# ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1ο** (i) Δοθέντων $n$ ιδεωδών $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ενός μεταθετικού δακτυλίου $R$ με μοναδιαίο στοιχείο (όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), τέτοιων ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$I_j + I_k = R,\ \forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq j,k \leq n,\ \ j \neq k,$$

να αποδειχθεί ότι $I_1 I_2 \cdots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι $K[\mathsf{X}]/\langle \mathsf{X} - a\rangle \cong K$, για κάθε σώμα $K$ και για κάθε $a \in K$.

(iii) Εάν τα $a_1, \ldots, a_n$ είναι $n$ σαφώς διακεκριμένα στοιχεία ενός σώματος $K$ (όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) και

$$\varphi(\mathsf{X}) := (\mathsf{X} - a_1)(\mathsf{X} - a_2)\cdots(\mathsf{X} - a_n) \in K[\mathsf{X}],$$

να αποδειχθεί ότι $K[\mathsf{X}]/\langle \varphi(\mathsf{X})\rangle \cong K^n$.

**ΘΕΜΑ 2ο** Έστω το ιδεώδες $P \subset K[A,B,C,D,E,F]$ με γεννήτορες τα

$$AD - B^2,\ \ AF - C^2,\ \ DF - E^2,\ \ AE - BC,\ \ BE - CD,\ \ BF - CE,$$

ήτοι τις $2 \times 2$ ελάσσονες ορίζουσες τού συμμετρικού πίνακα

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι το ιδεώδες $P$ είναι πρώτο και ότι το $P^2$ δεν είναι (ούτε καν) πρωτεύον.

**ΘΕΜΑ 3ο** Να διατυπωθούν τα τρία *θεωρήματα ισομορφισμών* $R$-μοδίων και να δοθεί *πλήρης απόδειξη* τού δευτέρου.

**ΘΕΜΑ 4ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το λήμμα τού Nakayama*.

**ΘΕΜΑ 5ο** (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το λεγόμενο *λήμμα των πέντε*.

(ii) Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \qquad (\star)$$

$R$-μοδίων και ομομορφισμών $R$-μοδίων οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(a) $\exists \beta \in \mathrm{Hom}_R(C,B) : g \circ \beta = \mathrm{id}_C$.

(b) $\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(B,A) : \alpha \circ f = \mathrm{id}_A$.

(c) Η $(\star)$ είναι διασπώμενη.

Επιπροσθέτως, όταν η $(\star)$ είναι διασπώμενη,

$$A \oplus C \cong B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta),$$

με τους $\beta$ και $\alpha$ όπως στα (a) και (b), αντιστοίχως.

**ΘΕΜΑ 6ο** Έστω $R$ μια Π.Κ.Ι. και έστω $M$ ένας μη τετριμμένος πεπερασμένως παραγόμενος $R$-μόδιος στρέψεως. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Ο μηδενιστής

$$\mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rx = 0_M,\ \forall x \in M\}$$

τού $M$ είναι ένα μη τετριμμένο, γνήσιο και κύριο ιδεώδες $\mathrm{Ann}_R(M) = \langle r \rangle$ τής $R$, όπου το $r \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ (για τον δοθέντα $M$) είναι μονοσημάντως ορισμένο μέχρις συντροφικότητας.

(ii) Εάν $r \underset{\text{συν.}}{\sim} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_t^{\nu_t}$ είναι η παράσταση τού $r$ ως γινομένου (κατάλληλων θετικών ακεραίων δυνάμεων) πρώτων στοιχείων $p_1, p_2, ..., p_t$ τής $R$ (που είναι ανά δύο μη συντροφικά όταν $t \geq 2$), τότε[1] $M(p_j) \neq \{0_M\}$ για κάθε $j \in \{1, ..., t\}$ και

$$M = M(p_1) \oplus M(p_2) \oplus \cdots \oplus M(p_t),$$

όπου η εν λόγω αποσύνθεση τού $M$ στα ευθέα αθροίσματα των πρωτευουσών συνιστωσών του είναι μοναδική.

---------------------------------------------------

- **Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα. Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λάβει 2 μονάδες**.
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

---------------------------------------------------

# ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

[1] Εξ ορισμού, $M(p_j) := \left\{ x \in M \,\middle|\, p_j^n x = 0_M \text{ για κάποιον } n \in \mathbb{N} \right\}$.