus \{a\} \to \psi(U \setminus \{a\})$ ο αντίστοιχος χάρτης και

$G := f \circ \psi^{-1} = z^{-m}$ στο $\psi(U \setminus \{a\})$.

Τότε $G'(z) = -m z^{-(m+1)}$ κι άρα $\operatorname{Res}_a(\omega) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K(\rho,0)} \frac{G'(z)}{G(z)}dz =$

$= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K(\rho,0)} \frac{-m}{z}dz = -m.$ (2) Από (1),(2) $\rightsquigarrow$ έπεται το ζητούμενο $\square$

Λήμμα 14. (Μη ομογενής τύπος ολοκληρώσεως κατά Cauchy)
Έστω G ένα ανοικτό, συνεκτικό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με θετικώς προσανατολισμένο, τμηματικώς λείο σύνορο ∂G. Εάν η $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση επί μιάς περιοχής U του $\overline{G}$, τότε για κάθε $z\in G$ ισχύει:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_G\frac{\partial g(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}$$

Απόδειξη: Επιλέγουμε $r>0$ αρκούντως μικρό τέτοιο ώστε $\overline{K}(z;r)\subset G$ και προσανατολίζουμε το σύνορο $\partial\overline{K}(z;r)$ αρνητικώς.
Έστω $G_r:=G\setminus\overline{K}(z;r)$ (με θετ. πρ. σύνορο $\partial G_r=\partial G\cup\partial\overline{K}(z;r)$)
Επειδή η διαφορική μορφή $\omega(\zeta):=\frac{1}{2\pi i}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε μια περιοχή του G_r, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Stokes:

$$\int_{\partial G_r}\omega(\zeta)=\iint_{G_r}d\omega(\zeta)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{K}(z,r)}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\iint_{G_r}\frac{\partial g/\partial\overline{\zeta}}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\quad(1)$$

$$\left(\text{γιατί } d\left(\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)=\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\overline{\zeta}\wedge d\zeta=\frac{\partial g(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}\right)$$

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\iint_{G_r}\frac{\partial g/\partial\overline{\zeta}}{\underbrace{\zeta-z}_{\text{ολοκληρώσιμη}}}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right)=\frac{1}{2\pi i}\iint_G\frac{\partial g/\partial\overline{\zeta}}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}.\quad(2)$$

Απ' τη άλλη μεριά έχουμε:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{K}(z;r)}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{K}(z;r)}\frac{g(z)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{K}(z;r)}\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}$$

$$\|$$

$$-\frac{g(z)}{2\pi i}\int_{\partial\overline{K}(z;r)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$ (από τη συνήθη πρόταση του Cauchy)

$$\|$$

$$g(z) \qquad (3) \qquad (\partial\overline{K} \text{ αρν. πρ.})$$

Επειδή $|\zeta-z|=r$ παίρνουμε το εξής φράγμα για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{K}(z;r)}\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}d\zeta\right| \leq \max_{\zeta\in\partial\overline{K}(z;r)}|g(\zeta)-g(z)|$$

g συνεχής $\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0}\left[\max\limits_{z\in\partial\overline{K}(z;r)}|g(\zeta)-g(z)|\right] = 0 \qquad (4)$

Άρα το ολ. αυτό $= 0$.

Από τα (1),(2),(3),(4) παίρνουμε το ζητούμενο τύπο. □

Λήμμα 15. Για κάθε συνάρτηση $g\in\mathcal{E}(\mathbb{C})$ με συμπαγή φορέα υπάρχει μια συνάρτηση $f\in\mathcal{E}(\mathbb{C})$, τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

<u>Απόδειξη:</u> Ορίζουμε $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με:

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}$$

Από το λήμμα 14:

+ αλλαγή μεταβλητών $\zeta \mapsto \zeta + z$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar z} \iint g(\zeta+z) \frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial g(\zeta+z)}{\partial \bar z} \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial g(\zeta+z)}{\partial \bar\zeta} \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta - z} = g(z) - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{= 0}$$

επειδή μπορούμε να ολοκληρώνουμε
υπεράνω συμπαγούς περιοχής
(g έχει συμπαγή φορέα).

ΘΕΩΡΗΜΑ 16. (ΛΗΜΜΑ DOLBEAULT) Έστωσαν $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $0 < R \leq \infty$, και $g \in \mathcal{E}(X)$. Τότε υπάρχει μια $f \in \mathcal{E}(X)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = g.$$

Απόδειξη: Η λύση αυτής της μη ομογενούς εξισώσεως δεν μπορεί να δοθεί εν γένει απ' το παραπάνω ολοκλήρωμα. Αντ' αυτού χρησιμοποιούμε μια «διαδικασία εξαντλήσεως»: Έστωσαν

$$0 < R_0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n$$

μια ακολουθία ακτίνων με $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ και

$$X_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\}$$

Υπάρχουν συναρτήσεις $\psi_n \in \mathcal{E}(X)$ τέτοιες ώστε:

$\mathrm{supp}(\psi_n) \subset X_{n+1}$ και $\psi_n|_{X_n} = 1 \Rightarrow \mathrm{supp}(\underset{\mathcal{E}(X)}{\psi_n \cdot g})$ συμπ.

$(\psi_n|_{X \setminus X_{n+1}} = 0)$

Από το λήμμα 15 υπάρχουν συναρτήσεις $f_n \in \mathcal{E}(X)$:

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = \psi_n \cdot g \quad \text{επί του } X$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = g \quad \text{επί του } X_n.$$

"Ιδέα" για την περ. απόδ.: Κατασκευή ακολουθιών συναρτήσεων $(\tilde{f}_n)$ από τις $(f_n$

τέτοιες ώστε:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}_n = g \quad \text{επί του } X_n \\ (ii) & \|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\| \leq 2^{-n} \\ & \quad \| \\ & \sup_{x \in X_{n-1}} |\tilde{f}_{n+1}(x) - \tilde{f}_n(x)| \end{array} \right\}$$

Θέτουμε $\boxed{\tilde{f}_1 := f_1}$. Έστωσαν $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n$ ήδη κατασκευασμένα

Τότε $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f_{n+1} - \tilde{f}_n) = 0$ επί του $X_n \Rightarrow f_{n+1} - \tilde{f}_n \in \mathcal{O}(X_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ πολυώνυμο (δηλ. πεπερασμένο πλήθος όρων της σειράς Taylor της $f_{n+1} - \tilde{f}_n$)

τέτοιο ώστε να ισχύει η εξής ανισότητα προσεγγίσεως:

$$\|f_{n+1} - \tilde{f}_n - P\|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}$$

Θέτοντας $\boxed{\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P}$ η (ii) ικανοποιείται αυτομάτως ✓

Επί του X_{n+1} έχουμε εξάλλου:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}_{n+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_{n+1} = \psi_{n+1} g = g \rightsquigarrow (i) \checkmark$$

Επειδή κάθε σημείο $z \in X$ ανήκει σε "σχεδόν όλα" τα X_n, το όριο

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \text{υπάρχει.}$$

Επί του X_n η f γράφεται:

$$f = \tilde{f}_n + \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$$

(επειδή $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) = 0$ στο X_n γιά $k \geq n \Rightarrow \tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k \in \mathcal{O}(X_n)$)

Λόγω της (ii) η σειρά

$$F_n := f - \tilde{f}_n = \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$$

συγκλίνει ομοιομόρφως στο $X_n \Rightarrow (F_n)$ είναι ολόμορφη στο X_n

$\Rightarrow f = \tilde{f}_n + F_n$ είναι διαφορίσιμη για όλα τα n στο $X_n \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in \mathcal{E}(X)$.

Κι επειδή $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g$ στο X_n για <u>όλα</u> τα n

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ σ' ολόκληρο το X. $\square$